arXiv:2303.01320v1 [math.FA] 2 Mar 2023

欧几里得测度空间中 Sobolev 嵌入的 Kolmogorov、Gelfand 和线性宽度的逼近阶

¨MARC KESSEBOHMER 和 LINUS WIEGMANN

摘要。本文彻底解决了如下问题：对于欧几里得测度空间$W^{\alpha,p}$和$W_0^{\alpha,p}$,中的 Sobolev 空间嵌入L_ν^q，相对于 Kolmogorov、Gelfand 和线性宽度求其（上）逼近阶，其中 ν 是一个博雷尔概率测度，其支集包含于开 m 维单位立方体内，且 $1 \le p,q \le \infty$ 可取任意可能的值。我们将仅根据 ν 的L^q-谱确定各种上逼近阶的精确值，最后给出保证逼近阶存在的L^q-谱正则性的充分条件。我们还阐明了逼近阶这一概念与分形几何中支集 ν的上、下闵可夫斯基维数之间的一些内在联系。

1. 引言与主要结果陈述

本文研究将 Sobolev 空间 $W_0^{\alpha,p}$, 的单位球嵌入$W^{\alpha,p}$ 至 L_ν^q时的 Kolmogorov、Gel′fand 和线性上、下逼近阶，其中 ν 是一个支集包含于单位立方体中的博雷尔概率测度。若 ν 是勒贝格测度的限制，则逼近阶早已得到充分理解（参见 [Tik90]）。对于光滑紧黎曼流形，Geller 和 Peseneson 近来得到了类似结论，见[GP13; GP14; Pes16]。如果测度含有奇异部分，但并非豪斯多夫测度在某个流形上的限制，那么此前只有 Birman/Solomjak 和 Borzov 给出了较粗略的上界，见 [Bor71; Bor70; BB71; BS66; KN22a]；最近，Niemann 和第一作者首次依据L^q-谱给出了改进结果，见 [KN22a] ，但仅适用于 $1 < p \le q < \infty$的情形。本文弥补了这一缺口，针对任意测度以及所有p、$q \le \infty$的取值，精确地依据L^q-谱确定上逼近阶，并给出易于检验的L^q-谱正则性条件，以保证逼近阶的存在。

为确定所关注的量，我们采用离散化方法，并结合近期关于最优划分的研究成果；这些成果是在 Kreˇın–Feller 算子背景下展开的，见 [KN22c; KN22d]。正如 Tikhomirov [Tik90]所指出的，离散化方法最初由 Ismagilov [Ism68; Ism74]提出，随后由 Maˇıorov [Maˇı75], Kaˇsin [Kaˇs77] 和 Gluˇskin [Glu83]进一步发展。我们先来介绍相关的 Sobolev空间。

1.1. **Sobolev空间**。我们先介绍一些基本记号，以引出相关的 Sobolev 空间。令 $\mathbb{R}^m$ 表示<m>维欧几里得空间，$m \in \mathbb{N}$。对于多重指标 $k = (k_1, \dots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$，我们定义 $|k| := \sum_{i=1}^m k_i$ 以及 $x^k := \prod_{i=1}^m x^{k_i}$。我们考虑定义域 $\mathring{Q}$，它表示半开单位立方体 $Q = (0,1]^m$ 的内部；对于 $p \in \mathbb{R}_{\ge 1}$，我们

动力系统研究所，第3学院——数学与计算机科学，不来梅大学，Bibliothekstr. 5, 28359 不来梅，德国电子邮件地址：mhk@uni-bremen.de, linus3@uni-bremen.de。2000 数学主题分类。46A32; 35P20; 42B35; 31B30; 28A80.关键词与短语。 柯尔莫哥洛夫宽度、Gel′fand 宽度、线性宽度、Sobolev空间、L^q-谱、闵可夫斯基维数、配分函数、粗多重分形形式体系。

令 $L^p := L^p(\mathcal{Q}) = L^p_\Lambda(\mathcal{Q})$ 表示在 $\mathring{\mathcal{Q}}$ 上关于限制到 $\mathcal{Q}$的勒贝格测度 Λ 可积的实值函数集合。Sobolev空间 *Sobolev空间*

$$W^{\alpha,p}(\mathcal{Q}) := \left\{ f \in L^p(\mathcal{Q}) : \forall k \in \mathbb{N}_0^m \text{ with } |k| \le \alpha, D^k f \in L^p(\mathcal{Q}) \right\}$$

（例如参见 [Sob91] 和 [Nik61]）定义为所有函数 $f \in L^p(\mathcal{Q})$ 的集合，其中弱导数 $D^k f := \partial^{|k|} / \left(\partial^{k_1}_{x_1} \cdots \partial^{k_m}_{x_m} \right) f$ 直至 $\alpha \in \mathbb{N}$ 阶均属于 $L^p(\mathcal{Q})$，并配备如下范数

$$\|f\|_{W^{\alpha,p}(\mathcal{Q})} := \|f\|_{L^p(\mathcal{Q})} + \|f\|_{L^{\alpha,p}(\mathcal{Q})},$$

其中我们令 $\|\mathrm{f}\|_{L^{\alpha},{}^{p}(\mathcal{Q})} := \left(\int_{\mathcal{Q}} |\nabla_\alpha \mathrm{f}|^p \, \mathrm{d}\Lambda \right)^{1/p}$，且 $|\nabla_\alpha \mathrm{f}| := \left(\sum_{|\mathrm{k}|=\alpha} \left| \mathrm{D}^k \mathrm{f} \right|^2 \right)^{1/2}$。记 $\mathrm{W}_0^{\alpha\, p},(\mathcal{Q})$ 为 $\mathscr{C}_c^\infty\left(\mathring{\mathcal{Q}}\right)$ 关于 $\|\cdot\|_{W^{\alpha},{}^{p}(\mathcal{Q})}$ 的完备化，其中 $\mathscr{C}_c^\infty\left(\mathring{\mathcal{Q}}\right)$ 表示°所有在 $\mathcal{Q}$中具有紧支集的无穷次可微函数的集合。对于任意半开立方体 $\mathrm{Q} \subset \mathcal{Q}$，本文中假设其边平行于坐标轴。根据 Friedrichs不等式，空间 $\mathrm{W}_0^{\alpha\, p},(\mathrm{Q})$ 带有由 $\|\cdot\|_{L^{\alpha},{}^{p}(\mathrm{Q})}$ 给出的等价范数。对于从 $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续函数集合，我们记作 $\mathscr{C}(\mathrm{B})$。如果

$$1 \le p, q \le \infty \text{ and } \hat{\varrho} := \alpha - m/p > 0, \tag{♠}$$

——这将是我们接下来始终采用的假设——，那么 $W^{\alpha,p}(Q)$ 紧嵌入到 $\left(\mathscr{C}(Q) \text{ 中，其中 } \|\cdot\|_{\mathscr{C}(Q)}\right), \overline{\|\cdot\|_{\mathscr{C}(Q)}}$表示一致范数（参见引理 3.1）。这使我们能够选取 $W^{\alpha,p}(Q)$ 的连续代表元，并得到以下紧嵌入

$$\iota : W^{\alpha,p}(\mathcal{Q}) \hookrightarrow L^q_v(\mathcal{Q}) \text{ and } \iota : W_0^{\alpha,p}(\mathcal{Q}) \hookrightarrow L^q_v(\mathcal{Q}).$$

我们还将记 $\mathrm{L}^q_v := \mathrm{L}^q_v(\mathcal{Q})$、$\mathrm{W}^{\alpha,p} := \mathrm{W}^{\alpha,p}(\mathcal{Q})$、$\mathrm{W}_0^{\alpha\, p} :=$、$\mathrm{W}_0^{\alpha\, p},(\mathcal{Q})$ 以及 $\|\cdot\|_{L^{\alpha}, {}_{p}} = \|\cdot\|_{L^{\alpha},{}^{p}(\mathcal{Q})}$。全文中，我们令 $\mathrm{B}^p_\alpha \in \left\{ \mathscr{B}\mathrm{W}_0^{\alpha\, p}, \mathscr{B}\mathrm{W}^{\alpha,p} \right\}$，其中 $\mathscr{B}\mathrm{X} := \{\mathrm{x} \in \mathrm{X} : \|\mathrm{x}\|_X \le 1\}$ 表示赋范空间 $(\mathrm{X}, \|\cdot\|_X)$ 中的单位球。

1.2. **n-宽度和逼近阶。** 现在我们转向本研究的主要对象。对于赋范向量空间 $(V, \|\cdot\|_V)$ 以及其子集 $A \subset V$，A 在V中的*Kolmogorov n-宽度*，$n \in \mathbb{N}_0$，定义为

$$d_n^K(A,V) := \inf \left\{ \sup_{x \in A} \inf_{y \in W} \|x - y\|_V : W <_n V \right\},$$

其中，$W <_n V$ 表示W是V的一个线性子空间，且其维数 $\dim W \le n$。n-宽度$d_n^K(A,V)$衡量A能够在多大程度上由n维V子空间逼近。类似地，我们考虑A在V中的格尔*fand n-宽度*，$n \in \mathbb{N}_0$，定义为

$$d_n^G(A,V) := \inf \left\{ \sup_{x \in A \cap U} \|x\|_V : U <^n V \right\},$$

其中，$U <^n V$ 表示U是V的一个线性子空间，其余维不超过n。回想一下，若存在对偶空间V'中的线性无关泛函 $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$，使得$U = \{v \in V : \varphi_1(v) = \cdots = \varphi_n(v) = 0\}$，则称$U$的余维为$n$。

最后，我们称

$$d_n^L(A,V) := \inf \left\{ \sup_{x \in A} \|x - Bx\|_V : B \in \mathscr{L}_n(V) \right\}$$

线性n-宽度，其中 $\mathscr{L}_n(V) := \{B \text{ 空间} : V \to V \text{ 线性且有界，} B \text{ 空间}(V) <_n V\}$ 表示 V 上所有秩至多为 n 的有界算子集合。若 A 是预紧的，则 $d_n^K(A,V)$ 和 $d_n^G(A,V)$ 均趋于零，我们将研究其收敛阶；为此，定义

$$\overline{\mathbf{ord}}_\star(A,V) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(d_n^\star(A,V)\right)}{\log n}, \underline{\mathbf{ord}}_\star(A,V) := \liminf_{n\to\infty} \frac{\log\left(d_n^\star(A,V)\right)}{\log n}$$

并分别将这些量称为A 在 V 中的上 *Kolmogorov*（$\star = K$）、Gel′fand（$\star = G$）、和线性（$\star = L$）逼近阶。若上、下逼近阶相同，则简记 $\mathbf{ord}_\star(A, V)$ 为 $\star \in \{K、G、L\}$。

