arXiv:2303.01314v1 [math.NT] 2 Mar 2023

# 关于单调递增表示函数

S´andor Z. Kiss *，Csaba S´andor †，Quan-Hui Yang ‡

摘要

设 $k \geq 2$ 为一个整数， $A$ 为非负整数集。集合 $A$ 的表示函数 $R_{A,\ k}(n)$ 表示非负整数 $n$ 可表示为 $k$ 个来自 $A$的项之和的表示数。令 $A(n)$ 表示 $A$的计数函数。Bell 和 Shallit 最近给出了 Dombi 一个猜想的反例，并证明：如果对于某个 $\epsilon > 0$ 有 $A(n) = o(n^{\frac{k-2}{k}-\epsilon})$，那么 $R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(n)$ 最终严格递增。在本文中，我们将这一结果改进为 $A(n) = O(n^{\frac{k-2}{k-1}})$。我们还给出了一个例子，说明这一界是最佳可能的。

2010 年数学主题分类：11B34

关键词和短语：加法数论；加法表示函数；单调性

## 1 引言

令 $\mathbb{N}$ 为非负整数集，令 $A$ 为非负整数的子集。我们用 $A^n$ 表示集合 $n$ 的笛卡尔积 $A$，即

$$A^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) :\ a_1, a_2, \ldots, a_n \in A\}.$$

*布达佩斯技术与经济大学数学研究所代数系，M˝uegyetem rkp. 3.，H-1111，匈牙利布达佩斯。电子邮箱：ksandor@math.bme.hu。该作者获得了NKFIH K129335号资助。

†布达佩斯技术与经济大学数学研究所随机学系，M˝uegyetem rkp. 3.，H-1111，匈牙利布达佩斯；布达佩斯技术与经济大学计算机科学与信息理论系，M˝uegyetem rkp. 3.，H-1111，匈牙利布达佩斯；ELKH MTA-BME Lend¨ület 算术组合学研究组，M˝uegyetem rkp. 3.，H-1111，匈牙利布达佩斯。电子邮箱：csandor@math.bme.hu。该作者获得了NKFIH K129335号资助。

‡南京信息工程大学数学与统计学院，中国南京 210044；yangquanhui01@163.com。

Let

$$R_{A,k}(n) = |\{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A^n : a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n\}|,$$

$$R^{<}_{A,k}(n) = |\{(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A^n : a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n, a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}|,$$

$$R^{\leq}_{A,k}(n) = |\{(a_1, a_2, \dots a_k) \in A^n : a_1 + a_2 + \cdots + a_k = n, a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k\}|,$$

其中， $|.|$ 表示有限集的基数。若存在整数 $n_0$，使得对所有整数 $n \geq n_0$，都有 $R_{A,k}($ $n+1) \geq R_{A,k}(n)$，则称$R_{A,k}(n)$从某一点起关于 $n$ 单调递增（或最终单调递增）。

我们以相同的方式定义另外两个表示函数 $R^{<}_{A,\ k}(n)$ 和$R^{\leq}_{A\ ,\ k}(n)$ 的单调性。我们将集合 $A$ 的计数函数记为

$$A(n) = \sum_{\substack{a \in \mathcal{A} \\ a \leq n}} 1.$$

我们将自然数集合 $A$的下渐近密度定义为

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

并将渐近密度定义为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}$$

只要极限存在。自然数集合 $A$ 的生成函数记为

$$G_A(x) = \sum_{a \in A} x^a.$$

显然，若 $\mathbb{N} \setminus A$ 是有限集，则函数 $R_{A,\ 2}(n)R^{<}_{A,\ 2}(n)$ 和 $R^{\leq}_{A\ ,\ 2}(n)$ 最终都是单调递增的。Erd˝os、S´ark¨ozy 和 V.T. S´os 研究了是否存在集合 $A$，使得 $\mathbb{N} \setminus A$ 为无限集，且表示函数从某一点起单调递增。具体而言，他们证明了以下定理。

定理 A. 函数 $R_{A,\ 2}(n)$ 从某一点起单调递增，当且仅当序列 $A$ 从某一点起包含所有整数；也就是说，存在一个整数 $n_1$，满足

$$A \cap \{n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots\} = \{n_1, n_1 + 1, n_1 + 2, \dots\}.$$

