arXiv:2303.01288v1 [math.OC] 2 Mar 2023

面向鲁棒运动规划的统计线性化

C. Leparoux* R. Bonalli† B.Hérissé‡ F. Jean§2023年3月3日

摘要

鲁棒运动规划的目标是设计开环控制量，使系统在减轻影响其动力学的不确定性和扰动的同时，最优地到达特定目标区域。近年来，随机最优控制使得问题的建模能够达到特别高的精度。尽管取得了令人瞩目的进展，这些问题建模仍需耗费大量计算资源进行数值计算。本文通过利用统计线性化，开始弥合这一差距。具体而言，我们借助统计线性化，将鲁棒运动规划问题重新表述为一个更简单的确定性最优控制问题，并附加额外约束。我们通过给出近似误差的估计，以及关于这一新的受约束确定性表述的若干可控性结果，严格论证了该方法。最后，我们将该方法应用于航天器的动力下降，并通过数值实验展示了该方法的一致性和效率。

*UMA，巴黎国立高等技术学院，巴黎理工学院，法国帕莱索 91120；以及 DTIS，法国国家航空航天研究办公室，巴黎萨克雷大学，法国帕莱索 91123。电子邮件：clara.leparoux@ensta-paris.fr。

†信号与系统实验室，巴黎萨克雷大学、法国国家科学研究中心、中央-苏佩莱克，布雷盖楼，居里街 3 号，法国伊韦特河畔吉夫 91190。电子邮件：riccardo.bonalli@cnrs.fr。

‡DTIS，法国国家航空航天研究办公室，巴黎萨克雷大学，法国帕莱索 F-91123。电子邮件：bruno.herisse@onera.fr。§UMA，巴黎国立高等技术学院，巴黎理工学院，法国帕莱索 91120。电子邮件：frederic.jean@ensta-paris.fr。

1 引言

运动规划是运动设计的有力工具，在工程和生物学领域有着重要应用。其主要目标是计算开环控制量，引导给定系统到达期望目标，同时还可能优化性能指标，例如降低所需的控制量。具体而言，当没有可用的基于反馈的控制策略时，运动规划就至关重要；例如，可能是因为没有测量值，或者某些状态不可观测，快速生物运动领域中尤其如此 [4]。此外，运动规划对于计算参考策略尤其有用，低级控制器会在后续在线阶段跟踪这些策略 [22], ；这种方法在机器人学和航空航天领域十分常见 [15, 31]。在上述所有任务中，从测量误差到未知参数或外部扰动等各种不确定性，都可能降低所计算控制策略的可靠性。将这些不确定性纳入考虑的方法称为鲁棒运动规划。

现有的鲁棒运动规划方法可分为三类。第一类是所谓的鲁棒集方法，它们通过用包含所有可能结果的集合来表示系统状态，从而处理不确定性。具体而言，这些方法基于区间分析 [35], ，并已成功应用于机器人学 [25] 和航空航天 [11, 5]领域。类似地，也有研究利用正不变集生成安全轨迹 [7, 2, 12]。这类方法的共同缺点是，通常会产生过于保守的解，或导致计算开销巨大的算法 [7]。第二类研究包括针对特定指标降低所计算控制策略对不确定参数的敏感性的方法。例如，[29, 13] 设计了相关算法，以最小化待优化性能准则的敏感性。另一种方法是， [26]中的算法在控制机械臂时最小化最终状态的敏感性。最后，[32] 对敏感性动力学进行建模，并通过最优控制方法使其最小化。请注意， [24]综述了旨在处理不确定参数的方法。前两类方法适合处理参数不确定性，而动力学中的随机扰动则更适合由第三类也是最后一类研究来处理，这些研究采用所谓的随机方法。具体而言，随机方法通过降低相应的协方差，确保系统对不确定结果具有鲁棒性。值得注意的是， [30] 首次给出了理论解，用以解决在输入受到扰动时最小化线性二次问题代价方差的问题。另一方面，[17] 和 [10]提出了针对精确协方差引导的分析方法。最后， [9]通过在代价中惩罚最终状态的协方差，并借助信息矩阵，实现了协方差最小化——

最小化。尽管随机方法具有较高的精度，但通常需要耗费大量数值计算（线性二次型情形或许除外）。此外，现有的大多数方法都是针对特定应用设计的，因此我们可以认为，目前尚无利用随机建模进行鲁棒运动规划的系统化方法。

在本文中，我们提出了一种鲁棒运动规划范式。从方法论上说，它属于上述第三类研究，具体而言，它利用随机微分方程对不确定性进行建模，主要分为两个步骤。首先，如[3], 所述，我们通过一个随机开环最优控制问题来描述运动规划问题，并在代价中惩罚状态协方差，以确保鲁棒性。随后，我们用一个适当的确定性最优控制问题近似这一随机形式，其状态变量为原随机状态的前两阶矩，即其均值和协方差。借助统计线性化，可以高效地计算这些均值和协方差；统计线性化的核心是用高斯分布近似原随机状态的分布。数十年来，统计线性化方法已成功应用于 [34, 14], ，尤其是机械 [28]领域的应用。此外，[19] 近期研究表明，统计线性化也可有效用于变分推断。尽管其数值表现良好，统计线性化在理论上的适定性仍是一个悬而未决的问题。具体而言，尽管已有初步研究探讨统计线性化的可达性性质[8], ，从而推动了其在近似协方差引导中的应用，但统计线性化所产生的近似的保真度仍有待考察。本文通过估计统计线性化所产生的近似误差，开始弥合这一差距。此外，我们还研究了施加精度约束时统计线性化的可控性。

为展示我们理论发现的有效性，我们针对航天器的动力下降求解一个鲁棒运动规划问题。在近期文献中，由此得到的最优控制问题几乎一直仅在确定性环境下进行研究，即迄今尚未考虑不确定性。对于这一确定性环境，理论分析表明，最优控制通常具有最大-最小-最大形式[20, 21, 16], 这种控制律已被证明在面对不确定性和扰动时缺乏鲁棒性 [27]。因此，在上述最优控制问题的形式化中引入针对不确定性的鲁棒性，对于确保受

高性能指标的应用的可靠性至关重要。据我们所知，首批针对航天器动力下降中不确定性问题的研究之一是 [33], 其中，作者采用多目标优化，同时最小化燃料消耗和状态敏感性。然而，这一策略会使状态变量的数量增加为状态维数的平方，从而妨碍计算性能。为降低计算负担，在较新的研究 [27] 中，状态变量的前两阶矩通过两个相互独立的确定性问题进行控制：均值转向问题和协方差转向问题。然而，上述鲁棒运动规划方法缺乏适定性的论证，也缺乏对相应近似精度的分析。我们通过将鲁棒运动规划方法应用于航天器的动力下降来弥补这一空白，该方法明确纳入了环境和系统不确定性的建模，例如气动效应、参数不确定性和测量误差。我们研究了统计线性化动力学在开环和部分反馈控制律下的可达性，并提出了随机环境下执行器限制的建模方法。最后，我们提供数值结果，以说明该方法的一致性。

本文结构安排如下。第2节中，我们建立鲁棒运动规划问题，并提出一种利用统计线性化简化该问题的方法。随后，在第3节中，我们计算统计线性化所引入误差的估计，并研究在使统计线性化定义良好的新可行性约束下，近似鲁棒运动规划问题的可控性。最后，在第4节中，我们将该方法应用于航天器的动力下降，并给出支持理论发现的数值结果。

2 通过随机开环最优控制建模鲁棒性

正如引言中所述，我们首先通过一个确定性控制系统对运动规划问题进行建模

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态变量， $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ 是控制变量。我们的目标是寻找一个开环控制律 $u(t)$， $t \in [0, t_f]$，使系统从初始状态 x^0 转移到目标集 $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$，同时最小化某个代价。运动规划问题于是归结为以下

最优控制问题（请注意，下面的终止时间 t_f 可能是自由的，也可能是固定的，具体取决于所考虑的问题）。

问题 1 （确定性运动规划）。

$$\min C(u) = \psi(x(t_f)) + \int_0^{t_f} L(x(t), u(t))dt$$

在满足以下条件的控制量 $u \in L^2([0, t_f], \mathcal{U})$ 中，使其解 x 满足

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \text{ a.e. on } [0, t_f], \qquad x(0) = x^0,$$

满足 $x(t_f) \in \mathcal{S}$。

在此步骤中，我们进一步假设系统受到不确定扰动的影响。这里考虑两种扰动：1）初始状态的不确定性；2）动力学中的噪声。我们通过将随机变量 x^0 作为初始状态来建模第一种不确定性；对于第二种，则通过将初始控制系统（1）替换为伊藤型随机控制系统来建模

$$dx_t = f(x_t, u(t))dt + g(x_t, u(t))dW_t, \tag{2}$$

其中， W_t 是一个 d维维纳过程， $g(x, u)$是一个离散度矩阵。量 $x(t_f)$ 和 $C(u)$ 现在是随机变量，因此，相应的终端条件和代价应通过适当的期望来表示。

