arXiv:2303.01281v1 [math.OA] 2 Mar 2023

双变 K 理论的相对同调代数

GEORGE NADAREISHVILI

摘要。本文综述双变 K 理论中的相对同调代数，主要面向具备三角范畴背景知识的读者。我们简要回顾三角范畴中相对同调代数的一般理论，随后将其专门应用于非等变和等变双变 K 理论，其中 C*-代数上的作用由有限循环群给出。最后，我们明确计算了在 $\mathbb{Z}/4$ 通过自同构作用的可分 C*-代数的万有阿贝尔不变量。

1. 引言

给定一个局部紧豪斯多夫空间 X，可以考虑从 X 到复数且在无穷远处消失的连续函数所构成的代数。这一构造具有函子性，并在局部紧豪斯多夫空间范畴与交换 C*-代数范畴之间诱导出反变等价，其中态射需满足适当条件（例如参见 [26]）。因此，局部紧豪斯多夫空间的每一项性质都可以用函数代数来表述，而这种表述通常也可推广至任意（非交换）C*-代数。由此，C*-代数理论可以恰当地视为“非交换拓扑”。

与拓扑空间类似，非交换拓扑的核心内容是利用同调函子研究 C*-代数。然而，对于 C*-代数，在适度假设下，这类理论中存在一个普适对象。具体而言，根据 Higson [12], 的工作，存在一个普适范畴 $\mathfrak{RR}$，它接收一个从所有可分 C*-代数范畴出发的函子，使得任何取值于加性范畴、稳定、加性且保持分裂短正合列的函子都可以经由 $\mathfrak{RR}$分解。若赋予 C*-代数额外的结构，则类似的结论（针对 $\mathfrak{RR}$的适当版本）同样成立。这些范畴最初由 Genadi Kasparov [15] 利用 Fredholm 双模的泛函分析方法定义；其普适的范畴论刻画表明，这些范畴（亦称 Kasparov 范畴、双变 K 理论或 KK理论）是研究 C*-代数不可或缺的工具。

Kasparov 范畴作为同伦范畴，自然是三角范畴 [18]。三角范畴的技术已被证明对双变 K 理论卓有成效，最显著的应用是与分类纲领 [7, 8, 10, 19, 20, 22] 和 Baum–Connes 猜想 [18]相关的研究。

由格鲁吉亚 Shota Rustaveli 国家科学基金会资助，项目编号 FR-18-10849。GEORGE NADAREISHVILI，A. Razmadze 数学研究所，gnadare@gwdg.de。1

KK理论中的分类通常涉及应用相对同调代数的工具。其过程是通过函子性地将计算从三角范畴的定义域推至阿贝尔环境，在那里有更多工具可用于解决问题。这类结果包括（但不限于）用于导出函子计算的谱序列、泛系数定理，以及由此产生的子范畴分类。

第 2 节将回顾三角范畴中相对同调代数的已知事实。这一理论内容极其丰富，正如 J. Daniel Christensen [4] 和 Apostolos Beligiannis [1]最初对其进行研究时所展示的那样。

第 3 节将概述等变双变 K 理论的三角结构，并将第 2 节中发展的主题和方法应用于这一领域。Ralf Meyer 和 Ryszard Nest 在 [17, 19]中发展了双变 K 理论的相对同调代数。

最后，我们将通过明确计算循环群作用阶为 4 的 C*-代数 KK范畴的泛阿贝尔不变量，展示一个例子。

2. 三角范畴中的相对同调代数

本节回顾的事实可见于 [19] 和 [1]。

定义 2.1。 若一个加性范畴 $\mathfrak{A}$ 配备了一个自同构，则称其为稳定的

$$\Sigma_{\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}.$$

例如，给定一个阿贝尔范畴 $\mathfrak{A}$，我们可以构造一个 $\mathbb{Z}/k$-分次的（我们也允许 $k = 0$，通过定义 $\mathbb{Z}/0 := \mathbb{Z}$）稳定阿贝尔范畴 $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}/k}$，方法是考虑范畴积 $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}/k} = \prod_{i\in\mathbb{Z}/k} \mathfrak{A}$ 以及将对象（和态射）的第 i 个分量向左移动一位的悬挂函子 $\Sigma_{\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}/k}}$。

定义 2.2。 稳定同调函子 是一个取值于稳定阿贝尔范畴、且与悬挂函子交换的同调函子。

例如，对于从某个三角范畴 $\mathfrak{T}$ 到阿贝尔范畴 $\mathfrak{A}$ 的同调函子 $H\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$，我们可以通过定义构造一个稳定同调函子$H_*\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}_{\mathbb{Z}/k}$

$$H_*(A)_i = H_i(A) := H(\Sigma^{-i}_{\mathfrak{A}_{\mathbb{Z}/k}} X) \tag{2.1}$$

对于对象 $H_*(A) \in \mathfrak{A}_{\mathbb{Z}/k}$. 的第 i 个分量

非阿贝尔环境中的同调代数总是相对的；也就是说，需要额外的结构才能开始。对于三角范畴，这种结构可以通过固定一个态射类来给出。

定义 2.3. 对于三角范畴 $\mathfrak{T}$ 中的所有对象对 A, B，若存在一组子群 $\mathfrak{I}(A, B) \subseteq \mathfrak{T}(A, B)$, 使得

$$\mathfrak{T}(C, D) \circ \mathfrak{I}(B, C) \circ \mathfrak{T}(A, B) \subseteq \mathfrak{I}(A, D),$$

对于所有 $A, B, C, D \in \mathfrak{T},$，称其为 $\mathfrak{T}$ 中的一个理想 $\mathfrak{I}$。

注 2.4. 等价地，我们可以将 $\mathfrak{I}$ 视为确定正合三角的一个子类

$$A \to B \to C \xrightarrow{f} \Sigma A$$

满足 $f \in \mathfrak{I}(C, \Sigma A)$ 的三角。这些在 [1] 中称为纯三角（下文称为 $\mathfrak{I}$-正合三角）。对于熟悉外三角范畴的读者，需要指出的是，在温和的假设下，纯三角构成一个外三角子范畴，而此时将 $\mathfrak{T}$ 本身视为一个外三角范畴 [13]。

作为理想的一个例子，考虑一个取值于阿贝尔范畴 $\mathfrak{A}$. 的同调函子 $H\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$ 。那么 H 在态射上的核

$$\ker H(A,B) = \{f \in \mathfrak{T}(A,B) \mid F(f) = 0\}$$

显然定义了 $\mathfrak{T}$ 中的一个理想。

定义 2.5。 若理想 $\mathfrak{I}$ 是某个稳定同调函子的核，则称其为同调的 。

不同的函子可能通过具有相同的核而导出同一个同调理想。不过，所得的同调代数只取决于理想本身。

我们只讨论同调理想。作为核的元素， $\mathfrak{I}$ 中的态射可以看作相对于 $\mathfrak{I}$ 在 $\mathfrak{T}$ 中消失。将同调函子应用于 $\ker H = \mathfrak{I}$ ，便可解释以下术语。

