通过 TSP*求解小直径图上的距离约束标记问题

Tesshu Hanaka信息学系 九州大学福冈，日本
h
anaka
@inf.kyushu-u.ac.jp

Hirotaka Ono数学信息学系 名古屋大学名古屋，日本 ono@nagoya-u.jp

Kosuke Sugiyama数学信息学系 名古屋大学名古屋，日本
s
ugi
yama.kousuke.k3@s.mail.nagoya-u.ac.jp

arXiv:2303.01290v1 [cs.DS] 2 Mar 2023

摘要——对于无向图 $G=(V,E)$ 和一个 k-非负整数向量 $\boldsymbol{p}=(p_1,\ldots,p_k)$，映射 $l\colon V\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ 称为 G 的 $L(\boldsymbol{p})$-标记，如果对于距离为 d 的任意两个不同顶点 u、$v\in V$，都有 $|l(u)-l(v)|\geq p_d$；而 $\{l(v)\mid v\in V\}$ 的最大值称为 l 的跨度。最初，G 的 $L(\boldsymbol{p})$-标记（其中 $\boldsymbol{p}=(2,1)$）是在无线电网络中的频率分配背景下提出的：“接近”的发射机必须获得不同的频率，而“非常接近”的发射机所获得的频率至少要相差两个频率，以避免干扰。G的 $L(\boldsymbol{p})$-标记问题，是在 $L(\boldsymbol{p})$-标记中寻找最小跨度 λ_p的问题；对于每个非零$\boldsymbol{p}$，该问题都是 NP难的。对于特定的 $\boldsymbol{p}$，$L(\boldsymbol{p})$-标记问题已经得到了广泛研究；特别是，针对 $\boldsymbol{p}=(2,1)$，或更一般地针对 $\boldsymbol{p}=(p,q)$，人们为一般图或受限图类提出了许多（精确或近似）算法。然而，大多数算法严重依赖于 $\boldsymbol{p}$ 的取值，因此通常难以将针对 $\boldsymbol{p}$ 的算法推广到针对另一 $\boldsymbol{p}'$ 的算法。在本文中，我们给出了小直径图上 $L(\boldsymbol{p})$-标记问题到度量（路径）TSP 的一个简单多项式时间归约，从而能够利用关于（度量）TSP 的大量已有结果。在实践方面，我们可以利用 Concordo 和 LKH 等各种高性能 TSP 启发式算法来求解该问题。在理论方面，我们可以看到，在这一框架下，对于任意 $\boldsymbol{p}$，该问题都可以获得 1.5-近似，并且可以通过 Held-Karp 算法在 $O(2^n n^2)$ 时间内求解，其中 n 表示顶点数，等等。

索引词—**频率分配、距离约束标号、 $L(p_1,..,p_k)$-标号、旅行商问题、图直径、参数化复杂性**

I. 引言

对于一个具有 n 个顶点和 m 条边的无向图 G，以及一个 k-非负整数向量 $\boldsymbol{p}=(p_1、\ldots\ldots、p_k)$，若映射$l$: $V\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ 满足：对于任意两个不同的顶点 u、$v\in V$，只要它们之间的距离为 d，就有 $|l(u)-l(v)|\geq p_d$，则称其为 G 的 $L(\boldsymbol{p})$-标记。$\{l(v)\mid v\in V\}$ 的最大值称为 l 的跨度。Hale [18] 和 Roberts [30] 在无线电网络频率分配的背景下提出了 $\boldsymbol{p}=(2、1)$ 的 $L(\boldsymbol{p})$-标记概念：彼此“接近”的发射机必须分配不同的频率，而彼此“非常接近”的发射机所分配的频率至少要相差两个频率，以避免干扰。$L(\boldsymbol{p})$-标记问题是指在 $\lambda_{\boldsymbol{p}}$ 的所有 $L(\boldsymbol{p})$-标记中，寻找最小跨度的问题 G，该问题对于每个非零 $\boldsymbol{p}$ 都是 NP难的。由于 $L(\boldsymbol{p})$-标记问题对于 $k=1$ 而言就是普通着色问题，因此研究 $k\geq 2$ 的 $L(\boldsymbol{p})$- 标记问题时，相关情形至关重要。特别是，$\boldsymbol{p}=(p_1、p_2)=(p、q)$ 的问题称为 $L(p、q)$-标记问题，已得到广泛而深入的研究。

在 (p,q) 的无限多种情形中，$L(2,1)$-标号研究得最为广泛。研究表明，即使对于受限图类，例如平面图、二分图、弦图、直径为 2 [17], 的图以及树宽为 2 [13]的图，$L(2,1)$-标号仍然是NP难的。相比之下，目前已知能够在多项式时间内求解的图类只有少数。例如，对于路径、环、轮图、余图和树，$L(2,1)$-标号可以在多项式时间内求解。这些算法要么直截了当（路径、环、轮图），要么高度依赖图的性质（余图和树）。事实上，树宽为2的图上的NP难性意味着，树上（树宽为1的图）的多项式时间可解性依赖的并非类树结构，而是树结构本身；将树上的算法扩展或推广到树的超类可能很困难。请注意，[21] 针对树的算法相当复杂，尽管其运行时间为线性。此外，如果 p 和 q 没有公约数，那么即使在树上，$L(p,q)$-标号也是NP难的。