定理 B. 存在一个无限集 $A \subseteq \mathbb{N}$，使得 $A(n) < n - cn^{1/3}$ 对于 $n > n_0$和 $R^{<}_{A,\ 2}(n)$ 从某一点起单调递增。

定理 C. 如果

$$A(n) = o\Big(\frac{n}{\log n}\Big),$$

那么，函数 $R^{<}_{A,\ 2}(n)$ 和 $R^{\leqslant}_{A\ ,\ 2}(n)$ 不可能从某一点起在 $n$ 中单调递增。

定理 D。如果 $A \subseteq \mathbb{N}$ 是一个无限集，满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n - A(n)}{\log n} = \infty,$$

那么 $R^{\leqslant}_{A\ ,\ 2}(n)$ 不可能从某一点起单调递增。

后一个定理由 Balasubramanian [1]独立地证明。

当 $k > 2$时，已知的结果非常少。许多年前， [8] 中以及 [6]中独立地证明了

定理 E。如果 $k$ 是一个满足 $k > 2$、 $A \subseteq \mathbb{N}$ 和 $R_{A,}$ 的整数，并且 $_k(n)$ 从某一点起在 $n$ 中单调递增，那么

$$A(n) = o\left(\frac{n^{2/k}}{(\log n)^{2/k}}\right)$$

无法成立。

此外，Dombi [3] 构造了 $A$ 渐近密度为 $_{1\ 2}$ 的集合，使得对于 $k > 4$，函数 $R_{A,\ k}(n)$ 从某一点起单调递增。他的构造基于 Rudin-Shapiro 集和 Thue-Morse 序列。另一方面，Dombi 提出了如下猜想。

Dombi 猜想。如果 $\mathbb{N} \setminus A$ 是无限的，那么 $R_{A,\ k}(n)$ 不可能严格递增。

对于 $k \geq 3$，Bell 和 Shallit 最近运用自动机理论和逻辑中的工具，给出了一个反例 [2] 来否定 Dombi 猜想。他们证明了以下结果。

定理 F。设 $k$ 为整数，满足 $k \geq 3$ ，并设 $F \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $0 \notin F$。如果 $F(n) = o(n^{\alpha})$ 对于 $\alpha < (k-2)/k$ 和 $A = \mathbb{N} \setminus F$ 成立，那么 $R_{A,\ k}(n)$ 最终严格递增。

在本文中，我们通过以下定理改进了他们的结果。

定理 1.1. 设 $k$ 是满足 $k \geq 3$ 的整数。若 $A \subseteq \mathbb{N}$ 满足

$$A(n) \leqslant \frac{n^{\frac{k-2}{k-1}}}{\sqrt[k-1]{(k-2)!}} - 2$$

*for* 所有充分大的整数 $n$，则 $R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(n)$ 最终严格递增 .

特别地，对于 $k=3$，我们有以下推论。

推论 1.2. 若 $A \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $A(n) \leqslant \sqrt{n}-2$，对所有充分大的整数 $n$均成立，则 $R_{\mathbb{N}\setminus A,3}(n)$ 最终严格递增。

我们在下面的定理中改进上述常数因子。

定理 1.3. 设 $A \subseteq \mathbb{N}$ 满足 $A(n) \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{n}-2$，对所有充分大的整数$n$均成立，则 $R_{\mathbb{N}\setminus A,3}(n)$ 最终严格递增。

由下一个定理可知，定理 1.1 中 $A$ 的计数函数上界在常数因子意义下是紧的。

定理 1.4. 假设 $f(n)$ 是一个满足 $f(n) \to \infty$（当 $n \to \infty$ 时）的函数。那么存在一个集合 $A \subseteq \mathbb{N}$，使得对所有充分大的整数 $n$，均有 $A(n) < \sqrt[k-1]{k-1}\,n^{\frac{k-2}{k-1}} + f(n)$，并且对无穷多个正整数 $n$，有 $R_{\mathbb{N}\setminus A,\,k}(n) < R_{\mathbb{N}\setminus A,\,k}(n-1)$。