定义 2.6. 我们称正合三角

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} \Sigma A$$

$\mathfrak{I}$-正合 于 $\mathfrak{T}$，如果 $h \in \mathfrak{I}(C,\ \Sigma A)$。在这种情况下， f 称为 $\mathfrak{I}$-单态 ，而 g 称为$\mathfrak{I}$-满态。

设 $\mathfrak{I} = \ker H$ 为一个同调理想。

定义 2.7. 我们称 $\mathfrak{T}$ 中的链复形 $C_\bullet = (C_n,\ d_n)$在次数 n 上 $\mathfrak{I}$-正合 ，如果

$$H(C_{n+1}) \xrightarrow{H(d_{n+1})} H(C_n) \xrightarrow{H(d_n)} H(C_{n-1})$$

在 $H(C_n)$处正合。

如果链复形在每个次数上都是 $\mathfrak{I}$-正合的，我们就称它为 $\mathfrak{I}$-正合。

2.1. **相对投射对象**。

定义 2.8。 同调函子 $H\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$ 称为 $\mathfrak{I}$-正合，如果 $\mathfrak{I} \subseteq \ker H$；也就是说，对于所有 $f \in \mathfrak{I}(A,B)$，都有 $H(f) = 0$。

与阿贝尔范畴类似，我们定义

定义 2.9。 若函子 $\mathfrak{T}(A, -)$ 是 $\mathfrak{I}$-正合的，则称对象 $A \in \mathfrak{T}$ 为 $\mathfrak{I}$-投射的。

令 $\mathfrak{P}_\mathfrak{I}$ 表示 $\mathfrak{T}$ 中 $\mathfrak{I}$-投射对象构成的全子范畴。 $\mathfrak{P}_\mathfrak{I}$ 对悬挂、反悬挂、收缩以及 $\mathfrak{T}$ 中存在的任意余积封闭。

有了投射对象的候选对象后，我们接下来将类比阿贝尔情形构造同调代数。

定义 2.10. 设 $\mathfrak{I}$ 是 $\mathfrak{T}$ 和 $A \in \mathfrak{T}$中的一个同调理想。若 π 是 $\mathfrak{I}$-满射且 $P \in \mathfrak{P}_\mathfrak{I}$，则称$\pi\colon P \to A$ 为一个一步 $\mathfrak{I}$-投射分解。 A 的一个$\mathfrak{I}$-投射分解是一个 $\mathfrak{I}$-正合链复形

$$\cdots \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to A$$

其中 $P_n \in \mathfrak{P}_\mathfrak{I}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立。

如果每个对象 $A \in \mathfrak{T}$都有一个一步 $\mathfrak{I}$-投射分解，我们就称 $\mathfrak{T}$ 中有足够的 $\mathfrak{I}$-投射对象 。

相对投射对象享有与阿贝尔范畴中的投射对象相似的性质。

命题 2.11 (Meyer-Nest [19, 命题 3.26])。 $\mathfrak{T}$ 中的每个对象都有$\mathfrak{I}$-投射分解，当且仅当 $\mathfrak{T}$ 有足够多的 $\mathfrak{I}$-投射对象。

$\mathfrak{T}$ 中对象之间的任意映射都可以提升为这些对象的 $\mathfrak{I}$-投射分解之间的链映射，并且这种提升在链同伦意义下是唯一的。同一对象的两个$\mathfrak{I}$-投射分解是链同伦等价的。

这使得我们可以像经典情形中那样定义导出函子。设 $F\colon\ \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$是到阿贝尔范畴 $\mathfrak{A}$中的一个加性函子。记 $\mathfrak{Ho}(\mathfrak{T})$和 $\mathfrak{Ho}(\mathfrak{A})$分别为 $\mathfrak{T}$ 和 $\mathfrak{A}$的链复形模链同伦范畴。逐项应用 F于链复形，诱导出一个函子 $\mathfrak{Ho}(F)\colon\ \mathfrak{Ho}(\mathfrak{T}) \to \mathfrak{Ho}(\mathfrak{A})$。根据命题 2.11，构造投射分解定义了一个函子$P\colon\ \mathfrak{T} \to \mathfrak{Ho}(\mathfrak{T})$。记 $\mathrm{H}_n\colon\ \mathfrak{Ho}(\mathfrak{A}) \to \mathfrak{A}$ 为 $n \in \mathbb{N}$的第 n个同调函子。

定义 2.12。 对于加性函子 $F\colon\ \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$，复合

$$\mathbb{L}_n F\colon \mathfrak{T} \xrightarrow{P} \mathfrak{Ho}(\mathfrak{T}) \xrightarrow{\mathfrak{Ho}(F)} \mathfrak{Ho}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathrm{H}_n} \mathfrak{A}$$

称为 F 的第 n 个左导出函子。

若 $F\colon\ \mathfrak{T}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{A}$ 现在是一个反变加性函子，则复合

$$\mathbb{R}^n F\colon \mathfrak{T}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{P} \mathfrak{Ho}(\mathfrak{T}) \xrightarrow{\mathfrak{Ho}(F)} \mathfrak{Ho}(\mathfrak{A}) \xrightarrow{\mathrm{H}^n} \mathfrak{A}$$

称为 F 的第 n 个右导出函子。

相对导出函子与其阿贝尔范畴中的对应物具有许多相似性质。甚至存在一个谱序列，将同调函子与其相对导出函子联系起来。我们不打算讨论这一一般构造。这里只回顾万有系数定理的遗传情形，此时谱序列退化为短正合列。

用 $\mathfrak{h}\mathfrak{P}_{\mathfrak{I}}\mathfrak{i} \subseteq \mathfrak{T}$ 表示由 $\mathfrak{I}$-投射对象 $\mathfrak{P}_{\mathfrak{I}}$ 生成的子范畴；也就是说，它是对 $\mathfrak{T}$ 中存在的任意余积封闭的三角子范畴。

定理 2.13 (Meyer-Nest [19, 定理 4.4])。 设 $\mathfrak{I}$ 是三角范畴 $\mathfrak{T}$. 中的一个同调理想。设 $A \in \mathfrak{T}$ 有一个长度为一的 $\mathfrak{I}$-投射分解。˜此外，假设 $A \in \langle \mathfrak{P}_{\mathfrak{I}} \rangle$。设 $F\colon\ \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$ 是一个同调函子，且 $F\colon\ \mathfrak{T}^{\mathrm{op}} \to \mathfrak{A}$ 是一个上同调函子。那么存在自然的短正合列

$$0 \to \mathbb{L}_0 F(A) \to F(A) \to \mathbb{L}_1 F(\Sigma A) \to 0$$

$$0 \to \mathbb{R}^1 \tilde{F}(\Sigma A) \to \tilde{F}(A) \to \mathbb{R}^0 \tilde{F}(A) \to 0$$

