arXiv:2303.01306v1 [physics.class-ph] 1 Mar 2023

摆动式配重投石机：尺度变换与优化

E Horsdal

丹麦奥胡斯市 DK-8000，奥胡斯大学物理与天文学系

电子邮箱：horsdal@phys.au.dk

摘要。摆动式配重投石机在中世纪晚期达到鼎盛，是一种极其重要的火炮，能够从相当远的距离发射石块，摧毁遭围城的城堡防御工事。遗憾的是，这些投石机的确切尺寸不得而知，而这些数据对于评估这种武器的真正重要性本可发挥重要作用。根据对历史记载的解读推测出的尺寸，必须经过检验和审慎审查。过去，人们通过全尺寸实验性重建或临时性的理论估算来完成这项工作。本文提出的理论基于投石机的数学质量函数，使更系统的方法成为可能。该函数可以取最大值，而使函数达到最大值的设计参数，按定义即为最优参数。文中给出了这些最优参数的一个简单解析表达式。

1. 引言

摆动式配重投石机仅凭重力驱动，自约公元1200年（或更早）起，逐渐成为多个文明武器库中最重要的火炮，直到百年战争后期火药武器开始兴起后的200多年间，仍然发挥着重要作用 [1, 2, 3, 4]。这一时期对这种武器的改进，完全依靠直觉、工艺和反复试验 [1], ，因为当时的物理与数学科学尚未充分发展，无法提供多少帮助。如今，运用现代方法探究这种武器的全部理论潜力颇有意思，尽管很难判断这一未知潜力在历史上究竟发挥了多少。

带铰接式配重的投石机由三个摆组成。单个摆是一个相对简单的动力系统，但三个摆共同运动，且不受小幅摆动的限制时，便构成了一个相当复杂、难以理解的问题；要针对特定用途对其进行调试也十分困难。逐一关注各个部件并不是好策略，因为一个部件的运动与另外两个部件的运动密切相关。相反，必须同时调整所有参数，这需要对动力学问题进行完整求解。

讨论良好的设计，首先要对其内涵达成共识，而且表述必须足够精确，才能以可最大化的质量函数 $\mathcal{Q}$ 来表示。我们建议， $\mathcal{Q}$ 应平衡相互冲突的需求：既要武器威力强大，又要轻便、耐用，并且易于制造、搬运和操作。因此，结构良好的投石机必须具备巨大的破坏潜力，同时不必依靠过大的体积或重量。函数 $\mathcal{Q}$ 因此必须取决于射程与尺寸之比、弹丸质量与配重质量之比、将势能转化为动能的效率，以及会导致机器磨损的内部反作用力。可以构造不同的函数 $\mathcal{Q}$ ，任何使某个质量函数达到最大值的设计都可视为最优，因此这一性质并非唯一。不过，不同的优化设计最终相当相似，由此仍能得出清晰的结论。

历史上的投石机通常以抛射物的射程和质量来规定其性能，即分别为 R 和 m [5, 6]。在这里，我们用传递给目标的能量 T取代 m ，因为 R 和 T 这一对参数更适合作为分析的起点，也与当代对火炮的评估相一致。除少数特定情况外，为简化起见，还假定可以忽略空气阻力和滑动摩擦造成的损失，并且目标与发动机底座处于同一高度。

投石机众多的可调参数构成了一个巨大的设计可能空间，若没有指导原则，很难在其中进行探索。战场上的工艺和经验推动了历史上的发展，在许多情况下，优秀的投石机很可能已经被制造出来；但遗憾的是，早期用于记录这些情况的文字资料十分稀少，而现存的图像描绘也难以解读。由于缺乏文献记载，对投石机曾被部署的围城战进行当代研究也变得十分困难 [5, 6]。火炮所需的射程 R 取决于防御能力和当地地形，而所需的能量 T 则取决于建造方法和材料。必要容量（R、T）的实际评估必须由军事史专家完成；但一旦完成这项工作，根据此处提出的原则，武器的尺寸便只需通过几次简单的代数计算即可确定为最优。

2. 投石机

Saimre [7] 和 Denny [8]最近从不同角度介绍了投石机的基本设计和工作原理。这里仅简要说明，并参照图1a中的示意图，其中标出了必要的变量。梁从 H 延伸至 S，并被一根枢轴 P-P 分成两段；在图1b中可以最清楚地看到这根枢轴。长段 L_1 上装有一条长度为 L_4的投石索，质量为 M 的配重通过铰链 H 与短段 L_2 相连，并由长度为 L_3的臂支撑。抛射物的质量为 m ，放置在一个兜袋中，兜袋由两根绳索构成投石索。长梁段末端的挂钩 S 是抛射物巧妙释放机构的一部分。梁的质心位于 CM，质量为 m_b。将梁视为

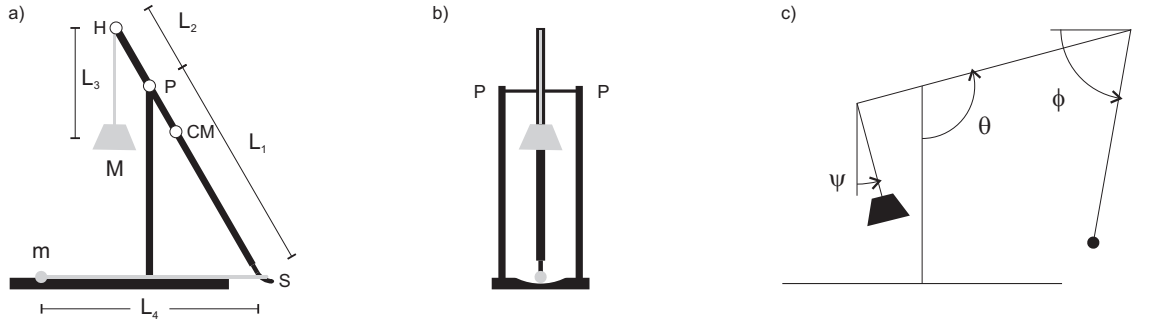


图1. 投石机。a）初始构型：抛射物位于发射槽中，目标在左侧。H：铰链。P：支点。S：挂钩。b）同上，但从目标方向观察。c）运动快照及广义角坐标。

一个刚性细圆柱，直径为 D，相对于 P 的转动惯量为 $\mathcal{I}_b = \frac{1}{3}m_b\left(L_1^2 - L_1L_2 + L_2^2\right)$。P 到 CM 的距离为 $L_{CM} = \left(L_1 - L_2\right)/2$。

投石机发射时，重力将 M 向下拉，因此梁和投石索分别绕支点和挂钩转动。运动快照如图1c所示。抛射物已从发射槽中抬起，稍后将在由挂钩设定决定的时刻释放，沿弹道轨迹飞向左侧的目标。图1c还标出了三个角，它们是内部运动的广义坐标。

配重和抛射物均视为质点。于是，总转动动能为 $T_r = \frac{1}{2}\mathcal{I}_b\dot{\theta}^2$，其中使用点记号表示对时间的微分，$\dot{}$ 为 $\theta = d\theta/dt$。总平动动能 T_t 是三个质心的动能之和。每项的形式为 $\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{r}}^2$,，其中速度 $\dot{\mathbf{r}}$ 通过角度 (θ, ψ, ϕ) 及其导数 (θ, ψ, ϕ) 随时间变化。投石机的总动能为 $T = T_r + T_t$，总势能 U 则是三个质心势能之和。U 随角度而变化，但与角速度无关。动能和势能决定了支配内部运动的运动方程。内部运动分为三个阶段：第一阶段，抛射物在发射槽中滑动，直至支撑法向力变为零；第二阶段，抛射物被抬起，并相对于挂钩转动；第三阶段则从抛射物脱离兜袋时开始。

对于给定的发动机初始条件和参数，内部运动方程将 θ、ψ 和 ϕ 确定为时间的函数。它们分别是

$$\theta_i, \quad \psi_i, \quad \phi_i, \quad \dot{\theta}_i, \quad \dot{\psi}_i, \quad \text{and} \quad \dot{\phi}_i \ , \tag{1}$$

and

$$L_1, \quad L_2, \quad L_3, \quad L_4, \quad D, \quad M, \quad m \quad \text{and} \quad m_b \ . \tag{2}$$