注意，Shallit [7]最近构造了一个集合 $A$，其下渐近密度为正，并且函数 $R_{\mathbb{N}\setminus A,3}(n)$ 严格递增。

# 2 证明

这些定理的证明基于下述引理，该引理源自 Bell 和 Shallit 的论文 [2]，但论文中并未明确陈述。

引理 2.1. 对任意正整数 $n$ 和 $k$，若满足 $k \geq 3$，则有

$$\begin{aligned} & R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n) - R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n-1) \\ = \; & \binom{n+k-2}{k-2} + \sum_{i=1}^{k-2}\binom{k}{i}(-1)^i\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{m+k-i-2}{k-i-2}R_{A,i}(n-m)\right) \\ & +(-1)^{k-1}kR_{A,k-1}(n) + (-1)^k(R_{A,k}(n) - R_{A,k}(n-1)). \end{aligned}$$

引理 2.1 的证明。显然，

$$\begin{aligned} (1-x)(G_{\mathbb{N}\setminus A}(x))^k &= \sum_{n=0}^{\infty} R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n)x^n - \sum_{n=0}^{\infty} R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n)x^{n+1} \\ &= R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n) - R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n-1))x^n. \end{aligned}$$

另一方面,

$$(1-x)((G_{\mathbb{N}\setminus A)}(x))^k = (1-x)\left(\frac{1}{1-x} - G_A(x)\right)^k = (1-x)\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\frac{(-1)^i}{(1-x)^{k-i}}G_A(x)^i$$

$$= \frac{1}{(1-x)^{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-2}\binom{k}{i}\frac{(-1)^i}{(1-x)^{k-i-1}}G_A(x)^i + (-1)^{k-1}kG_A(x)^{k-1} + (-1)^k(1-x)G_A(x)^k.$$

众所周知,

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+m-1}{m-1}x^n.$$

由此可得,

$$R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}(R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n) - R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n-1))x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k-2}{k-2}x^n + \sum_{i=1}^{k-2}(-1)^i\binom{k}{i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{m+k-i-2}{k-i-2}R_{A,i}(n-m)\right)x^n$$

$$+(-1)^{k-1}k\sum_{n=0}^{\infty}R_{A,k-1}(n)x^n + (-1)^kR_{A,k}(0) + (-1)^k\sum_{n=0}^{\infty}(R_{A,k}(n) - R_{A,k}(n-1))x^n.$$

比较等式两边 $x^n$ 的系数，立即可得引理 2.1。

□

定理 1.1 的证明。显然,

$$R_{A,i}(n) = |\{(a_1, a_2, \ldots, a_i) \in A^i : a_1 + a_2 + \cdots + a_i = n\}|$$

$$\leq |\{(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}) \in A^{i-1} : a_1, a_2, \ldots, a_{i-1} \leq n\}| = A(n)^{i-1}.$$