在这种情况下，样本轨迹分布在均值轨迹周围，且这种离散度可能沿轨迹逐渐增大。因此，样本轨迹的最终状态可能远离目标集 $\mathcal{S}$。因此，自然的做法是在代价中惩罚状态 x_t 的协方差 $\boldsymbol{P}(t)$ 的范数，以实现鲁棒性。为此，我们引入两个¯ ¯非负对称矩阵 Q_f 和 Q ，分别用于惩罚末端协方差和沿轨迹的协方差。由此，我们得到构造鲁棒开环控制策略的第一种方法，即将其作为以下随机开环最优控制问题的解。

问题2 （通过随机最优控制进行鲁棒运动规划）。

$$\min J(u) = \mathbb{E}[C(u)] + \operatorname{tr}(\bar{Q}_f \boldsymbol{P}(t_f)) + \int_0^{t_f} \operatorname{tr}(\bar{Q}\boldsymbol{P}(t))dt$$

在满足以下条件的控制量 $u \in L^2([0, t_f], \mathcal{U})$ 中，解 x_t满足

$$dx_t = f(x_t, u(t))dt + g(x_t, u(t))dW_t, \quad t \in [0, t_f],$$
$$x_0 = x^0 \text{ (random variable)},$$

满足 $\mathbb{E}[x_{t_f}] \in \mathcal{S}$。

求解此类随机最优控制问题在计算上颇具难度，现有的理论和数值方法也很少。然而，由于均值和协方差在上述问题中起着重要作用，我们可以采用[4], 中提出的方法，该方法基于统计线性化。

该方法的核心思想是用以下确定性控制系统的解来近似过程 $\boldsymbol{m}(t)$的均值和协方差 $\boldsymbol{P}(t)$。该系统称为（2）的统计线性化：

$$\begin{cases} \dot{m} &= f(m,u) \\ \dot{P} &= D_x f(m,u)P + PD_x f(m,u)^\top + g(m,u)g(m,u)^\top. \end{cases}$$

重要的是，该方法要求问题 C 中的确定性代价1关于状态变量呈二次关系，因此从现在起，我们假设以下性质成立。

(H) 问题 ψ 中的终端代价 L 和无穷小代价1 是 x的二次函数（不一定是齐次函数）。

假设（H）保证了问题 C 中的代价1的期望唯一地取决于 $\boldsymbol{m}$ 和 $\boldsymbol{P}$。事实上，记 Q_ψ 和 $Q_L(u)$ 为分别表示 ψ和 L的齐次二次部分的对称矩阵，则有

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[C(u)] = \psi(\boldsymbol{m}(t_f)) + \operatorname{tr}(Q_\psi \boldsymbol{P}(t_f)) \\ + \int_0^{t_f} (L(\boldsymbol{m}(t),u(t)) + \operatorname{tr}(Q_L(u(t))\boldsymbol{P}(t)))\, dt. \end{aligned}$$

令 $Q_f = Q_f + Q_\psi$ 和 $Q(u) = Q + Q_L(u)$，最终可得

$$J(u) = \psi(\boldsymbol{m}(t_f)) + \operatorname{tr}(Q_f \boldsymbol{P}(t_f)) + \int_0^{t_f} (L(\boldsymbol{m}(t),u(t)) + \operatorname{tr}(Q(u(t))\boldsymbol{P}(t)))\, dt.$$

因此，我们建议通过求解以下确定性最优控制问题，来计算鲁棒运动规划问题2 的开环控制（下文中， $\boldsymbol{m}^0$ 和 $\boldsymbol{P}^0$ 分别表示随机变量 x^0的均值和协方差）。

问题3（通过统计线性化进行鲁棒运动规划）。

$$\min J_{lin}(u) = \psi(m(t_f)) + \operatorname{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} (L(m(t),u(t)) + \operatorname{tr}(Q(u(t))P(t)))\, dt$$

在满足以下条件的控制量 $u \in L^2([0,t_f],\mathcal{U})$ 中，解 (m,P)

$$\begin{cases} \dot{m} &= f(m,u), \\ \dot{P} &= D_x f(m,u)P + PD_x f(m,u)^\top + g(m,u)g(m,u)^\top, \end{cases} \tag{3}$$
$$m(0) = \boldsymbol{m}^0, \quad P(0) = \boldsymbol{P}^0,$$

满足 $m(t_f) \in \mathcal{S}$。

注 1。 问题 3 中的表述有两个值得注意的额外特征：

- 均值变量（方程见 m）与协方差变量（方程见 P）相互解耦；后者衡量过程 x_t 的离散度；
- 由此得到的均值轨迹 m 对应于确定性系统的规划轨迹。

尽管问题 3中的表述很简单，但从理论和实践角度看，它都引出了若干问题。首先，问题 3 的解在何种意义上是问题 2的解的近似？我们将在第 3 节回答这一问题。

其次，这种方法与鲁棒性相关吗？特别是，使用统计线性化是否足以降低协方差？后一个问题归结为研究统计线性化的可控性，即本文 [8] 的主题。从实践角度看，我们通过在第 4 节研究可重复使用运载器着陆的示例，展示求解问题 3 所带来的效率。

3 统计线性化的合理性

本节旨在为统计线性化提供适定性保证。为此，我们力求在温和的假设下证明两个重要性质。首先，我们计算估计值，以量化随机控制系统（2）的轨迹与其统计线性化（3）的轨迹之间近似误差的约束。简言之，该性质保证：只要将方差限制在较小值，统计线性化就能对随机控制系统的均值和协方差构成适定的近似。作为第二项结果，我们证明，在考虑上述近似约束时，统计线性化（3）在控制线性系统这一特定情形下是可控的。控制线性系统是一类相当一般、在应用中广泛使用的控制系统。

后一项结果保证，在附加近似约束下，问题 3 是可行的，这为寻找最优解提供了依据；其解轨迹也与原随机控制系统的轨迹接近。

3.1 统计线性化的估计

本节采用以下一个可以说相当温和的假设。

假设1. 以下条件适用于 (2)：

- 动力学 f 的微分关于状态一致有界，即存在连续函数 φ：$\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 使得 $\|D_x f(x,u)\| \leq \varphi(\|u\|)$，对每个 $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$均成立；

- 弥散矩阵不依赖于状态变量，即对每个 $(x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}$，均有 $g(x,u) = g(u)$。

请注意，一方面，假设1 中的第一个条件是标准条件，通常需要满足该条件以及其他条件，以确保（2）的解存在且唯一。此外，对于具有紧支集的向量场 f，该条件显然成立（此时函数 φ只是一个常数），而这也是模型中常常隐含假定的性质。另一方面，假设1 中的第二个条件例如在不确定性（具体而言，$g(x_t,u(t))dW_t$ 在（2）中）源自某种一致复发噪声时便会满足，例如系统测量误差、不确定的天气状况等。

在建立随机控制系统的轨迹与其统计线性化轨迹之间的误差估计之前，我们注意到，在假设 1 下，原始随机控制系统具有如下形式

$$\mathrm{d}x_t = f(x_t, u(t))\,\mathrm{d}t + g(u(t))\,\mathrm{d}W_t, \tag{4}$$

而式（4）的统计线性化现在写为

$$\begin{cases} \dot{m}(t) = f(m(t), u(t)) \\ \dot{P}(t) = D_x f(m(t), u(t))P(t) + P(t)D_x f(m(t), u(t))^\top + g(u(t))g(u(t))^\top. \end{cases} \tag{5}$$

下面给出了随机控制系统（4）的轨迹与其统计线性化（5）的轨迹之间的误差估计。我们先固定一些记号。给定控制律 $u \in L^2([0,t_f],\mathcal{U})$ 以及一个随机变量x^0，其均值和协方差为 $(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{P}^0)$，我们用 $(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{P})$ 表示初始条件为 x^0 且控制为 u时，方程（4）的解的均值和协方差，

而 (m, P) 表示初始条件为$(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{P}^0)$ 且控制为 u时，方程（5）的解轨迹。

命题1。 假设假设 *1* 成立，并固定 $t_f > 0$。则存在一个增函数 α：$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 使得对于任意 u 和 x^0，以下估计成立：

$$\sup_{t\in[0,t_f]} \|\boldsymbol{m}(t) - m(t)\|^2 + \sup_{t\in[0,t_f]} \|\boldsymbol{P}(t) - P(t)\| \leq \alpha\left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|)\mathrm{d}s\right) \times \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\| \,\mathrm{d}s, \quad (6)$$