变量众多意味着机器种类繁多，因此必须加以简化。历史上的投石机在发射前从不支撑起梁，始终处于静止状态，因此 $\psi_i = \phi_i = 0$ 和 $\theta_i = \psi_i = \phi_i = 0$。一次发射所引起的势能变化，从发射启动开始，直到发动机再次停止为止，是

$$\Delta U = (ML_2 - m_bL_{CM})g(1 + \cos\theta_i) \ , \tag{3}$$

其中 g 是当地重力加速度。初始横梁角 θ_i 应尽可能小，以最大限度地提高 ΔU。我们选定 $\theta_i = 30^0$ 作为合理的标准。

当 M 尽可能长时间近乎垂直下落时，发动机的效果最佳，这意味着需要一条较长的臂 L_3。最长的情况是 $L_2 + L_3 = H$，其中 $H = L_1 \cos\theta_i$ 是支点的高度。更现实的选择是 $L_2 + L_3 = FH$，其中 $F = 2/3$ 为1/2。我们将考察这两个数值，以说明 $F < 1$ 对性能的影响有多大。

现在，式（1）和（2）中的14个参数已有7个固定。对于给定的木材密度，直径 D 是梁质量和长度的函数。因此，还剩下6个自由参数。它们是

$$L_1, \quad L_2, \quad L_4, \quad M, \quad m \quad \text{and} \quad m_b \, . \tag{4}$$

3. 尺度变换、更少的自由参数与内力

运动方程中的质量和长度可以通过选取测量单位来化为无量纲量。我们选择以配重质量 M 为质量单位，以短梁段 L_2的长度为长度单位。于是，时间、速度、能量和力的单位分别为（L_2/g）$^{1/2}$、（$L_2 g$）$^{1/2}$、 MgL_2 和 Mg。内部运动的耦合微分方程的无量纲形式详列于附录A中，其中包含以下五个参数

$$l = \frac{L_1}{L_2}, \quad l_4 = \frac{L_4}{L_1}, \quad L = \frac{L_3}{L_2}, \quad \mu_b = \frac{m_b}{M} \quad \text{and} \quad \mu = \frac{m}{M} \, , \tag{5}$$

但 $L = Fl \cos\theta_i - 1$ 不是自由参数，因此这四个

$$l, \quad l_4, \quad \mu_b \quad \text{and} \quad \mu \, , \tag{6}$$

其中前三个是指发动机本身的设计参数， μ 则与抛射物有关。发动机的效率为 ϵ，而对于抛射物，缩放射程 ρ和目标处的动能 τ_e 为

$$\epsilon = \frac{T}{\Delta U}, \quad \rho = \frac{R}{L_2}, \quad \text{and} \quad \tau_e = \frac{T}{MgL_2} \, , \tag{7}$$

其中

$$T = \frac{1}{2} m v_r^2 + mgh_r \, . \tag{8}$$

这里， v_r 和 h_r 分别是抛射物释放时的速度和高度。如果能调整发动机，使梁和配重在第二阶段结束时始终处于静止状态，那么式 (7) 中定义的效率就达到 1。请注意，[7, 8]中对效率的定义有所不同。

除特殊情况外，运动方程只能通过数值方法求解。运动开始的瞬间就是这样一种情况。将角度和角速度的初始值代入 (A.1) 和 (A.2) 后，方程就变成了关于角加速度 θ 和 ψ 的代数方程，因而很容易求解。随后即可计算配重的初始加速度 a_{CW}。它竖直向下，和自由落体一样，

但其加速度小于重力加速度。配重所受的合力等于质量乘以加速度，是（向下的）重力 $M\mathbf{g}$ 与铰链的（向上）反作用力 $\mathbf{F}_H$ 之和，即 $M\mathbf{a}_{CW} = M\mathbf{g} + \mathbf{F}_H$。因此，发射启动前 $\mathbf{F}_H = -M\mathbf{g}$（$\mathbf{a}_{CW} = \mathbf{0}$），但紧接着

$$\begin{aligned} F_H &= -Mg\left(1 - \frac{L_2 \sin^2\theta_i (ML_2 - m_b L_{CM})}{ML_2^2 \sin^2\theta_i + \mathcal{I}_b + mL_1^2\cos^2\theta_i}\right) \\ &= -Mg\left(1 - \frac{\sin^2\theta_i (1 - \frac{1}{2}\mu_b(l-1))}{\sin^2\theta_i + \frac{1}{3}\mu_b(l^2 - l + 1) + \mu l^2 \cos^2\theta_i}\right) \\ &= -Mg\,(1 - 0.42) \quad \text{with} \quad \theta_i = 45^0,\ l = 5,\ \mu_b = 6\% \text{ and } \mu = 1\% \ . \end{aligned}$$

这展示了如何根据内部运动计算内力。

4. 梁的强度以及长度与质量之间的关系

优秀的投石机能将配重的大部分势能传递给抛射物。不过，部分能量会用于抬升和移动梁的质心，因此梁应尽可能轻，同时也必须有足够的强度。准备发射时，梁的长端被向下拉，短端则抬起配重。当梁处于水平位置时，载荷最大；此时可将其视为准静态状态，并假定梁固定在支点处。此时梁两段的弯曲为 [9]

$$\beta_1 = \frac{MgL_1L_2}{3\mathcal{M}_e\mathcal{I}} \qquad \text{and} \qquad \beta_2 = \frac{MgL_2^2}{3\mathcal{M}_e\mathcal{I}} \qquad \text{with} \qquad \mathcal{I} = \frac{\pi}{64}D^4 \ , \tag{9}$$

其中，$u_1 = \beta_1 L_1$ 和 $u_2 = \beta_2 L_2$ 分别是梁的长段和短段末端的挠度。$\mathcal{M}_e$ 是所用木材的杨氏弹性模量，$\mathcal{I}$ 是梁截面的截面二次矩。在运动方程中，长度和质量是相互独立的参数，但对于给定的 β_2，式（9）将 M 与 L_2 联系起来，意味着质量与线性尺寸必须相应地进行尺度变换。梁直径 D 为

$$m_b = \rho_d \frac{\pi}{4} D^2 (L_1 + L_2) \ , \tag{10}$$

其中，ρ_d 是所选木材的密度，这将导致 D采用特定的尺度变换。

梁上某一位置的应变 S 等于直径 $D/2$的一半乘以曲率；曲率在支点处达到最大，此处

$$S = \frac{D}{2}\,\frac{MgL_2}{\mathcal{M}_e\mathcal{I}} = \frac{3D}{2L_2}\beta_2 \ . \tag{11}$$

梁的应力 σ 与应变的关系为 $\sigma = \mathcal{M}_e S$，断裂模量则是应力的上限，超过该上限木材就会断裂。该上限通常接近 $\mathcal{M}_e$的 **1%**，因此为确保安全，我们取 $S^{max} \ll 1/100$。D/L_2 的典型值为 **1/3**，因此对于 $\beta_2 = 1/300$，$S^{max} \simeq 1/600$，并将其视为允许的最大弯曲量，除非明确指定其他值，否则全文均采用此值。也可以采用固定的 S^{max} 而非固定的 β_2 来控制梁强度。不过，这会导致不同的尺度变换，因此本文不作探讨。

硬木的杨氏模量和密度分别取为 $\mathcal{M}_e = 12\text{GPa}$ 和 $\rho_d = 700\text{kg/m}^3$, 。最大弯曲量、无量纲常数 K以及两个取决于重力的有用材料常数为

$$\begin{aligned} \beta_2 &= 1/300 \qquad\qquad K = \frac{l+1}{\mu_b} \\ k_M &= \frac{4\pi}{3}\frac{g\rho_d^2}{\mathcal{M}_e} = 1.68\cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/m^4} \\ k_D &= \frac{16}{3}\frac{g\rho_d}{\mathcal{M}_e} = 3.06\cdot 10^{-6}\ 1/\mathrm{m}\ . \end{aligned} \tag{12}$$

(9) 中 L_2 和 M 之间的关系、(10) 中梁质量的表达式以及 (12) 中的常数，给出了 L_2、 M、 T 和 D的标度关系

$$M = K^2\frac{k_M}{\beta_2}L_2^4\ , \quad T = K^2\frac{k_M}{\beta_2}g\tau_e L_2^5 \quad \text{and} \quad D = \sqrt{K\frac{k_D}{\beta_2}}\ L_2^{3/2}\ . \tag{13}$$

其余参数根据 (5) 和 (7) 中的关系进行尺度变换。因此，长度与 L_2成正比，质量与 L_2^4成正比，能量与 L_2^5 成正比，而 D 与 $L_2^{3/2}$ 成正比。