本文重点研究 Banach空间 V 取为$L_\nu^q = L_\nu^q(\mathcal{Q})$ 的情形，其中 ν 是有限博雷尔测度，且 $\operatorname{supp}(\nu) \subset \mathring{\mathcal{Q}}$，$\operatorname{card}(\operatorname{supp}(\nu)) = \infty$（以排除平凡情形）；同时研究单位球 B_α^p，它自然嵌入L_ν^q，以取代集合A。我们想指出，$\operatorname{supp}(\nu) \subset \mathcal{Q}$ 这一限制可以放宽，但这会带来一些有关下界的技术问题。可按照[KN22d] 中的做法，通过考虑 $\mathscr{D}_n^D := \left\{Q \in \mathscr{D}_n : \partial\mathcal{Q} \cap Q = \varnothing\right\}$ 来处理这一问题，而不考虑 $\mathscr{D}_n$。为便于阐述，我们仍采用对 ν 的支集所作的假设。

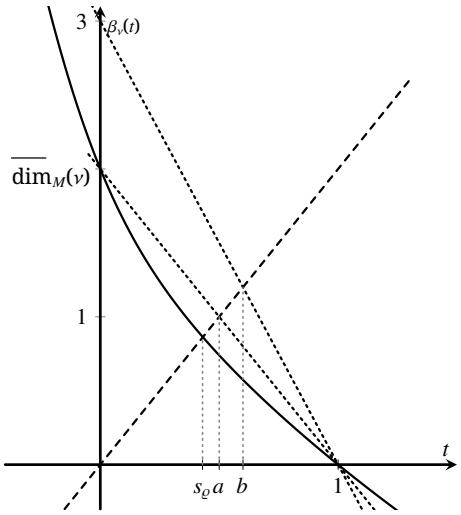

图 1.1. 当 $\mathrm{m} = 3$ 时，实线表示支集位于 Sierpi ´nski 四面体上的自相似测度 ν 的 L^q-谱 β_ν；其四个压缩比均为 1/2，概率向量为 (0.599,0.3,0.001,0.1)；$\beta_\nu(0) = \dim_M(\nu) = 2$。对于 $\varrho = 2$（虚线的斜率），谱与虚线的交点确定 s_ϱ。点线 $\mathrm{t} \mapsto 3(1 - \mathrm{t})$（与 β_Λ 的图像重合）和 $\mathrm{t} \mapsto 2(1 - \mathrm{t})$ 给出两个上界 $\mathrm{s}_\varrho \le \mathrm{a} \le \mathrm{b}$，其中 $\mathrm{a} := \underline{\dim}_M(\nu) / \left(\underline{\dim}_M(\nu) + \varrho\right)$，而比尔曼/索洛米亚克–博尔佐夫界 [BS66; Bor71] $\mathrm{b} := \mathrm{m}/(\mathrm{m} + \varrho)$。

1.3. **The L^q-谱与分割优化粗多重分形维数**。我们的主要结果依赖于一些先前的研究，主要是 [KN22c; KN22a]。这些研究的核心对象是L^q-谱，近年来它也引起了其他研究领域的一些关注，例如 [Shm19; KNZ23]。对于$n \in \mathbb{N}$，我们定义二进立方体集合

$$\mathscr{D}_n := \left\{Q = \prod_{k=1}^m (l_k 2^{-n}, (l_k + 1)2^{-n}] : (l_k)_{k=1}^m \in \mathbb{Z}^m, \nu(Q) > 0\right\}, \mathscr{D} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{D}_n$$

并定义 ν的L^q-谱，其中$t \in \mathbb{R}_{\ge 0}$，定义如下：

$$\beta_\nu(t) := \limsup_{n\to\infty} \beta_{\nu,n}(t) \text{ with } \beta_{\nu,n}(t) := \frac{\log\left(\sum_{Q\in\mathscr{D}_n} \nu(Q)^t\right)}{\log(2^n)}.$$

注意，β_ν 作为凸函数列的上极限，本身也是凸函数；并且 $\beta_\nu(0)$ 等于 $\operatorname{supp}(\nu)$ 的上 *Minkowski*维数，记作 $\dim_M(\nu) :=$

~~dim~~$_M(\operatorname{supp}(\nu))$（见第 3 页的图 1.1；关于 $\beta_\nu(0) = \dim_M(\nu)$ 的证~~明~~，参见例如 [Rie95]）。我们还需要 $\operatorname{supp}(\nu)$ 的下闵可夫斯基维数，记作 $\dim_M(\nu)$，类似地有

$$\underline{\dim}_M(\nu) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log(\operatorname{card}\mathscr{D}_n)}{\log(2^n)}.$$

最后，我们定义

$$s_b := \inf\{t > 0 : \beta_\nu(t) - bt \le 0\} \quad \text{for } b > 0.$$

借助 [KN22c; KN22d], 中提出的粗多重分形形式体系概念，我们将阐述近似阶存在的必要条件。为此，我们采用最优粗多重分形维数的概念。对于$q < \infty$和 $\varrho := q\hat{}\varrho = q(\alpha - m/p)$，我们定义

$$\mathfrak{J} := \mathfrak{J}_\varrho : \mathscr{D} \to \mathbb{R}, Q \mapsto \nu(Q)\Lambda(Q)^{\varrho/m}.$$

注意，ϱ 为正，这由（♠）保证（这确定了第5页图1.2中的阴影区域，该区域最多分为4个区，分别称为情形I–IV）。接着，令

$$N_{\varrho,n}(a) := \left\{Q \in \mathscr{D}_n : \mathfrak{J}_\varrho(Q) \ge 2^{-an}\right\} \text{ and } \mathscr{N}_{\varrho,n}(a) := \operatorname{card} N_{\varrho,n}(a)$$

我们定义

$$\overline{F}_\varrho(a) := \limsup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log \mathscr{N}_{\varrho,n}(a)}{n\log 2} \text{ and } \underline{F}_\varrho(a) := \liminf_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log \mathscr{N}_{\varrho,n}(a)}{n\log 2}$$

并将上，分别称为下的最优粗多重分形维数定义为

$$\overline{\mathscr{F}}_\varrho := \sup_{a>0} \frac{\overline{F}_\varrho(a)}{a}, \text{resp. } \underline{\mathscr{F}}_\varrho := \sup_{a>0} \frac{\underline{F}_\varrho(a)}{a}. \tag{1.1}$$

此时，我们想请您注意 KN22c 在此背景下得出的大偏差理论中的决定性结果，该结果指出：

$$s_\varrho = \overline{\mathscr{F}}_\varrho.$$

1.4. 主要结果。在概述主要结果之前，我们先指出，根据关于 $\star, \diamond \in \{G, K, L\}$ 的一些一般性考量，$\operatorname{ord}_\star(A, V)$ 与 $\operatorname{ord}_\diamond(A, V)$ 的值，以及 $\overline{\operatorname{ord}}_\star(A, V)$ 与 $\overline{\operatorname{ord}}_\diamond(A, V)$ 的~~值~~，至多相差 ~~1/~~2（见推论2.3）。在 KN22a 中，$-1/(qs_\varrho)$ 被推导为 $1 < p \le q < \infty$ 情形下的一般上界。在本文中，借助更复杂的方法来处理上界和下界，我们得以给出下文所述的完整图景。对于 $r \in [1, \infty]$，我们将使用 $r' := r/(r-1)$ 的概念，其中 $\infty' = 1$ 且 $1' = \infty$。此外，令

$$\overline{S}_\varrho := \begin{cases} \dfrac{1}{qs_\varrho}, & \text{for } 1 \le q < \infty, \\ \dfrac{\hat{\varrho}}{\overline{\dim}_M(\nu)}, & \text{for } q = \infty, \end{cases} \quad \text{and} \quad \underline{S}_\varrho := \begin{cases} \dfrac{1}{q\underline{\mathscr{F}}_\varrho}, & \text{for } 1 \le q < \infty, \\ \dfrac{\hat{\varrho}}{\underline{\dim}_M(\nu)}, & \text{for } q = \infty. \end{cases}$$

定理 1.1（上近似阶）。假设（♠），我们得到上近似阶

$$\overline{\mathbf{ord}}_K\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right) = \begin{cases} -\overline{S}_\varrho(q) + 1/q - 1/p, & \textit{Cases (I) \& (III): } q \le p \textit{ or } 2 \le p \le q, \\ -\overline{S}_\varrho(q), & \textit{Case (II): } p \le q \le 2, \\ -\overline{S}_\varrho(q) + 1/q - 1/2, & \textit{Case (IV): } p \le 2 \le q, \end{cases}$$

$$\overline{\mathbf{ord}}_G\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right) = \overline{\mathbf{ord}}_K\left(B^{q'}_\alpha, L^{p'}_\nu\right),$$

$$\overline{\mathbf{ord}}_L\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right) = \max\left\{\overline{\mathbf{ord}}_G\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right), \overline{\mathbf{ord}}_K\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right)\right\}.$$

注记 1.2. 我们作如下说明：

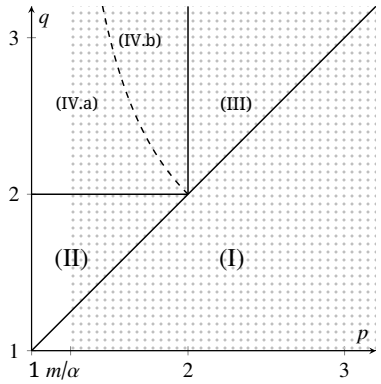

图1.2。(p,q)对应定义域的示意图：I：$q \le p$；II：$p \le q \le 2$；III：$2 \le p \le q$；IV：$p \le 2 \le q$。我们的结果涵盖阴影区域，其中$p > m/\alpha$（在此图示中等于5/4）。

(1) 注意，如果 β_ν 在 $[0,1]$, 上连续，那么 $q \mapsto S_{q\hat{\varrho}}$ 在 $[1,\infty]$ 上连续。事实上，对于所有 $1 \le p,q \le \infty$，我们有如下闭式表达式

$$1/S_\varrho = \inf\{t > 0 : \beta_\nu(t/q) - t\hat{\varrho} \le 0\}.$$

这一观察得出结论：各种逼近阶也会随p 和q 连续变化，并且 β_ν 的单调性性质也同样成立。

(2) Kolmogorov 与 Gel′fand 逼近阶之间的对偶性，是由（2.1）中所述的有限维类比与离散化方法结合而得出的结果。

(3) 若将 ν 选为限制在一个s维流形上的s维豪斯多夫测度，那么我们的结果与 [GP13；GP14；Pes16]中得到的逼近阶一致。这一观察可以自然地推广到 s-Ahlfors–David正则测度 ν。对于s维豪斯多夫测度，L^q-谱由线性函数 β_ν 给出：$t \mapsto (1-t)\,s$（例如参见 [KN22d]）；在这种情况下，s_ϱ 很容易确定。

(4) 显然，对于上 Gel′fand 逼近阶，我们 have

$$\overline{\mathbf{ord}}_G\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right) = \begin{cases} -\overline{S}_\varrho(q) + 1/q - 1/p, & \text{Cases (I) \& (II): } q \le p \text{ or } p \le q \le 2, \\ -\overline{S}_\varrho(q), & \text{Case (III): } 2 \le p \le q, \\ -\overline{S}_\varrho(q) + 1/2 - 1/p, & \text{Case (IV): } p \le 2 \le q \end{cases}$$