The根据引理 1，存在常数 $c_1$、$c_2$、$c_3$、$c_4$，它们仅取决于 $k$，使得 t

$$
\begin{aligned}
& R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n)-R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n-1)\\
= \;& \binom{n+k-2}{k-2}+\sum_{i=1}^{k-2}\binom{k}{i}(-1)^i\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{m+k-i-2}{k-i-2}R_{A,i}(n-m)\right)\\
& +(-1)^{k-1}kR_{A,k-1}(n)+(-1)^k(R_{A,k}(n)-R_{A,k}(n-1))\\
\geq \;& \frac{n^{k-2}}{(k-2)!}-\sum_{i=1}^{k-2}2^k\sum_{m=0}^{n}\binom{m+k-i-2}{k-i-2}A(n)^{i-1}-kR_{A,k-1}(n)-A(n)^{k-1}\\
\geq \;& \frac{n^{k-2}}{(k-2)!}-\sum_{i=1}^{k-2}2^kA(n)^{i-1}\binom{n+k-i-1}{k-i-2}-k\left(\frac{n^{\frac{k-2}{k-1}}}{\sqrt[k-1]{(k-2)!}}\right)^{k-2}-\left(\frac{n^{\frac{k-2}{k-1}}}{\sqrt[k-1]{(k-2)!}}-2\right)^{k-1}\\
\geq \;& \frac{n^{k-2}}{(k-2)!}-c_1\sum_{i=1}^{k-2}A(n)^{i-1}n^{k-i-2}-k\cdot\frac{n^{\frac{(k-2)^2}{k-1}}}{((k-2)!)^{\frac{k-2}{k-1}}}\\
& -\left(\frac{n^{k-2}}{(k-2)!}-2(k-1)\frac{n^{\frac{(k-2)^2}{k-1}}}{((k-2)!)^{\frac{k-2}{k-1}}}+c_2n^{\frac{(k-2)(k-3)}{k-1}}\right)\\
\geq \;& \frac{n^{k-2}}{(k-2)!}-c_3n^{k-3}-k\frac{n^{\frac{(k-2)^2}{k-1}}}{((k-2)!)^{\frac{k-2}{k-1}}}-\left(\frac{n^{k-2}}{(k-2)!}-\frac{2(k-1)n^{\frac{(k-2)^2}{k-1}}}{((k-2)!)^{\frac{k-2}{k-1}}}+c_2n^{\frac{(k-2)(k-3)}{k-1}}\right)\\
= \;& \frac{k-2}{((k-2)!)^{\frac{k-2}{k-1}}}\cdot n^{\frac{(k-2)^2}{k-1}}-c_4n^{k-3}.
\end{aligned}
$$

因此，当 $n$ 足够大时，$R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n)-R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(n-1)>0$。 □

引理 2.2. 对于任意自然数集合 $A$ 以及任意自然数 $n$，有$R_{A,3}(n)\leqslant\frac{3}{4}A(n)^2+\left\{\frac{A(n)^2}{4}\right\}$，其中 $\{x\}$ 表示 $x$ 的小数部分。

注意，引理 2.2 是尖锐的：若 $A=\{0,1,\ldots,m\}$，则

$$
R_{A,3}\left(\left\lfloor\frac{3m}{2}\right\rfloor\right)=\frac{3}{4}A\left(\left\lfloor\frac{3m}{2}\right\rfloor\right)^2+\left\{\frac{A\left(\left\lfloor\frac{3m}{2}\right\rfloor\right)^2}{4}\right\},
$$

其中 $\lfloor y\rfloor$ 表示不大于 $y$ 的最大整数。

引理 2.2 的证明。固定一个自然数 $n$。令 $A\cap[1,n]=\{a_1<a_2<\cdots<a_m\}$ 和 $\overline{A}=\{n-a_m<n-a_{m-1}<\cdots<n-a_1\}$。对于 $i=1$、2、...、$m$，我们定义

$$
A_i=\{a_i+a_1<a_i+a_2<\cdots<a_i+a_{m+1-i}<a_{i+1}+a_{m+1-i}<\cdots<a_m+a_{m+1-i}\}.
$$

显然，

$$\begin{aligned} R_{A,3}(n) &= \sum_{i=1}^{m} \left|A_i \cap \overline{A}\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \min\{2m-2i+1, m\} \\ &= \sum_{i=1}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} m + \sum_{i=\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor+1}^{m} (2m-2i+1) \\ &= m\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left(m - \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor\right)^2 = \frac{3}{4}m^2 + \left\{ \frac{m^2}{4} \right\}. \end{aligned}$$

□

定理 1.3 的证明。对 $k=3$ 应用引理 2.1，我们得到

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{N}\setminus A,3}(n) - R_{\mathbb{N}\setminus A,3}(n-1) &= n+1-3\sum_{m=0}^{n} R_{A,1}(n-m) + 3R_{A,2}(n) - (R_{A,3}(n) - R_{A,3}(n-1)) \\ &= n+1-3A(n)+3R_{A,2}(n) - (R_{A,3}(n) - R_{A,3}(n-1)). \end{aligned}$$

因此，由引理 2.2，

$$\begin{aligned} R_{\mathbb{N}\setminus A,3}(n) - R_{\mathbb{N}\setminus A,3}(n-1) &\geq n+1-3A(n) - R_{A,3}(n) \\ &\geq n+1-3\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{n}-2\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{n}-2\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4} > 0, \end{aligned}$$