对于选定材料和允许的弯曲程度，我们现在已经看到，给定 (l、 l_4、 μ_b、 μ) 的值以及一个绝对参数，就能完全确定一台发动机。但如果给定容量 (R、 T)，问题便会出现，因为此时给定的绝对参数不是一个，而是两个。这会导致其他绝对参数（包括 m）的取值彼此不一致。不过，如果不一致程度不大，可以通过迭代解决：抛射物的动能和射程近似满足关系 $T \simeq \frac{1}{2}mgR$；因此，如果在给定的 R下， m偏差为 Δm，那么 $\Delta T/T \simeq \Delta m/m = \Delta\mu/\mu$，随后便可调整 μ （必要时迭代调整），以达到所需的 T。因此，给定容量 (R、 T) 就必须调整 μ，并使自由参数的数量从四个减少为三个。不过，随机选取 (l、 l_4、 μ_b) 不太可能得到特别好的设计，因此需要一个优化准则。

5. 质量函数 $\mathcal{Q}$、力因子 $\mathcal{F}$ 和优化过程

还有两个重要的无量纲变量尚未定义。一个是质量函数 $\mathcal{Q}$ ，另一个是衡量发动机内反作用力的指标 $\mathcal{F}$。我们先来考虑 $\mathcal{Q}$。它必须随 $\widetilde{\rho} = R/L_1$、 $\mu \simeq 2T/$（MgR）和 $\epsilon = T/\Delta U$ 等参数增大，因为它们分别衡量以尺寸 L_1 表示的射程、给定射程 R 下相对于重量的动能 M ，以及效率；但 $\mathcal{Q}$ 也必须是导致发动机磨损的内力的递减函数。因此，它可以具有以下形式

$$\mathcal{Q} = \frac{\widetilde{\rho}\mu\epsilon}{\mathcal{F}}\ , \tag{14}$$

其中需要定义 $\mathcal{F}$。(14) 中各因素之间的平衡可以通过将它们提升到不同于 1 的适当幂次来改变，也可以纳入其他因素。我们继续使用 (14)，并将其作为 $\mathcal{Q}$ 的定义。

因子 $\mathcal{F}$ 必须代表所有内力。为此，我们选取吊索张力 F_S 以及支点处作用于机架的力 F_R。张力 F_S取其垂直于梁 $F_{S\perp}$ 的分量的最大值来衡量，该最大值出现在释放时间 t_r 之前不久。反作用力 F_R 取其最大值 F_R来衡量。这发生在时刻 t_m，此时配重的初始下落减速最为剧烈；不过，我们也将 F_R 的水平分量 F_{Rh} 纳入考虑。该分量会先后迅速地经过两个方向相反的极值。这些极值的大小通常相近，其数值之和为 $\Delta F_{Rh} = |F_{Rh}(t_1)| + |F_{Rh}(t_2)|$，其中 $t_1 < t_m$ 和 $t_2 > t_m$。利用这些变量，$\mathcal{F}$ 定义为几何平均值

$$\mathcal{F} = \left(\left(\frac{F_{S\perp}}{mg} \right)^2 \frac{F_R}{Mg} \frac{\Delta F_{Rh}}{Mg} \right)^{1/4}, \tag{15}$$

它平衡了吊索张力与反作用力。量值 ΔF_{Rh} 衡量发射过程中倾向于使发动机倾斜和移动的力。如果任由这种情况发生，它会成为机械能的耗散途径，但坚固且足够沉重的支撑结构可以阻止这种情况；这种支撑结构通常采用大型支架的形式。

运动方程积分后，就能完全了解机器的内部运动。随后，便可分别运用牛顿第二定律中的平动定律和转动定律，确定所有内力和力矩，包括式 (15) 中的内力和力矩。总会发现 $F_{S\perp} \gg mg$，因此长梁段承受的表观重量 $m_{dyn} = F_{S\perp}/g$ 会升至远大于 m 的数值。 F_R 通常是 Mg的数倍，而 ΔF_{Rh}始终占 Mg的很大一部分。

运动方程不包含抛射物的释放机构。因此，可以将第二阶段的积分在时间上延长足够长，以涵盖 $\mathcal{Q}$的最大值，之后可将任意时刻视为虚拟释放时刻。将 $\mathcal{Q}$ 达到最大值的时刻 t_r 视为实际释放时间，并在此时计算式 (7) 中的缩放参数。

对于给定的容量（R,T）和最大弯曲量 β_2，求 $\mathcal{Q}$ 的最大值需要遵循一个可能看起来复杂而繁琐、但数值实现并不困难的过程。该过程包括以下步骤

1）在（l、l_4、μ_b）空间中选取一个盒状区域，并仔细选择 μ_1 和 μ_2 的数值，使其符合所需的容量（R、T）和弯曲 β_2。这需要进行探索性计算。2）在该盒状区域内随机选择一个设计（l、l_4、μ_b），并求解两次运动方程。第一次使用 μ_1，返回 T_1；然后使用 μ_2，返回 T_2。3）选择在步骤 1 中的 μ_1 和 μ_2，使得 $T_1 < T < T_2$，从而通过线性插值确定改进后的 $\mu = \mu_3$，并返回 T_3。4）重复此过程，直到 $|T - T_i|/T < 10^{-3}$。在步骤 1 中进行恰当的选择可以加快收敛。 $\mathcal{Q}$ 在最后一次迭代后计算。5 ）按照步骤 2 选择一组新的（ l 、 l_4 、 μ_b ），并重复该过程，直到定位出 $\mathcal{Q}$ 的最大值。

6. 真空中的优化

在图 2 中说明了定位 $\mathcal{Q}$ 最大值的过程。下方图组中的三幅图显示了针对随机选取的设计（l、l_4、μ_b），使用相同的 10^3 计算得到的 $\mathcal{Q}$ 值，并将其投影到相应的平面上。区间较宽，可以看到相对于明显最大值下降至 50% 的情况。上方图组中的三幅图

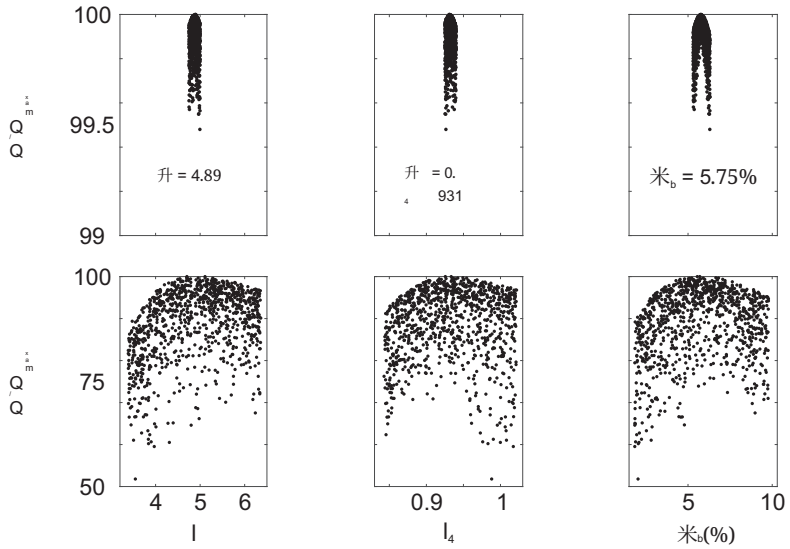


图 2. $\mathcal{Q}/\mathcal{Q}_{max}$ 随 l、 l_4 和 μ_b变化的百分比。上方各图显示最大值附近的窄区间和较小的下降幅度。下方各图显示较宽的区间和大得多的下降幅度。 $F = 1$ 和容量： $R = 240$米和 $T = 26$千焦。

也显示 $\mathcal{Q}$的 10^3 值，但参数取自窄得多的区间，以便更精确地确定最大值的位置。区间表明， $\mathcal{Q}$ 对 l_4 的依赖远强于对 l 或 μ_b的依赖；对上方图中的 $\mathcal{Q}$值进行二次形式拟合后发现，最大曲率方向上的主轴与 l_4的方向非常接近。

为累积图中的 2×10^3 个点，总共需要进行 $\simeq 10^4$ 次积分：对于每个随机选取的设计（l、l_4、μ_b），平均需要进行 5 次积分，以便将 μ 调整到所需容量（R、T）。这些就是第 5 节过程的步长 4 中提到的迭代。实际进行的积分次数远多于 10^4 次，因为还需要进行第 1 步中提到的探索性积分。