针对难解问题的另一个研究方向，是设计基底或指数较小的精确指数时间算法。例如，Junosza-Szaniawski 等人 [25] 提出了一个用于 $L(2,1)$-标记的算法，其运行时间为 $O(2.6488^n)$，目前这是最快的算法。该算法利用了指数规模的内存。当前使用多项式空间解决 $L(2,1)$-标记的最快精确算法由 Junosza-Szaniawski 等人 [26],提出，其运行时间为 $O(7.4922^n)$。这些算法专门用于 $L(2,1)$-标记。作为更通用的算法，Cygan 和 Kowalik 提出了一种针对更一般标记问题的精确算法，称为信道分配问题。该算法将快速泽塔变换与容斥原理结合起来 [11]。该算法可在 $O^*((\max\{p,q\}+1)^n)$ 时间内求解$L(p,q)$-标记，并可在 $O^*(3^n)$ 时间内求解 $L(2,1)$-标记，其中 O^* 记号中省略了多项式因子。

*本研究部分得到日本学术振兴会科研费资助，项目编号为 JP20H05967、JP21H05852、JP21K19765、JP21K17707、JP22H00513。

总而言之， $L(\boldsymbol{p})$-标记在算法设计领域得到了充分研究，但大多数已开发的算法都是针对 $\boldsymbol{p}$ 和图类定制的，因此很难将其推广。

A. 我们的贡献

本文研究小直径图上的 $L(\boldsymbol{p})$-标记问题，该问题已知为NP-难问题。我们的方法很简单：通过旅行商问题来求解。具体而言，我们的主要贡献是，在假设 $p_{\max} \leq 2p_{\min}$ 的条件下，将图 G 上的 $L(\boldsymbol{p})$-标记问题（其中图的直径至多为 $\boldsymbol{p}$ 的维数，即 k）归约为 $O(nm)$ 时间的度量路径旅行商问题（TSP），其中 $p_{\min} = \min\{p_1, \ldots, p_k\}$ and $p_{\max} = \max\{p_1, \ldots, p_k\}$。值得注意的是，研究最广泛的情形 $\boldsymbol{p} = (2,1)$ 满足这一条件。尽管这一归约仅适用于直径较小且满足上述条件的图，但它使我们能够利用（度量）旅行商问题的大量研究成果。

在实际应用方面，由于已有许多实用的（度量）旅行商问题算法，只需稍作修改，便可将其用于求解小直径图上的 $L(\boldsymbol{p})$-标记问题。例如，针对对称旅行商问题的Lin-Kernighan 启发式算法 [29] 及其变体已知性能出色，并且已有若干优秀的实现 [1], [24]。在实际应用中，可以将这些实现作为求解我们问题的引擎。

在理论方面，该归约带来了若干具有性能保证的算法，例如，当输入图的直径至多为k 且满足 $p_{\max} \leq 2p_{\min}$时，用于 $L(\boldsymbol{p})$-标记的 $O(2^n n^2)$-时间算法和 1.5-近似算法。这两个结果都表明，较小的直径以及 $\boldsymbol{p}$ 这一设定可能会使问题更易处理；目前仅已知一般图上的 $L(p,\ q)$-标记可以在 $O^*((\max\{p,q\}+1)^n)$时间内求解，并且可在多项式时间内得到 $O(\min\{\Delta, \sqrt{n}+p/q\})$-近似，其中 Δ 为最大度。特别地，在 $k = 2$的情况下，我们的归约将该问题（即 $L(p,\ q)$-标记）归约为具有两种边权的路径旅行商问题，而该问题可以通过路径划分求解。由于已知对于模块宽度为 [16],的情形，路径划分是固定参数可解的，因此我们的问题也是如此。另一方面，我们指出，对于直径为 2 的图， $L(p,\ q)$-标记关于团宽度是 W[1]-难的，这或许揭示了固定参数可解性与不可解性之间的界限。

顺带一提，我们可以证明，对于模块宽度参数，一般图上的 $L(1, \ldots, 1)$-标记是固定参数可解的。尽管一般情况下，模块宽度参数下 $L(p,\ q)$-标记的参数化复杂性仍未解决，但根据 $L(1, \ldots, 1)$-标记的固定参数可解结果， $L(\boldsymbol{p})$-标记在模块宽度参数下可在固定参数可处理时间内实现 $p_{\max}$-近似。

B. 相关工作

1）距离约束标号：距离约束标号这一概念最初可追溯至 Hale [18] 和 Roberts [30] 关于频率分配的研究。在频率分配中，“接近”的发射机必须使用不同的频率，而“非常接近”的发射机所用频率之间至少要相差两个频率，以避免干扰。随后，Griggs 和 Yeh 在 [17] 中正式提出了 $L(p,\ q)$-标记的概念。由于 p 和 q 可以是任意自然数，因此 $L(p,\ q)$-标记有无穷多种设定，但研究最多的是 $L(2,\ 1)$-标记。其中一个原因是更一般的频率分配背景，因为上述设定可解释为 $L(2,\ 1)$-标记。在频率分配的背景下，考虑 $p \geq q$ 的设定是很自然的。此外， $q = 1$ 也可能是自然的，因为它决定了单位。 $L(2,\ 1)$ 最受欢迎的另一个原因是，在 $L(p,\ q)$-标记所代表的各种设定中， $p = 2$ 和 $q = 1$ 的设定似乎最为自然且基础。事实上， G 的 $L(1,\ 1)$-标记等价于其平方图上的普通着色；我们无需以这个名称研究 $L(1,\ 1)$-标记本身。