证毕。 □

定理 1.4 的证明。我们不妨假设 $f(n) < \sqrt[k-1]{k-1}\, n^{\frac{k-2}{k-1}}$。我们用归纳法定义一个由自然数组成的无限序列 $N_1, N_2, \ldots$。令 $N_1 = 100k^4$。假设 $N_1, \ldots, N_j$ 已经定义。令 $N_{j+1}$ 为满足 $N_{j+1} > 100k^4 N_j^{k-1}$ 且对每个 $n \geq N_{j+1}$ 都有 $f(n) > (k-1)(N_1^{k-2} + \cdots + N_j^{k-2})$ 的偶数。我们按以下方式定义集合 $A$。

$$A = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{N_j, 2N_j, 3N_j, \ldots, (k-1)N_j^{k-1}\}.$$

首先，我们给出 $A(n)$的上界估计。设 $n \geq 100k^4$。则存在一个下标 $j$，使得 $N_j \leq n < N_{j+1}$。将 $l$ 定义为满足 $l \leq (k-1)N_j^{k-2}$ 且 $lN_j \leq n$的最大整数。于是我们有

$$\begin{aligned} & A(n) - \sqrt[k-1]{k-1}\, n^{\frac{k-2}{k-1}} \\ \leq\ & (k-1)(N_1^{k-2} + \cdots + N_j^{k-2}) + l - \sqrt[k-1]{k-1}\,(lN_j)^{\frac{k-2}{k-1}} \\ =\ & (k-1)(N_1^{k-2} + \cdots + N_j^{k-2}) + l^{\frac{k-2}{k-1}}(l^{\frac{1}{k-1}} - (k-1)^{\frac{1}{k-1}} N_j^{\frac{k-2}{k-1}}) \\ \leq\ & f(n), \end{aligned}$$

这意味着

$$A(n) < \sqrt[k-1]{k-1}n^{\frac{k-2}{k-1}} + f(n).$$

接下来我们将证明，存在无穷多个正整数 $n$ ，使得$R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(n) < R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(n-1)$。为证明这一点，我们根据 $k$的奇偶性分两种情况讨论。

假设 $k$是奇整数。对于 $j = 1, 2, \ldots$，我们定义

$$u_j = (k-1)N_j^{k-1} + 100(k-2)(k-1)^3 N_j^{k-2}.$$

现在，我们证明当 $j$ 足够大时，$R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(u_j) < R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(u_j - 1)$。

由于 $A$的所有元素都是偶数，而 $u_j - 1$是奇数，因此$R_{A,\ k}(u_j - 1) = 0$。根据引理 2.1，我们有

$$\begin{aligned}
& R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(u_j) - R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(u_j - 1) \\
= & \binom{u_j + k - 2}{k-2} + \sum_{i=1}^{k-2} \binom{k}{i} (-1)^i \left( \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-i-2}{k-i-2} R_{A,i}(u_j - m) \right) \\
& + (-1)^{k-1} k R_{A,k-1}(u_j) + (-1)^k (R_{A,k}(u_j) - R_{A,k}(u_j - 1)) \\
\leq & \binom{u_j + k - 2}{k-2} + k^2 \left( \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-4}{k-4} R_{A,2}(u_j - m) \right) \\
& + \sum_{i=3}^{k-2} 2^k \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-i-2}{k-i-2} A(u_j)^{i-1} + k R_{A,k-1}(u_j) - R_{A,k}(u_j). \qquad (1)
\end{aligned}$$

接下来，我们将分别给出 (1) 右侧各项的一个上界。

存在一个仅依赖于 $k$ 的常数 $c_5$ ，使得

$$\binom{u_j + k - 2}{k-2} \leq \frac{(k-1)^{k-2} N_j^{k^2-3k+2} + 100(k-2)^2 (k-1)^k N_j^{k^2-3k+1} + c_5 N_j^{k^2-3k}}{(k-2)!} \qquad (2)$$

and

$$\begin{aligned}
& k^2 \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-4}{k-4} R_{A,2}(u_j - m) \leq k^2 \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-4}{k-4} A(u_j - m) \\
\leq & k^2 \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-4}{k-4} A(kN_j^{k-1}) \leq k^2 \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-4}{k-4} 2\sqrt[k-1]{k-1} (kN_j^{k-1})^{\frac{k-2}{k-1}} \\
\leq & k^2 \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-4}{k-4} 2kN_j^{k-2} = 2k^3 N_j^{k-2} \binom{u_j + k - 3}{k-3} \\
\leq & 2k^3 N_j^{k-2} \binom{kN_j^{k-1}}{k-3} \leq \frac{2k^k}{(k-3)!} N_j^{k^2-3k+1}. \qquad (3)
\end{aligned}$$