前提是所有量在整个区间 $[0, t_f]$ 上都有定义。

备注2。 均值上的误差由于齐次性原因具有指数2，这是因为协方差关于均值的平方是齐次的。

证明。 由于曲线 m 和 $\boldsymbol{m}$ 源自同一个初始条件$\boldsymbol{m}^0$，差值 $\boldsymbol{m}(t) - m(t)$ 可写为

$$\int_0^t (\dot{\boldsymbol{m}}(s) - \dot{m}(s))\, ds = \int_0^t (\mathbb{E}[f(x_s, u(s))] - f(m(s), u(s)))\, ds.$$

根据假设 1 以及对 f 进行带积分余项的一阶泰勒展开，对于任意 $t \in [0, t_f]$，我们可以计算（在下文中，我们对常数 $C > 0$ 作了隐式重载）

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{m}(t) - m(t)\| &\leq \int_0^t \|\mathbb{E}[f(x_s, u(s))] - f(m(s), u(s))\| \,\mathrm{d}s \\
&\leq \int_0^t \|f(\boldsymbol{m}(s), u(s)) - f(m(s), u(s))\| \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \int_0^1 \left\|\mathbb{E}\Big[D_x f\big(\theta x_s + (1-\theta)\boldsymbol{m}(s), u(s)\big)(x_s - \boldsymbol{m}(s))\Big]\right\| \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}s \\
&\leq C\int_0^t \varphi(\|u(s)\|)\big(\|\boldsymbol{m}(s) - m(s)\| + \mathbb{E}[\|x_s - \boldsymbol{m}(s)\|]\big) \,\mathrm{d}s \\
&\leq C\int_0^t \varphi(\|u(s)\|)\left(\|\boldsymbol{m}(s) - m(s)\| + \big(\mathrm{tr}\boldsymbol{P}(s)\big)^{\frac{1}{2}}\right) \,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

其中，在最后一行中我们使用了 Hölder 不等式，以及以下事实：对于每个 $s \in [0, t_f]$，根据定义，$\mathbb{E}[\|x_s - \boldsymbol{m}(s)\|^2] = \mathrm{tr}\boldsymbol{P}(s)$。因此，常规地应用格朗沃尔不等式可得

$$\sup_{t\in[0,t_f]} \|\boldsymbol{m}(t) - m(t)\| \leq \alpha\left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|)\mathrm{d}s\right) \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|)\big(\mathrm{tr}\boldsymbol{P}(t)\big)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}t, \quad (7)$$

其中， α 可取为此处的函数 $\alpha(s) = Ce^{Cs}$ 。

协方差也可以通过类似的计算得到。回顾一下，利用伊藤公式进行经典计算可得

$$\dot{\boldsymbol{P}}(t) = \mathbb{E}\big[f(x_t, u(t))(x_t - \boldsymbol{m}(t))^\top + (x_t - \boldsymbol{m}(t))f(x_t, u(t))^\top\big] + g(u(t))g(u(t))^\top.$$

因此，对于每个 $t \in [0, t_f]$，我们可以计算

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{P}(t) - P(t)\| &\le \int_0^t \left\|\mathbb{E}[f(x_s, u(s))(x_s - \boldsymbol{m}(s))^\top] - D_x f(m(s), u(s))P(s)\right\| \,\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \left\|\mathbb{E}[(x_s - \boldsymbol{m}(s))f(x_s, u(s))^\top] - P(s)D_x f(m(s), u(s))^\top\right\| \,\mathrm{d}s \\
&= 2\int_0^t \bigg\| \int_0^1 \mathbb{E}\Big[D_x f\big(\theta x_s + (1-\theta)\boldsymbol{m}(s), u(s)\big)(x_s - \boldsymbol{m}(s))(x_s - \boldsymbol{m}(s))^\top \\
&\quad - D_x f(m(s), u(s))P(s) \pm D_x f(m(s), u(s))(x_s - \boldsymbol{m}(s))(x_s - \boldsymbol{m}(s))^\top\Big] \,\mathrm{d}\theta\bigg\| \,\mathrm{d}s \\
&\le C\int_0^t \varphi(\|u(s)\|)\big(\mathbb{E}\left[\|x_s - \boldsymbol{m}(s)\|^2\right] + \|\boldsymbol{P}(s) - P(s)\|\big) \,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

其中，在第一个等式中，符号 $\pm$ 表示我们加上并减去了以下量

$$D_x f(m(s), u(s))(x_s - \boldsymbol{m}(s))(x_s - \boldsymbol{m}(s))^\top, \quad s \in [0, t_f].$$

注意到

$$\mathrm{tr}\boldsymbol{P}(s) \le \|\boldsymbol{P}(s)\| \le \|\boldsymbol{P}(s) - P(s)\| + \|P(s)\|, \quad s \in [0, t_f], \tag{8}$$

通过常规地应用格朗沃尔不等式即可得到（在下文中，我们会隐式地重载非递减函数 α ）

$$\sup_{t\in[0,t_f]} \|\boldsymbol{P}(t) - P(t)\| \le \alpha\left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|)\mathrm{d}s\right)\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\| \,\mathrm{d}s. \tag{9}$$

在这一步，我们注意到，根据（7），我们尤其可以推断出（记作 α

为便于阅读，我们用 $\alpha\left(\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\mathrm{d}s\right)$ 替代并对其进行重载）

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,t_f]}\|\boldsymbol{m}(t)-m(t)\|^2 \le \alpha\times\left(\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\big(\mathrm{tr}\boldsymbol{P}(s)\big)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s\right)^2\\
&\le \alpha\times\left(\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\ \left(\|\boldsymbol{P}(s)-P(s)\|^{\frac{1}{2}}+\|P(s)\|^{\frac{1}{2}}\right)\,\mathrm{d}s\right)^2 \qquad \text{by (8)},\\
&\le \alpha\times\left(\left(\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\|\,\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}}+\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s\right)^2,\\
&\le \alpha\times\left(\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\|\,\mathrm{d}s+\left(\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\|^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

根据柯西-施瓦茨不等式，我们得到

$$
\left(\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\|^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s\right)^2\le\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\mathrm{d}s\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\|\mathrm{d}s,
$$

最终得到

$$
\sup_{t\in[0,t_f]}\|\boldsymbol{m}(t)-m(t)\|^2\le\alpha\times\int_0^{t_f}\varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\|\,\mathrm{d}s,
$$

将其与式（9）结合可得式（6），结论随之成立。 □

当控制量有界时，估计式（6）尤其具有启发性。在这种情况下，子集 $\varphi(\|\mathcal{U}\|)\subseteq\mathbb{R}_+$ 有界，命题 1 实质上指出，若要将统计线性化产生的误差降至最低，唯一可行的办法就是使 L^1 范数保持较小。后一性质在许多应用中尤为有用，这些应用涵盖航空航天和机器人学 [27, 32]，，以及估计和学习[19]。

定理2. 假设假设 *1* 成立，且控制集 $\mathcal{U}$ 有界。固定 $t_f>0$。则存在常数 $C>0$，它依赖于 f， t_f，并且$\mathcal{U}$ 唯一，且以下估计成立：

$$
\sup_{t\in[0,t_f]}\|\boldsymbol{m}(t)-m(t)\|^2+\sup_{t\in[0,t_f]}\|\boldsymbol{P}(t)-P(t)\|\le C\int_0^t\|P(s)\|\,\mathrm{d}s,
$$

前提是所有量在整个区间 $[0,t_f]$ 上都有定义。

3.2 近似约束下问题 3 的可控性

命题 1 对统计线性化的适定性进行了定量估计：如果能够以某种方式控制（5），使得（6）左侧的取值较小，那么统计线性化的解就能很好地近似原随机控制系统的解，即在二阶矩意义下近似。这些后续要求构成了问题 3 为求得问题 2的有意义解而应满足的新约束。

然而，前述约束会引发可控性问题。事实上，问题 3 是在满足终端条件 L^2 的相关轨迹所对应的控制量集合上进行最小化 $m(t_f) \in \mathcal{S}$。通常，动力学 $f(x,u)$的可控性条件可以保证该控制量集合非空。问题在于，加入我们此前引入的新约束后，这个容许控制集合是否仍然非空。本节旨在回答这一问题。

首先，让我们准确地形式化这一设定。为此，固定 $t_f > 0$，并选取一个向量 $m^0 \in \mathbb{R}^n$ 和一个非负对称矩阵 P^0。给定控制量 $u \in L^2([0,t_f], \mathbb{R}^k)$，我们将满足初始条件 (m^0, P^0)、控制量为 u 的方程 (3) 的解记为 (m_u, P_u)。假设假设1成立，并令 α 为命题1中得到的增函数。对于 $\varepsilon > 0$，我们将 $\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$定义为满足下述条件的控制量 $u \in L^2([0,t_f], \mathbb{R}^k)$ 的集合：

$$\alpha\left(\int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|)\mathrm{d}s\right) \times \int_0^{t_f} \varphi(\|u(s)\|)\|P(s)\|\,\mathrm{d}s \le \varepsilon. \tag{10}$$