并且，令 $(x)_+ := \max\{0,x\}$ for $x \in \mathbb{R}$，我们得到上线性逼近阶

$$\overline{\mathbf{ord}}_L\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right) = \begin{cases} -\overline{S}_\varrho(q) + 1/q - 1/2, & \text{Case (IV.a): } p \le 2 \le q \le p', \\ -\overline{S}_\varrho(q) + 1/2 - 1/p, & \text{Case (IV.b): } p \le 2 \le p' < q, \\ -\overline{S}_\varrho(q) + (1/q - 1/p)_+, & \text{else.} \end{cases}$$

定义 1.3。我们定义两种正则性概念。

(1) 若对于 $\varrho < \infty$，ν 满足 $\mathcal{F}_\varrho = \mathrm{s}_\varrho$；且对于 $\varrho = \infty$，$\underline{\dim}_M(\nu) = \dim_M(\nu)$，则称测度 ν 为多重分形正则。(2) 若对于 $\varrho < \infty$，测度 ν 满足以下条件之一，则称其为 L^q-正则：(a) 对所有 $\mathrm{t} \in \left(\mathrm{s}_\varrho - \varepsilon, \mathrm{s}_\varrho\right) \cap [0,1]$，都有 $\beta_\nu(\mathrm{t}) = \liminf_n \beta_{\nu,n}(\mathrm{t}) \in \mathbb{R}$，其中某个 $\varepsilon > 0$；或 (b) $\beta_\nu\left(\mathrm{s}_\varrho\right) = \liminf_n \beta_{\nu,n}\left(\mathrm{s}_\varrho\right)$，且 β_ν 在 s_ϱ 上可微。

注1.4。 由 [KN22a, 定理 1.2]（另见 [KN22d]）可知，若 ν 对于 $\varrho < \infty$ 是L^q-正则的，则 ν 对于 ϱ 是多重分形正则的；而且在许多情形下都可以验证后一性质，例如自相似测度（不要求满足分离条件）、共形弱吉布斯测度、凝聚系统等，详见 [KNZ23; KN22b]。当$q = \infty$时， ν 的多重分形正则性实际上归结为判断 $\dim_M(\nu) = \beta_\nu(0) = \liminf_n \beta_{\nu,n}(0) = \dim_M(\nu)$ 是否成立；这一点在许多具体例子中已知。

定理 1.5 (下逼近阶)。 对于 $\star \in \{K, G, L\}$，并假设(♠)，我们有以下下逼近阶界：

$$\overline{S}_\varrho - \underline{S}_\varrho + \overline{\mathbf{ord}}_\star\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right) \le \underline{\mathbf{ord}}_\star\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right) \le \overline{\mathbf{ord}}_\star\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right)$$

且对于 $q = \infty$，我们有以下等式

$$\underline{\mathbf{ord}}_K\left(B^p_\alpha, L^\infty_\nu\right) = \begin{cases} -\hat{\varrho}/\underline{\dim}_M(\nu) - 1/p, & \text{for } p > 2, \\ -\hat{\varrho}/\underline{\dim}_M(\nu) - 1/2, & \text{for } p \le 2, \end{cases}$$

$$\underline{\mathbf{ord}}_G\left(B^p_\alpha, L^\infty_\nu\right) = \underline{\mathbf{ord}}_L\left(B^p_\alpha, L^\infty_\nu\right) = \begin{cases} -\hat{\varrho}/\underline{\dim}_M(\nu), & \text{for } p > 2, \\ -\hat{\varrho}/\underline{\dim}_M(\nu) + 1/2 - 1/p, & \text{for } p \le 2. \end{cases}$$

特别地，若 ν 对 ϱ 是多重分形正则的，则逼近阶 $\mathbf{ord}_\star\left(B^p_\alpha, L^q_\nu\right)$存在。

注 1.6。 对于$q = \infty$，以及满足 $\dim_M(\nu) < \dim_M(\underline{\nu})$ 的测度 ν，我们立即得到这样的例子：$\mathbf{ord}_\star\left(B^p_\alpha, L^\infty_\nu\right) < \underline{\mathbf{ord}}_\star\left(B^p_\alpha, L^\infty_\nu\right)$。感兴趣的读者可参见[KN22c], ，其中给出了一个测度 ν 的一维例子，该测度不是L^q-正则，且对所有 $\varrho > 0$，都有$S_\varrho < S_\varrho$。

希尔伯特空间情形。 众所周知，当参考空间V 是希尔伯特空间时，不同的n-宽度密切相关 [Pin85, 第二章：命题 5.2 和 8.8]。在我们的情形中，对于$V = L^2_\nu$，我们区分以下两种情况：

- 若$p \ge 2$，则有如下等式

$$\overline{\mathbf{ord}}_G\left(B^p_\alpha, L^2_\nu\right) = \overline{\mathbf{ord}}_K\left(B^p_\alpha, L^2_\nu\right) = \overline{\mathbf{ord}}_L\left(B^p_\alpha, L^2_\nu\right) = \frac{-1}{2s_\varrho} + \frac{1}{2} - \frac{1}{p},$$

- 若$p < 2$，则有严格不等式

$$\overline{\mathbf{ord}}_G\left(B^p_\alpha, L^2_\nu\right) = \frac{-1}{qs_\varrho} - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} < \frac{-1}{2s_\varrho} = \overline{\mathbf{ord}}_K\left(B^p_\alpha, L^2_\nu\right) = \overline{\mathbf{ord}}_L\left(B^p_\alpha, L^2_\nu\right).$$

注意，$p = q = 2$ 的情形已在多调和算子的背景下由 [KN22a] 讨论过。

分形几何上界。 利用 β_ν 的凸性，我们很容易推出以下上界（对应于图 1.1 第 3 页中所示的a 和b 值）

$$-\overline{S}_\varrho \le -\frac{\hat{\varrho}}{\overline{\dim}_M(\nu)} - \frac{1}{q} \le -\frac{\hat{\varrho}}{m} - \frac{1}{q}. \tag{1.2}$$

右侧最弱的界由 [BS66; Bor71] 给出，而中间的改进版本见 [KN22a]。该不等式可用于定理 1.1 中的每一种情形。此外请注意，在第一个不等式中，当$q = \infty$时，等号实际上成立；而当$q < \infty$ 以及对于 β_ν时，不等式严格成立，其中 β_ν是严格凸的。

备注 1.7。 注意到，在 $q \le p$ 的情况下，Kolmogorov 逼近阶的上界 $-S_\varrho - 1/p + 1/q$ 必然为负，因为由 (1.2) 可得，在此情况下 $-\alpha/m < 0$ 作为上界。

1.5. **概述**。 本文的组织如下。第 2 节介绍逼近论的基本泛函分析背景。特别地，我们陈述有限维向量空间中常用的宽度不等式及其性质。第 3 节专门讨论主要结果的上界。为此，我们将离散化与最优划分的思想进行了适当融合（参见命题 3.3 和 3.5，它们是本文在这方面的主要结果）。最后，第 4 节借鉴粗多重分形形式体系中的思想，建立所考虑问题的下界。同样地，我们结合使用了逼近阶的离散化方法，以及通过大偏差方法寻找最优的不相交立方体族（参见命题 4.8 和 4.9）。在以下各节中，始终假设 **(♠)**。注意，我们将给出 $B_\alpha^p = \mathscr{B}W^{\alpha,p}$ 的上界证明，而下界证明则针对 $B_\alpha^p = \mathscr{B}W_0^{\alpha,p}$ 陈述。结论随后由以下平凡观察得到

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_v^q\right) &\le \overline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_v^q\right),\\ \underline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_v^q\right) &\le \underline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_v^q\right).\end{aligned} \tag{1.3}$$

2. 预备知识

为给出我们方法所需的预备知识，本节将介绍一些逼近论的基本事实，主要针对有限维情形，遵循教材[LGM96；Pin85]。

对于线性算子 $T \in \mathscr{L}(X, V)$，以及 X 中的单位球 $\mathscr{B}$，我们记 $d_n^\star(T) := d_n^\star(T(\mathscr{B}X), V)$，$\star \in \{K, G, L\}$。如果 T 表示一个自然嵌入 $\iota: \mathscr{B}X \hookrightarrow V$，例如 Sobolev空间$X$的自然嵌入，那么我们记$d_n^\star(\mathscr{B}X, V)$，而不是$d_n^\star(\iota)$。下面给出一些一般性的观察。

引理 2.1 ([Pin85, 第二章：命题 3.2。])。 设 X 和 Y 是赋范线性空间，且 X 是 Y 的子空间，则

$$d_n^G(A, X) = d_n^G(A, Y).$$

以下结果可见于 [Pin85，第二章：第 21 页，命题 5.1、推论 8.5、定理 8.9]。

引理 2.2. 我们有

$$\max\left\{d_n^K(T), d_n^G(T)\right\} \le d_n^L(T) \le \left(\sqrt{n}+1\right)\min\left\{d_n^K(T), d_n^G(T)\right\}.$$

若 T 是一个紧算子，则由此可得，各种逼近阶之间的差至多为 1/2。

推论2.3. 对于 $\star, \diamond \in \{G, K, L\}$，若相应的逼近阶有限，则有

$$\left|\overline{\mathbf{ord}}_\star(T(\mathscr{B}X), V) - \overline{\mathbf{ord}}_\diamond(T(\mathscr{B}X), V)\right| \le 1/2$$

and

$$\left|\underline{\mathbf{ord}}_\star(T(\mathscr{B}X), V) - \underline{\mathbf{ord}}_\diamond(T(\mathscr{B}X), V)\right| \le 1/2.$$

证明. 对于 $\star \in \{G、K、L\}$ 以及 $\diamond \in \{G、K\}$，结论由下式得出

$$0 \le \left|\frac{\log d_n^\star(T)}{\log n} - \frac{\log d_n^\diamond(T)}{\log n}\right| \le \frac{1}{\log n}\log\frac{d_n^L(T)}{\min\left\{d_n^K(T), d_n^G(T)\right\}} \le \frac{\log\left(\sqrt{n}+1\right)}{\log n}.$$

□

记号 2.4. 对于依赖于$x > 0$ 的两个函数f、g，若存在常数$C > 0$ 使得 $0 < f(x) \le Cg(x)$对充分大的所有x 都成立，则记作$f \ll g$。若$f \ll g$ 和$g \ll f$均成立，则记作$f \asymp g$。

有限维情形下，关于n-宽度，我们还需要一些进一步的事实。以下结果可见于例如 [LGM96，第 409, 411, 482] 页，并且对p、$q \in [1,\infty]$均成立。同样，$p \in [1,\infty]$的对偶值记作p'。我们用 ℓ_p^M表示相对于p-范数$\|x\|_{\ell_p^M} := \left(\sum_{i=1}^M |x_i|^p\right)^{1/p}$的 Banach空间 $\mathbb{R}^M$，其中 $1 \le p < \infty$且$\|x\|_{\ell_\infty^M} := \max_{i=1,\dots,M} |x_i|$；当$p = \infty$、$x \in \mathbb{R}^M$ 时，对于 ℓ_p^M中的单位球，我们记作$\mathscr{C}_p^M := \mathscr{B}\ell_p^M$。