˜注记 2.14。 例如，如果我们对任意 $B \in \mathfrak{T}$ 取 $F = \mathfrak{T}(-, B)$，并记作˜$\mathbf{Ext}^n_{\mathfrak{T},\mathfrak{I}} := \mathbb{R}^n F$，那么在定理 2.13 的假设下，我们得到短正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{T},\mathfrak{I}}(\Sigma A, B) \to \mathfrak{T}(A, B) \to \mathrm{Ext}^0_{\mathfrak{T},\mathfrak{I}}(A, B) \to 0. \tag{2.2}$$

2.2. **泛 $\mathfrak{I}$正合函子。** 根据 Peter Freyd 的经典构造 [11]，任意三角范畴都存在一个到有限表示函子构成的阿贝尔范畴中的泛同调函子 U，使得任何其他同调函子都唯一地经由 U 一个阿贝尔范畴之间的正合函子分解（该函子在自然同构意义下唯一）。

值得注意的是，这一陈述的相对版本也成立。

定义 2.15. 一个 $\mathfrak{I}$-正合同调函子 F 称为泛的，如果任意其他 $\mathfrak{I}$-正合同调函子 $G\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}'$ 都可分解为 $G = G \circ F$，其中包含一个正合函子$G\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'$，且该分解在自然同构意义下唯一。

定理 2.16 (Beligiannis [1, 节 3])**.** 对于三角范畴 $\mathfrak{T}$中的每个同调理想 $\mathfrak{I}$，都存在一个阿贝尔范畴 $\mathcal{A}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{T})$ 以及一个泛$\mathfrak{I}$-正合稳定同调函子 $F\colon \mathfrak{T} \to \mathcal{A}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{T})$。

在不存在集合论方面问题的情况下，范畴 $\mathsf{A}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{T})$ 可通过将有限表示函子范畴在该 Serre 子范畴处局部化得到；在该子范畴中，我们将所有来自理想 $\mathfrak{I}$的态射取商。

在较宽松的假设下，普适的 $\mathfrak{I}$-正合 homological functor 将目标阿贝尔范畴中的同调代数与定义域三角范畴中的 $\mathfrak{I}$-相对同调代数对应起来，并允许利用普适阿贝尔范畴中的导出函子计算相对导出函子。更确切地说，有以下结果。

定理 2.17 （Beligiannis [1, 命题 4。19]）。 设 $\mathfrak{I}$ 是三角范畴 $\mathfrak{T}$ 中的一个同调理想，且 $F\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$ 是一个映入阿贝尔范畴 $\mathfrak{A}$的普适 $\mathfrak{I}$-正合同调函子。假设 $\mathfrak{T}$ 中的幂等态射均可分裂，并且 $\mathfrak{T}$中有足够多的 $\mathfrak{I}$-投射对象。那么 $\mathfrak{A}$ 中有足够多的投射对象，并且 F 在 $\mathfrak{T}$ 中的 $\mathfrak{I}$-投射对象构成的全子范畴与 $\mathfrak{A}$中的投射对象构成的全子范畴之间诱导出一个等价。

定理 2.18 （Meyer-Nest [19, 定理 3。41]）。 设 $\mathfrak{I}$ 是三角范畴 $\mathfrak{T}$ 中的一个同调理想，且 $F\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$ 是一个映入阿贝尔范畴 $\mathfrak{A}$的普适 $\mathfrak{I}$-正合（稳定）同调函子。假设 $\mathfrak{T}$ 中的幂等态射均可分裂，并且 $\mathfrak{T}$中有足够多的 $\mathfrak{I}$-投射对象。若 $G\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}'$ 是任意一个（稳定）$^{-}$同调函子，则存在唯一的右正合（稳定）函子 $G\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}'^{r}$，使得对所有 $P \in \mathfrak{P}_{\mathfrak{I}}$都有 $G \circ F(P) = G(P)$。

*(G 关于导出函子通过自然 $^{-}$同构 $\mathbb{L}_n G \circ F(A) = \mathbb{L}_n G(\bar{A})$ </style}*对所有 $A \in T$、$n \in \mathbb{N}$均成立。对于上同调函子也有类似的陈述，它具体化为自然同构

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{T},\mathfrak{I}}(A, B) \cong \mathrm{Ext}^n_{\mathfrak{A}}(F(A), F(B)).$$

注记 2.19。 鉴于定理 2.18，一旦我们得到一个普遍的 $\mathfrak{I}$-正合同调函子 $F\colon \mathfrak{T} \to \mathfrak{A}$，在定理 2.13 的假设下，正合序列 (2.2) 具有如下形式

$$0 \to \mathrm{Ext}^1_{\mathfrak{A}}(F(\Sigma A), F(B)) \to \mathfrak{T}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{A}}(F(A), F(B)) \to 0.$$

2.3. **通用 $\mathfrak{I}$-精确函子的一个例子。**现在，我们为自己构造一个最相关的通用 $\mathfrak{I}$-精确稳定同调函子的例子。

在一个具有可数余积的三角范畴 $\mathfrak{T}$ 中，固定一个至多可数的对象集 C。记 $\mathfrak{I}_{\mathcal{C}}$ 为由以下函子的核定义的同调理想

$$F_{\mathcal{C}} : \mathfrak{T} \to \prod_{C \in \mathcal{C}} \mathfrak{Ab}^{\mathbb{Z}}, \qquad A \mapsto \big(\mathfrak{T}(C, A)\big)_{C \in \mathcal{C}}.$$

假设对于所有 $A \in \mathfrak{T}$， $F_{\mathcal{C}}(A)$ 都是可数的。

令 $\mathfrak{C}$ 表示 $\mathfrak{T}$ 在对象 C 上的一个 $\mathbb{Z}$ 分次预加性全子范畴。用 $\mathfrak{Mod}(\mathfrak{C}^{\mathrm{op}})_{\mathrm{c}}$ 表示取值可数的函子范畴 $\mathsf{Funct}(\mathfrak{C}^{\mathrm{op}}, \mathfrak{Ab}^{\mathbb{Z}})_{\mathrm{c}}$，或者等价地，表示 $\mathfrak{C}$ 的范畴环$R^{\mathfrak{C}}$ 上的可数分次右模范畴。于是，将 $F_{\mathcal{C}}$ 丰化为函子

$$F_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{T} \to \mathfrak{Mod}(\mathfrak{C}^{\mathrm{op}})_{\mathrm{c}},$$

其中 $\big(\mathfrak{T}(C, A)\big)_{C \in \mathfrak{C}}$ 上的右 $\mathfrak{C}$-模结构来自 $\mathfrak{T}$ 中态射的复合，这就是泛 $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$-正合稳定同调函子 [20, 定理 4.4]。

3. Universal invariants for bivariant K-theory

接下来，我们将展示相对同调代数在非交换拓扑中的两个应用实例。

这两个例子都是将 KK 理论视为一个范畴，其中一个例子还具有额外结构。KK 理论是拓扑K理论与非交换空间 K同调的共同推广。不过，考虑到读者群体，我们将采用相当非传统的方式来定义所讨论的范畴：使用引言中提到的泛性质，而非更传统的 Fredholm双模图景。