作为命题 1 的直接推论，$\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ 是一类控制，可保证统计线性化与原随机控制系统的解之间的近似误差不超过 ε。

推论*3.* 假设假设*1*成立，并考虑一个随机变量x^0，其均值和协方差分别等于（m^0，P^0）。给定控制$u \in L^2$（$[0,t_f]$，$\mathbb{R}^k$），我们分别用（$\boldsymbol{m}_u$，$\boldsymbol{P}_u$）表示具有初始条件 x^0 并采用控制 u时，方程（*2*）的解的均值和协方差。于是，对于任意 $u \in \mathbb{U}$（ε，m^0，P^0），有

$$\sup_{t\in[0,t_f]} \|\boldsymbol{m}_u(t) - m_u(t)\|^2 + \sup_{t\in[0,t_f]} \|\boldsymbol{P}_u(t) - P_u(t)\| \le \varepsilon.$$

我们首先要问的是，对于任意 $\varepsilon > 0$，是否都能找到控制量 u 属于$\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$，使其满足 $m_u(t_f) \in \mathcal{S}$。我们考虑约束最严格的情形，即目标缩减为一个点，也就是说 $\mathcal{S} = \{m^f\}$。此外，我们将讨论范围限定在比假设1更具体的设定中。

假设2。 对于 (2)，满足以下条件：

1. 控制域为 $\mathcal{U} = \mathbb{R}^k$;

2. 动力学 f 是控制线性的，即，

$$f(x,u) = \sum_{i=1}^{k} u_i f_i(x), \quad (x,u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k,$$

其中 f_i： $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $i = 1$, ..., k 是光滑向量场，且存在 $L > 0$，使得 $\|D_x f_i\ (x)\| \leq L$ 对每个 $x \in \mathbb{R}^n$, i =1, ..., k都成立；

3. 向量场满足李括号生成条件

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Lie}(f_1, \ldots, f_k)(x), \quad \text{for every } x \in \mathbb{R}^n; \tag{11}$$

4. 离散度为常数，即 $g\ (x,\ u)\ = g$ 对每个 $(x,\ u)\ \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$都成立。

请注意，上述假设意味着假设 1 在 $\varphi\ (r)\ = Lr$ 下成立。假设 2 可能显得相当严格，尤其是关于动力学为控制线性且离散度为常数这一假设。不过，这种设定在许多控制应用中都很常见，尤其是在简化更复杂问题时。此外，李括号生成条件（11）是 一般的，即几乎每一组向量场 （f_1, ..., f_k）都满足该条件。

在此假设下，我们证明，只要 P^0 足够小，在任意类别 $\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ 中，变量 m 都具有可控性。

命题4. 假设 2 成立。对于每个 m^0, $m^f \in \mathbb{R}^n$ 和$\varepsilon > 0$，存在常数 $c > 0$，使得对于每个非负对称矩阵 P^0 满足 $\|P^0\| \leq c$，都存在一个控制量 $u \in \mathbb{U}\ (\varepsilon,\ m^0,\ P^0)$满足

$$m_u(t_f) = m^f.$$

注3. 注意，当初始条件 x^0 是确定性的，初始协方差 P^0 为零。因此，该命题意味着，对于每个m^0、 m^f和 ε，相应的集合 $\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, 0)$ 都包含将 m^0连接到 m^f的控制量。此情形对于应用很重要。

证明。 固定 m^0, m^f。由假设 2，特别是（11），存在常数 $C = C\ (m^0,\ m^f)\ > 0$ 以及控制 $\bar{u} \in L^2\ ([0,1],\ \mathbb{R}^k)$ 使得

$$m_{\bar{u}}(0) = m^0, \quad m_{\bar{u}}(1) = m^f, \quad \|\bar{u}(t)\| = C,\ t \in [0,1].$$

因此，对于每个 $\eta > 0$，我们可以定义控制 $u_\eta \in L^2([0,t_f],\mathbb{R}^k)$ 如下：

$$u_\eta(t) \triangleq \frac{1}{\eta}\bar{u}\left(\frac{t}{\eta}\right)\mathbb{1}_{[0,\eta]}(t), \quad t \in [0,t_f].$$

成立的是

$$\|u_\eta\|_{L^1} = \|\bar{u}\|_{L^1} = C,$$

并且

$$m_{u_\eta}(t) = \begin{cases} m_{\bar{u}}\left(\frac{t}{\eta}\right), & 0 \le t \le \eta \\ m^f, & \eta \le t \le t_f. \end{cases}$$

在这一步，对于每个 $u \in L^2([0,t_f],\mathbb{R}^k)$，作为李雅普诺夫微分方程解的矩阵 P_u 可以显式计算为

$$P_u(t) = \Phi_u(t,0)P^0\Phi_u(t,0)^\top + \int_0^t \Phi_u(t,s)gg^\top\Phi_u(t,s)^\top \,\mathrm{d}s,$$

其中，基矩阵 $\Phi_u(t,s) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 是以下方程的解

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_u(t,s) = \displaystyle\sum_{i=1}^k u_i(t)D_x f_i(m_u(t))\Phi_u(t,s) \\ \Phi_u(s,s) = I. \end{cases}$$

直接应用格朗沃尔不等式可得

$$\sup_{0\le s\le t\le t_f}\|\Phi_u(t,s)\| \le e^{\bar{C}\|u\|_{L^1}},$$

其中常数 $C > 0$ 唯一取决于 L 假设 2-2。在下文中，我们将默认扩展常数 C。对于每个 $t \in [0,\eta]$我们可以计算

$$\begin{aligned} \|P_{u_\eta}(t)\| &\le \|\Phi_{u_\eta}(t,0)\|^2\|P^0\| + \int_0^t \|g\|^2\|\Phi_{u_\eta}(t,s)\|^2 \,\mathrm{d}s \\ &\le e^{\bar{C}\|\bar{u}_\eta\|_{L^1}}\left(\|P^0\| + \bar{C}t\right) = e^{\bar{C}C}\left(\|P^0\| + \bar{C}t\right), \end{aligned}$$

由此最终得到（回想一下 $\varphi(r) = Lr$）

$$\begin{aligned} &\alpha\left(\int_0^{t_f}\varphi(\|u_\eta\|)\right) \times \int_0^{t_f}\varphi(\|u_\eta\|)\|P_{u_\eta}\| \\ &= \alpha(LC)\int_0^\eta \frac{L}{\eta}\left\|\bar{u}\left(\frac{t}{\eta}\right)\right\| \,\|P_{u_\eta}(t)\| \,\mathrm{d}t \\ &\le \text{Const} \times (\eta + \|P^0\|). \end{aligned}$$

结论由 $\eta > 0$ 的任意性得出。 □

因此，如果我们希望保证该问题的轨迹由3 阶近似组成，且这些近似对应于问题的解，就应通过对以下范围内的控制量进行优化来求解问题 $\mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$。$\varepsilon$阶近似对应于问题2的解。命题4保证在约束 $u \in \mathbb{U}(\varepsilon, m^0, P^0)$ 下，问题3 仍然可行。实践中，最好通过对控制量施加惩罚来处理约束（10），或者只需在后处理中检查（10）左侧的值是否足够小。下一节将采用后一种方法。

4 应用：航天器动力下降的运动规划

本节将介绍我们的方法在航天器动力下降问题中的应用。具体而言，我们将展示鲁棒运动规划方法在不确定性条件下优化着陆轨迹的优势。着陆通常采用垂直着陆方式，其中最后阶段——动力下降——尤具挑战性，对精度要求很高 [6]。为此，通常的策略是先优化一条参考轨迹，再通过反馈控制在动力下降过程中跟踪该轨迹 [36]。迄今为止，轨迹优化通常是在确定性最优控制框架下进行的，并未考虑不确定性。例如， [23] 首次将着陆轨迹生成问题表述为最小燃料最优控制问题，此后大量文献对着陆问题进行了研究。现有研究表明，最优控制通常呈最大-最小-最大形式[20, 21, 16], ，即其范数最多在下限与上限之间切换两次。这种控制对不确定性尤其敏感，因此有必要开发能够满足高性能指标要求的鲁棒方法。

4.1 框架

为简化起见，我们仅考虑二维表述；关于完整三维模型的讨论，请参阅 [20] 。在此设置下，状态 $x = (r, v, \mu) \in \mathbb{R}^5$ 由位置 $r = (y, z) \in \mathbb{R}^2$、速度 $v = (v_y, v_z) \in \mathbb{R}^2$和质量 $\mu \in \mathbb{R}$组成，而控制 $u = (u_y, u_z)$ 表示二维推力。