引理 2.5. 对于 $1 \le n \le k$，我们有

$$d_n^L\left(\mathscr{C}_p^k, \ell_q^k\right) = d_n^L\left(\mathscr{C}_{q'}^k, \ell_{p'}^k\right) \asymp \begin{cases} d_n^K\left(\left(\mathscr{C}_p^k, \ell_q^k\right)\right), & \text{for } q \le p', \\ d_n^K\left(\left(\mathscr{C}_{q'}^k, \ell_{p'}^k\right)\right), & \text{for } p' \le q, \end{cases}$$

and

$$d_n^G\left(\mathscr{C}_p^k, \ell_q^k\right) = d_n^K\left(\mathscr{C}_{q'}^k, \ell_{p'}^k\right). \tag{2.1}$$

下述引理是 [Glu83] 中一个更一般结果的推论。

引理 2.6 ([LGM96，第 411 页；Kaˇs77，定理 1.3])**.** 对于柯尔莫哥洛夫宽度，我们有

$$d_n^K\left(\left(\mathscr{C}_p^{2n}, \ell_q^{2n}\right)\right) \asymp \begin{cases} n^{1/q-1/p}, & \text{for } q \le p \text{ or } 2 \le p \le q, \\ 1, & \text{for } p \le q \le 2, \\ n^{1/q-1/2}, & \text{for } p \le 2 \le q. \end{cases}$$

利用对偶性，我们可对 Gel′fand 宽度推出一个类似结果。

推论 2.7. 对于 *Gel′fand* 宽度，我们有

$$d_n^G\left(\left(\mathscr{C}_p^{2n}, \ell_q^{2n}\right)\right) \asymp \begin{cases} n^{1/q-1/p}, & \text{for } q \le p \text{ or } p \le q \le 2, \\ 1, & \text{for } 2 \le p < q, \\ n^{1/2-1/p}, & \text{for } p \le 2 \le q. \end{cases}$$

证明。 这可通过结合引理 2.5 的第二部分与引理 2.6 得出，注意到 $1/p' - 1/q' = 1/q - 1/p$ 和 $1/2 - 1/p' = 1/q - 1/2$。□

对于线性宽度，我们有如下渐近式。

推论 2.8。 对于线性宽度，我们有

$$d_n^L\left(\left(\mathscr{C}_p^{2n}, \ell_q^{2n}\right)\right) \asymp \begin{cases} n^{1/q-1/p}, & \text{for } q \le p, \\ 1, & \text{for } 2 \le p \le q \text{ or } p \le q \le 2, \\ n^{1/q-1/2}, & \text{for } p \le 2 \le q \le p', \\ n^{1/2-1/p}, & \text{for } p \le 2, p' \le q. \end{cases}$$

证明。 这可直接由引理 2.5 的第一部分、引理 2.6 以及以下事实得出

$$\max\{1/q - 1/2, 1/2 - 1/p\} = \begin{cases} 1/q - 1/2, & \text{for } q \le p', \\ 1/2 - 1/p, & \text{for } q \ge p'. \end{cases}$$

□

3. Poincar´é 不等式和上界

上界的证明结合了 [LGM96第 14] 章定理5.4中给出的卡欣定理证明思路，以及 [KN22c；KN22d]中在Kreˇın–Feller算子的背景下阐述的关于最优划分的一些近期工作。为此，对于$q < \infty$，我们考虑由 $\mathcal{Q}$ 给出的二进立方体的有限划分：

$$P_t := \left\{Q \in \mathscr{D} : \mathfrak{J}(Q) < t \ \&\ \exists Q' \in \mathscr{D}_{\lfloor \log_2 \Lambda(Q) \rfloor / m - 1} : Q' \supset Q \ \&\ \mathfrak{J}(Q') \ge t\right\} \tag{3.1}$$

对于$t > 0$，我们回顾 [KN22c；KN22d] 中的结果：

$$\limsup_{t\downarrow 0} \frac{\log(\operatorname{card}(P_t))}{-\log(t)} = s_{\mathcal{Q}}. \tag{3.2}$$

此外，我们借鉴了 [BS67, § 3] 和 [BS74] 中的一些思想与结果。对于半开立方体 $Q \in \mathscr{D}$ 以及任意 $u \in W^{\alpha,p}(Q)$，我们关联一个多项式 $r \in \mathbb{R}[x_1, \ldots, x_m]$，其次数至多为 $\alpha - 1$，并满足以下条件

$$\int_Q x^k r(x)\, \mathrm{d}\Lambda(x) = \int_Q x^k u(x)\, \mathrm{d}\Lambda(x) \text{ for all } |k| \le \alpha - 1. \tag{3.3}$$

根据 希尔伯特投影定理 在 $L^2(Q)$ 中的应用，可知由 (3.3) 唯一确定 r，并令 $\mathbb{P}_Q u := r$。注意，$\mathbb{P}_Q$ 定义了一个线性投影算子，它将 $W^{\alpha,p}(Q)$ 映射到由次数不超过 $\alpha - 1$ 的 m 元多项式构成的有限维空间。对于这个空间，我们固定基 $\mathscr{B}_\alpha := \{p_1, \ldots, p_\kappa\}$，其中$\kappa \in \mathbb{N}$。我们考虑序列 $t_k \searrow 0$ 和严格递增序列 $(j_k) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$，使得

$$\begin{aligned} &\sup\left\{\left|\log_2 \Lambda(Q) - \log_2 \Lambda(\widetilde{Q})\right| : P_{t_{n+1}} \in Q \subset \widetilde{Q} \ni P_{t_n}, n \in \mathbb{N}\right\} < \infty, \\ &\sup_{k\in\mathbb{N}} (j_{k+1} - j_k) < \infty. \end{aligned} \tag{3.4}$$

例如，对于某个 $\eta \in (0,1)$，$\eta \le t_{n+1}/t_n$，$n \in \mathbb{N}$ 可以确保第一个界。定义 $k \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{P}_k := \begin{cases} P_{t_k}, & \text{for } q < \infty, \\ \mathscr{D}_{n_k}, & \text{for } q = \infty, \end{cases}$$

第一种情形中由（3.1）定义的 $\mathscr{C}$ 的半开立方体划分，以及第二种情形中忽略 ν 零测度立方体的等大小二进立方体划分。其基数记为 $M_k := \operatorname{card}(\boldsymbol{P}_k)$。

固定一个边长为 $c_Q = (\Lambda(Q))^{1/m} = 2^{-n}$ 的 $Q \in \mathscr{D}_n$，其中 $n \in \mathbb{N}$，并令 $b \in \mathbb{R}^m$ 表示 Q 的中点。于是对于

$$\varphi_Q : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m, x \mapsto c_Q x + b \tag{3.5}$$

我们有 $\varphi_Q(\mathscr{C}) = Q$。于是，$\mathscr{B}_k := \left\{p_{r,Q} := p_r \circ \varphi_Q^{-1} : r = 1, \ldots, \kappa, Q \in \boldsymbol{P}_k\right\}$ 是子空间 $\mathscr{P}_k := \mathscr{P}(\boldsymbol{P}_k, \alpha - 1)$ 的一组基；该子空间由分段多项式函数构成，这些函数在每个立方体 $Q \in \boldsymbol{P}_k$ 上限制为次数至多为 $\alpha - 1$ 的多项式，其中每个划分 $\boldsymbol{P}_k \subset \mathscr{D}$ 满足 $\operatorname{card}(\mathscr{B}_k) = \kappa M_k$。我们将坐标映射记为

$$I_k : \mathbb{R}^{\kappa M_k} \to \mathscr{P}_k,\ (c_{k,Q}) \mapsto \sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k} \sum_{r=1}^{\kappa} c_{r,Q} \widetilde{p}_{r,Q} \text{ with } \widetilde{p}_{r,Q} := \Lambda(Q)^{\hat{\varrho}/m}\, p_{r,Q}.$$

由于有限维向量空间上的所有范数都是等价的，并根据$p_{r,\,Q}$ 我们对所有 $1 \le p$、$q \le \infty$ 均有界于$b = (b_r) \in \mathbb{R}^\kappa$ 和$Q \in \mathscr{D}$，且关于b 一致，

$$\|b\|_{\ell_q^\kappa} \asymp \|b\|_{\ell_p^\kappa} \asymp \left\|\sum_{r=1}^{\kappa} b_r p_r\right\|_{\mathscr{C}(\mathscr{C})} = \left\|\sum_{r=1}^{\kappa} b_r p_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}. \tag{3.6}$$

接下来，定义

$$U_k : W^{\alpha,p}(\mathscr{C}) \to \mathscr{P}_k,\ f \mapsto \sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k} \mathbb{1}_Q \mathbb{P}_Q f,$$

其中 $\mathbb{1}_Q$ 表示立方体Q 上的特征函数，并令

$$V_1 := U_1, V_k := U_k - U_{k-1},\ k \ge 2.$$

下面的 Poincar´e/Wirtinger/Sobolev 型不等式对于本节推导的上界至关重要。相关参考文献见 [BS67，第 3.1] 条引理。

引理 3.1. 对于所有立方体 $Q \in \mathscr{D}$ 以及所有 $u \in W^{\alpha,p}(Q)$，我们有

$$\left\|u - \mathbb{P}_Q u\right\|_{\mathscr{C}(\overline{Q})} \ll \Lambda(Q)^{\hat{\varrho}/m} \|u\|_{L^{\alpha,p}(Q)}.$$

~ ~对于每个 $Q \in P_n$，存在唯一的元素 $Q \in P_{n-1}$，使得 $Q \subset Q$，对于这个~元素，我们记作 Q_Q。这一记号将用于以下引理的证明。

引理 3.2。对于 $f \in W^{\alpha,\,p}$，$n \in \mathbb{N}$，$Q \in \mathscr{D}_{n-1}$ 且 $V_n f = \sum_{Q \in P_k} \sum_{r=1}^{\kappa} c_{r,\,Q} p_{r,\,Q}$，有

(1) $\|V_n f\|_{\mathscr{C}(Q)} \ll \Lambda(Q)^{\hat{\varrho}/m} \|f\|_{L^{\alpha,\,p}(Q)}$，

(2) $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} V_k f$ 作为 L 的一个元素$^{q}_{\nu}$，

(3) $\left\|(c_{r,\,Q})\right\|_{\ell_p^{\kappa M_k}} \ll \|f\|_{L^{\alpha,\,p}}$。