图 2 是一个说明性示例，但大多数计算采用了略有不同且效率更高的方法。在步骤 3 中，如果用 $\log(T)$ 替换 T，插值所需的步数会更少；最初较宽的参数区间则围绕最大值位置的当前估计值逐步收窄，因此大约经过一千次积分后，就能相当准确地找到最优参数值。

6.1. 绝对参数的解析表达式

根据第 3 节关于尺度变换的结果，(R_0, T_0) 处的最优设计也适用于 (R, T) 平面上曲线 $T/T_0 = (R/R_0)^5$ 沿线的最佳设计。这条直线在对数表示中呈现为一条直线，而用矩阵形式表示的转动为

$$\left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right\} = \frac{1}{\sqrt{26}} \left\{ \begin{array}{cc} 5 & -1 \\ 1 & 5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \log(R/R_0) \\ \log(T/T_0) \end{array} \right\} \tag{16}$$

定义坐标（X、Y），在恒定 X 时进行尺度变换，如图3所示。沿 X 轴进行有限次优化，然后进行插值

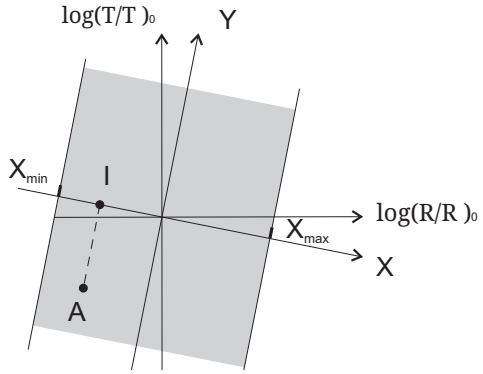


图3。坐标（X、Y）。沿恒定 X 的直线进行尺度变换。

尺度变换决定了连续区域内的最优投石机，该区域仅受所覆盖的 X-值射程限制（图3中的灰色区域）。例如，假设希望找出坐标为（R，T）的点 A 处的最佳发动机。尺度变换将 A 与坐标为（X，Y）的点 I 连接起来

$$X_i = \frac{1}{\sqrt{26}} \left(5 \log \frac{R}{R_0} - \log \frac{T}{T_0} \right) \quad \text{and} \quad Y_i = 0 \ . \tag{17}$$

该点很可能不属于已计算点的集合，但利用 X轴上两个相邻点进行线性插值可以得到一个很好的估计。插值过程繁琐，并且每个参数都需要相应的表。不过，通过引入一组解析函数 $f_Z(X)$，即可避免这一问题，其中索引 Z 指代投石机的任意一个绝对参数。我们以 M 为例，并发现由于在 X 恒定时，质量与长度成正比(13)

$$\frac{M}{M_0} = f_M(X) \left(\frac{R}{R_0} \right)^4 \ , \tag{18}$$

其中，$f_M(X)$ 可通过沿 X 轴的积分得到。对于任意 (R, T)，X 轴上的插值点 X_i 由式 (17) 给出，因此 M 仅是 (R, T) 的函数。事实证明，在 X 的较大范围内，$f_M(X)$ 可用如下形式近似表示

$$f_M = a_M \exp \left(b_M \sqrt{26} X \right) \tag{19}$$

其中， a_M 和 b_M 是可调常数。将式 (19) 代入式 (18)，并利用式 (17)，可得

$$\frac{M}{M_0} = a_M \left(\frac{R}{R_0}\right)^{4+5b_M} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-b_M} \quad \text{with} \quad a_M \simeq 1 \ . \tag{20}$$

类似于式（18）、（19）和（20）的表达式适用于所有其他绝对参数 Z，因此

$$\frac{Z}{Z_0} = f_Z(X) \left(\frac{R}{R_0}\right)^{n_Z} \quad \text{where} \quad \begin{cases} n_Z = 1 & \text{for } L_1,\ L_2 \text{ and } L_4 \\ n_Z = 3/2 & \text{for } D \\ n_Z = 4 & \text{for } M,\ m \text{ and } m_b \end{cases} \tag{21}$$

或者更明确地说

$$\frac{Z}{Z_0} = a_Z \left(\frac{R}{R_0}\right)^{p_Z} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{q_Z} \quad \text{where} \quad \begin{cases} p_Z = n_Z + 5b_Z \\ q_Z = -b_Z \ . \end{cases} \tag{22}$$

拟合结果　将形式（21）拟合到这七个参数的结果见图4。其　e

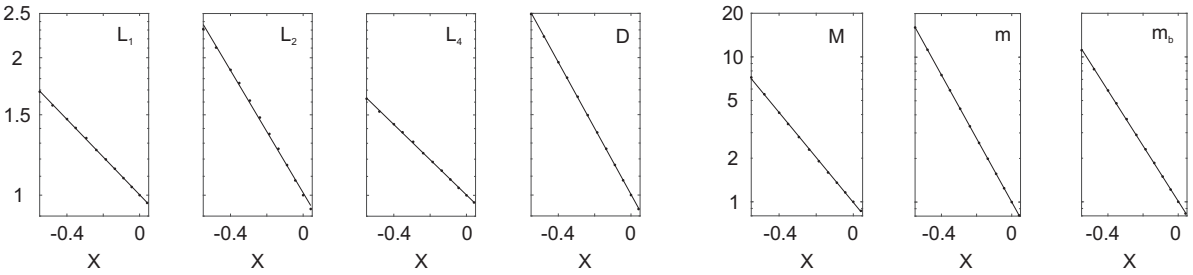


图4。实心点表示 $(Z/Z_0)/(R/R_0)^{n_Z}$ 对 X 的计算值。直线表示通过 $f_Z(X)$ 进行的拟合。半对数图。 $R_0 = 240$ 米。 $T_0 = 26$ 千焦。 $\theta_i = 30^0$。 $F = 1$。

函数 f_Z 在所选的半对数表示中是直线。可以看出，它们能够准确表示计算值，因此，对于区间内任意所需容量（R, T）及其 X 值，解析表达式（22）都能很好地估算所选参数的最优值。所有长度数据均以相同尺度绘制，质量数据也一样。这便于在各组内进行比较，但请注意，长度尺度涵盖的变化范围为 $\simeq$2.5 倍，而质量尺度涵盖的变化范围为 $\simeq$20 倍。

公式（22）在对数表示中是线性的。因此，（R, T）与公式（4）中的两个绝对参数 Z_i 和 Z_j 之间的关系可表示为

$$\begin{Bmatrix} \log(Z_i/Z_{i0})) \\ \log(Z_j/Z_{j0})) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_{Z_i} & q_{Z_i} \\ p_{Z_j} & q_{Z_j} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \log(R/R_0) \\ \log(T/T_0) \end{Bmatrix} , \tag{23}$$

其中我们使用了 $\log(a_Z) \simeq 0$。只要行列式 $\mathcal{D}_{ij} = p_{Z_i} q_{Z_j} - q_{Z_i} p_{Z_j}$ 不为零，该方程就可以求逆；此时

$$\begin{Bmatrix} \log(R/R_0) \\ \log(T/T_0) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\mathcal{D}_{ij}} \begin{Bmatrix} q_{Z_j} & -q_{Z_i} \\ -p_{Z_j} & p_{Z_i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \log(Z_i/Z_{i0})) \\ \log(Z_j/Z_{j0})) \end{Bmatrix} . \tag{24}$$

若从（23）和（24）中消去（R, T），则绝对参数（Z_i, Z_j）与（Z_k, Z_l）两两相关；此外，还可利用（16）纳入（X, Y）。

表1列出了根据图4中的拟合结果得出的常数，并给出了这些常数适用的 X 值区间。表中还包括了对 $X>0$、 $F=2/3$ 和 $\theta_i=40^0$ 数据进行其他同等质量拟合所得的常数。对于 $X>0$ 和 $F=1$ 数据， X 在 0.3 到 0.4 之间存在一个较窄的区间，其中不同的优化设计相互竞争。