忽略扰动和不确定性时，系统的动力学，即后文所称的

无扰动动力学，为

$$\dot{x} = f(x,u) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{T}{\mu}u - \begin{pmatrix} 0 \\ g_0 \end{pmatrix} \\ -q\|u\| \end{pmatrix} \tag{12}$$

其中，最大推力 T、发动机质量流率 q 和重力加速度 g_0 均为正数常量。此外，推力受执行器的物理限制约束，可通过控制范数的上界和下界建模如下

$$0 \leq u_{min} \leq \|u(t)\| \leq u_{max}. \tag{13}$$

动力下降的目标是从初始状态 $x(0)$到达目标 $\mathcal{S} = \{r = 0, v = 0\}$。为最大限度地节省飞行器燃料箱中的燃料，运动规划问题采用问题 1 的形式，其代价函数如下：

$$C(u) = -\mu(t_f).$$

此外，系统至少受到两类不确定性的影响。首先，为了简化处理，通常会在动力学模型中忽略气动力等若干效应。因此，我们建议通过对加速度（即 v的导数）施加加性噪声来建模这些被忽略的量。由此，动力学可写为

$$\mathrm{d}x_t = f(x_t, u(t))\,\mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}W_t, \tag{14}$$

其中，W_t是一维布朗运动，且 $g = (0,\ 0,\ \sigma_y,\ \sigma_z,\ 0)$ 是一个常向量，σ_y, σ_z 为非负常数。其次，初始状态$x(0)$ 仅在测量误差范围内已知。我们将这些误差建模为：考虑 $x(0)$ 是一个具有正态密度 x^0 的随机变量 $\mathcal{N}(\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{P}^0)$。最后，我们将动力下降的鲁棒运动规划表述为问题2的形式。

4.2 直接统计线性化

按照第 2 节所述的方法，我们求解形式为问题 3 的问题，而不是形式为问题 2 的问题。具体而言，我们将鲁棒动力下降问题的解表示为控制律 u, 使其最小化以下问题（其中我们将 m 写作 $m = (m_r,\ m_v,\ m_\mu) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$）。

问题4。

$$\min_{u,t_f} \quad J_{lin}(u) = -m_\mu(t_f) + \mathrm{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \mathrm{tr}(QP(t))dt$$

满足以下约束

$$\begin{cases} (m,P)(\cdot) \text{ solution of the statistical linearization (3)}, \\ u(t) \in \mathcal{U} = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u_{min} \le \|u\| \le u_{max}\} \quad \text{for a.e. } t \in [0,t_f], \\ (m,P)(0) = (\boldsymbol{m}^0, \boldsymbol{P}^0), \\ m(t_f) \in \mathcal{S}. \end{cases}$$

遗憾的是，这种表述无法加以利用，因为相应的统计线性化不具备可控性，也就是说，它不具有可达性。在具体而言，问题4 的解没有理由能够以较小的末端协方差完成动力下降。

下面我们进一步阐明这种“不可控性”性质。首先在一般情形下引入一些记号。给定形式为（1）的动力系统，其中定义在 $\mathbb{R}^n$上，记$f = \{f(x,u)$ 为 $u \in \mathcal{U}\}$所对应的向量场族，并考虑如下向量场线性空间：

$$\mathcal{I}(f) = \mathrm{span}\left\{f_1 - f_2, f_3 : f_1, f_2 \in f, f_3 \in \mathcal{D}(f)\right\},$$

其中 $\mathcal{D}(f) = \{[f_1,...,[f_{k-1},f_k]] : k \ge 2, f_i \in f\}$。回顾一下，对于某个 $x \in \mathbb{R}^n$，如果在固定时间内从 x 出发的可达点集合具有非空内部，则称动力系统从 $x \in \mathbb{R}^n$具有可达性。我们已在 [8] 中证明，若对每个 $m \in \mathbb{R}^n$ 都有

$$\dim\left\{\begin{pmatrix} f(m) \\ Df(m) + Df(m)^\top \end{pmatrix} : f \in \mathcal{I}(f)\right\} = n + \frac{n(n+1)}{2}, \qquad (15)$$

则由 $f(x,u)$ 定义的统计线性化（3）以及任意离散度 g均可从 $\mathbb{R}^n \times \mathrm{Sym}^+(\mathbb{R}^n)$的某个开稠密子集中的任一点到达。

请注意，在当前应用中，该条件从未得到满足。

引理5。对于动力系统(12)，不存在点$m \in \mathbb{R}^5$ 满足条件(15)。

证明。 由于证明只涉及简单计算，下面仅列出主要步骤。对于动态系统（12），任意向量场 $f_u \in f$具有如下形式

$$f_u(x) = \begin{pmatrix} v_y \\ v_z \\ f_{u,3}(\mu) \\ f_{u,4}(\mu) \\ f_{u,5} \end{pmatrix}$$

其中 $f_{u,3}(\mu) = \frac{T}{\mu}u_y$, $f_{u,4}(\mu) = \frac{T}{\mu}u_z - g_0$ 和 $f_{u,5} = -q\|u\|$。因此，对于任意 $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$，$f_{u_1}(x) - f_{u_2}(x)$的前两个分量为零，$[f_{u_1}, f_{u_2}](x)$的最后一个分量也为零，而它们的其他分量仅是 μ 的函数。通过归纳可得，所有元素 $f \in \mathcal{I}(f)$都是 μ的函数，因此

$$\dim\left(\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} f(x) \\ Df(x) + Df(x)^\top \end{pmatrix} : f \in \mathcal{I}(f)\right\}\right) \leq 9 < n + \frac{n(n+1)}{2},$$

由此得出结论。 □

注4. 不过，采用类似的方法，我们可以证明未受扰动的系统从任意一点都具有可达性，只需证明 $\mathrm{Vect}\{f(x) : f \in \mathcal{I}(f)\}$ 的维数等于 n。事实上，例如考虑控制量$u_1 = (0, 0)$、$u_2 = (0, 1)$、$u_3 = (1, 0)$ 和 $u_4 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$，可得向量 $f_{u_1}(x) - f_{u_2}(x)$、$f_{u_1}(x) - f_{u_3}(x)$、$f_{u_1}(x) - f_{u_4}(x)$、$[f_{u_1}, f_{u_2}](x)$、$[f_{u_1}, f_{u_3}](x)$ 线性无关，由此得出结论。

充分可达性条件不满足。这并不能证明统计线性化系统 (3) 不具有可达性，因为所检验的条件仅是充分条件。不过，预计系统缺乏可达性，因为这里 f 中的向量场是解析向量场，而在这种情况下，基于李代数的可达性充分条件实际上只是必要条件（参见 [18]）。更通俗地说，请注意，动力学 (12) 几乎是线性的，而线性系统的统计线性化系统从不具有可达性。最后，我们针对动力学 (3) 所求得的鲁棒运动规划问题的数值解（例如图 2 所示的解）未能降低协方差，这似乎证实了这种不可达性。

4.3 通过部分反馈进行统计线性化

4.3.1 将反馈加入模型

我们在上一小节中已经看到，就鲁棒性而言，我们的方法无法提供令人满意的开环控制。不过，在动力下降过程中可以获得一些测量值，例如位置 r 和速度 v，我们可以将这些测量值纳入反馈控制。需要注意的是，一方面，质量的测量值通常无法获得；另一方面，该量通常也不可观测，这反过来阻碍了设计同时作为质量函数的反馈控制。

因此，我们将（u 12）中的控制变量替换为函数 u_{FB}（$\overline{x} = r$，v），该函数取决于一些适当的参数 ν，进而我们

将 ν 视为新的控制变量。当引入这种部分反馈控制后，运载火箭的无扰动动力学可写为

$$f_{FB}(x,\nu) = f(x, u_{FB}(\overline{x},\nu)).$$

保持相同的离散项 g （如式（14）所示），我们得到一个描述动力学的新随机模型，

$$\mathrm{d}x_t = f_{FB}(x_t,\nu(t))\,\mathrm{d}t + g\,\mathrm{d}W_t. \tag{16}$$

回到问题的物理背景，注意到控制量 u由两个执行器提供：一个控制 u的模，另一个控制其方向，因此

$$u = u_\rho \begin{pmatrix} \cos(u_\theta) \\ \sin(u_\theta) \end{pmatrix}, \tag{17}$$

其中 $u_\rho = \|u\|$ 和 $u_\theta \in [-\pi,\pi)$ 。将范围限制在线性函数 $\overline{x}$内，我们将反馈控制写为

$$u_{FB}(x,\nu) = (\rho + K_n\overline{x}) \begin{pmatrix} \cos(\theta + K_d\overline{x}) \\ \sin(\theta + K_d\overline{x}) \end{pmatrix}$$

