arXiv:2303.01303v1 [math.NT] 2 Mar 2023

deKruyswijk和Meijer关于区间内有理数最小分母的猜想的证明

Michel Balazard 和 Bruno Martin*

摘要

证明了属于区间 $](j-1)/N, j/N]$ 的有理数的最小分母的平均值渐近等价于 $16\pi^{-2}\sqrt{N}$，当 N 趋于无穷时，其中 $j = 1, \ldots, N$。这一结果曾由 Kruys-wijk 和 Meijer 于 1977 年 提出猜想。

关键词

Farey数列，Kloosterman和 数学
学科分类：11B57，11L05

1 引言

若 E 是 $\mathbb{R}$的一个子集，记 $q(E)$ 为表示属于 E 的有理数的既约分数的最小分母（若 E 不包含任何有理数，则令 $q(E) = \infty$ ）：

$$q(E) = \min\{q \in \mathbb{N}^* \,;\, \exists p \in \mathbb{Z},\ p/q \in E\}\,.$$

我们称 $q(E)$ 为 E的 最小分母 。注意， $E \mapsto q(E)$ 是一个递减函数。

对于 $t \in \mathbb{R}$ 和 $\delta > 0$，令

$$q(t, \delta) = q(\,]t - \delta, t]),$$

对于 $N \in \mathbb{N}^*$、 $j = 1$、.....、 N，令

$$q_j(N) = q\Big(\frac{j}{N}, \frac{1}{N}\Big) = q\Big(\Big]\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\Big]\Big).$$

*B. Martin 的研究经费由 ANR-FWF项目资助：FWF: I 4945-N 和 ANR-20-CE91-0006。

例如，有 $q_1(N) = N$和 $q_N(N) = 1$。令

$$S(N) = \sum_{j=1}^{N} q_j(N).$$

Kruyswijk和Meijer于1977年证明了存在正数常量 C_1 和 C_2，使得 $C_1 \leqslant S(N)/N^{3/2} \leqslant C_2$，并猜想

$$S(N) \sim \frac{16}{\pi^2} N^{3/2} \quad (N \to +\infty)$$

（参见 [6]）。随后，Stewart得到了 $S(N)$的第一个显式界（参见 [8]），并于2013年在文章 [9] 中改进了该结果：当 N 充分大时，有

$$1.35N^{3/2} < S(N) < 2.04N^{3/2}.$$

我们以下述形式证实Kruyswijk和Meijer猜想。

定理 对于 $N \geqslant 2$，有

$$S(N) = \frac{16}{\pi^2} N^{3/2} + O(N^{4/3} \ln^2 N). \tag{1}$$

我们的证明基于Chen和Haynes最近针对该问题的连续版本在预印本 [1], 中得到的一个估计：有

$$\int_0^1 q(t,\delta)dt = \frac{16}{\pi^2}\frac{1}{\delta^{1/2}} + O(\ln^2 \delta) \quad (0 < \delta \leqslant 1/2). \tag{2}$$

沿用Stewart提出的方法，我们得到了差值的一个显式公式

$$R(N) = S(N) - N\int_0^1 q(t,1/N)dt$$

并建立估计

$$R(N) = O(N^{4/3} \ln^2 N), \tag{3}$$

特别是利用 Kloosterman 和绝对值的 Weil 上界。定理因此直接由 (2) 和 (3) 得出。

定义 $q(t,\delta)$ 时，除了选取半开区间 $]t-\delta, t]$，还可以考虑另外三种可能的区间类型之一：$[t-\delta, t[$, $[t-\delta, t]$ 和 $]t-\delta, t[$。在所有情况下，定理都保持不变。我们将在第 6 段给出理由。

我们有时会使用 Iverson记号：若性质 P 成立，则记为 $[P] = 1$；若不成立，则记为 $[P] = 0$。另请回顾，Vinogradov记号 $A \ll B$表示 $A = O(B)$。最后，我们使用记号 $\mathrm{e}(x) = \exp(2i\pi x)$。

2 算术预备知识

2.1 上取整函数

对于 $x \in \mathbb{R}$，$\lceil x \rceil$ 表示大于或等于 x的最小整数。若用 $\{t\}$ 表示实数 t的小数部分，则有 $\lceil x \rceil = x + \{-x\}$。若 a，$b \in \mathbb{R}$，则有

$$\operatorname{card}([a, b[\cap \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & (a > b) \\ \lceil b \rceil - \lceil a \rceil & (a \leqslant b). \end{cases} \tag{4}$$

2.2 模逆函数

若 q 是正整数，且 a 与 q 互质，我们将满足以下条件的整数 b 记作 $\mathsf{inv}(a, q)$:

$$0 < b \leqslant q \text{ et } ab \equiv 1 \pmod{q}.$$

如果根据上下文可以明确确定数 q，通常用 $\bar{a}$ 代替 $\mathsf{inv}(a, q)$。

2.3 法里数列回顾

对于 $k \in \mathbb{N}^*$，我们将 $\mathcal{F}_k$ 称为阶数为 k 的法里数列，它由可表示为既约分数 p/q 、满足 $p \in \mathbb{Z}$、$q \in \mathbb{N}^*$、$q \leqslant k$ 以及 $(p, q) = 1$ 的有理数组成（称为“阶数为 k 的法里分数”），并赋予通常序关系。

法里数列对于研究 $\mathbb{R}$ 的某个子集的最小分母具有重要意义，这基于以下等价关系:

$$q(E) > k \Leftrightarrow E \cap \mathcal{F}_k = \emptyset. \tag{5}$$

Soit

$$0 = \rho_0 < \rho_1 < \cdots < \rho_M = 1 \tag{6}$$

$\mathcal{F}_k \cap [0, 1]$ 的元素。我们有 $M = A(k)$，其中，用 φ 表示欧拉函数，

$$A(x) = \sum_{n \leqslant x} \varphi(n) \quad (x > 0).$$

我们将使用以下性质。

若两个阶数为 k 的法里分数，记作 a/r 和 b/s，且满足 $a/r < b/s$，在 $\mathcal{F}_k$ 中相邻，则

$$br - as = 1 \quad \text{et} \quad r + s > k.$$

（定理 28 和 30，[4]第 28 页）。若 $0 < b/s \leqslant 1$，则由这几个关系中的第一个可得 $b = \mathsf{inv}(r, s)$。