如前几节所述， $L(p,\ q)$-标记问题，特别是 $L(2,\ 1)$-标记问题，即使在受限图类上也是 NP难的。因此，人们针对特定图类开发了多项式时间算法和精确指数时间算法。这里我们列出此前未提及的其他结果。关于近似， $L(p,\ q)$-标记问题的近似因子不可能优于 $n^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$，除非 P=NP。另一方面，存在一个渐近紧的 $O(\min\{\Delta, \sqrt{n}+p/q\})$-近似算法，其中 Δ 是 G [19] 的最大度。

对于参数化复杂性而言，当参数为顶点覆盖数与 [14], 团宽度加最大度，或孪生覆盖数加最大团大小 [20]时， $L(2,\ 1)$-标记问题是固定参数可解的。尽管研究 $L(1, \ldots, 1)$-标记（下文记作 $L(1)$-标记）在这个名称下并非那么重要，$L(1)$-标记可用于近似 $L(\boldsymbol{p})$-标记； $L(1)$-标记可对 $L(\boldsymbol{p})$-标记给出$p_{\max}$-近似， $p_{\max} = \max_{d \in [k]} p_d$。因此，我们关注 $L(1)$-标记或图幂着色的复杂性。已知$L(1,\ 1)$-标记对于树宽 [14], 是 W[1]-困难的，尽管普通着色是固定参数可处理的；但 $L(1)$-标记对于团宽 [31], 属于 XP，这意味着它对于树宽也属于 XP。Hanaka 等人还证明，当参数为孪生覆盖数 [20] 时， $L(1,\ 1)$-标记是固定参数可解的。

广义设置 $L(\boldsymbol{p})$ 也得到研究，但不太常见。Bertossi 和 Pinotti 提出了适用于树和区间图的 $L(\boldsymbol{p})$-标记近似算法 [5]。对于邻域多样性 $p_{\max}$， $L(\boldsymbol{p})$-标记是固定参数可解的，另加 k [12]。关于 $L(\boldsymbol{p})$- 标记的更多相关工作可参见以下综述 [7], [22]。

2)（度量路径）旅行商问题：旅行商问题（TSP）可能是从实践和理论角度来看研究最多的组合优化问题。因此，这里仅列出其中的一些结果。

在实际应用方面，长期以来，大量研究致力于开发旅行商问题的高效算法。例如，如前所述，

Lin-Kernighan 型算法的实现 [29] 性能卓越，甚至有报告指出 2003 [3] ，链式 Lin-Kernighan 的一种实现能够持续为包含 100,000 个或更多城市的实例找到近似最优解。此外，Concorde 和 LKH 等一些实现 [1], [2],可在网上获取。相关研究仍在继续，并且仍有改进成果不断发表 [33], [37]。

在理论方面，旅行商问题从多个角度得到了研究。例如，1962 [4], [23],提出了时间复杂度为 $O^*(2^n)$的 Held-Karp 算法，而对于某些 $c < 2$ ，时间复杂度为 $O^*(c^n)$的精确算法是否存在，仍是一个开放问题 [35]。在近似方面，除非 P=NP，否则一般对称旅行商问题不存在近似算法；而 METRIC TSP 是旅行商问题的一个受限版本，其边权重满足三角不等式，已知可通过 Christofides 算法实现 1.5 近似 [9]。最近，一种随机化算法略微改进了这一界限，其近似比至多为 $1.5 - 10^{-36}$ [27]。请注意，我们的归约目标不是 METRIC TSP，而是 METRIC PATH TSP。直接将 METRIC TSP 的算法用于 METRIC PATH TSP，无法保留近似保证；不过，已有研究证明，对于任意$\varepsilon > 0$ [34]，可利用旅行商问题的 α近似算法，得到一个$(\alpha + \varepsilon)$近似的路径旅行商问题解。对于 METRIC PATH TSP，Zenklusen 最近给出了一种确定性 1.5 近似算法 [36]。通过结合关于 [27] 和 [34], 的结果，一种随机化算法可以得到近似比略优于 1.5 的近似解。

II. 预备知识

A. 符号说明

设 $G = (V, E)$ 为一个无向连通图，其中 $n = |V|$ and $m = |E|$。图 G 中两个顶点 u, v 之间的距离记为 $\mathrm{dist}_G(u, v)$。 G 的直径定义为 $\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v \in V} \mathrm{dist}_G(u, v)$。对于顶点 $v \in V$，我们用 $N_G(v) = \{u \in V \mid \{u, v\} \in E\}$ 表示 G 中与 v 相邻的顶点集合。对于顶点子集 $S \subseteq V$， $G[S]$ 表示由 S 诱导的子图。 G 的补图记为 $\overline{G}$。此外，图 G 的 k 次幂记为 G^k。给定一个正整数 k，我们定义 $[k] = \{1, 2, \ldots, k\}$。对于整数向量 $\boldsymbol{p} = (p_1, \ldots, p_k)$，我们定义 $p_{\min} = \min\{p_1, \ldots, p_k\}$ 和 $p_{\max} = \max\{p_1, \ldots, p_k\}$。设 $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$ 为一个每个元素均为 1 的向量。

B. 图参数

顶点子集 $M \subseteq V$ 是图 G 的模，当且仅当 u, v 中的任意一对在 M 中都满足 $N_G(u) \setminus M = N_G(v) \setminus M$。