定义 3.1。A C^*-代数 A 是一个以复数为底的巴拿赫代数，并带有一个共轭线性自同构 $^*\colon A \to A$，称为对合，使得 $(ab)^* = b^*a^*$，$(a^*)^* = a$，且 $\|a^*a\| = \|a^*\|\|a\|$，对所有 $a,\ b \in A$均成立。

保持对合的 C*-代数环同态称为 *-同态。

我们用 $\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg}$ 表示以 C*-代数为对象、以 *-同态为箭头的范畴。

设 G 是一个局部紧群。

定义 3.2。A G-C^*-代数 A 是 G 到 $\mathsf{Aut}(A)$ 的强连续表示，其中 $G \to$ 为 *-自同构。

我们用 G-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg}$ 表示这样一个范畴：其对象为 G-C*-代数，箭头为 G 等变 *-同态。若 G 是平凡群，则可恢复范畴 $\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg}$，因此只需陈述等变情形的定义。关于 C*-代数范畴的基本性质，请参见 [5] 和 [16]。

与环的情形一样， G-C*-代数的扩张 是一个与 $I \to A \to A/I$ 在 G-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg}$ 中同构的图，其中 I 是某个 G-C*-代数 A中的 G-不变理想。若一个扩张在 G-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg}$中有截面，我们就称它为分裂的。

设 $\mathfrak{A}$ 表示一个正合范畴。若 $\mathfrak{A}$ 起初仅是加性的，我们可以赋予它平凡的正合范畴结构，使所有扩张都分裂。

定义 3.3。若函子 $F\colon G$-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg} \to \mathfrak{A}$ 对任意带有截面 $s\colon C \to B$ 的分裂扩张 $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C$，其映射 $\big(F(i)\ F(s)\big)\colon F(A) \oplus F(C) \to F(B)$ 都是同构，则称该函子为 分裂正合。

我们还将使用 C*-稳定性的定义。为此，我们需要在 G-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg}$ 上定义幺半结构。不过，这里不对此作出定义。我们只指出，G-C*-代数 A 和 B 的代数张量积有两种合理的完备化方式，分别称为最小张量积和最大张量积。然而，对于一大类 C*-代数，这两种构造是一致的；在这种情况下，我们将使用记号 $A \otimes B$（详情见 [21] 和 [24]）。

在非等变情形下，对 C*-稳定性的定义更直观。

定义 3.4. 对于紧算子上$\ell^2\mathbb{N}$中的秩一投影 $p \in \mathbb{K}(\ell^2\mathbb{N})$，由 $i(a) = a \otimes p$ 给出的嵌入 $i\colon A \to A \otimes \mathbb{K}(\ell^2\mathbb{N})$，称为 A的角嵌入。

若任意角嵌入都会诱导同构 $F(A) \cong F\big(A \otimes \mathbb{K}(\ell^2\mathbb{N})\big)$，则称函子 $F\colon \mathfrak{C}^*\mathfrak{alg} \to \mathfrak{A}$ 为*C**-稳定的*。

C*-稳定性在等变情形下的适当推广如下：

定义 3.5。给定任意非零 G-Hilbert 空间 $\mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{H}_2 \leftarrow \mathrm{H}_2$, 一个函子 $F\colon G\text{-}\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg} \to \mathfrak{A}$ 若其诱导出同构，则称为*C**-稳定的*

$$F\big(A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}_1)\big) \xrightarrow{\cong} F\big(A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)\big) \xleftarrow{\cong} F\big(A \otimes \mathbb{K}(\mathcal{H}_2)\big).$$

现在我们可以给出 KK 理论的一个范畴论普适定义。出于技术原因，我们将注意力限制在 可分的 G-C*-代数的一个全子范畴 G-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{sep}$ $\subseteq G$-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg}$ 上：具有可数稠密子集的等变 C*-代数。

定理 3.6（Higson [12, 定理 4。5]）。存在加性范畴 $\mathfrak{KK}^G$以及普适的分裂正合 *C**-稳定函子KK^G：　G-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{sep} \to \mathfrak{KK}^G$.

换言之，任意 C*-稳定且分裂正合的函子 F：　G-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{alg} \to \mathfrak{A}$ 都将唯一地通过 $\mathfrak{KK}^G$ 分解。

注 3.7. 当然，存在性和泛性质将 $\mathfrak{KK}^G$ 定义到范畴论等价的意义下。我们不需要 $\mathfrak{KK}^G$. 最初那个公认更实用的定义。我们只指出， $\mathfrak{KK}^G$ 的对象与 G-$\mathfrak{C}^*\mathfrak{sep}$ 的对象相同，即可分的 G-C*-代数；态射具体描述为 G-等变 Kasparov 群 $\mathfrak{KK}^G(A, B) = \mathrm{KK}_0^G(A, B)$，其中 $A, B \in \mathfrak{C}^*\mathfrak{sep}$. 。复合由所谓的 *Kasparov* 乘积。给出。对于有兴趣进一步了解 KK 理论的读者，我们推荐教科书资料，例如 [2] ，以及 Genadi Kasparov 的原始论文 [15]。

3.1. **三角结构**。如前所述，范畴 $\mathfrak{KK}^G$ 是加性的。余积由 G-C*-代数的直和给出。

考虑函子

$$\Sigma\colon \mathfrak{KK}^G \to \mathfrak{KK}^G \qquad A \mapsto C_0(\mathbb{R}) \otimes A.$$

作为 Raul Bott 一项卓越定理的推论，KK^G （因而任何 C*-稳定且分裂正合的函子）都满足 Bott 周期性，也就是说，在 $\mathfrak{KK}^G$ 中，对于所有 $A \in \mathfrak{KK}^G$，都有自然同构 $\Sigma^2(A) \cong A$ 。因此， Σ 在自然同构意义下是一个自同构，故 $\mathfrak{KK}^G$ 是稳定的。我们将Σ称为悬挂。

现在设 $A \to B \to C$ 是 G-C*-代数的一个扩张。如果存在一个 G-等变、完全正（见 [5]）且压缩的截面$C \to B$，则称此扩张为完全正分裂 。

类比拓扑空间，态射 $A \xrightarrow{f} B$ between$G$-C*-代数的锥定义为

$$\mathrm{cone}(f) := \{(a,b) \in A \times C_0((0,1], B) \mid f(a) = b(1)\}.$$

对于每个完全正分裂扩张 $A \to B \to C$，其中 A，B，C可分 G-C*-代数，存在唯一的 G-等变映射 $\Sigma C \to A$ 以及同构 $A \xrightarrow{\cong} \mathrm{cone}(B \to C)$ in $\mathfrak{KK}^G$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccccccc} \Sigma C & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \\ \| & & \downarrow\cong & & \| & & \| \\ \Sigma C & \longrightarrow & \mathrm{cone}(B \to C) & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \end{array}$$