因此，(6) 中的每个元素 ρ_i ，在 $1 \leqslant i \leqslant M$ 的情况下，都由一对数确定，记作 (r, s)，其中 r 是 ρ_{i-1} 的分母， s 是 ρ_i的分母。当 i 从 $i = 1$ 变化到 $i = M$时，这些数对的序列双射地描述了集合

$$\big\{(r,s) \in \mathbb{N}^{*2} \,;\; \max(r,s) \leqslant k < r+s,\; (r,s) = 1\big\}\,. \tag{7}$$

可以观察到

$$\rho_i - \rho_{i-1} = \frac{1}{rs}.$$

最后，若 r 和 s 分别是两个连续分数的分母，设它们为 $\rho < \rho'$ 在 $\mathcal{F}_k$中，则紧接在 ρ'之后的分数 ρ'' 的分母 t 为

$$t = \vartheta(k,r,s) = s\Big\lfloor \frac{k+r}{s} \Big\rfloor - r = k - s\left\{\frac{k+r}{s}\right\} \tag{8}$$

（参见 [3], 第 399 页的引理 1，以及第 400 页的（2））。

3 离散傅里叶变换的一个应用

3.1 定义和反演公式

我们将使用离散傅里叶变换（参见 [7],第 2 章）。设 q 为一个正整数， $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ 为一个周期为 q的函数。令

$$\widehat{f}(x) = \sum_{n=1}^{q} f(n)\,\mathrm{e}\Big(-\frac{nx}{q}\Big) \quad (x \in \mathbb{Z}).$$

$\widehat{\ }\, f$ 函数是 f关于其周期 q的（离散）傅里叶变换。它是定义在 $\mathbb{Z}$上的函数，周期为 q。函数$\widehat{\ }$的傅里叶变换保持奇偶性：偶函数（分别为奇函数）的傅里叶变换是偶函数（分别为奇函数）。已知 f 和 q ，便可通过傅里叶反演公式从 f恢复 f,

$$f(n) = \frac{1}{q}\sum_{x=1}^{q} \widehat{f}(x)\,\mathrm{e}\Big(\frac{nx}{q}\Big) \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

3.2 Kloosterman 和与 Ramanujan 和

对于 a、 $b \in \mathbb{Z}$ 和 $q \in \mathbb{N}^*$，定义 Kloosterman 和：

$$\mathrm{K}(a,b\,;\,q) = \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} \mathrm{e}\Big(\frac{an+b\bar{n}}{q}\Big),$$

其中 $\bar{n} = \mathsf{inv}(n,q)$。该和的值为实数。

若 $b = 0$，记 $\mathrm{K}(a,0\,;\,q) = c_q(a)$ 为拉马努金和。它是关于 a 的偶函数，实际上就是模 q 的素数示性函数的傅里叶变换。还有 $\mathrm{K}(0,b\,;\,q) = c_q(b)$。

我们将使用魏尔不等式,

$$|\mathrm{K}(a,b\,;\,q)| \leqslant (a,b,q)^{1/2}\,\tau(q)\,\sqrt{q},$$

其中 τ 是“除数个数”函数（参见 [5], 推论 11.12, 第 280 页）。

3.3 涉及模 q 取逆的和

设 q 为一个正整数，且 $f\colon\ \mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ 是一个周期为 q的函数。设 N 为一个正整数。令

$$g(n) = [(n,q)=1]\cdot f(N\bar{n}) \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

函数 g 的周期为 q。计算其傅里叶变换:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(x) &= \sum_{n=1}^{q} g(n)\mathrm{e}\Big(-\frac{nx}{q}\Big) = \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} f(N\bar{n})\mathrm{e}\Big(-\frac{nx}{q}\Big)\\
&= \sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q} \mathrm{e}\Big(-\frac{nx}{q}\Big)\Big(\frac{1}{q}\sum_{y=1}^{q}\widehat{f}(y)\mathrm{e}\Big(\frac{N\bar{n}y}{q}\Big)\Big)\\
&= \frac{1}{q}\sum_{y=1}^{q}\widehat{f}(y)\sum_{\substack{n=1\\(n,q)=1}}^{q}\mathrm{e}\Big(\frac{-nx+N\bar{n}y}{q}\Big) = \frac{1}{q}\sum_{y=1}^{q}\widehat{f}(y)\mathrm{K}(-x,Ny\,;\,q).
\end{aligned}$$

由傅里叶逆变换可得

$$\begin{aligned}
g(n) &= \frac{1}{q}\sum_{x=1}^{q}\widehat{g}(x)\mathrm{e}\Big(\frac{nx}{q}\Big)\\
&= \frac{1}{q}\sum_{x=1}^{q}\mathrm{e}\Big(\frac{nx}{q}\Big)\Big(\frac{1}{q}\sum_{y=1}^{q}\widehat{f}(y)\mathrm{K}(-x,Ny\,;\,q)\Big)\\
&= \frac{1}{q^2}\sum_{y=1}^{q}\widehat{f}(y)\sum_{x=1}^{q}\mathrm{e}\Big(\frac{nx}{q}\Big)\mathrm{K}(-x,Ny\,;\,q).
\end{aligned}$$

进一步假设 f 为奇数，我们将由此推导出函数 g 在一个区间上的函数值之和的上界估计。我们的证明受到波利亚–维诺格拉多夫不等式证明的启发，例如 [2],第 23 章中所述。

设 I 是 $\mathbb{Z}$的一个有限区间。则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{n\in I\\(n,q)=1}} f(N\bar{n}) = \sum_{n\in I} g(n)\\
&= \frac{1}{q^2}\sum_{n\in I}\sum_{y=1}^{q-1}\widehat{f}(y)\sum_{x=1}^{q}\mathrm{e}\Big(\frac{nx}{q}\Big)\mathrm{K}(-x,Ny\,;\,q) \quad (\widehat{f}(q)=\widehat{f}(0)=0 \text{ car } \widehat{f} \text{ est impaire})\\
&= \frac{1}{q^2}\sum_{y=1}^{q-1}\widehat{f}(y)\sum_{x=1}^{q}\mathrm{K}(-x,Ny\,;\,q)\sum_{n\in I}\mathrm{e}\Big(\frac{nx}{q}\Big)\\
&= \frac{\operatorname{card} I}{q^2}\sum_{y=1}^{q-1}\widehat{f}(y)c_q(Ny) + \frac{1}{q^2}\sum_{y=1}^{q-1}\widehat{f}(y)\sum_{x=1}^{q-1}\mathrm{K}(-x,Ny\,;\,q)\sum_{n\in I}\mathrm{e}\Big(\frac{nx}{q}\Big). \qquad (9)
\end{aligned}$$