定义 1（模块宽度）。图 $G = (V, E)$ 的模块宽度至多为 ℓ (≥ 2)，当且仅当满足以下条件之一：*(i)* $|V| \leq \ell$；或 *(ii)* 存在 V 的划分 $(V_1, \ldots, V_\ell)$，使得对每个$i \in [\ell]$， V_i 都是一个模，且 $G[V_i]$ 的模块宽度至多为ℓ。使 G 的模块宽度至多为 ℓ 的最小 ℓ 记为$\mathtt{mw}(G)$。

存在一个多项式时间算法，可以计算 $\mathrm{mw}(G)$ 及其分解 [32]。

定义 2 (邻域多样性)。图 $G = (V, E)$的邻域多样性至多为 ℓ ，如果存在 V 的一个划分$(V_1, \ldots, V_\ell)$，使得对于每个 $i \in [\ell]$， V_i 中的任意一对顶点 u, v 都满足 $N_G(u) \setminus \{v\} = N_G(v) \setminus \{u\}$。最小的 ℓ 记为 $\mathrm{nd}(G)$。

注意，定义 2 中每个 V_i 都是 G 的模，并且它构成一个独立集或一个团。与模宽类似，存在一个多项式时间算法来计算 $\mathrm{nd}(G)$ 及其划分 [28]。

命题 1. 对于任意图 $G = (V, E)$，均有 $\mathtt{mw}(G) = \mathtt{mw}(\overline{G})$。

证明。只需证明：如果 G 的模块宽度至多为 ℓ，那么 G 的模块宽度至多为 ℓ。我们通过对顶点数 n 进行归纳法来证明这一断言。首先，如果 $n \leq \ell$，那么 G 和 $\overline{G}$ 显然都满足条件 (i)，因此该断言成立。

接下来，假设 $n > \ell$ ，并且对于顶点数小于 n 的任意图，该断言均成立。令 $(V_1, \ldots, V_t)$ 为 V 的一个划分，使得每个 V_i 都是一个模，且 $G[V_i]$ 的模块宽度至多为 ℓ。注意， $t \leq \ell$。那么，对于每一对 u， $v \in V_i$，有：

$$\begin{aligned} N_{\overline{G}}(u) \setminus V_i &= (V \setminus N_G(u)) \setminus V_i \\ &= (V \setminus N_G(v)) \setminus V_i \\ &= N_{\overline{G}}(v) \setminus V_i. \end{aligned}$$

因此， V_i 是 G 的一个模。此外，由于 $G[V_i] = \overline{G}[V_i]$，根据归纳假设， $\overline{G}[V_i]$ 的模块宽度至多为 ℓ。因此， G 满足定义 1 的条件 (ii)。 □

命题 2。对于任意连通图 G （V, E），邻域多样性 （G^2） $\leq \mathtt{mw}$（G） 成立，其中 G^2 是 G 的二次幂。

证明。如果 $|V| \leq \mathrm{mw}(G)$，则结论显然成立，因为 $\mathrm{nd}(G^2) \leq |V|$。否则，考虑 V 的一个划分 $(V_1, \ldots, V_\ell)$，使得对于每个 $i \in [\ell]$ （其中 $\ell \leq \mathrm{mw}(G)$），V_i 是一个模。由于 G 是连通的，任意模都至少与另一个模相邻，并且两个模之间的顶点完全相连；也就是说，对于两个模 V_i 和 V_j， $\{u, v\}$ 是 $u \in V_i$ 与 $v \in V_j$ 之间任意一对顶点的边。因此，一个模内任意一对顶点的距离至多为 2，从而每个模在 G^2 中构成一个团。此外，对于每一对 u、$v \in V_i$、$N_{G^2}(u) \setminus V_i = N_{G^2}(v)$，由 $N_G(u) \setminus V_i = N_G(v) \setminus V_i$ 可知。因此， $N_{G^2}(u) \setminus \{v\} = N_{G^2}(v) \setminus \{u\}$ 成立，这意味着 $\mathrm{nd}(G^2) \leq \mathrm{mw}(G)$。 □

最后，我们介绍 G 的团宽度 $\mathrm{cw}(G)$。与树宽、模块宽度和邻域多样性相比，团宽度是一种更一般的图参数。也就是说，如果某个问题对于树宽、模块宽度或邻域多样性不属于固定参数可处理，那么对于团宽度也不属于固定参数可处理。团宽度由类似树宽的某些树结构定义，但本文省略其详细定义。团宽度是一种研究十分深入的图

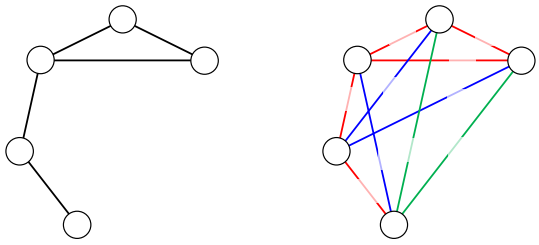

图 1. 在直径为 3 的 G 上进行 H for $L(p_1, p_2, p_3)$-标记的构造。

参数，已有许多相关结果。例如，余图是团宽度至多为 2 的图类。我们请读者参阅 [10]。为了在第四节证明以团宽度为参数时，在直径为 2 的图上进行 $L(2, 1)$-标记是 W[1]-难的，我们证明哈密顿路径是 W[1]-难的。