证明。对（*1*）：令$f \in W^{\alpha,\,p}$ 以及$Q \in \mathscr{D}_{n-1}$，由引理 3.1 可得

$$
\begin{aligned}
\|V_n f\|_{\mathscr{C}(Q)} &\le \|U_n f - f\|_{\mathscr{C}(Q)} + \|f - U_{n-1} f\|_{\mathscr{C}(Q)} \\
&= \max_{P_n \ni Q' \subset Q} \left\|P_{Q'} f - f\right\|_{\mathscr{C}(Q')} + \left\|f - \mathbb{P}_Q f\right\|_{\mathscr{C}(Q)} \\
&\ll \Lambda(Q)^{\hat{\varrho}/m} \left(\max_{P_n \ni Q' \subset Q} \|f\|_{L^{\alpha,p}(Q')} + \|f\|_{L^{\alpha,p}(Q)} \right) \\
&\le \begin{cases} \Lambda(Q)^{\hat{\varrho}/m} \left(\|f\|_{L^{\alpha,\infty}(Q)} + \|f\|_{L^{\alpha,\infty}(Q)} \right), & \text{for } p = \infty, \\ \Lambda(Q)^{\hat{\varrho}/m} \left(\left(\sum_{P_n \ni Q' \subset Q} \|f\|^p_{L^{\alpha,p}(Q')} \right)^{1/p} + \|f\|_{L^{\alpha,p}(Q)} \right), & \text{for } p < \infty \end{cases} \\
&\ll \Lambda(Q)^{\hat{\varrho}/m} \|f\|_{L^{\alpha,p}(Q)}
\end{aligned}
$$

其中，对于$p < \infty$，我们使用了（3.4）。这证明了第一个结论。

对（*2*）：我们首先考虑$q < \infty$。利用引理 3.1 以及备注 1.7 中讨论的上界，可得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} V_k f \right\|_{L_\nu^q} &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_{\mathbb{Q}} |f - U_n f|^q \, \mathrm{d}\nu \right)^{1/q} \le \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{Q \in P_n} \nu(Q) \left\| f - \mathbb{P}_Q f \right\|^q_{\mathscr{C}(Q)} \right)^{1/q} \\
&\ll \lim_{n\to\infty} \left(\max_{Q \in P_n} \mathfrak{I}_Q(Q) \right)^{1/q} \left(\sum_{Q \in P_n} \|f\|^q_{L^{\alpha,p}(Q)} \right)^{1/q} \\
&\le \lim_{n\to\infty} \left(\max_{Q \in P_n} \mathfrak{I}_Q(Q) \right)^{1/q} M_n^{(1/q - 1/p)_+} \|f\|_{L^{\alpha,p}(Q)} = 0.
\end{aligned}
$$

注意，对于$x \in \mathbb{R}^M$ 和$p \le q$，我们使用了众所周知的不等式链

$$
\|x\|_{\ell_q^M} \le \|x\|_{\ell_p^M} \le M^{1/p - 1/q} \|x\|_{\ell_p^M}. \tag{3.7}
$$

类似地，对于$q = \infty$，我们得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} V_k f \right\|_{L_\nu^\infty} &= \lim_{n\to\infty} \|f - U_n f\|_{L_\nu^\infty} \le \lim_{n\to\infty} \max_{Q \in P_n} \left\| f - \mathbb{P}_Q f \right\|_{\mathscr{C}(Q)} \\
&\ll \lim_{n\to\infty} \max_{Q \in P_n} \Lambda(Q)^{\hat{\varrho}/m} \|f\|_{L^{\alpha,p}(Q)} \\
&\le \begin{cases} \lim_{n\to\infty} 2^{-n\hat{\varrho}} \|f\|_{L^{\alpha,\infty}}, & \text{for } p = \infty, \\ \lim_{n\to\infty} 2^{-n\hat{\varrho}} \left(\sum_{Q \in \mathscr{D}_n} \|f\|^p_{L^{\alpha,p}(Q)} \right)^{1/p}, & \text{for } p < \infty \end{cases} \\
&= \lim_{n\to\infty} 2^{-n\hat{\varrho}} \|f\|_{L^{\alpha,p}} = 0.
\end{aligned}
$$

这证明了第二个断言。

关于 *(3)*：利用 (3.4) 和 (3.6)，我们得到

$$\begin{aligned}\|c\|_{\ell_p^{\kappa M_k}} &= \left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left(\left(\sum_{r=1}^{\kappa}\left|c_{r,Q}\right|^p\right)^{1/p}\right)^p\right) \ll \left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left\|\sum_{r=1}^{\kappa}c_{r,Q}p_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}^p\right)^{1/p}\\ &\ll \left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left\|\Lambda(Q)^{-\alpha/m-1/p}\sum_{r=1}^{\kappa}c_{r,Q}\widetilde{p}_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}^p\right)^{1/p}\\ &= \left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left(\Lambda(Q)^{-\alpha/m-1/p}\left\|V_kf\right\|_{\mathscr{C}\left(\widetilde{Q}_Q\right)}\right)^p\right)^{1/p} \ll \left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\|f\|_{L^{\alpha,p}\left(\widetilde{Q}_Q\right)}^p\right)^{1/p} \ll \|f\|_{L^{\alpha,p}}.\end{aligned}$$

□

对于以下关键观察，我们采用简写记号

$$T_k := \begin{cases} t_k^{1/q}, & \text{for } q<\infty,\\ 2^{-k\hat{\varrho}}, & \text{for } q=\infty.\end{cases}$$

命题 3.3 (离散化——上界)。 对于 $\star\in\{K,\ G,\ L\}$，假设(3.4) 以及$(n_k)\in\mathbb{N}_0^{\mathbb{N}}$，其中 $\sum_{k\in\mathbb{N}}n_k=n\in\mathbb{N}$，则有

$$d_n^{\star}\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p},L_\nu^q\right) \ll \sum_k T_k d_{n_k}^{\star}\left(\ell_p^{\kappa M_k},\ell_q^{\kappa M_k}\right).$$

证明。 首先，我们考虑 $\star=L$。根据$d_k^L := d_{n_k}^L\left(\ell^{\kappa M_k}{}_p\ 、\ \ell^{\kappa M_k}{}_q\right)$的定义，对于每个$k\in\mathbb{N}$，都存在一个定义在 $\ell^{\kappa M_k}{}_q$ 上的秩至多为n_k 的线性算子$R_k\in\mathscr{L}\left(\ell^{\kappa M_k}{}_q\ 、\ n_k\right)$，满足

$$\|a-R_ka\|_{\ell_q^{\kappa M_k}} \le d_k^L\|a\|_{\ell_p^{\kappa M_k}}$$

对所有 $a\in\ell^{M_k}{}_p$ 均成立，并且关于 k 一致。因此，令 $\mathscr{R}_k := I_kR_kI_k^{-1}\in\mathscr{L}_{n_k}(\mathscr{P}_k)$，由引理 3.2 可得，对于 $\varphi\in W^{\alpha,p}$ 以及 $(c_{r,Q})\in\ell^{\kappa M_k}{}_p$，使得 $V_k\varphi=\sum_Q\sum_r c\ \widetilde{}_{r,Q}\,p_{r,Q}\in\mathscr{P}_k$，且对于$q<\infty$，

$$\begin{aligned}&\|V_k\varphi-\mathscr{R}_kV_k\varphi\|_{L_\nu^q}^q\\ &= \left\|\left(\mathrm{Id}-I_kR_kI_k^{-1}\right)\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_{r=1}^{\kappa}c_{r,Q}\widetilde{p}_{r,Q}\right\|_{L_\nu^q}^q = \left\|\left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)\widetilde{p}_{r,Q}\right)\right\|_{L_\nu^q}^q\\ &= \sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\int_Q\left|\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)\widetilde{p}_{r,Q}\right|^q\,\mathrm{d}\nu \le \sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\nu(Q)\left\|\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)\widetilde{p}_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}^q\\ &= \sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\nu(Q)\Lambda(Q)^{q/m}\left\|\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)p_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}^q\\ &\le \max_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\Im_\varrho(Q)\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left\|\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)p_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}^q\\ &\ll t_k\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left\|\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)_{r=1}^{\kappa}\right\|_{\ell_q^\kappa}^q \le t_k\left(d_k^L\|c\|_{\ell_p^{\kappa M_k}}\right)^q \ll t_k\left(d_k^L\|\varphi\|_{L^{\alpha,p}}\right)^q.\end{aligned}$$

对于 $q=\infty$，我们得到

$$\begin{aligned}
&\|V_k\varphi-\mathscr{R}_kV_k\varphi\|_{L_\nu^\infty}\\
&=\left\|\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_{r=1}^{\kappa}c_{r,Q}\widetilde{p}_{r,Q}-I_kR_kI_k^{-1}\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_{r=1}^{\kappa}c_{r,Q}\widetilde{p}_{r,Q}\right\|_{L_\nu^\infty}=\left\|\left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)\widetilde{p}_{r,Q}\right)\right\|_{L_\nu^\infty}\\
&\le\max_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left\|\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)\widetilde{p}_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}\le\max_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\Lambda(Q)^{\hat{\varrho}/m}\left\|\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)p_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}\\
&=2^{-k\hat{\varrho}}\max_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left\|\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)p_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}\le2^{-k\hat{\varrho}}\max_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left\|\left(c_{r,Q}-(R_kc)_{r,Q}\right)_{r=1}^{\kappa}\right\|_{\ell_\infty^\kappa}\\
&=2^{-k\hat{\varrho}}\|c-R_kc\|_{\ell_\infty^{\kappa M_k}}\le2^{-k\varrho}d_k^L\|c\|_{\ell_p^{\kappa M_k}}\ll2^{-k\varrho}d_k^L\|\varphi\|_{L^{\alpha,p}}
\end{aligned}$$

利用引理 3.2 和 (3.6)。现在我们定义线性算子 $\mathcal{Q}_n:=\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{R}_kV_k$，其秩至多为 $n=\sum n_k$，并由此得出 $q<\infty$

$$\begin{aligned}
d_n^L\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p},L_\nu^q\right)&=\inf_{B\in\mathscr{L}_n\left(L_\nu^q\right)}\sup_{\varphi\in B_\alpha^p}\|\varphi-B\varphi\|_{L_\nu^q}\le\sup_{\varphi\in B_\alpha^p}\|\varphi-\mathcal{Q}_n\varphi\|_{L_\nu^q}\\
&=\sup_{\varphi\in B_\alpha^p}\left\|\sum_{k\in\mathbb{N}}V_k\varphi-\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathscr{R}_kV_k\varphi\right\|_{L_\nu^q}\le\sup_{\varphi\in B_\alpha^p}\sum_{k\in\mathbb{N}}\|V_k\varphi-\mathscr{R}_kV_k\varphi\|_{L_\nu^q}\\
&\ll\sum_{k\in\mathbb{N}}t_k^{1/q}d_{n_k}^L\left(\ell_p^{\kappa M_k},\ell_q^{\kappa M_k}\right)
\end{aligned}$$

同理，对于 $q=\infty$

$$d_n^L(\mathscr{B}W^{\alpha,p},L_\nu^\infty)\ll\sum_{k\in\mathbb{N}}2^{-k\hat{\varrho}}d_{n_k}^L\left(\ell_p^{\kappa M_k},\ell_\infty^{\kappa M_k}\right).$$