$\widehat{\ }$另一方面，由于 f 为奇数且 c_q 为偶数，因此有

$$\sum_{y=1}^{q-1}\widehat{f}(y)c_q(Ny) = 0.$$

另一方面，应用上界估计

$$\Big|\sum_{n\in I}\mathrm{e}(n\alpha)\Big| \leqslant \frac{1}{\sin\pi\alpha} \quad (0<\alpha<1), \qquad (10)$$

以及 Kloosterman 和的 Weil 上界，对于 $y\in\{1,\dots,q-1\}$，可得

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{x=1}^{q-1}\mathrm{K}(-x,Ny\,;\,q)\sum_{n\in I}\mathrm{e}\Big(\frac{nx}{q}\Big)\Big| &\leqslant \tau(q)q^{1/2}\sum_{x=1}^{q-1}\frac{(x,Ny,q)^{1/2}}{\sin(\pi x/q)}\\
&\leqslant \tau(q)q^{1/2}\sum_{x=1}^{q-1}\frac{(x,q)^{1/2}}{\sin(\pi x/q)}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

然而，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{x=1}^{q-1}\frac{(x,q)^{1/2}}{\sin(\pi x/q)} &= \sum_{d|q}\sqrt{d}\sum_{\substack{x=1\\(x,q)=d}}^{q-1}\frac{1}{\sin(\pi x/q)}\\
&\leqslant \sum_{d|q}\sqrt{d}\sum_{\substack{x=1\\d|x}}^{q-1}\frac{1}{\sin(\pi x/q)} = \sum_{d|q}\sqrt{d}\sum_{m<q/d}\frac{1}{\sin\big(\pi m/(q/d)\big)}\\
&\leqslant \sum_{d|q}\sqrt{d}\cdot\frac{q}{d}\ln(q/d) \quad \text{(cf. [2], p. 136)}\\
&= q\beta(q), \qquad (12)
\end{aligned}$$

设……，其中 β 表示由下式定义的算术函数

$$\beta(q)=\sum_{d\mid q}\frac{\ln(q/d)}{\sqrt{d}}. \tag{13}$$

将 (11) 和 (12) 代入 (9)，对于 f 为奇数时，可得上界估计

$$\Big|\sum_{\substack{n\in I\\(n,q)=1}} f(N\bar{n})\Big|\leqslant\frac{\tau(q)\beta(q)}{\sqrt{q}}\sum_{y=1}^{q-1}|\widehat{f}(y)|. \tag{14}$$

算术函数 $\tau\beta$ 的求和函数的一个上界估计将对我们有用：

$$\begin{aligned}\sum_{n\leqslant x}\tau(n)\beta(n)&=\sum_{n\leqslant x}\tau(n)\sum_{d\mid n}\frac{\ln(n/d)}{\sqrt{d}}=\sum_{d\leqslant x}\frac{1}{\sqrt{d}}\sum_{m\leqslant x/d}\tau(md)\ln m\\&\leqslant\sum_{d\leqslant x}\frac{\tau(d)}{\sqrt{d}}\sum_{m\leqslant x/d}\tau(m)\ln m\ll\sum_{d\leqslant x}\frac{\tau(d)}{\sqrt{d}}(x/d)\ln^2(x/d)\\&\ll x\ln^2 x\quad(x\geqslant 1).\end{aligned} \tag{15}$$

3.4 应用于第一伯努利函数

我们用 B_1 表示第一伯努利函数，其定义为

$$B_1(x)=\begin{cases}0&(x\in\mathbb{Z})\\\{x\}-1/2&(x\notin\mathbb{Z}).\end{cases}$$

命题1 设 I 为一个整数区间，q 和 N 为正整数。则有

$$\Big|\sum_{\substack{n\in I\\(n,q)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{n}}{q}\Big)\Big|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{q}\,\tau(q)\beta(q)\ln q, \tag{16}$$

其中 $\beta(q)$ 已在 (13) 中定义。

证明 计算 $f(n)=B_1(n/q)$ 的离散傅里叶变换。我们有

$$\begin{aligned}\widehat{f}(x)&=\sum_{n=1}^{q}B_1\Big(\frac{n}{q}\Big)\mathrm{e}\Big(-\frac{nx}{q}\Big)\\&=\sum_{n=1}^{q-1}\Big(\frac{n}{q}-\frac{1}{2}\Big)\mathrm{e}\Big(-\frac{nx}{q}\Big)\\&=\frac{1}{q}\sum_{n=1}^{q-1}n\mathrm{e}\Big(-\frac{nx}{q}\Big)-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{q-1}\mathrm{e}\Big(-\frac{nx}{q}\Big).\end{aligned}$$

^若 $q \mid x$，则得到 $f(x) = 0$。若 $q \nmid x$，恒等式

$$\sum_{n=1}^{q-1} n z^n = z \frac{(q-1)z^q - q z^{q-1} + 1}{(z-1)^2} \quad (z \neq 1),$$

给出等式

$$\widehat{f}(x) = \frac{\mathrm{e}(x/q)}{1-\mathrm{e}(x/q)} + \frac{1}{2} = \frac{1+\mathrm{e}(x/q)}{2\big(1-\mathrm{e}(x/q)\big)}.$$

由于 B_1 是奇函数，并且

$$\sum_{y=1}^{q-1} \big|\widehat{f}(y)\big| \leqslant \sum_{y=1}^{q-1} \frac{1}{2\sin \pi y/q} \leqslant \frac{q \ln q}{2},$$