X	θ_i	F		L_1	L_2	L_4	D	M	m	m_b
			Z_0	3.90米	0.80米	3.62米	0.22米	2158千克	20.6千克	124千克
	30^0	1	a_Z	1.00	1.02	1.00	1.00	0.98	1.00	1.01
-0.55	30^0	1	p_Z	0.0654	-0.5013	0.1243	-0.1299	0.4830	-0.9481	-0.3045
0	30^0	1	q_Z	0.1869	0.3003	0.1752	0.3260	0.7034	0.9896	0.8609
lb	30^0	1	a_Z	0.9967	1.0104	0.9937	1.0025	0.9893	0.9988	1.0023
0	30^0	1	p_Z	0.0816	-0.7853	0.1979	-0.2069	0.7431	-0.9613	-0.4591
0.40	30^0	1	q_Z	0.1837	0.3571	0.1604	0.3414	0.6514	0.9923	0.8918
ub	30^0	1	a_Z	1.12	1.21	1.31	1.05	0.841	1.01	1.25
0.30	30^0	1	p_Z	-0.1385	-1.0423	-0.1625	-0.2839	0.9490	-0.9757	-0.8238
0.57	30^0	1	q_Z	0.2277	0.4084	0.2325	0.35678	0.6102	0.9951	0.9647
	30^0	2/3	Z_0	3.97米	0.67米	3.58米	0.21米	2590千克	20.7千克	112千克
	30^0	2/3	a_Z	1.00	1.01	1.00	1.00	0.99	1.00	1.00
-0.55	30^0	2/3	p_Z	0.08611	-0.3131	0.1640	-0.0856	0.2839	-0.9459	-0.1487
0	30^0	2/3	q_Z	0.1828	0.2626	0.1672	0.3171	0.7432	0.9892	0.8297
	30^0	2/3	a_Z	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
0	30^0	2/3	p_Z	0.0400	-0.6865	0.1465	-0.1851	0.6328	-0.9672	-0.4210
0.57	30^0	2/3	q_Z	0.1920	0.3373	0.1707	0.3371	0.6735	0.9934	0.8842
	40^0	2/3	Z_0	4.13米	0.63米	3.47米	0.21米	2925千克	20.7千克	116千克
	40^0	2/3	a_Z	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
-0.52	40^0	2/3	p_Z	0.0857	-0.3429	0.2012	-0.0944	0.3080	-0.9481	-0.1641
0	40^0	2/3	q_Z	0.1829	0.2686	0.1598	0.3189	0.7384	0.9896	0.8328
	40^0	2/3	a_Z	1.00	1.01	1.00	1.00	0.99	1.00	1.01
0	40^0	2/3	p_Z	0.0672	-0.6765	0.2546	-0.1858	0.6100	-0.9666	-0.3880
0.52	40^0	2/3	q_Z	0.1866	0.3353	0.1491	0.3372	0.6780	0.9933	0.8776

表1。公式（22）中使用 $R_0=240$米和 $T_0=26$千焦时的常数。 X的限制。 $0.3<X<0.4$. 磅的重叠部分：下分支。ub：上分支。

6.2. 优化设计的两个分支

当 $\theta_i=30^0$和 $F=1$ 时，两个不同的优化设计在 X 介于 0.3 和 0.4 之间的范围内展开竞争，如表1所示。在 X这一狭窄范围内，质量函数 $\mathcal{Q}=\mathcal{Q}_X(l,l_4,\mu_b)$呈现两个最大值；将计算结果投影到（$l_4,\mathcal{Q}$）平面上时，这两个最大值最容易观察到（如图 2 下方面板中间的图所示）。属于具有 $X_{max}=0.40$ 的下分支的最大值在 X_{max} 附近消失。具有 $X_{min}=0.30$ 的上分支上的另一个最大值则在 X_{min} 附近出现；在 $X=X_d$ 处，两个最大值相等，此时 $X_d\simeq 0.34$。 $\mathcal{Q}$ 在 X_d 处连续，但此处所有其他参数均不连续，其跃变幅度取决于 X ，但不

关于 Y。步长 S_Z 的大小可由（16）求逆后结合（23）得出。其表达式为

$$S_Z = \frac{Z_{ub}}{Z_{lb}} = \frac{a_{Z_{ub}}}{a_{Z_{lb}}} \exp\left(\frac{5p_{Z_{ub}} - q_{Z_{ub}} - 5p_{Z_{lb}} + q_{Z_{lb}}}{\sqrt{26}} X_d \right) , \tag{25}$$

其中，常数取自两个分支。最大的步长为 $S_{L_4} = +16.3\%$。其他步长为 $S_{L_1} = +4.4\%$ 和 $S_M = -8.7\%$，而 m 的增幅不到 1%。

对于接近 X_d 的 X，将指数函数展开后可得

$$l_4 = \frac{L_4}{L_1} = \begin{cases} 0.965\,(1 + 0.119(X - X_d)) & \text{on lower branch} \\ 1.075\,(1 - 0.024(X - X_d)) & \text{on upper branch,} \end{cases}$$

因此，在下分支上，相对吊索长度小于 1 且逐渐增加；而在上分支上，它大于 1，且递减速度较慢。

在抛射物释放的最佳时刻，优化投石机的构型在两个分支上也有定性差异。在下分支上，梁尚未越过竖直方向；而在上分支上，梁刚刚第一次越过竖直方向。竞争设计出现在 X 接近 0.58 的极窄区间内，此时 $\theta_i = 30^0$ 和 $F = 2/3$，其他 θ_i 和 F 也同样如此。

6.3. 优化设计的频率

公式（23）可以扩展到涵盖（4）中列出的六个绝对参数 Z_i

$$\left\{ \log(Z_i/Z_{i0}) \right\}_{6\times1} = \left\{ \begin{array}{cc} p_{Z_i} & q_{Z_i} \end{array} \right\}_{6\times2} \left\{ \begin{array}{c} \log(R/R_0) \\ \log(T/T_0) \end{array} \right\}_{2\times1} , \tag{26}$$

其中矩阵的尺寸已明确给出。因此，优化的绝对参数被限制在六维空间中的一个二维超平面内。该超平面就是 6×2矩阵中两个列向量所张成的向量空间。在每个优化设计附近都能找到良好设计，因此将这些设计纳入后，该平面会向各个方向扩展，形成一个位于庞大六维空间中的、最终体积虽有限但非常小的对象。这说明了良好设计的稀缺性，以及寻找它们的困难程度。

我们进一步考察 Denny 选取的一组由四个参数组成的标准参数组，以说明这种困难。这组参数用于表示一台大型投石机 [8]。标准参数为

$$L_b = 12\text{m}, \quad M = 10\,000\text{kg}, \quad m = 100\text{kg} \quad \text{and} \quad m_b = 2000\text{kg} ,$$

其中 $L_b = L_1 + L_2$ 是梁长。它们可以通过两两配对组成六种组合，并利用（24）和表 1，结合 $\theta_i = 30^0$和 $F = 2/3$，分别计算每种组合的容量（R，T）。六种组合中，只有一种能得到有意义的容量，以及一个处于表1所示范围内的 X 值。该组合为 $M = 10\,000$千克和 $m = 100$千克，配以 $R = 288$米和 $T = 152$千焦，这意味着 $X = -0.17$。利用（22）计算得到的、对应此容量的优化梁长为 $\simeq$ 6.6米，与12米的标准长度相比相当短；而梁的重量 $\simeq 475$千克，相对于2000千克而言，在相对意义上则更小。优化发动机的效率为 $\simeq$92%。

采用标准参数的投石机并不能使 $\mathcal{Q}$达到最大值，但它确实能运作，而且 Denny [8] 发现，在空气中最大射程为 360m，释放时的弹丸速度为

达到63米/秒。T 该结果列于表2的第一行，当前从头算起的数据 *o*

	θ_i	β_2 %	F	$\mathcal{Q}$ %	ϵ %	L_b m	H m	L_4 m	M ton	m kg	m_b kg	R m	T kJ
Denny	45^0					**12**	6.15	7.9	**10**	**100**	**2000**	360	
当前	45^0	0.66	0.93	1.7	48.4	**12**	6.15	7.9	**10**	**100**	**2000**	425	224
最大值 $\mathcal{Q}$	45^0	0.66	0.93	7.0	91.4	8.67	5.25	6.19	13.3	101	629	**425**	**224**
最大值 $\mathcal{Q}$	30^0	0.33	1	7.8	93.3	7.15	5.23	5.69	13.3	101	647	**425**	**224**
最大值 $\mathcal{Q}$	30^0	0.33	2/3	6.7	92.2	7.06	5.30	5.57	15.7	101	591	**425**	**224**
模型	30^0	0.33	2/3	6.7	92.2	1.33	1.00	1.05	19.9千克	0.127	0.745	80.0	53.1

表2. 设计比较。Denny：标准参数下从 R 到 [8] 。本文：采用 Denny 的参数得出的结果。最大值 $\mathcal{Q}$：通过第一性原理计算，在给定（R，T）的情况下，针对最大值 $\mathcal{Q}$ 进行设计。模型：缩放后的数值，公式（13）。