此外,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=3}^{k-2} 2^k \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-i-2}{k-i-2} A(u_j)^{i-1} \\
\leq\ & c_6 \sum_{i=3}^{k-2} 2^k \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-i-2}{k-i-2} ((N_j^{k-1})^{\frac{k-2}{k-1}})^{i-1} \\
\leq\ & c_6 \sum_{i=3}^{k-2} 2^k N_j^{(k-2)(i-1)} \sum_{m=0}^{u_j} \binom{m+k-i-2}{k-i-2} \\
=\ & c_6 \sum_{i=3}^{k-2} 2^k N_j^{(k-2)(i-1)} \binom{u_j+k-i-1}{k-i-1} \\
\leq\ & c_7 \sum_{i=3}^{k-2} N_j^{(k-2)(i-1)} \cdot N_j^{(k-1)(k-i-1)} \\
=\ & c_7 \sum_{i=3}^{k-2} N_j^{k^2-3k-i+3} \leq c_8 N_i^{k^2-3k}, \qquad (4)
\end{aligned}$$

其中, $c_6$、$c_7$ 和 $c_8$ 是仅取决于 $k$ 的常数。此外,

$$\begin{aligned}
R_{A,k-1}(u_j)) &\leq A(u_j)^{k-2} \leq A(kN_j^{k-1})^{k-2} \\
&\leq (2\sqrt[k-1]{k-1}(kN_j^{k-1})^{\frac{k-2}{k-1}})^{k-2} \leq (2k)^{k-2} N_j^{(k-2)^2}. \qquad (5)
\end{aligned}$$

显然,

$$\begin{aligned}
& R_{A,k}(u_j) \\
\geq\ & |\{(x_1,\ldots,x_k) \in (\mathbb{Z}^+)^k : \sum_{t=1}^{k} x_t = u_j, N_j \mid x_t, x_t \leq (k-1)N_j^{k-1} \text{ for } t = 1,\ldots,k\}| \\
=\ & |\{(y_1,\ldots,y_k) \in (\mathbb{Z}^+)^k : \sum_{t=1}^{k} y_t = \frac{u_j}{N_j}, y_t \leq (k-1)N_j^{k-2} \text{ for } t = 1,\ldots,k\}| \\
=\ & |\{(y_1,\ldots,y_k) \in (\mathbb{Z}^+)^k : \sum_{t=1}^{k} y_t = \frac{u_j}{N_j}\}| \\
& -|\{(y_1,\ldots,y_k) \in (\mathbb{Z}^+)^k : \sum_{t=1}^{k} y_t = \frac{u_j}{N_j},\ y_t > (k-1)N_j^{k-2} \text{ for some } t \in \{1,\ldots,k\}\}|.
\end{aligned}$$

我们看到

$$\begin{aligned}
& |\{(y_1,\ldots,y_k) \in (\mathbb{Z}^+)^k : y_1 + \cdots + y_k = \frac{u_j}{N_j}\}| \\
=\ & \binom{\frac{u_j}{N_j}-1}{k-1} \geq \frac{N_j^{k^2-3k+2} + 100(k-2)(k-1)^{k+2} N_j^{k^2-3k+1} + c_9 N_j^{k^2-3k}}{(k-1)!},
\end{aligned}$$

其中 $c_9$ 是一个仅依赖于 $k$的常数，并且

$$\begin{aligned} & |\{(y_1,\dots,y_k)\in(\mathbb{Z}^+)^k : \sum_{t=1}^{k} y_t = \frac{u_j}{N_j},\ y_t > (k-1)N_j^{k-2} \text{ for some } t\in\{1,\dots,k\}\}| \\ = \ & k|\{(z_1,\dots,z_k)\in(\mathbb{Z}^+)^k : z_1+\cdots+z_k = 100(k-2)(k-1)^3N_j^{k-3}\}| \\ \le \ & k(100(k-2)(k-1)^3)^k N_j^{k^2-3k}. \end{aligned}$$