不等式（14）推出（16）。 □

为了估计第5段中的项 $R(N)$，我们将采用以下估计，它可由（16）通过部分求和直接得到。

命题 2 设 $s \in \mathbb{N}^*$, a, b 是两个满足 $a < b$ 且满足 $N \in \mathbb{N}$ 的实数。则有

$$\Big| \sum_{\substack{a<r\leqslant b \\ (r,s)=1}} (r-a) B_1\Big(\frac{\overline{r}N}{s}\Big) \Big| \leqslant (b-a)\sqrt{s}\,\tau(s)\beta(s)\ln s.$$

4 S 的恒等式(N)

通过明确阐述 Stewart 在 [8] 和 [9], 中提出的方法，我们将得到一个显式公式来表示差值

$$R(N) = S(N) - N\int_0^1 q(t, 1/N)\,dt$$

（参见下文的命题 5）。

4.1 利用最小分母的分布律表示 $R(N)$

我们首先通过一种经典的变换来处理和式 $S(N)$。对于 $1 \leqslant k \leqslant N$，令

$$\alpha_N(k) = \operatorname{card}\{j \in \{1,\dots,N\} \ ; \ q_j(N) = k\}.$$

因此

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_N(k) = N \quad ; \quad \sum_{k=1}^{N} k\alpha_N(k) = S(N).$$

接下来，令 $0 \leqslant k \leqslant N$,

$$\theta_N(k) = \operatorname{card}\{j \in \{1,\dots,N\} \ ; \ q_j(N) > k\}.$$

因此,

$$\theta_N(0) = N \quad ; \quad \theta_N(N) = 0 \quad ; \quad \alpha_N(k) = \theta_N(k-1) - \theta_N(k) \quad (1 \leqslant k \leqslant N).$$

因此,

$$S(N) = \sum_{k=1}^{N} k\alpha_N(k) = \sum_{k=1}^{N} k\big(\theta_N(k-1) - \theta_N(k)\big) = \sum_{k=0}^{N} \theta_N(k). \tag{17}$$

现在令，对于 $0 \leqslant k \leqslant N$,

$$\nu_N(k) = \operatorname{mes}\{t \in [0,1[\ ; \ q(t,1/N) > k\}$$

（其中 mes 表示勒贝格测度），类似的证明可得等式

$$\int_0^1 q(t,1/N)\,dt = \sum_{k=0}^{N} \nu_N(k).$$

En 注意到 $\theta_N(0) - N\nu_N(0) = N - N = 0$，两式相减可得关系式

$$R(N) = \sum_{k=1}^{N} \big(\theta_N(k) - N\nu_N(k)\big). \tag{18}$$

4.2 不含给定序列任何一项的 $]0,1]$ 子区间

为了给出差值 $\theta_N(k) - N\nu_N(k)$ 的表达式，我们将使用以下引理。

命题 3 设 M，$N \in \mathbb{N}^*$, $\delta > 0$ 和 F 是线段 $[0,1]$, 上由 $M+1$ 个点组成的集合，其元素记为 ρ_i, $i = 0,\dots,M$，满足

$$\rho_0 = 0 < \rho_1 < \cdots < \rho_M = 1.$$

Soit

$$X(\delta) = \{t \in]0,1] \ ; \ ]t-\delta, t] \cap F = \varnothing\}.$$

On a

$$X(\delta) = \bigcup_{i=1}^{M} [\rho_{i-1} + \delta, \rho_i[$$

et

$$\left\{j \in \{1,\dots,N\} \ ; \ \left]\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\right] \cap F = \varnothing\right\} = \bigcup_{i=1}^{M} ([N\rho_{i-1}+1, N\rho_i[\cap \mathbb{Z})$$

（其中，区间 $[a,b[$ 在 $a \geqslant b$时为空。）

证明
一方面，每个区间 $[\rho_{i-1}+\delta,\rho_i[$ 都包含于集合 $X(\delta)$ 中。另一方面，若 $t\in X(\delta)$，则有 $t<\rho_M=1$；令 i_0 为满足 $t<\rho_i$的最小指标 i。有 $i_0>0$且 $\rho_{i_0-1}+\delta\leqslant t$（否则就会有 $\rho_{i_0-1}\in]t-\delta、\ t]$）。因此 $t\in[\rho_{i_0-1}+\delta,\rho_{i_0}[$，第一个集合等式得证。

对于第二个，我们注意到

$$j\in\{1,\dots,N\}\ \text{et}\ \Big]\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\Big]\cap F=\emptyset\ \Leftrightarrow\ j\in NX(1/N)\cap\mathbb{Z}.\qquad\square$$

命题 4 在命题 *3* 的假设下，有

$$\operatorname{card}\Big\{j\in\{1,\dots,N\}\ ;\ \Big]\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\Big]\cap F=\emptyset\Big\}=$$
$$N\operatorname{mes}\big(X(1/N)\big)+\sum_{\substack{i=1\\ \rho_i-\rho_{i-1}\geqslant 1/N}}^{M}(\{-N\rho_i\}-\{-N\rho_{i-1}\}).$$

证明
注意到命题 3 中的区间 $[N\rho_{i-1}+1,N\rho_i[$（其中某些区间可能为空）两两不相交，因此有

$$\operatorname{card}\Big\{j\in\{1,\dots,N\}\ ;\ \Big]\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\Big]\cap F=\emptyset\Big\}=$$
$$\sum_{i=1}^{M}\operatorname{card}([N\rho_{i-1}+1,N\rho_i[\cap\mathbb{Z})=\sum_{\substack{i=1\\ \rho_i-\rho_{i-1}\geqslant 1/N}}^{M}(\lceil N\rho_i\rceil-\lceil N\rho_{i-1}\rceil-1)\quad\text{(d'après (4))}$$
$$=N\sum_{\substack{i=1\\ \rho_i-\rho_{i-1}\geqslant 1/N}}^{M}(\rho_i-\rho_{i-1}-1/N)+\sum_{\substack{i=1\\ \rho_i-\rho_{i-1}\geqslant 1/N}}^{M}(\{-N\rho_i\}-\{-N\rho_{i-1}\})$$
$$=N\operatorname{mes}\big(X(1/N)\big)+\sum_{\substack{i=1\\ \rho_i-\rho_{i-1}\geqslant 1/N}}^{M}(\{-N\rho_i\}-\{-N\rho_{i-1}\}).\quad\square$$