定理 1. 哈密顿路径 对于团宽度是 *W[1]*-难的。

证明。 我们将哈密顿圈归约到该问题；对于团宽度，该问题是 W[1]-难的 [15]。给定一个团宽度为 cw(G) 的图 $G = (V, E)$，任取顶点 v，并添加一个新顶点v'，使其与 $N(v)$ 中的顶点相邻。也就是说， v 和 v' 是两个假孪生点。接着，我们再添加两个顶点 w, w'，分别使它们与 v 和 v'相邻。不难看出， G 有哈密顿圈，当且仅当构造出的图 G' 有一条从 w 到 w'的哈密顿路径。由于在 G 中添加一个与某顶点互为假孪生点的顶点不会改变团宽度，而添加一个叶顶点至多使团宽度增加 2，因此 cw(G') $\leq$ cw(G) + 4 成立。证毕。

□

III. 主要结果

本节中，我们展示了从$L(\boldsymbol{p})$-标记到度量路径旅行商问题的多项式时间归约。路径旅行商问题是在边加权完全图上寻找权重最小的哈密顿路径的问题。此外，度量路径旅行商问题是路径旅行商问题的一个受限版本，其中输入图的边权重满足三角不等式。

定理 2. 如果图上直径至多为 k 的 $p_{\max} \leq 2p_{\min}$，$L(\boldsymbol{p})$-标记 问题可以在$O(nm)$ 时间内归约到度量路径 旅行商问题 。

证明. 首先，我们根据输入图 G 定义一个边加权完全图 $H = (V, \binom{V}{2}, w)$（见图 1）。对于一对顶点 u, $v \in V$，若 dist$_G(u, v) = d$，则 H 中 $\{u, v\}$ 的边权定义为 $w(u, v) = p_d$。注意，由于 diam(G) $\leq k$， $w(u, v)$是良定义的。此外，对每个 $d \in [k]$，根据 $p_d \leq 2p_{\min}$， $p_{\min} \leq w(u, v) \leq 2p_{\min}$ 成立，因此 w 满足三角不等式。

对于排列 $\pi\colon V \to [n]$，我们称 $L(\boldsymbol{p})$-标记 l 是一个 $L(\boldsymbol{p})$-标记，如果它满足 $l(\pi^{-1}(1)) \leq l(\pi^{-1}(2)) \leq \cdots \leq l(\pi^{-1}(n))$。我们将其记作 $\lambda_{\boldsymbol{p}}(G, \pi)$。

π 的所有 $L(\boldsymbol{p})$-标记中的最小跨度。这里我们注意到， π 的任意最小 $L(\boldsymbol{p})$-标记都满足 $l(\pi^{-1}(1)) = 0$。否则，我们可以得到另一个标记 l'，使得 $l'(\pi^{-1}(i)) = l(\pi^{-1}(i)) - 1$，这与 l 的极小性矛盾。

给定一个排列 π，设 l 是 π 上跨度 $\lambda_{\boldsymbol{p}}(G, \pi)$ 最小的 $L(\boldsymbol{p})$-标记。下文中，为简便起见，我们将 $v_i = \pi^{-1}(i)$ 和 $w_{i,j} = w(v_i, v_j)$ 分别记作.....。接下来，我们给出以下关键断言，它意味着 $l(v_i)$ 是 H 上路径 $(v_1, v_2, \cdots, v_i)$ 的长度（权重之和）。

断言1。 对于边加权完全图 H，标记 l 满足：对于任意 $i \in [n]$， $l(v_i) = \sum_{t=1}^{i-1} w_{t,t+1}$。

证明。我们对 i 使用归纳法证明该断言。基础情形下，有 $l(v_1) = 0$。此外，我们考虑 $i = 2$ 的情形。由于 l 是 π 的最小 $L(\boldsymbol{p})$-标记，因此满足 $0 = l(v_1) \leq l(v_2) \leq \cdots \leq l(v_n)$。由于 $0 = l(v_1) \leq l(v_2)$，我们有 $l(v_2) \geq l(v_1) + p_{\mathrm{dist}_G(v_1, v_2)} = w_{1,2}$。此外，由 $l(v_2) \leq \cdots \leq l(v_n)$ 以及 l 的极小性可得 $l(v_2) \leq w_{1,2}$。因此，当 $i = 2$ 时，该断言成立。

在归纳步骤中，假设该结论对每个$j \in [i-1]$都成立。根据 l 和 $l(v_1) \leq \cdots \leq l(v_n)$的极小性， v_i 的标签可表示为：

$$\begin{aligned} l(v_i) &= \min\left\{x \mid x \geq l(v_j) + p_{\mathrm{dist}_G(v_j, v_i)}, \forall j \in [i-1]\right\} \\ &= \min\left\{x \mid x \geq l(v_j) + w_{j,i}, \forall j \in [i-1]\right\} \\ &= \max_{j \in [i-1]} \left\{l(v_j) + w_{j,i}\right\}. \end{aligned}$$

对于每个 $j \in [i-2]$，均有

$$\begin{aligned} l(v_{i-1}) - l(v_j) &= \sum_{t=1}^{i-2} w_{t,t+1} - \sum_{t=1}^{j-1} w_{t,t+1} \\ &= \sum_{t=j}^{i-2} w_{t,t+1} \\ &\geq w_{i-2,i-1} \geq p_{\min}. \end{aligned}$$