其中 $\rho,\theta \in \mathbb{R}$, $K_n, K_d \in \mathbb{R}^4$，因此 $\nu = (\rho,\theta,K_n,K_d)$。

注意，由（16）定义的系统的统计线性化可写为

$$\begin{cases} \dot{m} &= f_{FB}(m,\nu), \\ \dot{P} &= D_x f_{FB}(m,\nu)P + PD_x f_{FB}(m,\nu)^\top + gg^\top, \end{cases} \tag{18}$$

我们借助形式计算软件进行了验证。与式（14）的统计线性化不同，这个新系统满足可达性的充分条件。也就是说，记 f_{FB} 为所有向量场 $f_{FB}(\cdot,\nu)$ 构成的族，则有

$$\dim\left(\mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} f(x) \\ Df(x)+Df(x)^\top \end{pmatrix} \;:\; f \in \mathcal{I}(f_{FB})\right\}\right) = 20 = n + \frac{n(n+1)}{2},$$

对于任意 x in $\mathbb{R}^n$，满足 $n = 5$。

4.3.2 向模型添加执行器限制

在动力学（16）中，执行器的控制 $u_{FB}(x_t,\nu(t))$ 变成了一个随机过程，因此无法施加 $u_{min} \le \|u_{FB}\| \le u_{max}$。因此，必须以不同方式在模型中考虑执行器的物理限制，我们提出了两种彼此独立的处理方法。

第一种方法：饱和建模 第一种方法是将执行器的物理限制直接编码到动态模型中。可以在模型中使用饱和函数来实现，具体如下：对于实数 $a < b$，考虑一个函数 sat_a^b，使得 $\mathrm{sat}_a^b(s) \in [a,b]$ 对每个 $s \in \mathbb{R}$均成立。然后，采用式（17）中引入的控制记法，将原始的无扰动动力学 $f(x,u)$ 替换为

$$f^{\mathrm{sat}}(x,u) = f\left(x, \mathrm{sat}_{u_{min}}^{u_{max}}(u_\rho)\begin{pmatrix}\cos(u_\theta)\\ \sin(u_\theta)\end{pmatrix}\right),$$

然后替换 $f_{FB}(x,\ \nu) = f(x,\ u_{FB}(x,\ \nu))$（16）中为

$$f_{FB}^{\mathrm{sat}}(x,\nu) = f^{\mathrm{sat}}(x, u_{FB}(x,\nu)).$$

假设 sat_a^b 是一个光滑函数，我们可以计算饱和反馈动力学的统计线性化，得到

$$\begin{cases}\dot{m} &= f_{FB}^{\mathrm{sat}}(m,\nu),\\ \dot{P} &= D_x f_{FB}^{\mathrm{sat}}(m,\nu)P + PD_x f_{FB}^{\mathrm{sat}}(m,\nu)^\top + g(m)g(m)^\top.\end{cases} \tag{19}$$

沿用前面的讨论，我们将上述控制约束添加到问题3中，得到以下鲁棒运动规划问题。

问题5 (饱和闭环鲁棒运动规划)。

$$\min_{\nu,t_f} \quad -m_\mu(t_f) + \mathrm{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \mathrm{tr}(QP(t))dt$$

满足以下约束

$$\begin{cases}(m,P)(\cdot) \text{ follows } (19),\\ (m,P)(0) = (m^0, P^0),\\ m(t_f) \in \mathcal{S}.\end{cases}$$

注5. 请注意，使用统计线性化需要 sat_a^b 具有光滑性。光滑饱和函数有多种选择，例如双曲正切函数，或由 $\mathrm{sat}_a^b(s) = s$ if $s \in [a,b]$, $= a$ if $s \le a$, and $= b$ if $s \ge b$ 定义的精确（非光滑）饱和函数（我们在仿真中使用后一种函数）。请注意，该函数可以写成

$$\overline{\mathrm{sat}}_a^b(s) = \frac{b+a}{2} + \frac{|s-a| - |s-b|}{2}. \tag{20}$$

接下来，我们选择一个较小的参数 ϵ 并定义 sat_a^b，方法是将上面的表达式中的绝对值 $|s|$ 替换为 $\sqrt{s^2+\epsilon^2}$。参数 ϵ 越小，近似结果就越接近精确饱和函数（见图1）。

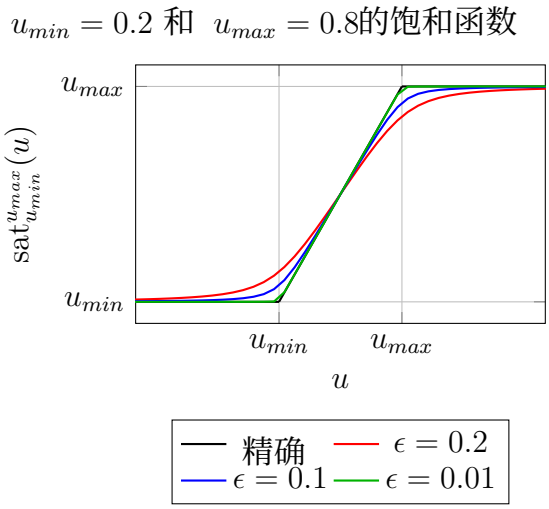


图1：饱和函数：精确值与平滑近似

第二种方法：机会约束 第二种方法要求不等式约束（13）以高于某个给定阈值的概率得到满足。下面说明这种机会约束为何适用于统计线性化方法。具体而言，考虑如下机会约束：

$$\Pr[a^\top x_t \leq c] \geq p, \tag{21}$$

其中 $a \in \mathbb{R}^5$， $c \in \mathbb{R}$，以及 $p \in (0, 1)$ 是选定的概率阈值。在此公式中，概率 Pr 应根据过程 x_t 解（16）的概率分布进行计算。现在，统计线性化方法的基本原理是：将 x_t 的分布近似为正态分布，其均值和协方差是统计线性化（18）的状态变量 $m(t)$ 和 $P(t)$（关于该近似的解释，请参见 18）。对于此类分布，机会约束（21）可写为

$$a^\top m + \Psi^{-1}(p)\sqrt{a^\top P a} \leq c,$$

其中， Ψ^{-1} 是正态分布的逆累积分布函数。因此，在统计线性化的框架下，随机过程的机会约束被转换为状态约束。

按照这一方法，我们将 u_{FB} 上的范数约束重新表述为关于（16）的解的如下机会约束：对于每个 $t \in [0, t_f]$，均有

$$\Pr(\|u_{FB}(x_t, \nu)\| \in [u_{min}, u_{max}]) = \Pr((\rho + K_n \overline{x}_t) \in [u_{min}, u_{max}]) \geq p,$$

其中， p 是所选阈值。通过将这些约束替换为统计线性化上的状态约束，我们最终构造出以下鲁棒运动规划问题。

问题 6 （机会约束鲁棒运动规划）。

$$\min_{\nu, t_f} \quad -m_\mu(t_f) + \mathrm{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \mathrm{tr}(QP(t))dt$$

在以下约束条件下：

- $(m, P)(\cdot)$ is solution of (18) with $(m, P)(0) = (m^0, P^0)$;
- $\forall t \in [0, t_f]$ 成立

$$\begin{cases} u_{max} - (\rho(t) + K_n(t)\overline{m}(t)) \geq \Psi^{-1}(p)\sqrt{K_n(t)\overline{P}(t)K_n(t)^\top}, \\ (\rho(t) + K_n(t)\overline{m}(t)) - u_{min} \geq \Psi^{-1}(p)\sqrt{K_n(t)\overline{P}(t)K_n(t)^\top}, \end{cases}$$

  其中， $\overline{m}$ 表示 m 的前四个分量，而 $\overline{P}$ 表示由 P的前四行和前四列构成的矩阵；

- $m(t_f) \in \mathcal{S}$.