4.3 恒等式 pour $R(N)$

对于 $k\geqslant 1$，我们将在命题 4 中选择 $F=\mathcal{F}_k$；为标明对 k 的依赖性，记为

$$\rho_0(k)=0<\rho_1(k)<\cdots<\rho_M(k)=1\quad(M=A(k)),$$

$\mathcal{F}_k\cap[0,1]$的元素。

命题 5 对于 $N \in \mathbb{N}^*$，有

$$R(N) = -2\sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k)-\rho_{i-1}(k)\geqslant 1/N>\rho_{i+1}(k)-\rho_i(k)}}^{A(k)-1} B_1\big(N\rho_i(k)\big).$$

证明

对于 $k = 1, \ldots, N$，有

$$\begin{aligned}
\theta_N(k) &= \operatorname{card}\{j \in \{1,\ldots,N\} \ ; \ q_j(N) > k\} \\
&= \operatorname{card}\Big\{j \in \{1,\ldots,N\} \ ; \ \Big]\frac{j-1}{N}, \frac{j}{N}\Big] \cap \mathcal{F}_k = \emptyset\Big\} \quad \text{(d'après (5))} \\
&= N\operatorname{mes}\Big(\Big\{t \in]0,1] \ ; \ \Big]t - \frac{1}{N}, t\Big] \cap \mathcal{F}_k = \emptyset\Big\}\Big) + \\
&\qquad \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k)-\rho_{i-1}(k)\geqslant 1/N}}^{A(k)} (\{-N\rho_i(k)\} - \{-N\rho_{i-1}(k)\}),
\end{aligned}$$

根据命题 4。又有

$$\operatorname{mes}\Big(\Big\{t \in]0,1] \ ; \ \Big]t - \frac{1}{N}, t\Big] \cap \mathcal{F}_k = \emptyset\Big\} = \operatorname{mes}\big(\{t \in]0,1] \ ; \ q(t,1/N) > k\}\big) = \nu_N(k),$$

donc

$$\theta_N(k) - N\nu_N(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k)-\rho_{i-1}(k)\geqslant 1/N}}^{A(k)} (\{-N\rho_i(k)\} - \{-N\rho_{i-1}(k)\}).$$

将此和记作 $\xi_N(k)$，由此结合 (18) 可得

$$R(N) = \sum_{k=1}^{N} \xi_N(k).$$

在推理的最后部分，数值 k 固定不变，我们用 ρ_i 代替 $\rho_i(k)$，并用 M 代替 $A(k)$。量 $\xi_N(k)$ 适合进行阿贝尔变换。令

$$\varepsilon_i = [\rho_i - \rho_{i-1} \geqslant 1/N] \ \text{ et } \ f(t) = \{-Nt\},$$

on a

$$\xi_N(k) = \sum_{i=1}^{M} \big(f(\rho_i) - f(\rho_{i-1})\big)\varepsilon_i = \sum_{i=1}^{M-1} f(\rho_i)(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}).$$

Or,

$$\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} = \begin{cases} 0 & \text{si } \max(\rho_i - \rho_{i-1}, \rho_{i+1} - \rho_i) < 1/N \\ 0 & \text{si } \min(\rho_i - \rho_{i-1}, \rho_{i+1} - \rho_i) \geqslant 1/N \\ 1 & \text{si } \rho_i - \rho_{i-1} \geqslant 1/N > \rho_{i+1} - \rho_i \\ -1 & \text{si } \rho_i - \rho_{i-1} < 1/N \leqslant \rho_{i+1} - \rho_i. \end{cases}$$

因此,

$$\xi_N(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i-\rho_{i-1}\geqslant 1/N>\rho_{i+1}-\rho_i}}^{M-1} f(\rho_i) \quad - \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i-\rho_{i-1}<1/N\leqslant\rho_{i+1}-\rho_i}}^{M-1} f(\rho_i).$$

如果在最后一个求和式中作求和变量替换 $j = M - i$, 则得到求和式

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \rho_{M-j}-\rho_{M-j-1}<1/N\leqslant\rho_{M-j+1}-\rho_{M-j}}}^{M-1} f(\rho_{M-j}) = \sum_{\substack{j=1 \\ \rho_j-\rho_{j-1}\geqslant 1/N>\rho_{j+1}-\rho_j}}^{M-1} f(1-\rho_j),$$

其中使用了 $\rho_{M-j} = 1 - \rho_j$ 这一事实。因此,

$$\xi_N(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i-\rho_{i-1}\geqslant 1/N>\rho_{i+1}-\rho_i}}^{M-1} \big(f(\rho_i) - f(1-\rho_i)\big).$$

由于 $f(t) = \{-Nt\}$, 有

$$f(t) - f(1-t) = \{-Nt\} - \{-N(1-t)\} = \{-Nt\} - \{Nt\} = -2B_1(Nt).$$

因此,

$$\xi_N(k) = -2 \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i-\rho_{i-1}\geqslant 1/N>\rho_{i+1}-\rho_i}}^{M-1} B_1(N\rho_i). \qquad \square$$

5 对 $R(N)$ 的估计

5.1 $R(N)$ 求和式的变换

对于满足 $1 \leqslant k \leqslant N$ 的整数 k、N, 设

$$\sigma_N(k) = \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k)-\rho_{i-1}(k)\geqslant 1/N>\rho_{i+1}(k)-\rho_i(k)}}^{A(k)-1} B_1\big(N\rho_i(k)\big),$$

et

$$T(N) = -\frac{R(N)}{2} = \sum_{k=1}^{N} \sigma_N(k). \tag{19}$$

命题 6 有

$$T(N) = T(N) = T_1(N) + T_2(N), \tag{20}$$

avec

$$T_1(N)=\sum_{\substack{r<s\\ rs\leqslant N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar r}{s}\Big)\sum_{\substack{s\leqslant k<r+s\\ \vartheta(k,r,s)>N/s}}1,$$

$$T_2(N)=\sum_{\substack{s<r\\ rs\leqslant N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar r}{s}\Big)\sum_{\substack{r\leqslant k<r+s\\ \vartheta(k,r,s)>N/s}}1.$$

证明

利用第2.3节中回顾的性质，可得

$$\sigma_N(k)=\sum_{\substack{\max(r,s)\leqslant k\\ r+s>k\\ (r,s)=1\\ rs\leqslant N<s\vartheta(k,r,s)}} B_1\Big(\frac{N\bar r}{s}\Big),$$