上图中的第一行称为完全正分裂扩张 $A \to B \to C$的 G-等变扩张三角。

现在，将 $\mathfrak{KK}^G$ 中的所有与某个完全正分裂扩张的扩张三角同构的四项图定义为 $\mathfrak{KK}^G$中的正合三角。这样， $\mathfrak{KK}^G$ 就成为一个三角范畴。然而，我们面临着记号问题。按照构造，映射锥三角的形式为

$$\Sigma C \to \mathrm{cone}(f) \to B \xrightarrow{f} C,$$

因此，这些箭头的方向与三角范畴的既定约定相反。这是因为从局部紧空间到C*-代数的函子 $X \to C_0(X)$ 是反变的。不过，这实际上并不是问题，因为通常情况下， $\mathfrak{T}^{\mathrm{op}}$ 会从 $\mathfrak{T}$ 规范地继承三角结构，而且在我们的情形中， $\Sigma \cong \Sigma^{-1}$ 。

关于 $\mathfrak{KK}^G$ 中三角结构的更多细节，可见 [18]。

注 3.8. $\mathfrak{KK}^G$ 只包含可数余积。因此，在接下来的小节中，我们谈到局部化子范畴时，实际指的是 [6]，中所说的局部化$\aleph_1$子范畴，也就是对可数余积封闭的三角子范畴。

3.2. 自举类示例。 我们首先注意到， $\mathfrak{KK}^G$ 中的态射集与 K 理论密切相关。对于紧群 G，记 K_0^G 为 G-等变拓扑K理论。将 Atiyah-Segal 的 G-等变拓扑空间向量丛 K 上同调加以推广，对于任意 G-C*-代数 A，都有自然同构 [2]

$$\mathfrak{KK}^G(\mathbb{C}, A) = \mathrm{KK}_0^G(\mathbb{C}, A) \cong \mathrm{K}_0^G(A). \tag{3.1}$$

因此，非交换拓扑面临的自然挑战是利用 K-理论不变量计算 KK 群。在这一背景下，最著名的结果或许是 Rosenberg 和 Schochet 的万有系数定理 [23]。我们将尝试用相对同调代数来描述这一定理。

根据 (2.1)，我们定义

定义3.9。

$$\mathrm{KK}_n^G(A, B) := \mathrm{KK}_0^G(A, \Sigma^n(B))$$

因此，根据（3.1），也有 $\mathrm{K}_n^G(B) \mathrel{..}= \mathrm{K}_0^G(\Sigma^n(B))$。由于 $\Sigma^2 \cong \mathrm{Id}$，我们在这两种情况下都得到一个 $\mathrm{a}\mathbb{Z}/2$-分次阿贝尔理论。

在本小节接下来的内容中，我们假设 G 是平凡的。因此，这里是非等变情形，我们将可分 C*-代数的万有分裂正合、C*-稳定范畴简记为 $\mathfrak{KK}$ 。

接下来，我们需要将范围限制到 $\mathfrak{KK}$中的一个更小的 C*-代数子范畴。

定义 3.10. 自举类 $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{KK}$ 是 $\mathfrak{KK}$ 中由对象 $\mathbb{C} \in \mathfrak{KK}$生成的局部化三角子范畴；也就是说，$\mathfrak{B} = \mathrm{h}\mathbb{C}\mathrm{i}$。

另一种等价的自举类刻画方式是：所有与 $\mathfrak{KK}$中的交换 C*-代数同构的可分 C*-代数。这个类很大，算子代数学家在日常工作中遇到的大多数可分 C*-代数实际上都属于 $\mathfrak{B}$。

现在，固定生成元复数作为单个对象 $\mathbb{C} \in \mathfrak{B}$ ，并考虑一个 $\mathbb{Z}/2$-分次可表函子

$$\mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, B) = \big(\mathrm{KK}_0(\mathbb{C}, B), \mathrm{KK}_1(\mathbb{C}, B)\big) \cong \big(\mathrm{K}_0(B), \mathrm{K}_1(B)\big) = \mathrm{K}_*(B)$$

到 $\mathfrak{Ab}_{\mathrm{c}}^{\mathbb{Z}/2}$，以保次数同态为态射的 $\mathbb{Z}/2$-分次可数阿贝尔群范畴中。这里的可数性条件源于我们只考虑可分 C*-代数。

在第 2.3 小节的记号中，我们取了 $\mathfrak{C} = \{\mathbb{C}\}$，因此按定义有 $\mathfrak{Mod}_{\mathrm{c}}^{\mathbb{Z}/2}\mathfrak{C}^{\mathrm{op}} \cong \mathfrak{Ab}_{\mathrm{c}}^{\mathbb{Z}/2}$。于是，我们得到 K 理论函子

$$\mathrm{K}_* \colon \mathfrak{B} \longrightarrow \mathfrak{Ab}_{\mathrm{c}}^{\mathbb{Z}/2} \qquad A \mapsto \mathrm{KK}_*(\mathbb{C}, \text{-})$$

它是普适稳定的 $\ker\mathrm{K}_*$-正合函子。因此，由定理 2.18 可知，相对导出函子可以利用遗传阿贝尔范畴$\mathfrak{Ab}_{\mathrm{c}}^{\mathbb{Z}/2}$. 中的通常导出函子来计算。因此，根据定理 2.13 和注 2.19，我们推导出著名的万有系数定理：

定理 3.11 (Rosenberg-Schochet [23])。 设 A 是一个可分的C*-代数。则对于 $A \in \mathfrak{B}$, 存在一个由 $\mathbb{Z}/2$分次的阿贝尔群的短正合列

$$\mathrm{Ext}^1\big(\mathrm{K}_{*+1}(A), \mathrm{K}_*(B)\big) \rightarrowtail \mathfrak{KK}_*(A, B) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}\big(\mathrm{K}_*(A), \mathrm{K}_*(B)\big)$$

对每个 $B \in \mathfrak{KK}$均成立。

注记 3.12。 该定理的逆命题也成立，即 $A \in \mathfrak{B}$ 当且仅当对于每个 $B \in \mathfrak{KK}$都存在该短正合列。有时也用此来定义自举类。

万有系数定理非常有用，因为它允许利用自举类中的 C*-代数的 K 理论来计算 KK 群。这广泛应用于 C*- 代数的分类纲领，甚至应用于不同三角子范畴的分类，例如 [7, 10, 22] 中的情形。

3.3. **有限群的作用**。 现在我们将给出一个例子，说明当 $\mathfrak{C}$ 的范畴环不是遗传的情况下，需要进行一些计算才能确定通用不变量。

在本小节中，设 G 是一个有限群。和之前一样，研究整个 $\mathfrak{KK}^G$ 过于复杂，因此我们将注意力限制在较小的 G-C*-代数子类上。正确的等变自举类定义如下 [9]。

定义 3.13。 如果一个 G-C*-代数 A 具有如下形式，则称其为初等的

$$\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{M}_n\mathbb{C} = \{G \xrightarrow{f} \mathbb{M}_n\mathbb{C} \mid hf(xh) = f(x) \text{ for any } x \in G \text{ and } h \in H\}$$

带有 G-作用 $(gf)(x) := f(g^{-1}x)$， $g,\ x \in G$，对于某个子群 $H \subseteq G$ 以及 H 在 $n \times n$ 矩阵代数 $\mathbb{M}_n\mathbb{C}$上的某个自同构作用。