此外，$w_{i-1,i} - w_{j,i} \geq p_{\min} - 2p_{\min} = -p_{\min}$ 成立。因此，对于任意 $j \in [i-2]$，有：

$$\begin{aligned} &\left(l(v_{i-1}) + w_{i-1,i}\right) - \left(l(v_j) + w_{j,i}\right) \\ &= \left(l(v_{i-1}) - l(v_j)\right) + \left(w_{i-1,i} - w_{j,i}\right) \\ &\geq p_{\min} - p_{\min} = 0. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} l(v_i) &= \max_{j \in [i-1]} \left\{l(v_j) + w_{j,i+1}\right\} \\ &= l(v_{i-1}) + w_{i-1,i} \\ &= \sum_{t=1}^{i-1} w_{t,t+1}. \end{aligned}$$

□

断言1意味着， $\lambda_{\boldsymbol{p}}(G, \pi) = l(v_n)$ 等价于 H 上哈密顿路径 π 的长度。由于 $\lambda_{\boldsymbol{p}}(G) =$

$\min_\pi \{\lambda_{\boldsymbol{p}}(G,\ \pi)\}$，在 H 上的路径旅行商问题等价于 G 上的 $L(\boldsymbol{p})$-标记。

最后，我们讨论该归约的运行时间。构造 H时，我们计算 G的距离矩阵。对每个顶点执行广度优先搜索，即可在 $O(nm)$时间内完成。然后，我们根据 G的距离矩阵构造 H 的加权邻接矩阵。显然，这可以在 $O(n^2)$时间内完成。因此，总运行时间为$O(nm)+O(n^2)\ =O(nm)$。

□

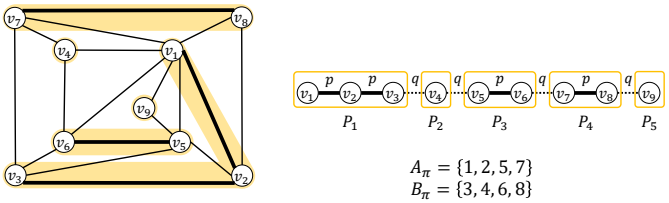

图2. 沿着 π、仅由权重为 p的边组成的路径 P_1、……、P_5对应于 G中的路径。

作为推论，应用上述归约后，分别使用 [23] 和 [36],中提出的度量路径旅行商问题算法，我们可以在$O(2^n n^2)$时间内获得最优解，并在多项式时间内获得1.5-近似解。

推论1. 若 $p_{\max} \le 2p_{\min}$，$L(\boldsymbol{p})$-标号 问题在直径至多为 k 的图上可在 $O(2^n n^2)$ 时间内求解。此外，该问题可在多项式时间内实现1.5 近似。

进一步观察表明，我们的问题对于模块宽度是固定参数可解的。

推论2. 直径至多为 *2* 的图上的 $L(p,q)$-标号问题 对于模块宽度是固定参数可解的。

证明。 设 G 是一个直径至多为 2 的图， H 是如定理 2 中所述由 G 得到的加权完全图。注意， H 中的边的权重为 p 或 q。

首先，我们考虑 $p \le q$ 的情形。对于 V 的一个排列 π，我们定义：

$$A_\pi = \{i \in [n-1] \mid w_{i,i+1} = p\}$$
$$B_\pi = \{i \in [n-1] \mid w_{i,i+1} = q\}.$$

注意，对于 $i \in A_\pi$， $\{\pi^{-1}(i)\ \pi^{-1}(i+1)\}$ 对应于 E 中的一条边。

由于 H 中的边的权重为 p 或 q，因此有如下等式：

$$\lambda_{\boldsymbol{p}}(G,\pi) = \sum_{i=1}^{n-1} w_{i,i+1} = \sum_{i\in A_\pi} p + \sum_{i\in B_\pi} q$$
$$= (n-1)p + (q-p)\,|B_\pi|\,.$$

因此，我们有 $\lambda_{\boldsymbol{p}}(G)\ =(n-1)p+(q-p)\min_\pi |B_\pi|$。由于 n, p, q是常数，对 G求解 $L(\boldsymbol{p})$-标记等价于寻找使 $|B_\pi|$ 在 H 上最小化的 π 。

这里，令 P_1、……、P_s为沿着 π的路径，使得每条 P_i仅包含权重为 p 的边（见图 2）。注意，某些 P_i 可能只有一个顶点。根据此类路径的定义，$s = |B_\pi| + 1$。我们观察到， P_i 中的边对应于 G中的边。因此，在 H 上最小化 $|B_\pi|$ 等价于路径划分问题，即将 V 划分为 G中的路径并使路径数量最小化的问题。该问题可在 $f(\mathrm{mw}(G))n^{O(1)}$ 时间内计算完成 [16]。

对于 $p > q$ 的情况，我们也可以通过在 G 的补图 $\overline{G}$ 上计算 PARTITION INTOPATHS，从而求解 $L(p,q)$-LABELING。由于根据命题 1，$\mathrm{mw}(G)\ =\ \mathrm{mw}(\overline{G})$，因此也可以在 $f(\mathrm{mw}(\overline{G}))n^{O(1)}$ 时间内完成计算。