其中 $\bar r=\mathsf{inv}(r,s)$（注意，出现在集合 (7) 中的数对 $(r,s)=(k,1)$ 对求和没有贡献）。因此，

$$T(N)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{\max(r,s)\leqslant k\\ r+s>k\\ (r,s)=1\\ rs\leqslant N<s\vartheta(k,r,s)}} B_1\Big(\frac{N\bar r}{s}\Big)=\sum_{\substack{rs\leqslant N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar r}{s}\Big)\sum_{\substack{k=1\\ \max(r,s)\leqslant k<r+s\\ \vartheta(k,r,s)>N/s}}^{N}1.$$

对角线 $r=s$ 对求和没有贡献。又有

$$rs\leqslant N\ \Rightarrow\ r+s\leqslant r+N/r\leqslant N+1,$$

因此，在最后一个求和中，条件 $k<r+s$ 使条件 $k\leqslant N$ 成为冗余条件。按照条件 $r<s$ 或 $s>r$对求和进行拆分，即得所述结论。□

5.2 $T_1(N)$ 的分解

由于

$$\vartheta(k,r,s)=s\Big\lfloor\frac{k+r}{s}\Big\rfloor-r,$$

按照 $j=\lfloor(k+r)/s\rfloor$的可能取值对各项进行分组是很自然的。

On a

$$(r<s)\ \text{et}\ (s\leqslant k<r+s)\ \Rightarrow\ 1+\frac{1}{s}\leqslant\frac{k+r}{s}\leqslant 3-\frac{2}{s},$$

因此， j 只能取 1 和 2。 $j=1$ 对应于满足 $s-r\leqslant k<2s-r$ 的 k 的取值。 $j=2$ 对应于满足 $2s-r\leqslant k<3s-r$ 的 k 的取值。因此，

$$T_1(N)=T_{11}(N)+T_{12}(N),\tag{21}$$

avec

$$T_{11}(N)=\sum_{\substack{r<s\\ rs\leqslant N\\ s(s-r)>N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big)\sum_{s\leqslant k<\min(r+s,2s-r)}1,$$

$$T_{12}(N)=\sum_{\substack{r<s\\ rs\leqslant N\\ s(2s-r)>N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big)\sum_{2s-r\leqslant k<\min(r+s,3s-r)}1.$$

5.3 $T_{11}(N)$ 的估计

区分满足 $r+s\leqslant 2s-r$ 或 $r+s>2s-r$的 r 和 s 的取值，可得

$$T_{11}(N)=\sum_{\substack{r\leqslant s/2\\ rs\leqslant N\\ s(s-r)>N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big)\sum_{s\leqslant k<r+s}1+\sum_{\substack{s/2<r<s\\ rs\leqslant N\\ s(s-r)>N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big)\sum_{s\leqslant k<2s-r}1.$$

注意到

$$\big(s(s-r)>N\big)\text{ et }(rs\leqslant N)\Rightarrow r<\frac{1}{2}\Big(\frac{N}{s}+s-\frac{N}{s}\Big)=\frac{s}{2}$$

因此，关于 r 和 s 的第二个二重和为空，而条件 $r\leqslant s/2$ 在第一个二重和中是多余的。此外，由于

$$(s(s-r)>N)\text{ et }(r>0)\Rightarrow s>\sqrt{N},$$

on a

$$T_{11}(N)=\sum_{s>\sqrt{N}}\ \sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant\min(N/s,s-(N+1)/s)\\ (r,s)=1}} rB_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big).$$

根据命题 2，有

$$\Big|\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant\min(N/s,s-(N+1)/s)\\ (r,s)=1}} rB_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big)\Big|\leqslant\frac{N}{s}\sqrt{s}\,\tau(s)\beta(s)\ln s=\frac{N}{\sqrt{s}}\tau(s)\beta(s)\ln s.$$

设 K 是一个满足 $\sqrt{N}\leqslant K\leqslant N$ 的实数。对于 $K<s\leqslant N$，我们使用平凡的上界估计

$$\Big|\sum_{\substack{1\leqslant r\leqslant\min(N/s,s-(N+1)/s)\\ (r,s)=1}} rB_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big)\Big|\leqslant\sum_{1\leqslant r\leqslant N/s} r\leqslant\frac{N^2}{s^2}.$$

因此，我们有

$$|T_{11}(N)| \leqslant \sum_{\sqrt{N}<s\leqslant K} \frac{N}{\sqrt{s}}\tau(s)\beta(s)\ln s + N^2 \sum_{K<s\leqslant N} \frac{1}{s^2}.$$

通过部分求和，估计式（15）可得上界估计

$$\sum_{n\leqslant t} \frac{\tau(n)\beta(n)\ln n}{\sqrt{n}} = O(\sqrt{t}\ln^3 t) \quad (t \geqslant 1).$$

由此得到

$$T_{11}(N) \ll NK^{1/2}\ln^3 N + N^2/K.$$

于是，取 $K = N^{2/3}/\ln^2 N$（当 N 足够大时），可得到估计

$$T_{11}(N) \ll N^{4/3}\ln^2 N. \tag{22}$$

5.4 T_{12}（N）的估计

由于

$$r < s \Rightarrow r + s < 3s - r,$$

on a

$$T_{12}(N) = \sum_{\substack{r<s\\ rs\leqslant N\\ s(2s-r)>N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big) \sum_{2s-r\leqslant k<r+s} 1 = \sum_{\substack{s/2<r\leqslant s\\ rs\leqslant N\\ s(2s-r)>N\\ (r,s)=1}} (2r-s)B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big).$$

注意到

$$(rs \leqslant N) \text{ et } (s/2 < r) \Rightarrow s \leqslant \sqrt{2N}.$$

因此，

$$T_{12}(N) = 2\sum_{1\leqslant s\leqslant\sqrt{2N}} \sum_{\substack{s/2<r\leqslant\min(s,N/s,2s-(N+1)/s)\\ (r,s)=1}} (r-s/2)B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big).$$