定义 3.14。 G-等变自举类 $\mathfrak{B}^G \subset \mathfrak{KK}^G$ 是由 $\mathfrak{KK}^G$中的基本 G-C*-代数生成的局部化三角子范畴，即

$$\mathfrak{B}^G = \langle \mathrm{Ind}_H^G \mathbb{M}_n\mathbb{C} \mid \text{ For all } H \subseteq G \text{ actions on } \mathbb{M}_n\mathbb{C} \rangle.$$

与 $\mathfrak{B}$相反，等变自举类严格大于 $\mathfrak{KK}^G$中所有同构于交换 G-C*-代数的 G-C*-代数。后者在等变情形下限制性过强，因为它甚至不是一个厚子范畴。另一方面，$\mathfrak{B}^G$ 如上所定义相当大，因为它等价于所有在 $\mathfrak{KK}^G$ 中同构于某个 G-作用于 I 型 C*代数上的 G-C*-代数（关于 I 型的定义，例如参见 [2] 或 [5]）。

根据 Skolem-Noether 定理，复矩阵代数的每个自同构都是内自同构，因此 $\mathrm{Aut}(\mathbb{M}_n\mathbb{C}) \cong \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\mathrm{I}_n$。因此， $H \subseteq G$ 在 $\mathbb{M}_n\mathbb{C}$上的每个自同构作用都来自某个 n 维射影表示

$$H \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})/\mathbb{C}\mathrm{I}_n,$$

而射影表示又由 $\mathrm{H}^2(H,\mathrm{U}(1))$ [14] 中的一个上同调类分类。两个在 $\mathbb{M}_n\mathbb{C}$ 上的作用在 $\mathfrak{KK}^G$ 中同构，当且仅当它们在 $\mathrm{H}^2(H,\mathrm{U}(1))$. 中属于同一个类。对于有限群，二阶上同调也是有限的 [14], 因此，生成 $\mathfrak{B}^G$ 的初等 C*-代数有有限种选择（每个射影表示的上同调类对应一种）。

3.3.1. 有限循环群的作用。 现在我们进一步假设 $G = C_k$, 为阶数为 k 的循环群。众所周知，对于 $H \subseteq C_k$, [14] 不存在非平凡的射影表示，因此 $\mathrm{Ind}_H^{C_k} \mathbb{C} = C(C_k/H)$ 足以生成 $\mathfrak{B}^{C_k}$。

注记 3.15。 一般来说，对于子群 $H \subseteq G$，将G-C*-代数 $\mathrm{Ind}_H^G A$ 赋给 H-C*-代数 A 的构造具有函子性。它是函子 Res_H^G: $\mathfrak{KK}^G \to \mathfrak{KK}^H$的左伴随；该函子将 G作用限制到 H。因此，在计算由 $\mathfrak{B}^{C_k}$的生成元表示的 Yoneda 函子时，根据 (3.1) 可得一个等变 K 理论

$$\mathrm{KK}^G(C(G/H), A) = \mathrm{KK}^G(\mathrm{Ind}_H^G \mathbb{C}, A) \cong \mathrm{KK}^H(\mathbb{C}, \mathrm{Res}_H^G A) \cong \mathrm{K}_0^H(\mathrm{Res}_H^G A).$$

按照 2.3 小节，为了应用相对同调代数的工具，我们想要计算对象为.....的全子范畴 $\mathfrak{C}^{C_k} \subset \mathfrak{KK}^{C_k}$ 的范畴环 R^{C_k}

$$\{C(C_k/H) \mid H \subseteq C_k\}.$$

细心的读者可能已经注意到，这看起来正是 Mackey 理论的定义域（关于 Mackey 函子，请参阅 [3] ，或参阅较短的指南 [25]）。事实确实如此，下面的计算完全属于 Ivo Dell'Ambrogio 的

著作 [8]。展开说明 [8, 定理 4.9] 并将其调整为环论约定后，我们发现， $\mathfrak{C}^{C_k}$ 的范畴环 R^{C_k} 由以下形式的箭头生成

$$\begin{aligned} r_L^H &: C(C_k/H) \to C(C_k/L), \\ i_L^H &: C(C_k/L) \to C(C_k/H), \\ c_g^H &: C(C_k/H) \to C(C_k/H), \\ m_\chi^H &: C(C_k/H) \to C(C_k/H), \end{aligned}$$

对所有 $L \subseteq H \subseteq C_k$， $g \in C_k$ 以及复群表示 $\chi \in \mathrm{Rep}(H)$ of$H$。它们依次称为限制、诱导、共轭、乘法，并满足以下关系。

前六条是 Mackey 理论中的著名关系。设 $H \subseteq C_k$。

(i) $r_H^H = i_H^H = 1_{C(C_k/H)}$， (ii) $c_h^H = 1_{C(C_k/H)}$，若 $h \in H$，(iii) $r_L^K \circ r_K^H = r_L^H$，且 $i_K^H \circ i_L^K = i_L^H$ 对于 $L \subseteq K \subseteq H$，(iv) $c_g^H \circ c_h^H = c_{hg}^H$，对于任意 g， $h \in C_k$，(v) $c_g^K \circ r_K^H = r_K^H \circ c_g^H$ 且 $i_K^H \circ c_g^K = c_g^H \circ i_K^H$ 对于 $K \subseteq H$，(vi) $r_K^H \circ i_L^H = \sum_{g \in [L\backslash H/K]} i_{L\cap K}^K \circ c_g^{L\cap K} \circ r_{L\cap K}^L$ 对于 L， $K \subseteq H$.

接下来是涉及表示的乘法、加法、限制和共轭的两个关系。设 χ 是 H 的一个复群表示。

(vii) $m_\chi^H \circ m_\psi^H = m_{\chi\psi}^H$， $m_\chi^H + m_\psi^H = m_{\chi+\psi}^H$，以及 $m_\tau^H = 1_{C(C_k/H)}$，对每个 H 的复表示 ψ 以及 H 的平凡表示 τ 均成立。(viii) $m_{\chi|_L}^L \circ r_L^H = r_L^H \circ m_\chi^H$，其中 $L \subseteq H$，(ix) $c_g^H \circ m_\chi^H = m_\chi^H \circ c_g^H$.