□

IV. 相关结果

在上一节中，我们证明了对于直径为 2 的图， $L(p,q)$-LABELING 关于模块宽度是固定参数可解的。本节首先指出，即使对于直径为 2 的图， $L(2,1)$- LABELING 关于团宽度也是 W[1]-难的。

定理 3. $L(2,1)$-LABELING 对于直径为 *2* 的图而言，关于团宽度是 *W[1]*-难的。

证明。 在 [17], 中，Griggs 和 Yeh 给出了一个从哈密顿路径到直径为 2 的图上的 $L(2,1)$-LABELING 的归约。给定一个图 $G=(V,E)$，作为哈密顿路径问题的实例， $L(2,1)$-LABELING 的归约图通过取 G –的补图 $\overline{G}$ ，并添加一个与 V 中所有顶点相邻的全邻顶点 x 来构造。对于任意图 $\overline{G}$ [10] ，均有 $\mathrm{cw}(\overline{G}) \le 2\mathrm{cw}(G)$；而添加一个全邻顶点 x 至多使 G 的团宽度增加 1，因此 [17] 中归约图的团宽度至多为 $2\mathrm{cw}(G)\ +1$。证明完毕。

□

注意，对于直径为 2 的图， $L(1,1)$-标记可以直接求解，因为直径为 2 的图的图幂 G^2 是完全图。

关于模块宽度下 $L(p,q)$-标记的固定参数可解性，目前一般情况下仍悬而未决。另一方面，与 $L(p,q)$-标记不同，我们证明了一般图上的 $L(1,1)$-标记，甚至 $L(1)$-标记，都可以通过模块宽度实现固定参数可解。

定理 4. $L(1)$-标记 在一般图上关于模块宽度是固定参数可解的。

证明。 如前所述，对于任意图 G 和任意正整数 $k \ge 1$，均有 [12], $\mathrm{nd}(G) \ge \mathrm{nd}(G^k)$。根据命题 2，对于任意正整数 $k \ge 2$，有 $\mathrm{mw}(G) \ge \mathrm{nd}(G^2)\ \ge \mathrm{nd}(G^k)$。此外，在 G 上， $L(1)$-标记等价于在 G^k 上进行着色。我们知道，对于邻域多样性 [28]，着色是固定参数可解的。通过在 G^k 上求解着色，可以在 $f(\mathrm{mw}(G))n^{O(1)}$ 时间内计算出 $L(1)$-标记。

□

作为定理 4 的推论，我们得到一个针对 $L(\boldsymbol{p})$-标记问题的固定参数可处理近似算法，其参数为模块宽度。

推论 3. 存在一个针对一般图上的 $L(\boldsymbol{p})$-L标记 问题的 $p_{\max}$-近似固定参数算法，其参数为模块宽度。

证明。 对于任意常数 c， $\lambda_{c\boldsymbol{p}} = c\lambda_{\boldsymbol{p}}$ 均成立。因此，我们有 $\lambda_{\boldsymbol{p}} \leq \lambda_{p_{\max}\mathbf{1}} \leq p_{\max}\lambda_{\mathbf{1}}$。根据定理 4，我们得到一个关于模块宽度的 $p_{\max}$-近似固定参数算法。 □

参考文献

[1] “Concorde TSP 求解器”, http://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html，访问日期: 2023-02-11。[2] “LKH”，http://webhotel4.ruc.dk/~keld/research/LKH/，访问日期：2023-02-11。[3] D. Applegate、W. Cook 和 A. Rohe，“适用于大型旅行商问题的链式 Lin-Kernighan”，《INFORMS 计算学报》，第15卷，第1期，第82–92页，2003年。[4] R. Bellman，“旅行商问题的动态规划处理”，《ACM 杂志》，第9卷，第1期，第61–63页，1962年1月。 [在线]。可访问：https://doi.org/10 1145 321105 321111 。/。A. A. Bertossi 和 C. [5] M. Pinotti，“树和区间图的近似 l（δ1， δ2，...， δt）-着色”，《网络：国际期刊》，第49卷，第3期，第204–216页，2007年。[6] H. L. Bodlaender、T. Kloks、R. B. Tan 和 J. Van Leeuwen，“图的 λ-着色的近似”，《计算机杂志》，第47卷，第2期，第193–204页，2004年。[7] T. Calamoneri，“ L（h， k）-标记问题：最新综述与注释书目”，《计算机杂志》，第 54， 8， 1344 1371, 卷，第期，2011 [ ] 10 1093 第页–页。在线。可访问：https://doi.org/。/comjnl/bxr 037 [8] L 2, 1 G. J. Chang 和 D. Kuo，“图上的（ ）-标记问题”，《SIAM 离散数学杂志》，第9卷，第316页，1996年，第2期，第309页–页。[9] N. Christofides，“旅行商问题新启发式算法的最坏情况分析”，卡内基梅隆大学匹兹堡管理科学研究组，技术报告，1976年。[10] B. Courcelle 和 S. Olariu，“图的团宽上界”，《离散应用数学》，第101卷，第114页，2000年，第1期，第77页–页。[11] M. Cygan 和 Ł. Kowalik，“通过快速泽塔变换进行信道分配”，《信息处理快报》，第111卷，第15期，第727–730页，2011年。[12] J. Fiala、T. Gaven˘ciak、D. Knop、M. Kouteck`y 和 J. Kratochv´ıl，“距离标号与统一信道分配问题的参数化复杂性”，《离散应用数学》，第248卷，第46–55页，2018年。[13] J. Fiala、P. A. Golovach 和 J. Kratochv´ıl，“有界树宽图的距离约束标号”，载于《自动机、语言与编程国际研讨会》。施普林格，2005年，第360–372页。[14] J. Fiala、P. A. Golovach 和 J. Kratochv´ıl，“着色问题的参数化复杂性：树宽与顶点覆盖”，《理论计算机科学》，第412卷，第23期，第2513–2523页，2011年。 [在线]。可访问：https://doi.org/10 1016 2010 10 043 。/j.tcs。... F. V. Fomin、P. A. [15] Golovach、D. Lokshtanov 和 S. Saurabh，“团宽参数化的不可处理性”，《SIAM 计算杂志》，第39卷，第5期，第1941–1956页，2010年。[16] J. Gajarsk`y、M. Lampis 和 S. Ordyniak，“模块宽度的参数化算法”，载于《参数化与精确计算国际研讨会》。施普林格，2013年，第163–176页。[17] J. R. Griggs 和 R. K. Yeh，“带有距离2条件的图标号”，《SIAM 离散数学杂志》，第5卷，第4期，第586–595页，1992年。[18] W. K. Hale，“频率分配：理论与应用”，IEEE 会议录，第68卷，第12期，第1497–1514页，1980年。[19] M. M. Halld´orsson，“ L（h， k）-标记问题的近似”，《移动网络设计与创新国际期刊》，第1卷，第2期，第113–117页，2006年。[20] T. Hanaka、K. Kawai、H. Ono 和 Y. Uno，“利用组合参数计算 L（p, 1）-标记”，《图算法与应用杂志》，第26卷，第2期，第241–255页，2022年。[21] T. Hasunuma、T. Ishii、H. Ono 和 Y. Uno，“树的 L 2, 1 66， 3， 654 681, （ ）-标记的线性时间算法”，《算法学》，第卷，第期，第页–页。在线。可访问：https://doi.org/。/s---z 2013 [ ] 10 1007 00453 012 9657