根据命题 2，有

$$\Big|\sum_{s/2<r\leqslant\min(s,N/s,2s-(N+1)/s)} (r-s/2)B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big)\Big| \leqslant \frac{s^{3/2}}{2}\tau(s)\beta(s)\ln s,$$

因此

$$\begin{aligned}|T_{12}(N)| &\leqslant \sum_{1\leqslant s\leqslant\sqrt{2N}} s^{3/2}\tau(s)\beta(s)\ln s\\ &\ll N^{3/4}\ln N \sum_{1\leqslant s\leqslant\sqrt{2N}} \tau(s)\beta(s)\\ &\ll N^{5/4}\ln^3 N \quad \text{(d'après (15))}.\end{aligned} \tag{23}$$

5.5 $T_1(N)$的最终估计

将（22）和（23）代入（21），我们得到

$$T_1(N) \ll N^{4/3}\ln^2 N. \tag{24}$$

5.6 $T_2(N)$的估计

回顾一下,

$$T_2(N) = \sum_{\substack{s<r\\ rs\leqslant N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big) \sum_{\substack{r\leqslant k<r+s\\ \vartheta(k,r,s)>N/s}} 1.$$

我们按照 $j=\lfloor (k+r)/s\rfloor$的可能取值对各项分组。于是有

$$(s<r)\ \text{et}\ (s\leqslant k<r+s)\ \Rightarrow\ 2+\frac{1}{s}\leqslant\frac{k+r}{s}<\frac{2r}{s}+1\leqslant 2N+1.$$

因此， j 可以取值 2，....., $2N$。由于

$$\Big\lfloor\frac{k+r}{s}\Big\rfloor = j \Leftrightarrow js-r\leqslant k<(j+1)s-r,$$

由此可得

$$T_2(N)=\sum_{j=2}^{2N}\sum_{\substack{s<r\\ rs\leqslant N\\ s(js-r)>N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big) \sum_{\max(r,js-r)\leqslant k<\min(r+s,(j+1)s-r)} 1.$$

注意到

$$rs\leqslant N\ \text{et}\ js-r>\frac{N}{s}\Rightarrow js-r>r,$$

donc

$$\begin{aligned} T_2(N) &= \sum_{j=2}^{2N}\sum_{\substack{s<r\\ rs\leqslant N\\ s(js-r)>N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big) \sum_{js-r\leqslant k<\min(r+s,(j+1)s-r)} 1 \\ &= \sum_{j=2}^{2N}\sum_{\substack{s<r\\ rs\leqslant N\\ r\leqslant js/2\\ s(js-r)>N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big) \sum_{js-r\leqslant k<r+s} 1 \qquad (25) \\ &\quad + \sum_{j=2}^{2N}\sum_{\substack{s<r\\ rs\leqslant N\\ r>js/2\\ s(js-r)>N\\ (r,s)=1}} B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big) \sum_{js-r\leqslant k<(j+1)s-r} 1. \qquad (26) \end{aligned}$$

式（26）中关于 r 和 s 的内层双重求和为空，因为对 r 和 s 的条件意味着

$$N < s(js - r) < s(js - js/2) = \frac{js}{2}s \leqslant \frac{js}{2}\frac{N}{r} < N.$$

此外，要使 (25) 中的内层求和非空，必须有 $js-r < r+s$，即 $r > (j-1)s/2$。因此，

$$T_2(N) = \sum_{j=2}^{2N} \sum_{\substack{s<r \\ rs\leqslant N \\ (j-1)s/2<r\leqslant js/2 \\ s(js-r)>N \\ (r,s)=1}} \big(2r - (j-1)s\big) B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big).$$

对应于 $j = 2$ 的项等于 0，因为这些条件意味着 $s < r \leqslant s$。此外，

$$\frac{(j-1)s}{2} < r \text{ et } r \leqslant N/s \Rightarrow s \leqslant \sqrt{\frac{2N}{j-1}}.$$

因此

$$T_2(N) = 2\sum_{j=3}^{2N} \sum_{s\leqslant\sqrt{2N/(j-1)}} \sum_{\substack{(j-1)s/2<r\leqslant \min(js/2,N/s,js-(N+1)/s) \\ (r,s)=1}} \big(r - (j-1)s/2\big) B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big).$$

可以看出，对 r 的求和取遍一个区间（可能为空），其长度不超过 $s/2$。因此，根据命题 2，

$$\Big| \sum_{\substack{(j-1)s/2<r\leqslant \min(js/2,N/s,js-(N+1)/s) \\ (r,s)=1}} \big(r - (j-1)s/2)\big) B_1\Big(\frac{N\bar{r}}{s}\Big) \Big| \leqslant \frac{s}{2}\sqrt{s}\,\tau(s)\beta(s)\ln s.$$

由此可得

$$\begin{aligned} T_2(N) &\leqslant \sum_{j=3}^{2N} \sum_{1\leqslant s\leqslant\sqrt{2N/(j-1)}} s^{3/2}\tau(s)\beta(s)\ln s \\ &\ll \ln^3 N \sum_{j=3}^{2N} \Big(\frac{N}{j-1}\Big)^{5/4} \quad \text{(cf. (23))} \\ &\ll N^{5/4}\ln^3 N. \end{aligned} \tag{27}$$

5.7 结论

将 (24) 和 (27) 代入 (20)，我们得到估计

$$T(N) \ll N^{4/3}\ln^2 N$$

因此，根据 (19)，

$$R(N) \ll N^{4/3}\ln^2 N.$$

至此，定理的证明结束。

6 定理的变体

设

$$\bar{S}(N)=\sum_{j=1}^{N} q\Big(\Big[\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\Big]\Big),$$

$$S^{*}(N)=\sum_{j=1}^{N} q\Big(\Big[\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\Big[\Big),$$

$$\tilde{S}(N)=\sum_{j=1}^{N} q\Big(\Big]\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\Big[\Big).$$

本节证明，渐近公式 (1) 对于¯ ˜数量 $S(N)$、 $S^{*}(N)$ 和 $S(N)$ 仍然成立。

首先，函数 $x\mapsto 1-x$ 将 $[(j-1)/N, j/N[$ 变换为 $](N-j)/N,\ (N-j+1/N]$并保持最小分母不变。因此，

$$q\Big(\Big[\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\Big[\Big)=q\Big(\Big]\frac{N-j}{N},\frac{N-j+1}{N}\Big]\Big)\quad (1\leqslant j\leqslant N),$$

因此 $S^{*}(N)=S(N)$。其次，由于 $E\mapsto q(E)$ 单调递减，我们有

$$\bar{S}(N)\leqslant S^{*}(N)=S(N)\leqslant \tilde{S}(N).$$

命题 7 对于 $N\geqslant 1$,

$$\tilde{S}(N)-S(N)\leqslant N\tau(N)\quad et\quad S(N)-\bar{S}(N)\leqslant N\tau(N).$$

¯ ˜由于 $\tau(N)\ll_{\varepsilon} N^{\varepsilon}$，这确实意味着 $S(N)$ 和 $S(N)$ 也满足 (1).