最后，我们有所谓的弗罗贝尼乌斯同构。它们体现了麦基函子上的环结构。

(x) $m_\chi^H \circ i_L^H = i_L^H \circ m_{\chi|_L}^L$，其中 $L \subseteq H$，(xi) $i_L^H \circ m_\chi^L \circ r_L^H = m^H_{\mathrm{ind}_L^H \chi}$，其中 $L \subseteq H$，其中 $\mathrm{ind}_L^H \chi$ 表示将 χ 诱导到 H 上的诱导表示。

3.3.2. 群 C_4的作用。具有非平凡子群结构的第一个循环群是 $C_4 = \{e,\ a,\ a^2,\ a^3\}$。

唯一的非平凡子群是 $\mathbf{h}a^2\mathbf{i} \subseteq C_4$，因此等变自举类 $\mathfrak{B}^{C_4}$ 有三个生成元$C(C_4/\{e\}) = C(C_4)$ $C(C_4/\mathbf{h}a^2\mathbf{i})$ 和 $C(C_4/C_4) = \mathbb{C}$。

C_4 有三个非平凡的一维复表示 $\chi^{C_{4_\mathrm{i}}}$ $\chi_{-1}^{C_4} = (\chi^{C_{4_\mathrm{i}}})^2$ 以及 $\chi_{-}^{C_{4_\mathrm{i}}} = (\chi^{C_{4_\mathrm{i}}})^3$。这里，下标表示生成元 $a \in C_4$ 在 $\mathbb{C}$中的像。 $\chi^{C_{4_\mathrm{i}}}$ 和 $\chi_{-}^{C_{4_\mathrm{i}}}$ 限制到子群 $\mathbf{h}a^2\rangle$ 的唯一非平凡表示，我们将其记作 $\chi^{\langle a^2\rangle}$。

根据关系 (i) 至 (iv) 以及关系 (vii)，范畴环 R^{C_4} 的十一个生成元为

$$\Gamma = \left\{1_{C(C_4)},\ c_a^{\{e\}},\ i_{\{e\}}^{\langle a^2\rangle},\ r_{\{e\}}^{\langle a^2\rangle},\ 1_{C(C_4/\langle a^2\rangle)},\ c_a^{\langle a^2\rangle},\ m^{\langle a^2\rangle},\ i_{\langle a^2\rangle}^{C_4},\ r_{\langle a^2\rangle}^{C_4},\ 1_{\mathbb{C}},\ m_{\mathrm{i}}^{C_4}\right\}.$$

下文说明这些生成元如何作用。

$$C(C_4) \underset{r^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}}{\overset{i^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}}{\rightleftarrows}} C(C_4/\langle a^2\rangle) \underset{r^{C_4}_{\langle a^2\rangle}}{\overset{i^{C_4}_{\langle a^2\rangle}}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}$$

$1_{C(C_4)},\ c_a^{\{e\}}$ 在 $C(C_4)$ 上；$1_{C(C_4/\langle a^2\rangle)},\ c_a^{\langle a^2\rangle},\ m^{\langle a^2\rangle}$ 在 $C(C_4/\langle a^2\rangle)$ 上；$1_{\mathbb{C}},\ m_{\mathrm{i}}^{C_4}$ 在 $\mathbb{C}$ 上。

由于 R^{C_4} 是一个范畴环，根据定义，我们有

(0) 对所有 $x,\ y\in\Gamma$，若 x 和 y 在 $\mathfrak{C}$中不可复合，则 $xy=0$。

关系 (ii)、(iv) 和 (vii) 表明

(1) $(c_a^{\{e\}})^4=1_{C(C_4)},\quad (c_a^{\langle a^2\rangle})^2=(m^{\langle a^2\rangle})^2=1_{C(C_4/\langle a^2\rangle)},\quad (m_{\mathrm{i}}^{C_4})^4=1_{\mathbb{C}}.$

交换关系 (v)、(viii)、(ix) 和 (x)，连同 (i)、(ii) 和 (vii)，推出

(2) $r^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}c_a^{\langle a^2\rangle}=c_a^{\{e\}}r^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}},\quad c_a^{\langle a^2\rangle}r^{C_4}_{\langle a^2\rangle}=r^{C_4}_{\langle a^2\rangle},\quad i^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}c_a^{\{e\}}=c_a^{\langle a^2\rangle}i^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}},$
$i^{C_4}_{\langle a^2\rangle}c_a^{\langle a^2\rangle}=i^{C_4}_{\langle a^2\rangle};\quad m^{\langle a^2\rangle}i^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}=i^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}},\quad r^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}m^{\langle a^2\rangle}=r^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}},$
$m^{\langle a^2\rangle}r^{C_4}_{\langle a^2\rangle}=r^{C_4}_{\langle a^2\rangle}m_{\mathrm{i}}^{C_4},\quad i^{C_4}_{\langle a^2\rangle}m^{\langle a^2\rangle}=m_{\mathrm{i}}^{C_4}i^{C_4}_{\langle a^2\rangle};\quad c_a^{\langle a^2\rangle}m^{\langle a^2\rangle}=m^{\langle a^2\rangle}c_a^{\langle a^2\rangle}.$

$[\{e\}\backslash \mathrm{h}a^2\mathrm{i}/\{e\}]$和 $[\mathrm{h}a^2\mathrm{i}\backslash C_4/\mathrm{h}a^2\mathrm{i}]$ 中有两个双陪集类，其代表元集合分别为 $\{1,\ a^2\}$ 和 $\{1,\ a\}$。因此，关系 (vi) 给出

(3) $r^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}i^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}=1_{C(C_4)}+(c_a^{\{e\}})^2,\quad r^{C_4}_{\langle a^2\rangle}i^{C_4}_{\langle a^2\rangle}=1_{C(C_4/\langle a^2\rangle)}+c_a^{\langle a^2\rangle}.$

最后，为了使用最后一个关系 (xi)，需要确定平凡表示 $\mathrm{ind}_{\langle a^2\rangle}\mathrm{i}\,\{e\}\,\tau^{\{e\}}$、$\mathrm{ind}^{C_4}\mathrm{h}_{a^2}\mathrm{i}\,\tau^{\langle a^2\rangle}\mathrm{i}$ 以及 $\mathrm{ind}^{C_4}\mathrm{h}_{a^2}\mathrm{i}_{\chi^{\langle a^2\rangle}}\mathrm{i}$ 的诱导表示。在线性代数中完成这一计算后，可以得到 $\mathrm{ind}_{\langle a^2\rangle}\mathrm{i}\,\{e\}\,_{\tau^{\{e\}}}={}_{\tau}\mathrm{h}_{a^2}\mathrm{i}\ +\chi^{\langle a^2\rangle}\mathrm{i}$、$\mathrm{ind}^{C_4}\mathrm{h}_{a^2}\mathrm{i}^{\tau}\mathrm{h}_{a^2}\mathrm{i}=\tau^{C_4}+(\chi^{C_4}\mathrm{i}\,)^2$ 和 $\mathrm{ind}^{C_4}\mathrm{h}_{a^2}\mathrm{i}_{\chi^{\langle a^2\rangle}}\mathrm{i}=\chi^{C_4}\mathrm{i}+(\chi^{C_4}\mathrm{i}\,)^3$。因此，根据关系 (xi) 和 (vii) 的加性部分，我们有

(4) $i^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}r^{\langle a^2\rangle}_{\{e\}}=1_{C(C_4/\langle a^2\rangle)}+m^{\langle a^2\rangle},\quad i^{C_4}_{\langle a^2\rangle}r^{C_4}_{\langle a^2\rangle}=1_{\mathbb{C}}+(m_{\mathrm{i}}^{C_4})^2,$
$i^{C_4}_{\langle a^2\rangle}m^{\langle a^2\rangle}r^{C_4}_{\langle a^2\rangle}=m_{\mathrm{i}}^{C_4}+(m_{\mathrm{i}}^{C_4})^3.$