[22] ——，“距离约束标记的算法方面：综述”，《国际网络与计算杂志》，第4卷，第2期，第251–259页，2014年。[23] M. Held 和 R. M. Karp，“排序问题的动态规划方法”，《工业与应用数学学会杂志》，第10卷，第1期，第196–210页，1962年。[24] K. Helsgaun，“Lin–Kernighan 旅行商启发式算法的有效实现”，《欧洲运筹学杂志》，第126卷，第1期，第106–130页，2000年。[25] K. Junosza-Szaniawski、J. Kratochv´ıl、M. Liedloff、P. Rossmanith 和 P. Rzazewski，“图的 L（2，1）-标记的快速精确算法”，《理论计算机科学》，第505卷，第42–54页，2013年。 [在线]。可访问：https://doi.org/10 1016 2012 06 037 。/j.tcs。... K. [26] Junosza-Szaniawski、J. Kratochvıl、M. Liedloff 和 P. Rzazewski，“在多项式空间中确定 L（2，1）-跨度”，《离散应用数学》，第161卷，第13–14期，第2052–2061页，2013年。[27] A. R. Karlin、N. Klein 和 S. O. Gharan，“一种（略有改进的）度量旅行商问题近似算法”，载于《第53届 ACM SIGACT 计算理论年会论文集》，系列：STOC 2021。美国纽约州纽约：计算机协会，2021年，第32–45页。[28] M. Lampis，“针对树宽限制的算法元定理”，《算法学》，第64卷，第1期，第19–37页，2012年。[29] S. Lin 和 B. W. Kernighan，“旅行商问题的有效启发式算法”，《运筹学》，第21卷，第2期，第498–516页，1973年。[30] F. S. Roberts，“图的 T-着色：最新结果与开放问题”，《离散数学》，第93卷，第2期，第229–245页，1991年。[31] K. Suchan 和 I. Todinca，“关于有界 NLC-宽（团宽）图的幂”，《离散应用数学》，第155卷，第14期，第1885–1893页，2007年。[32] M. Tedder、D. Corneil、M. Habib 和 C. Paul，“通过递归因式分解排列实现更简单的线性时间模分解”，载于《自动机、语言与编程国际研讨会》。施普林格，2008年，第634–645页。[33] R. Tin´os、K. Helsgaun 和 D. Whitley，“Lin-Kernighan-Helsgaun 旅行商启发式算法中的高效重组”，载于《自然启发的并行问题求解——PPSN XV》，A. Auger、C. M. Fonseca、N. Lourenc¸o、P. Machado、L. Paquete 和 D. Whitley 编。施普林格·查姆：施普林格国际出版，2018年，第95–107页。[34] V. Traub、J. Vygen 和 R. Zenklusen，“将路径旅行商问题归约为旅行商问题”，《SIAM 计算杂志》，第51卷，第3期，第STOC20–24–STOC20–53页，2022年。[35] G. J. Woeginger，《NP难问题的精确算法：综述》。柏林、海德堡：施普林格·柏林·海德堡，2003年，第185–207页。[36] R. Zenklusen，“路径旅行商问题的1.5-近似”，载于《第三十届 ACM-SIAM 离散算法年会论文集》。工业与应用数学学会，2019年，第1539–1549页。[37] ´Eric D. Taillard 和 K. Helsgaun，“旅行商问题的 POPMUSIC”，《欧洲运筹学杂志》，第272卷，第2期，第420–429页，2019年。