请注意，由于同时考虑了关于均值和协方差的额外混合约束，因此该公式的数值处理可能代价高昂。

备注 6。 上述问题的解 $\nu(\cdot)$ 只能保证约束 $u_{min} \leq \|u_{FB}\| \leq u_{max}$ 以一定概率得到满足。因此，在使用该控制律 $\nu(\cdot)$ 对随机模型（16）进行仿真时，必须对包含饱和特性的系统进行建模（例如第一种方法中定义的函数 $f_{\mathrm{sat}FB}$），以强制执行器遵守物理限制。

4.4 数值结果

本节给出一些数值结果，以展示问题 4–6的求解结果。计算采用直接法，通过对所考虑的最优控制问题进行时间离散化，并使用包含 150 个节点的网格以及 CasADi 工具箱[1]（结合 IPOPT 求解器）完成。随后，将求得的开环最优控制作为输入，用于仿真具有随机不确定性的随机动态模型。进行仿真时，按照精确表达式（20）对输入控制施加饱和，以强制满足执行器限制。

属性	值
T	$1e6N$
u_{min}	0.2
u_{max}	0.8
q	$300kgs^{-1}$
g_0	$9.81ms^{-2}$
r^0	(1000, 4000)m
v^0	$(-75, -200)ms^{-1}$
μ^0	$40000kg$

属性	值
g	diag(0, 0, 100, 10, 0)N
P^0	diag($100m^2$, $100m^2$, $1m^2s^{-2}$, $1m^2s^{-2}$, $1600kg^2$)
Q	diag(10, 50, 1, 10, 0).10^3
Q_f	diag(14, 20, 0.2, 4, 0).10^3

表 1：仿真设置

动力学（12）中的参数和仿真设置列于表 1。初始均值状态为 (r^0, v^0, m^0)。我们假设初始位置和速度的测量值相当准确，而初始质量的测量精度较低，因此设置为 P^0。沿轨迹运动时，动力学受到气动效应引起的扰动，其建模方式为标准差取决于质量的白噪声$g = \frac{\sigma}{\mu}$。此外，三个所考虑问题中的非负对称矩阵 Q 和 Q_f 均设为相同的值。我们不对质量协方差进行惩罚，因为位置和速度是实现精确着陆并确保安全所关注的量。

图2 展示了由问题 14 的控制解生成的动力学 ($||u||$) 轨迹解的蒙特卡洛样本。右图展示了最优控制的范数，其形式为最小-最大。左图展示了仿真轨迹。我们清楚地观察到，尽管位置协方差在代价中受到强烈惩罚，但它仍随时间增大，这似乎证实了采用此种表述时存在可达性不足的问题。末状态标准差为 $\overline{P}(t_f)$ $=(29.7m, 58.6m, 1.3ms^{-1}, 5.2ms^{-1})$，确实大于初始协方差。注意，终止时间 t_f 为 $26.4s$。

图 3展示了动力学 (16) 的轨迹解，这些轨迹由问题 6 的控制解生成，且 $p = 0.99$。反馈增益在代价中受到惩罚，以使问题正则化：

$$\min_{\nu, t_f} \quad -m_\mu(t_f) + \mathrm{tr}(Q_f P(t_f)) + \int_0^{t_f} \mathrm{tr}(QP(t)) + 2\|K_n(t)\|^2 + \|K_d(t)\|^2 dt. \tag{22}$$

控制范数 $\|u\|$的形状类似于最大-最小-最大控制，只是在实际执行器限制方面增加了裕度，即 u_{min} 和 u_{max}。我们观察到，离散度在整个

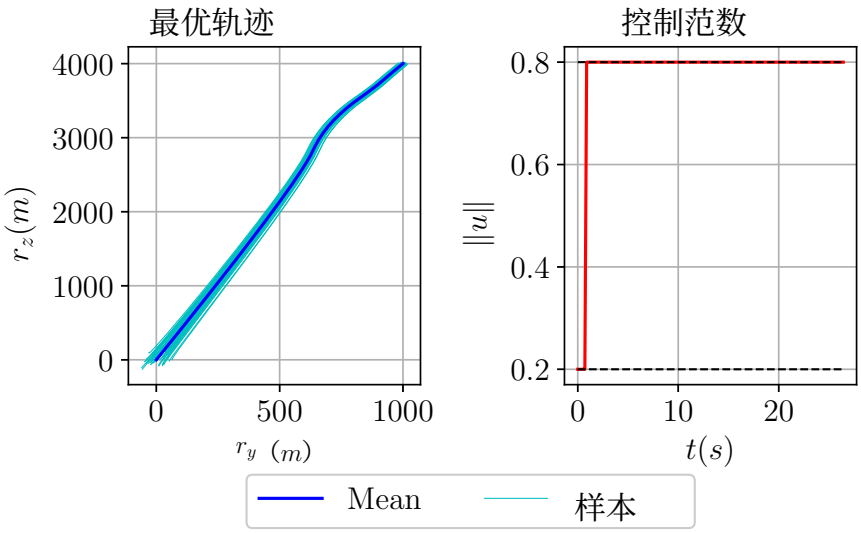


图2：采用确定性控制、使协方差最小化的随机轨迹仿真

轨迹中都得到了控制，符合要求。末状态标准差为 $\overline{P}(t_f)$ =(5.2m, 5.8m, 0.5m/s, 0.5m/s)，小于初始协方差。终止时间为 34.4s，远高于先前设置下的终止时间。原因如下。在不具备可达性的情况下，缩短终止时间是最小化末端协方差的唯一途径。相反，得益于部分反馈，在提供鲁棒性的同时，控制可以保持更接近燃料最优解。

图4展示了动力学（16）的轨迹解，这些轨迹由问题5的控制解生成，并采用部分反馈，同时将执行器限制作为模型中的饱和处理。平滑参数 ϵ 设为0.02。代价仍由（22）表示。末状态标准差为$\overline{P}(t_f)$ =(4.7m, 4.7m, 0.4m/s, 0.7m/s)，其范数甚至小于由机会约束公式得到的解的范数。终止时间（34.7s）与采用机会约束得到的结果非常接近。值得注意的是，两种反馈方法得到的控制量在形状和持续时间上非常相似，不同之处在于，采用平滑饱和近似得到的控制量更平滑，因此控制范数 $||u||$的余量更大。