现在，对于 $\star=K$，根据 $d_k^K:=d_{n_k}^K\left(\ell_p^{\kappa M_k},\ell_q^{\kappa M_k}\right)$ 的定义，我们注意到，对于每个$k\in\mathbb{N}$和 $n_k\in\mathbb{N}_0$，都存在一个维数至多为 n_k 的子空间 $X_k<_{n_k}\ell_q^{\kappa M_k}$，使得对于每个$a\in\ell_p^{\kappa M_k}$，我们都能找到$b\in X_k$，满足

$$\|a-b\|_{\ell_q^{\kappa M_k}}\le d_k^K\|a\|_{\ell_p^{\kappa M_k}}.\tag{3.8}$$

现在，对于 $\widetilde{\mathcal{X}_k}:=\left\{\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}b_{r,Q}\widetilde{\varphi}_{r,Q}:\ (b_{r,Q})\in X_k\right\}<_{n_k}L_\nu^q$，子空间 $\mathcal{X}_n:=\operatorname{span}\left(\widetilde{\mathcal{X}_k}:k\in\mathbb{N}\right)$ 的维数至多为 $n=\sum_{k\in\mathbb{N}}n_k$，并且

$$d_n^K\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p},L_\nu^q\right)=\inf_{W<_nL_\nu^q}\sup_{\varphi\in\mathscr{B}W^{\alpha,p}}\inf_{\psi\in W}\|\varphi-\psi\|_{L_\nu^q}\le\sup_{\varphi\in\mathscr{B}W^{\alpha,p}}\inf_{\psi\in\mathcal{X}_n}\|\varphi-\psi\|_{L_\nu^q}.$$

为求得上界，我们固定任意的 $\varphi\in\mathscr{B}W^{\alpha,p}$ 以及 $c=(c_{r,Q})\in\ell^{\kappa M_k}q$，使得 $V_k\varphi=\sum Q\in P_k\sum^{\kappa}r=1c_{r,Q}\widetilde{\ }p_{r,Q}\in\mathscr{P}_k$。注意，对于 $c\in\ell^{\kappa M_k}q$，我们可以找到 $(d_{r,Q})\in X_k$，使得$\widetilde{\ }$(3.8)成立。因此，结合 $\psi_k=\sum Q\in P_k\sum rd_{r,Q}\varphi_{r,Q}\in\mathcal{X}_k$ 和引理 3.2，我们得到对于 $q<\infty$

$$\begin{aligned}
\|V_k\varphi-\psi_k\|_{L_\nu^q}&=\left\|\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_r(c_{r,Q}-d_{r,Q})\widetilde{p}_{r,Q}\right\|_{L_\nu^q}\\
&\le\max_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\Im(Q)^{1/q}\left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\left\|\sum_{r=1}^{\kappa}(c_{r,Q}-d_{r,Q})p_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}^q\right)^{1/q}\\
&\ll t_k^{1/q}\left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_r\left|c_{r,Q}-d_{r,Q}\right|^q\right)^{1/q}\le t_k^{1/q}d_k^K\left\|c_{r,Q}\right\|_{\ell_p^{\kappa M_k}}\ll t_k^{1/q}d_k^K\|\varphi\|_{L^{\alpha,p}}.
\end{aligned}$$

对于 $q=\infty$，我们有

$$\begin{aligned}\|V_k\varphi-\psi_k\|_{L_\nu^q}&=\left\|\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_r\left(c_{r,Q}-d_{r,Q}\right)\widetilde{p}_{r,Q}\right\|_{L_\nu^\infty}\leq\max_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\Lambda\left(Q\right)^{\hat{\varrho}/m}\left\|\sum_{r=1}^{\kappa}\left(c_{r,Q}-d_{r,Q}\right)p_{r,Q}\right\|_{\mathscr{C}(Q)}\\&\ll 2^{-k\hat{\varrho}}\left(\max_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\max_r\left|c_{r,Q}-d_{r,Q}\right|\right)=2^{-k\hat{\varrho}}\left\|c_{r,Q}-d_{r,Q}\right\|_{\ell_\infty^{\kappa M_k}}\\&\leq 2^{-k\hat{\varrho}}d_k^K\left\|c_{r,Q}\right\|_{\ell_p^{\kappa M_k}}\ll 2^{-k\hat{\varrho}}d_k^K\left\|\varphi\right\|_{L^{\alpha,p}}.\end{aligned}$$

由于对于每个 $\varphi=\sum_k V_k\varphi$，我们都能找到这样的序列 $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$，满足 $\psi_k\in\mathscr{X}_k$ 且 $\sum_k\psi_k\in\mathscr{X}_n$，因此可得关于 $1\leq q\leq\infty$的柯尔莫哥洛夫宽度

$$\begin{aligned}d_n^K\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p},L_\nu^q\right)&\leq\sup_{\varphi\in\mathscr{B}W^{\alpha,p}}\left\|\sum_{k\in\mathbb{N}}V_k\varphi-\sum_{k\in\mathbb{N}}\psi_k\right\|_{L_\nu^q}\leq\sup_{\varphi\in\mathscr{B}W^{\alpha,p}}\sum_{k\in\mathbb{N}}\|V_k\varphi-\psi_k\|_{L_\nu^q}\\&\ll\sup_{\varphi\in\mathscr{B}W^{\alpha,p}}\sum_{k\in\mathbb{N}}T_kd_k^K\left\|\varphi\right\|_{L^{\alpha,p}}=\sum_{k\in\mathbb{N}}T_kd_{n_k}^K\left(\ell_p^{\kappa M_k},\ell_q^{\kappa M_k}\right).\end{aligned}$$

对于 $\star=G$，首先注意到，根据引理 2.1，在 Gel′fand 宽度的定义中，我们可以用 $\left(W^{\alpha,p},\|\cdot\|_{L_\nu^q}\right)$代替 L_ν^q。根据 $d^{G}{}_k:=d_{n_k}^G\left(\ell^{\kappa M_k}{}_p,\ell^{\kappa M_k}{}_q\right),k\in\mathbb{N}$ 的定义，我们可以找到线性形式 $e_1^k,\ldots,e_{n_k}^k\in\left(\ell^{\kappa M_k}{}_q\right)'$，使得对所有

$$b\in\left\{a\in\ell_q^{\kappa M_k}:e_i^k\left(a\right)=0,i=1,\ldots,n_k\right\}<^{n_k}\ell_q^{\kappa M_k}$$

我们有

$$\left\|b\right\|_{\ell_q^{\kappa M_k}}\leq d_k^G\left\|b\right\|_{\ell_p^{\kappa M_k}}.$$

现在，对于$i=1$、.....、n_k和$k\in\mathbb{N}$，我们在$W^{\alpha,p}$上定义线性泛函如下:

$$\widetilde{e}_i^k:=e_i^k\circ I_k^{-1}\circ V_k:W^{\alpha,p}\to\mathbb{R}.$$

由此得到子空间

$$\mathscr{X}_n:=\left\{\varphi\in W^{\alpha,p}:\widetilde{e}_i^k\varphi=0,i=1,\ldots,n_k,k\in\mathbb{N}\right\}<^n L_\nu^q\bigcap W^{\alpha,p}$$

其余维至多为$n:=\sum n_k$。因此，对于满足 $\varphi\in\mathscr{X}_n$ $V_k\varphi=\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_{r=1}^{\kappa}c_{r,Q}\widetilde{}\,p_{r,Q}$、$k\in\mathbb{N}$的情形，我们有

$$0=\widetilde{e}_i^k\varphi=e_i^k\circ I_k^{-1}\circ V_k\varphi=e_i^k\circ I_k^{-1}\left(\sum_{Q\in\boldsymbol{P}_k}\sum_{r=1}^{\kappa}c_{r,Q}\widetilde{p}_{r,Q}\right)=e_i^k\left(c_{r,Q}\right)_{r,Q},$$

这与先前对 $\star=L$、K的估计类似，给出

$$\|V_k\varphi\|_{L_\nu^q}\ll T_k\left\|\left(c_{r,Q}\right)\right\|_{\ell_q^{\kappa M_k}}\leq T_kd_k^G\left\|\left(c_{r,Q}\right)\right\|_{\ell_p^{\kappa M_k}}\ll T_kd_k^G\left\|\varphi\right\|_{L^{\alpha,p}}.$$

注意到下式，即可得出关于 Gel′fand 宽度的结论

$$\begin{aligned}d_n^G\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p},L_\nu^q\right)&=\inf_{W<^nW^{\alpha,p}}\sup_{\varphi\in\mathscr{B}W^{\alpha,p}\cap W}\|\varphi\|_{L_\nu^q}=\inf_{W<^nW^{\alpha,p}}\sup_{\varphi\in\mathscr{B}W^{\alpha,p}\cap W}\left\|\sum_{k\in\mathbb{N}}V_k\varphi\right\|_{L_\nu^q}\\&\leq\sup_{\varphi\in\mathscr{B}W^{\alpha,p}\cap\mathscr{X}_n}\sum_{k\in\mathbb{N}}\|V_k\varphi\|_{L_\nu^q}\ll\sum_{k\in\mathbb{N}}T_kd_{n_k}^G\left(\ell_p^{\kappa M_k},\ell_q^{\kappa M_k}\right).\end{aligned}$$

□

注记 3.4. 注意，对于 $\star\in\{K、G、L\}$，我们有

$$d_0^\star\left(\ell_p^M,\ell_q^M\right)=\sup_{x\in\ell_p^M}\|x\|_{\ell_q^M}=M^{(1/q-1/p)_+}\tag{3.9}$$

利用（3.7）以及宽度的定义，我们得到对所有$M\in\mathbb{N}$

$$d_M^\star\left(\ell_p^M,\ell_q^M\right)=0.$$

现在我们可以给出所需的改进上界。

命题 3.5。 对于 $\star \in \{K,\ G,\ L\}$，我们有以下上界：

(1) 若 $p \leq q$ 且 $\gamma \geq 0$ 满足

$$d_n^\star\left(\mathscr{C}_p^{2n}, \mathscr{C}_q^{2n}\right) \ll n^{-\gamma},$$

then

$$\overline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) \leq -\overline{S}_\varrho - \gamma$$

若 $q = \infty$，则

$$\underline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^\infty\right) \leq -\frac{\hat{\varrho}}{\underline{\dim}_M(\nu)} - \gamma.$$

(2) 若 $q \leq p$，则

$$\overline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) \leq -\overline{S}_\varrho + \frac{1}{q} - \frac{1}{p}.$$

证明。*(1)*：对于 $\star \in \{K、G、L\}$，令 $\lambda \coloneqq \left\lceil 1 + \gamma/S_\varrho \right\rceil \geq 1$，并针对 $N \in \mathbb{N}$ 分别定义以下两种情形：$q = \infty$ 和 $q < \infty$，

$$j_k \coloneqq \begin{cases} k, & \text{for } 1 \leq k \leq N, \\ \lambda k, & \text{for } k > N, \end{cases} \quad (t_k) \coloneqq \left(2^{-j_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$$

相应地取 M_k 和 T_k。此外，令 $\mathbf{n}(N) \coloneqq \sum_k n_k \in \mathbb{N}$，其中

$$n_k \coloneqq n_k(N) \coloneqq \begin{cases} \lceil \kappa M_k/2 \rceil, & \text{for } k = N, \\ \kappa M_k, & \text{for } k = 1, \ldots, N-1, \\ 0, & \text{for } k > N. \end{cases}$$