相关计算见第二行。 β_2 和 F 的数值来自 Denny 的数据。真空中的射程为 425m，这是由释放速度（64m/s）得出的，与 Denny 的数据完全一致。射程不同，是由于空气动力损失以及射程的定义不同所致。按照与 Denny 相同的假设，空气阻力会使真空中的射程降至 380m；Denny 测量射程时，也以释放点到抛射物下降至释放高度以下处的距离为准。释放高度为 20.2m，释放位置在支点后方 6.0m。因此，Denny 测得的射程应与 380m$-$20m$+$6m$=$366m 相比较，这也再次表明两者吻合良好。目标处的真空动能为 224kJ，效率为 48.4%。

表2中的其余结果展示了在容量为 425m、且由标准参数得出的 224千焦条件下，使 $\mathcal{Q}$ 最大化的设计。第一组采用 Denny 给出的 θ_i、 β_2 和 F数值，结果显示梁更短、更轻（L_b、 m_b），支点高度更低（ H ），配重更重（ M）。投石机的效率 ϵ 提高了一倍以上，因此装载所需能量不到标准机器的一半。接下来的两行采用当前标准的 θ_i、 β_2 和 F数值，以及更为现实的 $F = 2/3$ 。更陡的梁初始位置和更坚固梁的选择进一步缩短了梁的长度，支点高度几乎不变，配重则更重，效率也略有提高。表2中优化后的发动机效率均略高于90%。这与文献中似乎普遍认为效率上限接近70%的观点形成鲜明对比 [7, 8]。

表2的最后一行显示了将紧邻其上一行的投石机进行尺度变换后得到的一台小型投石机的尺寸。这台小型发动机只需两三个人便能安全操作，但抛射物质量较小会增加空气动力学敏感性。不过，选择密度高于石块的弹丸材料，即可使相对损失大致相等。简单估算可得 $\rho/\rho_{stone} \simeq 2.3$，因此铁是可行的。

7. 具有考古学价值的投石机

为说明本文结果而选取的案例，均依据其考古学意义而定。第一个案例涉及1118年基督教军队围攻阿尔卡拉·拉·维耶哈，以及1188年萨拉丁的军队围攻萨奥内。其他案例则取材于维拉尔·德·奥内库尔的素描本中的图画 [10] ，这些图画绘于13世纪初。

优化通常首先基于所需射程 R 以及已知或假定的弹丸质量 $m_{\circ}$。随后可利用公式（22）先确定 T，再根据公式（23）得出其余参数。另一种起点是假定梁长及其分配方式，由此确定 L_1 和 $L_{2\circ}$ 然后根据公式（24）得出容量，并根据公式（23）得出其余优化参数。

结果显示，质量会随尺寸发生显著变化，即根据公式（13）为 $M \propto L_2^4$。这一点并不容易立即理解，因此接下来的优化设计很可能比预期更小、更重。简单的比例关系，即 $M \propto L_2$，更为直观，但与当前分析并不一致。有关基于直觉和临时估算的尺度变换的最新讨论，请参阅 [4] 的第2章。

7.1. 阿尔卡拉·拉·别哈和萨奥内

表3前三行所列的射程是 Gal´an 和 Gal´an [6] 关于阿尔卡拉´拉维耶哈围城讨论的核心内容，他们考察了堡垒射出的箭矢射程之外、具有战略优势的投石机部署地点（即 $\simeq$140米）。在该区域发现的石块很可能被用作抛射物

Site	等级	R	T	L_1	L_2	L_4	D	M	m_b	ϵ	v	h	A
	m	m	kJ	m	m	m	m	吨 千克		%	m/s	m	
Ca	(-15)	**150**	40.3	4.13	0.88	3.55	0.25	3.11	174	90.0	37.7	10.0	40.3^0
Ma	(-54)	**480**	124	5.50	0.71	5.15	0.31	11.5	334	92.8	68.5	13.8	39.1^0
Ma	-54	**426**	111	5.36	0.75	4.96	0.31	9.70	320	92.5	64.5	13.5	39.1^0
Sa	(-20)	**250**	66.0	4.72	0.85	4.19	0.28	5.16	242	91.4	49.1	11.7	39.7^0

表3。使用 $\theta_i = 30^0$、 $F = 2/3$ 和 $m =$ **50**千克石块的优化投石机。前三行：使用Catalanes地点（加利福尼亚州）和Malvecino地点（缅因州）的阿尔卡拉拉维埃哈围城战。第四行：萨奥内围城战。高度：目标相对于投石机的高度。

通常重约50千克。由 R 和 m 得出的能量 T 给出的 X数值均在表1规定的范围内。随后代数确定的优化参数列于表3中间几栏。右侧列出的是效率 ϵ以及抛射物朝目标飞行的弹道轨迹初始条件，即释放时的速度 v、高度 h 和爬升量 A 。投石机的位置高于目标，但在多数情况下忽略了这一点（并通过将目标标高置于括号中加以说明）。目标位置较低，因此足以补偿抛射物路径上的空气动力损失造成的射程和能量损失。在未加括号的例子中，瞄准距离按高度差缩短，然后像之前一样，假设不存在高度差来求得优化参数。抛射物飞过缩短后的瞄准点

426米处，并在481米处到达目标的较低标高。因此，这种近似过程的射程仅多出1米。由于重力作用，动能从标高为零处的111千焦增加到目标处的137千焦。发射前投石机中储存的势能为111千焦/0.925=120千焦，即低于目标处的能量。

在 Catalanes地点架设的投石机是牵引式与固定配重式投石机的混合体，梁长接近 9.5 米 [6]。表3中的优化方案小得多。如果他们能使用这样一台小型投石机，对战役的指挥者来说将是极大的优势，因为这会让运输和架设容易得多。重达 $\simeq 3$ 公吨的配重可以装在一个轻便的箱子里，运输时拆开，到新的部署地点后再重新组装，并装入石块和土壤。

由于距离堡垒太远，Melvecino遗址被排除在外 [6]，但若在 Malvecino 放置一台尺寸适中的投石机，确实可以用 50 千克的石块轰击堡垒。然而，所需的配重重达 11.5 吨（或 9.7 吨），这颇具挑战性。阿尔卡拉拉维埃哈的围城发生于 12 世纪初，当时配重式投石机仍在发展之中，或许尚未成熟到能够使用如此沉重的配重。

表3第四行的数据与萨奥内围城战有关。在距离城堡防御工事250米处有一处可能适合架设投石机的位置 [5],，而一种能够覆盖这一射程的优化发动机可向目标输送66千焦的能量。在 Fulton 等人对这场围城的讨论中 [5]，他们得出结论：在这一早期发展阶段，部署于此的投石机不可能是破城武器；但我们已经看到，结构坚固、尺寸和重量有限的投石机，确实能够用50千克的石块轰击防御工事，石块飞行速度可达 $\simeq 185$千米/小时。

萨奥内围城战发生在阿尔卡拉拉维埃哈围城战仅70年之后，但两者并不容易比较。阿尔卡拉拉维埃哈位于西班牙马德里附近，其陷落是西班牙再征服的一部分；而位于叙利亚、靠近地中海的萨奥内，则是在萨拉丁的叙利亚战役期间被攻陷的。

7.2. 维拉尔·德·奥内库尔的素描本

这本可追溯至13世纪初的维拉尔·德·奥内库尔的素描本，绘有投石机的底座框架（或称底座），并描述了一个装满泥土、用作配重的箱体。两者都标注了详细尺寸。底座框架和箱体的尺寸表明，梁长和配重分别可达10米和30公吨。

Chevedden 指出，像这样的巨型投石机可以将一块 100 千克的石块抛射 400 多米 [3]。按照这一建议，我们取 $m = 100$ 千克和 $R = 450$ 米。由此得到的能量 T 使得表4首行中的优化参数可以通过代数方法求出。首行中的 $F = 1$ 代表理想情况，接下来两行中的 $F = 2/3$ 则代表较实际的情况。初始横梁角 $\theta_i = 40^0$ 或许也比 $\theta_i = 30^0$更合适。与底座框架相比，接近 7 米的梁长似乎偏短，

n	F	θ_i	R m	T kJ	L_1 m	L_4 m	M tons	m kg	m_b kg	L_b m	l	ϵ %	$\mathcal{Q}_n$ %
1	1	30^0	**450**	235	6.13	5.80	14.3	**100**	660	7.21	5.68	93.1	7.41
1	2/3	30^0	**450**	234	6.20	5.69	16.9	**100**	601	7.12	6.77	92.6	6.43
1	2/3	40^0	**450**	234	6.48	5.55	19.1	**100**	622	7.35	7.51	91.6	5.55
5	1	30^0	**450**	**235**	6.31	6.68	15.6	101	611	7.26	6.64	97.5	6.38
0	1	30^0	**450**	**235**	6.60	6.04	13.4	98.3	807	7.85	5.29	87.8	8.11