最后，第四组图（图5）显示了统计线性化产生的相对误差。这些结果是通过使用19中的控制解对饱和反馈线性化动力学进行仿真得到的

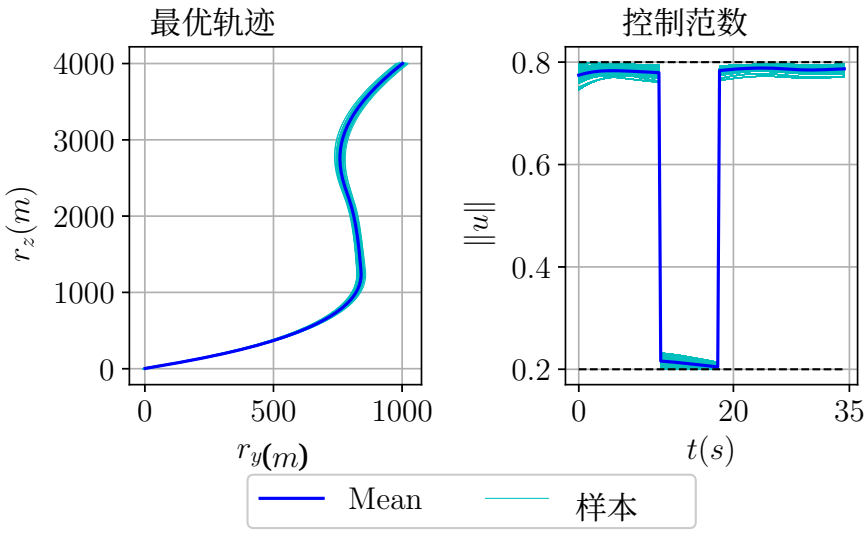


图 3：通过反馈动力学和机会约束，使协方差最小化的随机轨迹仿真

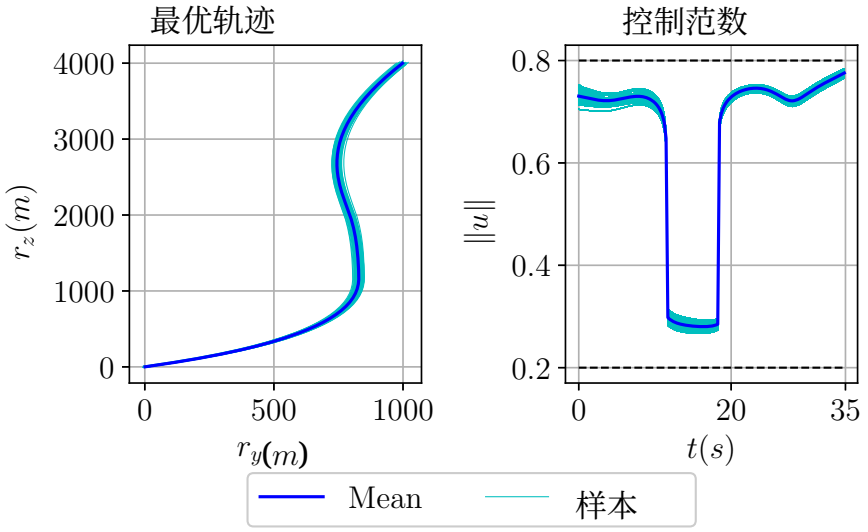


图4：通过平滑饱和的反馈动力学，仿真了使协方差最小化的随机轨迹

问题5. 真实均值和协方差的近似值通过蒙特卡洛估计获得，使用了 1000 条动力学方程的样本轨迹解

(16)。因此，由于均值和协方差上的误差均保持有界，我们可以推断，统计线性化的估计是一致的。

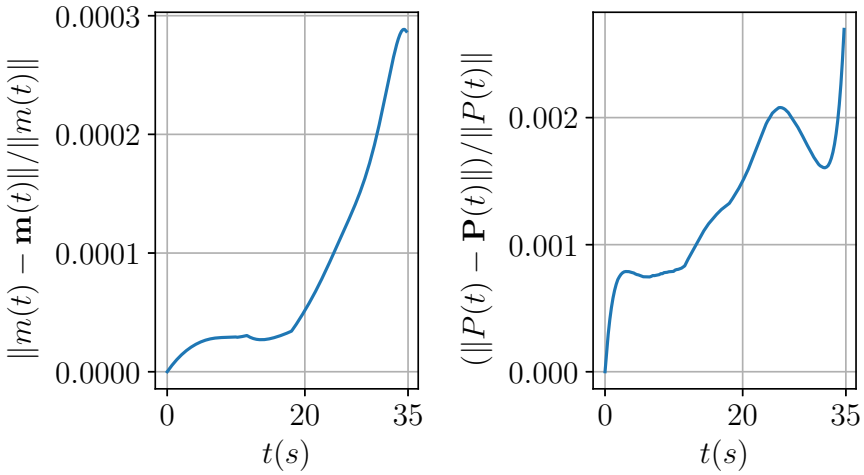


图 5：均值和协方差统计线性化估计的相对误差

5 结论与展望

我们提出了一种随机鲁棒运动规划方法，该方法利用统计线性化，将原始问题近似为关于原始状态变量的均值和协方差的确定性最优控制问题。我们通过统计线性化所导致的近似误差的理论界，以及航天器动力下降的数值实验，论证了该方法的有效性。

我们提出了未来研究的三个主要方向。首先，我们将研究如何把统计线性化近似误差理论界限推广到更一般的情形，例如扩散项显式依赖于状态变量的随机系统。其次，我们将考虑把第 3.2 节中的可控性结果推广到超出控制线性系统的情形；这一后续结果的一个直接应用可能是随机微分方程的可控性。第三，我们将重点把所提出的方法应用于其他领域，例如自主车辆和空间机器人的随机鲁棒运动规划。

参考文献

[1] J. A. E. Andersson、J. Gillis、G. Horn、J. B. Rawlings 和 M. Diehl。CasADi——用于非线性优化和最优控制的软件框架。《数学规划计算》，11(1):1–36，2019年。[2] K. Berntorp、A. Weiss、C. Danielson、I. V. Kolmanovsky 和 S. D. Cairano。自动驾驶：利用正不变集进行安全运动规划。发表于*2017*年 *IEEE* 第*20*届国际智能交通系统会议（*ITSC*）。IEEE，2017年10月。[3] B. Berret 和 F. Jean。随机系统最优开环控制的高效计算。《自动化》，115:108874，2020年。[4] B. Berret 和 F. Jean。作为通过肌肉共同收缩进行力与阻抗规划理论的随机最优开环控制。《公共科学图书馆计算生物学》，16(2):e1007414，2020年。[5] E. Bertin、B. Hérissé、J. A. dit Sandretto 和 A. Chapoutot。用于最优控制问题验证的时空约束 zonotope。发表于*2021*年 *IEEE* 第*60*届决策与控制会议（*CDC*），第6708–6713页，2021年。[6] L. Blackmore。太空火箭的自主精确着陆。《桥梁》，46(4):15–20，2016年1月。[7] F. Blanchini。控制中的集合不变性。《自动化》，35(11):1747–1767，1999年11月。[8] R. Bonalli、C. Leparoux、B. Hérissé 和 F. Jean。关于随机控制中统计线性化的可达性与可控性：代数秩条件及其一般性，2022年。[9] A. Censi、D. Calisi、A. D. Luca 和 G. Oriolo。用于不确定条件下最优运动规划的贝叶斯框架。发表于*2008*年 *IEEE* 国际机器人与自动化会议。IEEE，2008年5月。[10] Y. Chen、T. Georgiou 和 M. Pavon。线性随机系统状态统计量的最优控制。发表于 *IEEE* 决策与控制会议，2015年。[11]L. Cheng、H. Wen 和 D. Jin。基于切比雪夫区间法的动力下降制导不确定参数分析。《航天学报》，162:581–588，2019年9月。

[12] C. Danielson、K. Berntorp、A. Weiss 和 S. D. Cairano。利用不变集运动规划器，在存在扰动的情况下为不确定系统进行鲁棒运动规划。*IEEE* 自动控制汇刊，65(10):4456– 4463，2020年10月。[13] J. Darlington、C. Pantelides、B. Rustem 和 B. Tanyi。降低不确定性下决策中开环最优解的敏感性。《欧洲运筹学杂志》，121(2):343–362，2000年。[14] I. Elishakoff 和 S. H. Crandall。随机线性化技术的六十年。《力学》，52(1-2):299–305，2016年3月。[15]M. Ganet-Schoeller 和 A. Brunel。运载火箭一级回收的最优制导。载于第*21*届*IFAC*航空航天自动控制研讨会（*ACA*），第52卷，第532–537页。Elsevier，2019年。[16] Gazzola, Filippo 和 Marchini, Elsa M. 无人机着陆问题的最短时间最优控制。*ESAIM: COCV*，27:99，2021年。[17] A. Hotz 和 R. Skelton。协方差控制理论。载于*IEEE* 决策与控制会议，1985年。[18] V. J urdjevic。几何控制理论。剑桥大学出版社，2012年。[19] M. La mbert、S. Chewi、F. Bach、S. Bonnabel 和 P. Rigollet。通过 Wasserstein梯度流进行变分推断，2022年。[20] C. Leparoux、B. Hérissé 和 F. Jean。具有控制与状态约束的行星着陆最优控制结构。*ESAIM: COCV*，28:67，2022年。[21] P. Lu。推进剂最优动力下降制导。《制导、控制与动力学杂志》，41(4):813–826，2018年。[22] D. Malyuta、Y. Yu、P. Elango 和 B. Açıkmeşe。航天器控制轨迹优化的进展。《控制年度评论》，52:282–315，2021年。[23] J. Meditch。月球软着陆最优推力规划问题。*IEEE* 自动控制汇刊，9(4):477–484，1964年10月。

[24] Z. K. Nagy 和 R. D. Braatz。利用分布分析和最坏情况分析，对批处理过程进行开环和闭环鲁棒最优控制。过程控制杂志，14(4):411–422，2004年。[25] R. Pepy、M. Kieffer 和 E. Walter。应用于移动机器人的可靠鲁棒路径规划。《应用数学与计算机科学国际期刊》，19(3):413–424，2009年9月。[26] M. Plooij、W. Wolfslag 和 M. Wisse。具有摩擦模型不确定性的机械臂鲁棒前馈控制。《机器人与自主系统》，70:83–91，2015年。[27] J. Ridderhof 和 P. Tsiotras。存在随机扰动时的最小燃料动力下降。载于*AIAA* 科技论坛，2019年。[28] J. B. Roberts 和 P. D. Spanos。随机振动与统计线性化。Courier Corporation，2003年。[29] B. Rustem。非线性经济系统的随机与鲁棒控制。《欧洲运筹学杂志》，73(2):304–318，1994年。[30] M. Sain。基于最小方差准则的线性系统控制——一种处理扰动问题的新方法。*IEEE* 自动控制汇刊，11(1):118–122，1966年。[31] D. P. Scharf、B. Açıkmeşe、D. Dueri、J. Benito 和 J. Casoliva。机载动力下降制导的实现与实验演示。《制导、控制与动力学杂志》，40(2):213–229，2017年2月。[32] K. Seywald 和 H. Seywald。去敏最优控制。载于*AIAA* 科技论坛，2019年。[33] H. Shen、H. Seywald 和 R. W. Powell。降低火星精确着陆最小燃料动力下降的敏感性。《制导、控制与动力学杂志》，33(1):108–115，2010年1月。[34] L. Socha。随机动态系统的线性化方法，第730卷。Springer Science & Business Media，2007年。[35] J. Vehí、I. Ferrer 和 M. Á. Sainz。区间分析在鲁棒控制中的应用综述。载于第*15*届*IFAC*世界大会，第35卷，第389–400页。Elsevier，2002年。

[36] Z. Yu、P. Cui 和 J. L. Crassidis。火星精确着陆导航与制导技术的设计和优化：回顾与展望。《航空航天科学进展》，94:82–94，2017年10月。