采用这一选择，(3.4) 得以满足，并且我们得到 $\mathbf{n}(N) \coloneqq \sum_{k=1}^{N-1} \kappa M_k + \lceil \kappa M_N/2 \rceil \leq \kappa N M_N$；结合注 3.4

$$d_k^\star \coloneqq d_{n_k}^\star\left(\mathscr{C}_p^{\kappa M_k}, \mathscr{C}_q^{\kappa M_k}\right) \ll \begin{cases} (\kappa M_k/2)^{-\gamma}, & \text{for } k = N, \\ 0, & \text{for } k = 1, \ldots, N-1, \\ 1, & \text{for } k > N. \end{cases}$$

于是，由命题 3.3 可得

$$d_{\mathbf{n}(N)}^\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) \ll \sum_{k\in\mathbb{N}} T_k d_k^\star \ll T_N (\kappa M_N/2)^{-\gamma} + \sum_{k>N} T_{\lambda k} \ll T_N M_N^{-\gamma} + T_{\lambda N}.$$

因此，对于所有满足 $\mathbf{n}(N) \leq n < \mathbf{n}(N+1)$ 的 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\frac{\log\left(d_n^\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right)\right)}{\log(n)} \leq \frac{\log\left(d_{\mathbf{n}(N)}^\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right)\right)}{\log(\mathbf{n}(N+1))}.$$

这给出

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) \\
&= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(d_n^\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right)\right)}{\log(n)} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log\left(d_{\mathbf{n}(N)}^\star\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right)\right)}{\log(\mathbf{n}(N+1))} \\
&\leq \limsup_{N\to\infty} \max\left\{\frac{-\gamma\log(M_N) + \log(T_N)}{\log(\mathbf{n}(N+1))}, \frac{\log(T_{\lambda N})}{\log(\mathbf{n}(N+1))}\right\} \\
&= \limsup_{N\to\infty} \frac{-\gamma\log(M_N) + \log(T_N)}{\log(\kappa(N+1)M_{N+1})} \\
&= -\overline{S}_\varrho - \gamma.
\end{aligned}$$

如果在上述估计中，对特殊情形 $q = \infty$ 取下极限而非上极限，并使用 $T_N = 2^{-N\hat{\varrho}}$ 和 $M_N =$ 阶宽度 $\mathscr{D}_N$ 的定义，则可得

$$\underline{\mathbf{ord}}_{\star}\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^\infty\right) = -\hat{\underline{\varrho}}/\underline{\dim}_M(\nu) - \gamma.$$

关于 *(2)*：首先注意到，根据引理 2.2，只需考虑 $\star = L$ 的情形。对于$N \in \mathbb{N}$、$t_k \coloneqq 2^{-k}$，以及$j_k \coloneqq k$、$k \in \mathbb{N}$，

$$n_k = n_k(N) \coloneqq \begin{cases} \kappa M_k, & \text{for } k = 1, \dots, N, \\ 0, & \text{for } k > N \end{cases}$$

一方面，我们有 (3.4) 成立，且 $\mathbf{n}(N) \coloneqq \sum n_k(N) \ll \kappa N M_N$。另一方面，结合命题 3.3 与$d_0^L\left(\ell_p^n, \ell_q^n\right) = n^{1/q-1/p}$，对于 $\varepsilon > 0$，当$N \in \mathbb{N}$充分大且$q < \infty$时，我们得到

$$\begin{aligned} d_n^L\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) &\ll \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k/q}\left(\kappa M_k\right)^{(1/q-1/p)} = \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k/q+k(1/q-1/p)\left(\log(\kappa M_k)/\left(k\log 2\right)\right)} \\ &\le \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{k\left(-1/q+(1/q-1/p)\left(s_{\underline{\varrho}}+\varepsilon\right)\right)} \\ &\le 2^{N\left(-1/q+(1/q-1/p)\left(s_{\underline{\varrho}}+\varepsilon\right)\right)} \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-(k-N)\left(1/q-(1/q-1/p)\left(s_{\underline{\varrho}}+\varepsilon\right)\right)} \\ &\ll 2^{N\left(-1/q+(1/q-1/p)\left(s_{\underline{\varrho}}+\varepsilon\right)\right)}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{ord}}_L\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) &\le \limsup_N \frac{-(N/q)\log 2 + (1/q-1/p)\left(s_{\underline{\varrho}}+\varepsilon\right)\log 2}{\log N + \log\kappa + \log M_N} \\ &= -\frac{1}{q\cdot s_{\underline{\varrho}}} + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{s_{\underline{\varrho}}+\varepsilon}{s_{\underline{\varrho}}}\right) \end{aligned}$$

对于 $\varepsilon \searrow 0$，结论成立。对于$q = \infty$，我们有

$$\begin{aligned} d_n^L\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^\infty\right) &\ll \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k\hat{\underline{\varrho}}}\left(\kappa M_k\right)^{(1/q-1/p)} = \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k\hat{\underline{\varrho}}+k(1/q-1/p)\left(\log(\kappa M_k)/\left(k\log 2\right)\right)} \\ &\le \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{k\left(-\hat{\underline{\varrho}}+(1/q-1/p)\left(\overline{\dim}_M(\nu)+\varepsilon\right)\right)} \\ &\le 2^{N\left(-\hat{\underline{\varrho}}+(1/q-1/p)\left(s_{\underline{\varrho}}+\varepsilon\right)\right)} \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-(k-N)\left(\hat{\underline{\varrho}}-(1/q-1/p)\left(\overline{\dim}_M(\nu)+\varepsilon\right)\right)} \\ &\ll 2^{N\left(-\hat{\underline{\varrho}}+(1/q-1/p)\left(\overline{\dim}_M(\nu)+\varepsilon\right)\right)}. \end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{ord}}_L\left(\mathscr{B}W^{\alpha,p}, L_\nu^\infty\right) &\le \limsup_N \frac{-(N\hat{\underline{\varrho}})\log 2 + (1/q-1/p)\left(\overline{\dim}_M(\nu)+\varepsilon\right)\log 2}{\log N + \log\kappa + \log M_N} \\ &= -\frac{\hat{\underline{\varrho}}}{\overline{\dim}_M(\nu)} + \left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{\overline{\dim}_M(\nu)+\varepsilon}{\overline{\dim}_M(\nu)}\right) \end{aligned}$$

而对于 $\varepsilon \searrow 0$，该断言得证。 □

定理 *1.1* 中上界的证明。 命题 3.5 中给出的上界结合引理 2.6、推论 2.7 和推论 2.8，为我们提供了主定理定理 1.1 中所述的 Kolmogorov 上界，以及注 1.2 (4) 中所述的

Gel′fand 和线性上逼近阶。对于 $q = \infty$，式 (1.5) 中所述的下逼近阶上界也包含在命题 3.5 (1) 中。□

4. 粗多重分形形式体系与下界

本节只考虑 Kolmogorov 和 Gel′fand 情形，因为线性逼近阶总是大于或等于另外两个逼近阶中的较大者。

回顾引言中给出的下粗多重分形维数和上粗多重分形维数的定义，如式 (1.1) 所述；根据 [KN22c; KN22d]，我们知道$\mathscr{F}_\varrho = s\varrho$。因此，只需确定上逼近阶关于 $\mathscr{F}_\varrho$ 的一个下界。—

如概要中所述，我们将给出关于 $\mathscr{B}W_0^{\alpha\,p}$，的逼近阶下界，并且采用等价范数$\|\cdot\|_{L^{\alpha,}{}_p}$来赋予该空间范数会比较方便。本节中以下基本的范数等式将发挥关键作用。

引理 4.1。对于每个立方体 $Q \in \mathscr{D}$, $\varphi_Q\colon\ \mathscr{Q} \to Q$（定义见(3.5)），对于所有 $u \in W_p^\alpha(\mathscr{Q})$，都有 $u_Q := u \circ \varphi_Q^{-1} \in W_p^\alpha(Q)$，且

$$\left\|u_Q\right\|_{L^{\alpha,p}(Q)} = \Lambda(Q)^{-\hat{\varrho}/m}\,\|u\|_{L^{\alpha,p}}.$$

证明。对于$Q \in \mathscr{D}_n$，回忆 φ_Q 的定义：$\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$，$x \mapsto c_\mathscr{Q} x + b$，其中$c_\mathscr{Q} = (\Lambda(Q))^{1/m} = 2^{-n}$。由此，对于$u_Q := u \circ \varphi_Q^{-1}$，利用链式法则和变量代换，

$$\begin{aligned}
\left\|u_Q\right\|_{L^{\alpha,p}(Q)} &= \left(\int_{\mathbb{R}^m}\left(\sum_{|k|=\alpha}\left|D^k\left(u\circ\varphi_Q^{-1}\right)\right|^2\right)^{p/2}\mathrm{d}\Lambda\right)^{1/p}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^m}\left|\det\left(\left(\varphi_Q^{-1}\right)'\right)\right|^{-1}\left(c_Q^{-2\alpha}\sum_{|k|=\alpha}|D^k u|^2\right)^{p/2}\mathrm{d}\Lambda\right)^{1/p}\\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^m} c_Q^{-\alpha p+m}\left(\sum_{|k|=\alpha}|D^k u|^2\right)^{p/2}\mathrm{d}\Lambda\right)^{1/p} = \Lambda(Q)^{-\hat{\varrho}/m}\,\|u\|_{L^{\alpha,p}}.
\end{aligned}$$

对于$p = \infty$，利用链式法则可得

$$\begin{aligned}
\left\|u_Q\right\|_{L^{\alpha,\infty}} &= \left\|\left(\sum_{|k|=\alpha}\left|D^k\left(u\circ\varphi_Q^{-1}\right)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^\infty} = \left\|\left(c_Q^{-2\alpha}\sum_{|k|=\alpha}\left|\left(D^k u\right)\circ\varphi_Q^{-1}\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^\infty}\\
&= c_Q^{-\alpha}\left\|\left(\sum_{|k|=\alpha}\left|\left(D^k u\right)\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{L^\infty} = c_Q^{-\alpha}\,\|u\|_{L^{\alpha,\infty}} = \Lambda(Q)^{-\hat{\varrho}/m}\,\|u\|_{L^{\alpha,\infty}}.
\end{aligned}$$

□

记号 4.2。对于立方体$Q \in \mathscr{D}$ 和$r > 0$，我们用 $\langle Q\rangle_r$ 表示边长为$r\Lambda(Q)^{1/m}$、与坐标轴平行且中点与Q相同的立方体。

以下构造是标准的。

引理 4.3. 存在一个 $u \in C_c^\infty$，满足以下性质：

(1) $0 \le u \le 1$, (2)
$\operatorname{supp}(u) \subset \mathscr{Q}$，以及
(3) $u = 1$ 在 $\langle\mathscr{Q}\rangle_{1/3}$上。

证明。我们使用由 $\mathbb{R}^m$ 给出的*Friedrich* 光滑化算子

$$x \mapsto \psi(x) := \begin{cases}\exp\left(1/\left(\|x\|_{\ell_2^m}^2 - 1\right)\right), & \|x\|_{\ell_2^m} < 1,\\ 0, & \text{else}\end{cases}$$