表4. 与维拉尔·德·奥内库尔相关的设计。质量函数 $\mathcal{Q}_n$ 见式（27）。

而不足 20 吨的配重与 30 吨的最大值相比也相对较小。从 $F = 1$ 到 2/3，以及从 $\theta_i = 30^0$ 到 40^0 的线性尺寸变化都不大，但 M 的增幅则更为显著。最后，第二行中的配重用支架支撑。这对 ϵ 的影响很小；在 $\psi_i = -4.6^0$ 时最大值为 93.0%，这是因为初始配重运动略有改善。

表4中最下面两行显示了通过采用经过修改的质量函数得到的优化设计

$$\mathcal{Q}_n = \frac{\widetilde{\rho}\mu\epsilon^n}{\mathcal{F}} \qquad \text{with} \qquad n \geq 0 \ , \tag{27}$$

当 $n = 1$时，该函数与式（14）相同。当 $n > 1$时，效率 ϵ 受到更大重视；而当 $n < 1$时，重视程度则较低。我们看到，ϵ 从 $n = 1$ 时的 93.2% 上升到 $n = 5$时的 97.5%，随后在 $n = 0$ 时降至 87.8%，而发动机仅做了小幅调整。最显著的变化是相对吊索长度 l_4 在 $n = 5$时增至大于 1 的数值。这表明发动机发生了质的转变（参见第 6.1 节和附录B中的讨论）。

早期建造的许多投石机都能将沉重的石块投掷到相当远的距离，但其确切尺寸尚不清楚。根据素描本中底座框架的尺寸推算出比例的一架投石机，绘于一幅半写实图画中；该图收录于 1859 [10]出版的、附有评注的素描本摹真本中，作为图 26。按照图上的测量结果，支点将梁分成两段，其长度比为 $l = L_1/L_2 \simeq 4.5$，梁的初始角度为 $\theta_i \simeq 25^0$；但 [10],中的图 27 是用来说明投石机工作原理的图，其中展示了不同的初始构型，$\theta_i \simeq 40^0$。表5列出了符合这些发现的优化设计。$\theta_i = 25^0$ 或 40^0 且 $F = 1/2$ 的三个案例是先验计算得出的。结果展示了从理想的 F值 1 变为更现实的 2/3 或 1/2 时所产生的变化，也展示了当 θ_i 从 30^0 变为 25^0 或 40^0 时的影响。这些变化并不显著；除 $F = 1/2$ 且 ϵ 略低于 90% 的情况外，所有情况下的效率都高于 90%。

表5中配重的巨大质量，可以通过相对较小幅度地缩小线性尺寸，降至估算的最大值30吨。根据式（13），对于小幅变化，可得 $\Delta R/R = \Delta L_i/L_i \simeq 1/4 \cdot \Delta M/M$最坏情况下约为8%；此时 R 缩短22米至275米，而 T 则大幅降至102千焦。也可以通过调整梁的允许最大弯曲量 β_2 来实现缩减，

#	F	θ_i	R	T	L_1	L_4	M	m	m_b	L_b	l	ϵ	$\mathcal{Q}$
			m	kJ	m	m	tons	kg	kg	m		%	%
1	1	25^0	426	677	7.36	7.00	26.8	301	1696	**9**	**4.5**	93.3	10.4
2	1	30^0	407	641	7.36	6.80	26.0	298	1682	**9**	**4.5**	92.9	10.2
3	1	40^0	341	540	7.36	6.20	23.7	299	1589	**9**	**4.5**	91.5	10.2
4	1	30^0	540	700	7.62	7.16	33.4	248	1605	**9**	**5.5**	93.2	7.71
5	2/3	30^0	401	726	7.62	6.76	34.9	343	1653	**9**	**5.5**	91.6	8.79
6	2/3	30^0	482	752	7.74	6.98	38.7	299	1623	**9**	**6.0**	92.0	7.55
7	1/2	30^0	297	858	7.69	6.41	45.9	538	1746	**9**	**6.0**	88.1	9.01

表5. 与维拉尔·德·奥内库尔相关的设计。给定 L_b and l。

也就是梁的弯曲。弯曲被视为一种扰动，因此附录A中关于内部运动的方程里没有涉及弯曲，只有长度、质量和能量的标度关系（13）中才考虑了弯曲。因此，若改变 β_2 而保持一个线性尺寸不变（如表5中的 L_b ），其他所有线性尺寸都保持不变，而所有质量、能量 T 和梁横截面（$\pi/4$）D^2 都与 β_2成反比。因此，若增大 β_2 （或在木材品质相同的情况下削弱梁强度），表1中的配重 M 就会减小。只需适度缩减，就能使大多数质量降至30吨以下；但最重的配重需要缩减35%，这可通过将 β_2 从1/300增至1/200来实现。这样一来，射程保持不变，为297米，而 T 降至572千焦，降幅没有前一种方法那么大。较小的 M 意味着更大的弯曲，这似乎有些奇怪。然而，在给定条件下，弯曲仅取决于弯曲力 Mg 和梁强度 $\mathcal{I} \propto D^4$ ，且 D^2 与 m_b和 M成正比。弯曲量与 $Mg/\mathcal{I}$成正比，因此会随 $1/M$变化。对材料常数 ρ_d 和 $\mathcal{M}_e$，乃至对执行月球特殊任务的投石机所受重力 g 进行调整时，也适用类似的考虑。

8. 总结与结果

本文讨论的这类投石机，其参数空间非常大，但通过合理选取初始条件和配重臂的长度，可以大幅缩小参数空间。剩余的六个自由参数列于（4）中，但由于内部运动方程可以进行缩放，还能进一步简化。因此，（6）中只剩下四个无量纲参数（l、l_4、μ、μ_b）。公式（14）定义了一个仅取决于这些参数的质量函数 $\mathcal{Q}$。对这四个参数进行任意变化时，该函数没有最大值；但指定容量并限制梁的弯曲，会在参数之间施加约束，从而确保最大值。研究针对多种容量以及选定的初始横梁角和配重臂，找到了这一最大值。结果可概括为一组常数，以及公式（22）中给出的简单解析表达式。表1中的详尽列表可用于确定广泛容量范围内优化后的投石机的绝对尺寸和质量。公式（22）还可用于像若干示例中那样，将参数两两关联。这可借助线性代数方法实现。在所有情况下，计算都可以通过手算或

more 使用电子表格高效完成。这是本研究的关键成果 .

在特殊情况下，优化设计存在两个相互竞争的分支。即便如此，若没有指导原则，仍难以确定优化设计。我们解释其中的原因，并以一组拟议的标准参数为例，说明如何用它来代表一台大型投石机。按照当前标准，这组参数可行，但远非最优。

我们推导出了一些具有考古学价值的优化设计。将优化后的尺寸与历史上的投石机所采用的尺寸进行比较，可以看出一个明显趋势：优化后的投石机尺寸更小，配重更重。此外，内力也有所降低，效率有所提高。

附录A. 内部运动的缩放方程

缩放时间为 $\tau = (g/L_2)^{1/2}t$ ，并使用点记号表示相对于 τ 的微分。缩放长度（l、 l_4 和 L）与质量（μ 和 μ_b）见式（5）。

附录A.1. 第一阶段。发射槽中的抛射物。

梁和配重运动的耦合微分方程为

$$\left(\mu l^2 f(\theta)^2 + \frac{\mu_b}{3}\left(l^2 - l + 1\right) + 1\right)\ddot{\theta} - L\cos(\theta-\psi)\ddot{\psi} + \mu l^2 f(\theta)\frac{df}{d\theta}\dot{\theta}^2 - L\sin(\theta-\psi)\dot{\psi}^2 + \left(\frac{\mu_b}{2}(l-1) - 1\right)\sin\theta = 0 \quad \text{and} \tag{A.1}$$

$$L\ddot{\psi} - \cos(\theta-\psi)\ddot{\theta} + \sin(\theta-\psi)\dot{\theta}^2 + \sin\psi = 0\ . \tag{A.2}$$