证明 我们仅证明第一个不等式，第二个不等式同理可证。引入记号

$$\tilde{q}_j(N)=q\Big(\Big]\frac{j-1}{N},\frac{j}{N}\Big[\Big)\quad \text{et}\quad \tilde{\theta}_N(k)=\operatorname{card}\{j\in\{1,\dots,N\}\ ;\ \tilde{q}_j(N)>k\}.$$

我们注意到这些量与 $q_j(N)$ 和 $\theta_N(k)$ 之间存在一些差异。我们从未有过关系 $\tilde{q}_j(N)=N$ ；相反，我们有 $\tilde{q}_1(N)=\tilde{q}_N(N)=N+1$ 以及

$$\tilde{\theta}_N(N-1)=\tilde{\theta}_N(N)=2\quad ;\quad \tilde{\theta}_N(N+1)=0\quad (N\geqslant 2).$$

不过，按照处理 (17) 的方法，我们得到恒等式

$$\tilde{S}(N)=\sum_{k=0}^{N}\tilde{\theta}_N(k),$$

d'où

$$\tilde{S}(N) - S(N) = \sum_{k=1}^{N} \big(\tilde{\theta}_N(k) - \theta_N(k)\big).$$

由于 $q_j(N) \leqslant \tilde{q}_j(N)$，因此有

$$\tilde{S}(N) - S(N) = \sum_{k=1}^{N} \mathrm{card}\{j \in \{1,\dots,N\}\ ;\ \tilde{q}_j(N) > k \ \text{ et } \ q_j(N) \leqslant k\}.$$

设 $j \in \{1,\dots,N\}$ 使得 $\tilde{q}_j(N) > k$ 且 $q_j(N) \leqslant k$。因此存在 $i \in \{1,\dots,A(k)\}$ 使得

$$\frac{j}{N} = \rho_i(k) \quad \text{ et } \quad \rho_{i-1}(k) \leqslant \frac{j-1}{N},$$

这意味着

$$N\rho_i(k) \in \mathbb{Z} \quad \text{ et } \quad \rho_i(k) - \rho_{i-1}(k) \geqslant \frac{1}{N}. \tag{28}$$

反之，若 $i \in \{1,\dots,A(k)\}$ 满足（28），则存在 $j \in \{1,\dots,N\}$ 使得 $\tilde{q}_j(N) > k$ 且 $q_j(N) \leqslant k$。因此我们得出

$$\tilde{S}(N) - S(N) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{i=1 \\ \rho_i(k)-\rho_{i-1}(k)\geqslant\frac{1}{N}}}^{A(k)} [N\rho_i(k) \in \mathbb{Z}].$$

利用（7）给出的 $\mathcal{F}_k \cap]0,1]$ 的参数化表示，可得

$$\begin{aligned}
\tilde{S}(N) - S(N) &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{\substack{\max(r,s)\leqslant k \\ r+s>k \\ rs\leqslant N \\ (r,s)=1}} [s \mid N] \\
&= \sum_{\substack{rs\leqslant N \\ (r,s)=1}} ([s \mid N]) \sum_{\max(r,s)\leqslant k<r+s} 1 \quad \text{(on a } r+s \leqslant N+1\text{, cf. preuve de la proposition 6)} \\
&= \sum_{\substack{rs\leqslant N \\ (r,s)=1}} [s \mid N]) \min(r,s).
\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{\substack{rs\leqslant N \\ (r,s)=1}} [s \mid N] \min(r,s) = \sum_{s|N} \sum_{\substack{r\leqslant N/s \\ (r,s)=1}} \min(r,s) \leqslant \sum_{s|N} s \cdot N/s = N\tau(N),$$

因此

$$\tilde{S}(N) - S(N) \leqslant N\tau(N). \qquad \square$$

致谢

在准备这项工作期间，两位作者受益于亨利·庞加莱研究所的 Research in Paris 项目。他们衷心感谢该机构给予他们的热情接待。

参考文献

[1] H. Chen 和 A. Haynes——《固定半径随机区间中最小分母的期望值》，https://arxiv.org/abs/2109.12668，（2021年）。[2] H. Davenport——乘法数论，3e 版，《研究生数学教材》，第 74 卷，施普林格出版社，纽约，2000年，经 Hugh L. Montgomery 修订并撰写序言。[3] R. R. Hall 和 G. Tenenbaum——《关于连续法里弧》，《算术学报》44（1984年），第 397–405 页。[4] G. H. Hardy 和 E. M. Wright——数论导论，6e 版，牛津大学出版社，2008年。[5] H. Iwaniec 和 E. Kowalski——解析数论。，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2004年。[6] D. Kruyswijk 和 H. G. Meijer——《关于小分母和 Farey数列》，荷兰皇家艺术与科学学院，论文集，*A*辑 80 （1977年），第 332–337 页。[7] H. L. Montgomery——早期傅里叶分析，《纯粹与应用本科生教材》，第 22 卷，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2014年。[8] C. L. Stewart——《关于一个与法里级数相关的和》，技术报告 ZW 88/76，数学中心，阿姆斯特丹，纯数学部，1976年。[9] —，《法里级数中小分母的分布》，组合学进展，施普林格出版社，柏林，2013年，第 275–286 页。

BALAZARD, Michel 艾克斯-马赛大学，法国国家科学研究中心，马赛数学研究所，法国马赛 电子邮箱：balazard@math.cnrs.fr MARTIN, Bruno 滨海大学，应用数学普适实验室，法国加来 电子邮箱：Bruno.Martin@univ-littoral.fr