生成元 Γ 和关系 0、1、2、3 及 4 定义了环 R^{C_4}。

推论 3.16。函子

$$\mathrm{k}^G_*\colon \mathfrak{B}^G\to\mathfrak{Mod}_{\mathrm{c}}^{\mathbb{Z}/2}(R^{C_4}),\qquad A\mapsto\{\mathrm{K}^H_\epsilon(\mathrm{Res}^G_H A)\}^{H\subseteq G}_{\epsilon\in\mathbb{Z}/2}$$

到环 R^{C_4}上的 $\mathbb{Z}/2$分次可数右模的阿贝尔范畴中的函子是通用稳定的kerk^G_*-正合函子。

证明。 根据注 3.15，

$$\mathrm{K}^H_\epsilon(\mathrm{Res}^G_H A)\cong\mathrm{KK}^G_\epsilon(C(G/H),A).$$

根据 [8, 定理 4.9] 以及本小节中的计算， R^{C_4} 是 $\mathfrak{C}^{C_4}$的范畴环，因此我们得到了小节 2.3 中所述的结果。□

环 R^{C_4} 不是遗传的，因此不存在万有系数定理。然而，作为一般理论的一个特例，仍然存在一个谱序列，将 $\mathfrak{B}^G$ 上的相对导出函子与 $\mathfrak{Mod}_{\mathrm{c}}^{\mathbb{Z}/2}R^{C_4}$ [8]上的导出函子联系起来。这可用于分类。另一种方向是将所讨论的环在不同子集处局部化，从而得到遗传情形，但这超出了当前论述的范围。

3.3.3. 展望。 当群 G 具有非平凡的射影表示时，情况会变得更加复杂。在这种情况下，等变自举类的生成元是由子群作用在维数大于一的矩阵上的 G-C*-代数诱导而来的。Mackey 型关系仍然会出现，但除此之外，还必须考虑 $H \subseteq G$ 中 $\mathrm{H}^2(H,\mathrm{U}(1))$ 的非平凡 2-余循环。

参考文献

[1] Beligiannis, Apostolos。《三角范畴中的相对同调代数与纯性》。J. Algebra 227（2000），第 1 期，268–361 页。[2] Blackadar, Bruce。《算子代数的 KK 理论》。第二版。数学研究所出版物，第 5 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1998 年。xx+300页。国际标准书号：0-521-63532-2[3] Bouc, Serge。《Green 函子与 G集合》。数学讲义系列，第 1671 卷。Springer-Verlag，柏林，1997　+342　3 540 63550 5 。viii 页。国际标准书号：- - -[4] Christensen, J. Daniel。《三角范畴中的理想：幻影、幽灵与骨架》。Adv. Math. 136（1998），第 2 期，284–339 页。[5] Davidson, Kenneth R.。《以例释 C*代数》。Fields Institute 专著，第 6 卷。美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996 年。xiv+309 页。国际标准书号：0-8218-0599-1[6] Dell'Ambrogio, Ivo。《张量三角几何与 KKK 理论》。J. Homotopy Relat. Struct. 5（2010），第 1 期，319–358 页。[7] Dell'Ambrogio, Ivo。《可分 C*代数的 bootstrap 范畴中的局部化子范畴》。J. K-Theory　8　2011　3, 493 505 （），第 期，– Dell'Ambrogio, Ivo；Emerson, Heath；Meyer, Ralf。[8]《有限群的等变 Kasparov 理论：通过 Mackey 函子》。J. Noncommut. Geom. 8（2014），第 3 期，837–871 页。[9] Dell'Ambrogio, Ivo；Meyer, Ralf。《对应的等变 Lefschetz 不动点公式》。Doc. Math. 19（2014），141–194 页。[10] Dell' Ambrogio, Ivo；Meyer, Ralf。《素数阶循环群的等变 Kasparov 理论之谱》。Ann. K-Theory 6（2021），第 3 期，543–558 页。[11] Freyd, Peter。《阿贝尔范畴中的表示》。1966 年《范畴代数会议论文集》（美国加利福尼亚州拉霍亚，1965 年），95–120 页，Springer，纽约。[12] Higson, Nigel。《 KKK 理论的刻画》。Pacific J. Math. 126（1987），第 2 期，253–276 页。[13] Hu, Jiangsheng；Zhang, Dongdong；Zhou, Panyue。《外三角范畴中的真类与 Gorenstein 性》。J. Algebra 551（2020），23–60 页。[14] Karpilovsky, Gregory。《有限群的射影表示》。纯粹与应用数学专著及教材，第 94 卷。Marcel Dekker, Inc.，纽约，1985 年。xiii+644 页。国际标准书号：0-8247-7313-6[15] Kasparov, G. G.。《等变 KKK 理论与 Novikov 猜想》。Invent. Math. 91（1988），第 1 期，147–201 页。[16] Meyer, Ralf。《双变 KK 理论的范畴方面》。《 KK 理论与非交换几何》，1–39 页，EMS 会议报告系列，欧洲数学学会，Z¨urich，2008 年。[17] Meyer, Ralf。《双变 KK 理论及其他三角范畴中的同调代数。II》。Tbil. Math. J. 1（2008），165–210 页。[18] Meyer, Ralf；Nest, Ryszard。《通过范畴局部化研究 Baum-Connes 猜想》。Topology 45（2006），第 2 期，209–259 页。[19] Meyer, Ralf；Nest, Ryszard。《双变 KK 理论及其他三角范畴中的同调代数。I。三角范畴》，236–289 页，伦敦数学学会讲义系列，第 375 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2010 年。[20] Meyer, Ralf；Nest, Ryszard。《拓扑空间上的 C*代数：滤化 K 理论》。Canad. J. Math. 64（2012）[21] Murphy, Gerard J.。《 C*代数与算子理论》。Academic Press, Inc.，波士顿，马萨诸塞州，1990 年。x+286 页。国际标准书号：0-12-511360-9[22] Nadareishvili, George。《滤化 C*代数的 bootstrap 范畴中的局部化子范畴》。J. Noncommut. Geom. 13（2019），第 4 期，1209–1233 页。[23] Rosenberg, Jonathan；Schochet, Claude。《Kasparov 广义 K函子的 K¨ünneth 定理与万有系数定理》。Duke Math. J. 55（1987），第 2 期，431–474 页

[24] Wassermann, Simon。《精确 C^*代数及相关主题》。讲义系列，第 19 卷。首尔国立大学、数学研究所、整体分析研究中心，首尔，1994 年。viii+92页。[25] Webb, Peter。《Mackey 函子指南》。《代数手册》，第 2 卷，805–836 页，《代数手册》，第 2 卷，Elsevier/North-Holland，阿姆斯特丹，2000 年。[26] Wegge-Olsen, N. E.。《 KK 理论与 C^*代数：一种友好的方法》。牛津科学出版物。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1993 年。xii+370 页。国际标准书号：0-19-859694-4