最后一个等式成立，是因为如果 $y_1+\cdots+y_k=\frac{u_j}{N_j}$满足 $y_t>(k-1)N_j^{k-1}$，那么

$$y_1+\cdots+y_{t-1}+(y_t-(k-1)N_j^{k-2})+y_{t+1}+\cdots+y_k = 100(k-2)(k-1)^3N_j^{k-3},$$

其中每一项都是正数。此外，如果 $z_1+\cdots+z_k=100(k-2)(k-1)^3N_j^{k-3}$,$z_i\in\mathbb{Z}^+$，那么可以构造 $k$ 个不同的、形式为 $y_1+\cdots+y_k=\frac{u_j}{N_j}$的和，其中 $y_i=z_i$满足 $i\ne t$ 且 $y_t=z_t+(k-1)N_j^{k-2}$。

因此

$$R_{A,k}(u_j) \ge \frac{(k-1)^{k-1}N_j^{k^2-3k+2}+100(k-2)(k-1)^{k+2}N_j^{k^2-3k+1}+c_{10}N_j^{k^2-3k}}{(k-1)!}, \qquad (6)$$

其中 $c_{10}$ 是一个常数。根据 (1)–(6)，我们得到

$$\begin{aligned} & R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(u_j) - R_{\mathbb{N}\setminus A,k}(u_j-1) \\ \le \ & \frac{(k-1)^{k-2}N_j^{k^2-3k+2}+100(k-2)^2(k-1)^kN_j^{k^2-3k+1}+c_5N_j^{k^2-3k}}{(k-2)!} \\ & +\frac{2k^k}{(k-3)!}N_j^{k^2-3k+1}+c_8N_i^{k^2-3k}+(2k)^{k-2}N_j^{(k-2)^2} \\ & -\frac{(k-1)^{k-1}N_j^{k^2-3k+2}+100(k-2)(k-1)^{k+2}N_j^{k^2-3k+1}+c_{10}N_j^{k^2-3k}}{(k-1)!} \\ = \ & \left(\frac{2k^k}{(k-3)!}-100\frac{(k-1)^k}{(k-3)!}\right)N_j^{k^2-3k+1}+(2k)^{k-2}N_j^{(k-2)^2}+c_{11}N_j^{k^2-3k}. \end{aligned}$$

其中 $c_{11}$ 是一个常数。因此，当 $j$ 足够大时，我们有 $R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(u_j) < R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(u_j-1)$。

如果 $k$ 是偶数，那么与上面相同的论证表明，当 $j$ 足够大时，$R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(u_j+1) < R_{\mathbb{N}\setminus A,\ k}(u_j)$。 □

# 参考文献

[1] B. Balasubramanian, 《关于 Erd ˝os、S ´ark ¨ozy 和 S ´os 一项结果的注记》，《算术学报》49（1987年），45–53。

[2] J.P. Bell 和 J. Shallit, 《加法数论中对 Dombi 猜想的反例》, 《匈牙利数学学报》, 即将出版, 2023年。[3] G. Dombi, 《某些集合的加法性质》, 《算术学报》49（1987年）, 45–53。[4] P. Erd˝os、A. S´ark¨ozy、V. T. S´os, 《一般序列加法性质的问题与结果 IV》, 载于《数论》会议论文集, 印度乌塔卡蒙德, 1984年, 数学讲义1122, 施普林格出版社（1985年）, 85–104。[5] P. Erd˝os、A. S´ark¨ozy、V. T. S´os, 《一般序列加法性质的问题与结果 V》, 《数学月刊》102（1986年）, 183–197。[6] S. Z. Kiss, 《加性表示函数的单调性》, 《德布勒森数学刊》73, 489–495（2008年）。[7] J. Shallit, 《具有正下密度的 Dombi 反例》, arXiv:2302.02138。[8] M. Tang, 《一般序列加法性质的一些推广》, 《澳大利亚数学会公报》73（2006年）, 139–146。