吊索角度 ϕ 满足以下几何关系

$$\cos\theta + l_4\sin\phi = \cos\theta_i\ , \tag{A.3}$$

wh其中， θ_i 为初始横梁角，A.1 中的函数 f 和 $df/d\theta$ 为

$$f(\theta) = \frac{\cos(\theta-\phi)}{\cos\phi} \quad \text{and} \quad \frac{df}{d\theta} = -\frac{\sin(\theta-\phi)}{\cos\phi} + \frac{\sin^2\theta}{l_4\cos^3\phi}\ .$$

附录 A.2。第二阶段。抛射物从发射槽中升起。

梁、配重和吊索运动的三个方程为方程（A.2）、

$$\left(\mu l^2 + \frac{\mu_b}{3}\left(l^2 - l + 1\right) + 1\right)\ddot{\theta} - L\cos(\theta-\psi)\ddot{\psi} - \mu l^2 l_4\sin(\theta-\phi)\ddot{\phi} - L\sin(\theta-\psi)\dot{\psi}^2 + \mu l^2 l_4\cos(\theta-\phi)\dot{\phi}^2 + \left(\mu l + \frac{\mu_b}{2}(l-1) - 1\right)\sin\theta = 0 \quad \text{and} \tag{A.4}$$

$$ll_4\ddot{\phi} - l\sin(\theta-\phi)\ddot{\theta} - l\cos(\theta-\phi)\dot{\theta}^2 - \cos\phi = 0\ . \tag{A.5}$$

附录 A.3。第三阶段。抛射物释放。

梁和配重的运动方程为式 (A.4)（其中含有 $\mu = 0$ ）和式 (A.2)。

附录B。效率最大化 ϵ

由下式定义的函数 $\mathcal{Q}_\epsilon$

$$\mathcal{Q}_\epsilon = \frac{\widetilde{\rho}^0 \mu^0 \epsilon}{\mathcal{F}^0} = \epsilon \ ,$$

其形式类似于质量函数，但不能算作质量函数，因为在给定容量（R、T）和允许弯曲量 β_2 的情况下，改变（l、l_4、μ_b）时，它没有最大值。不过，优化尝试表明，在 l 保持不变时，改变（l_4、μ_b）会出现两个 $\mathcal{Q}_\epsilon = \epsilon$ 最大值。当 l 较高时，一个最大值出现在 $l_4 < 1$，另一个出现在 $l_4 > 1$；二者都是 l 的递增函数，且似乎都趋近于 1。

表4中的维拉尔·德·奥内库尔相关参数展示了容量为 $R = 450$m、能量为 $T = 232$ 千焦的优化后投石机。根据优化所用的质量函数，采用实用设计参数时，效率最高可达 $\epsilon = 97.5\%$。在容量相同且 $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_\epsilon$ 的计算中，较小的 l_4 分支在 $l = 16.2$ 时，效率提高到 99.5% 以上；较大的 l_4 分支则在 $l = 58.5$ 时达到这一水平。这些很高的 l 值与给定容量对应的绝对参数无法用于实用投石机（见表B1），但从形式角度来看，其动力学很有意思。

l	ϵ	L_1	L_2	L_4	M	m	m_b	θ	ψ	ϕ	A
	%	m	m	m	ton	kg	kg	-180^0		-180^0	
17	99.53	0.800	0.047	0.673	270	104	14.7	-1.95^0	-1.98^0	45.1^0	44.9^0
59	99.50	14.9	0.25	18.2	71.5	93.5	729	-1.22^0	-0.91^0	47.6^0	42.6^0

表B1. 高效率设计 ϵ。$F = 1$、$\theta_i = 30^0$、$R = 450$米和 $T = 232$千焦。释放时梁的角度为 θ，配重的角度为 ψ，投石索的角度为 ϕ。A：抛射物的初始爬升。第一行：较小的-l_4 分支。第二行：较大的-l_4 分支。

随着 l 增大，两个分支中的抛射物和梁的相对质量都逐渐减小，从而确保配重开始时近乎自由落体。然而，下降最终必须停止；由于单方面侧重于高效率，相对参数（l_4、μ_b）经过调整，使下降运动在最后一刻平稳地转变为小振幅振荡运动。

在较小-l_4 分支上，当 $l \to \infty$ 趋于极限时，这一点表现得最为明显；第三阶段运动的两个方程之一呈现如下形式

$$\ddot{\theta} - L\cos(\theta - \psi)\ddot{\psi} - L\sin(\theta - \psi)\dot{\psi}^2 - \sin\theta = 0 \ ,$$

而另一个方程保持不变。两个方程的解为

$$(L+1)\ddot{\psi} + \sin\psi = 0 \quad \text{and} \quad \theta - \psi = \pi \ ,$$

在振幅较小时，这些运动为简谐振荡。其无量纲频率为 $\{1/(L+1)\}^{1/2}$，绝对频率为 $\{g/(L_2+L_3)\}^{1/2}$。因此，配重和梁相对于支点同相摆动，构成摆长为 $L_2 + L_3$ 的准刚体。从配重自由落体到简谐运动的转变

会在极短时间内完成。在此期间，配重和梁减速，但始终没有停止，随后进入共同的振荡模式，使整体运动朝向平衡点。支点的反作用力在这一转变过程中会急剧增大。

仔细观察较大但有限的 l 时的运动，可以发现，在简谐分量之上叠加着高频内部振荡。角度 $\theta-\psi$ 以极小的振幅围绕 π振荡，仿佛准固体环一般。对此，可以将小项作为微扰纳入考虑。当梁的运动不再完全由重型配重驱动时，运动取决于梁相对于支点的转动惯量，但作用在梁上的力矩仍主要由缩放质量为 1 的重型配重决定。缩放转动惯量为 $\mathcal{I}_P = 1/3 \cdot \mu_b(l^2 - l + 1)$，因此小振荡的频率为 $\omega \simeq {\mathcal{I}_P}^{-1/2}$；进一步分析可得更精确的表达式 $\omega = \{L/(L+1) \cdot \mathcal{I}_P\}^{-1/2}$。

对于表B1中的 $l = 17$，支轴处的反作用力达到接近 $10Mg$的数值，投石索的张力在释放前不久升至 $350\,mg$，内部振荡的频率为 $f = 42.2$Hz。此外，如表B1所示，释放时的构型几乎垂直，抛射物从较低的 $\simeq$ 2m位置射出，初始爬升角接近 45^0。另请注意，270 吨的配重仅下落了 $\simeq 9$cm（$\simeq 2L_2$）。

较大-l_4 分支上的运动更加复杂，因为梁的质量始终不可忽略（$\mu_b l$ 会随 l增大）。梁和配重最后的振荡仍与之前一样同相，频率为 $\simeq \{g/(L_2 + L_3)\}^{1/2}$，但还伴有频率相近的小幅内部振荡（更像是柔性体的运动）；向振荡模式的过渡发生在振幅接近最大值时，此时配重先停下，随后才开始最后的振荡。这种向简谐运动的过渡也比之前平缓得多：轴承的反作用力只略高于 Mg，吊索张力则低于 $20\,mg$。释放时的构型再次接近垂直，抛射物从较高的 $\simeq 40$米处射出，初始爬升略低，为42.6$_0$；而71吨的配重此时下落约1/2米。

参考文献

[1] Hansen, P. V., Acta Archaeologica, 63, (1992), pp189-268[2] Chevedden, P. E., Eigenbrod, L., Foley, V., and Soedel, W. (1995), Sci. Am. 273, pp66-71.[3] Chevedden, P. E. (2000), Dumbarton Oaks Papers, 54. 华盛顿哥伦比亚特区[4] Fulton M. S.,《十字军时代的火炮：围城战与投石机技术的发展》. History of Warfare, 第122卷, BRILL (2018).[5] Fulton M. S., Chrissis N. G., Phillips J. and Kedar B. Z. Crusades, (2017), 16, pp33-53.[6] Gal´an M. R. and Gal´an M. B., Archaeometry 62, 5 (2020) 904–916[7] Saimre T., Estonian Journal of Archaeology, (2006), 10, 1, pp61-80.[8] Denny M., 2005 Eur. J. Phys. 26 561[9] Goodno B. J. and Gere J. M. 材料力学, 2009.[10] 《维拉尔·德·奥讷库尔素描本摹本》, J. B. A. Lassus and J. Quicherat, 译注 R. Willis (伦敦, 1859 年);