并令 $\varepsilon > 0$

$$\psi_\varepsilon : x \mapsto \left(\varepsilon^m \int \psi \, \mathrm{d}\Lambda\right)^{-1} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

那么卷积$u := \psi_{1/4} \star \mathbb{1}_{\langle Q\rangle_{1/2}}$满足所有性质。 □

引理 4.4 (充分分离的子族)。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及每个立方体集合 $N \subset \mathscr{D}_n$，满足

$$\sup_{Q\in\mathscr{D}_n\setminus N} \nu(Q) \le \inf_{Q\in N} \nu(Q),$$

存在 N 的一个子集，记作$\hat{}N$，具有以下性质：

(1) $\langle \mathring{}Q\rangle_3 \cap \langle \mathring{}Q'\rangle_3 = \varnothing$ 对于所有 $Q,Q' \in \hat{}N$，且 $Q \neq Q'$，*(2)* 基数 $\hat{}N \ge \lfloor$基数 $(N)/5^m\rfloor$ 并且 *(3)* 对于所有 $Q \in \hat{}N$ 及其所有边长相同的相邻立方体 $Q' \in \mathfrak{N}(Q) := \left\{C \in \mathscr{D}_{-\log_2(\Lambda(Q))/m} : C \cap Q \neq \varnothing\right\}$，有 $\nu(Q) \ge \nu(Q')$。

证明。 我们通过归纳法构造一个有限递减序列 $\left(D^{(0)}, \ldots, D^{(k)}\right)$，它由$N$ 的子集组成，其中某个 $k \in \mathbb{N}$，如下所示。我们令 $D^{(0)} = N$。现在，给定 $D^{(i)}$，令

$$D_{(i)} := \left\{Q \in D^{(i)} : \exists Q' \in D^{(i)} \setminus \{Q\} : \mathring{Q}' \cap \langle \mathring{Q}\rangle_5 \neq \varnothing\right\}.$$

若$D_{(i)}$ 非空，则选取 $Q \in D_{(i)}$，使得 $\nu(Q) = \max\{\nu(Q') : Q' \in D_{(i)}\}$，并定义

$$D^{(i+1)} = \left\{Q' \in D^{(i)} : \mathring{Q}' \cap \langle \mathring{Q}\rangle_5 = \varnothing\right\} \cup \{Q\}.$$

否则，若$D_{(i)}$ 为空，则归纳过程在$k := i$ 处终止，并定义 $\hat{}N := D^{(k)}$。注意，至多有 $5^m - 1$ 个立方体$Q' \in \mathscr{D}_n \setminus \{Q\}$ 满足 $\langle \mathring{}Q\rangle_5 \cap \mathring{}Q' \neq \varnothing$，对所有$Q \in \mathscr{D}_n$均成立。因此，

$$\operatorname{card} \hat{N} \ge \lfloor \mathscr{N}/5^m \rfloor.$$

第三个性质由构造和我们的假设显然成立。 □

由于 $\mathscr{D}_n$ 和 $N_{Q,\,n}(a)$ 满足引理 4.4 中对 N 所作的假设，我们定义

$$Q_n(a) := \widehat{N_{Q,n}(a)} \text{ and } c_{n,a} := \operatorname{card} Q_n(a),$$

其中，与前面一样，$\mathscr{N}_{Q,\,n}(a) := \operatorname{card} N_{Q,\,n}(a)$，并且

$$Q_n := \widehat{\mathscr{D}_n}, \text{ and } c_n := \operatorname{card} Q_n, \ \mathscr{N}_n := \operatorname{card} \mathscr{D}_n.$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，我们选取 $u \in C_c^\infty$，使其 $\operatorname{supp} u \subset Q$ 如引理 4.3 中所述，并令 $u_Q := u \circ \varphi_{\langle Q\rangle_3}^{-1}$由引理 4.1 对所有 $Q \in \mathscr{D}_n$给出。这分别导出$c_{a,\,n}$维和c_n维的 $W_0^{\alpha\,p}$，子空间，

$$\mathscr{W}_{a,n} := \operatorname{span}\{u_Q : Q \in Q_n(a)\}, \text{ and } \mathscr{W}_n := \operatorname{span}\{u_Q : Q \in Q_n\}, \text{ respect.}$$

注记 4.5。 注意，对于 $Q_n \in \{Q_n(a)$、$Q_n\}$和Q，$Q' \in Q_n$，其中 $Q \neq Q'$，有$\mathring{}\operatorname{supp} u_Q \cap \operatorname{supp} u_{Q'} \subset \langle Q\rangle_3 \cap \langle Q'\rangle_3 = \varnothing$；又由于 $\operatorname{supp}(\nu) \subset Q$，对于所有$Q \in Q_n$ 以及充分大的$n \in \mathbb{N}$，有 $\langle Q\rangle_3 \subset Q$。由引理 4.1 可得

$$\left\|u_Q\right\|_{L^{\alpha,p}(Q)} = \Lambda\left(\langle Q\rangle_3\right)^{-\hat{Q}/m} \|u\|_{L^{\alpha,p}} = \left(3 \cdot 2^{-n}\right)^{-\hat{Q}} \|u\|_{L^{\alpha,p}}.$$

引理 4.6。 设 $a > 0$ 且对于 $u \in C_c^\infty(Q)$，其中 $\|u\|_{L^{\alpha,\,p}} > 0$ 固定 $C := 3^{\hat{Q}}/\|u\|_{L^{\alpha,\,p}}$。则有

(1) $(aQ : Q \in Q_n(a)) \in C2^{-n\hat{Q}}\mathscr{C}^{c_{a,n}}p$ 当且仅当 $f = \sum_{Q\in Q_n(a)} a_Q u_Q \in \mathscr{B}\mathscr{W}_{a,n}$；

(2) $(aQ : Q \in Q_n) \in C2^{-n\hat{Q}}\mathscr{C}^{c_n}p$ 当且仅当 $f = \sum_{Q\in Q_n(a)} a_Q u_Q \in \mathscr{B}\mathscr{W}_n$。

证明。关于 *(1)*：由固定 $n \in \mathbb{N}$时 $Q_n(a) \subset N_{Q,n}(a)$ 的构造，参见引理 4.4，对于 $f = \sum_{Q\in a} a_Q u_Q \in \mathscr{W}_{a,n}$ 以及 $p < \infty$，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{Q\in Q_n(a)} a_Q u_Q\right\|_{L^{\alpha,p}} &= \left(\int_{\mathbb{Q}} \left|\sum_{|k|=\alpha}\left(D^k \sum_{Q\in Q_n(a)} a_Q u_Q\right)^2\right|^{p/2} \mathrm{d}\Lambda\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{Q\in Q_n(a)}\sum_{|k|=\alpha}\int \left|D^k a_Q u_Q\right|^p \mathrm{d}\Lambda\right)^{1/p} \\ &= \left(\sum_{Q\in Q_n(a)} \left\|a_Q u_Q\right\|^p_{L^{\alpha,p}(Q)}\right)^{1/p}\end{aligned}$$

利用u_Q 具有不相交支集这一事实。当$p = \infty$ 时，我们得到

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{Q\in Q_n(a)} a_Q u_Q\right\|_{L^{\alpha,\infty}} &= \left\|\left|\sum_{|k|=\alpha}\left(D^k \sum_{Q\in Q_n(a)} a_Q u_Q\right)^2\right|^{1/2}\right\|_{L^\infty} \\ &= \max_{Q\in Q_n(a)} \left\|\left|\sum_{|k|=\alpha}\left(D^k a_Q u_Q\right)^2\right|^{1/2}\right\|_{L^\infty} \\ &= \max_{Q\in Q_n(a)} \left\|a_Q u_Q\right\|_{L^{\alpha,\infty}(Q)}.\end{aligned}$$

结合引理 4.1，对于$p < \infty$，可得

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{Q\in Q_n(a)} a_Q u_Q\right\|_{L^{\alpha,p}} &= \left(\sum_{Q\in Q_n(a)} \left|a_Q\right|^p \left((3\cdot 2^{-n})^{-\hat{Q}} \|u\|_{L^{\alpha,p}}\right)^p\right)^{1/p} \\ &= (3\cdot 2^{-n})^{-\hat{Q}} \|u\|_{L^{\alpha,p}} \left|(a_Q)\right|_{\ell_p^{c_{a,n}}} \\ &= (3\cdot 2^{-n})^{-\hat{Q}} \|u\|_{L^{\alpha,p}} \left|(a_Q)\right|_{\ell_p^{c_{a,n}}}\end{aligned}$$

对于$p = \infty$，并且

$$\left\|\sum_{Q\in Q_n(a)} a_Q u_Q\right\|_{L^{\alpha,\infty}} = \max_{Q\in Q_n(a)} \left\|a_Q u_Q\right\|_{L^{\alpha,\infty}} = (3\cdot 2^{-n})^{-\hat{Q}} \|u\|_{L^{\alpha,\infty}} \left|(a_Q)\right|_{\ell_\infty^{c_{a,n}}},$$

这证明了第一个结论。第二个结论的证明思路相同。 □

对于 $\mathsf{W}_n \in \{\mathscr{W}_{a,n}, \mathscr{W}_n\}$ 和 $\mathsf{Q}_n \in \{Q_n(a)、\ Q_n\}$、$n \in \mathbb{N}$，定义线性算子

$$\mathscr{Q}_n : L^q_\nu \to \left(\mathfrak{W}_n, \|\cdot\|_{L^q_\nu}\right),\ \mathscr{Q}_n(f) \coloneqq \sum_{Q\in\mathfrak{Q}_n} \frac{\int f u_Q \,\mathrm{d}\nu}{\int u_Q^2 \,\mathrm{d}\nu} u_Q. \tag{4.1}$$

现在我们来估计它的算子范数。

引理 4.7. 对于按(4.1)定义的 $\mathscr{Q}_n$的算子范数，我们有

$$\|\mathscr{Q}_n\| \le 3^m.$$

证明. 与之前一样，令q' 表示$q \in [1,\infty]$的对偶。对于$f \in L^q_\nu$、$Q \in \mathscr{D}_n$，若 $\nu(Q) > 0$，则有$f u_Q \in L^1_\nu$；对于$r \ge 1$，我们有

$$\left\|u_Q\right\|_{L^r_\nu} = \left(\sum_{C\in\mathfrak{R}(Q)} \int_C \left|u_Q\right|^r \mathrm{d}\nu\right)^{1/r} \le \operatorname{card}\mathfrak{R}(Q)^{1/r} \max_{C\in\mathfrak{R}(Q)} \|\mathbb{1}_C\|_{L^r_\nu} \le 3^{m/r}\nu(Q)^{1/r}$$

其中，$\mathsf{N}(Q)$ 表示 $\mathscr{D}_n$ 中 Q 的相邻立方体集合，同前。注意，我们利用了$\nu(Q) = \max_{C\in\mathfrak{R}(Q)} \nu(C)$（由引理 4.4 得出）以及 $u_Q \le 1$ （由引理 4.3 得出）。此外，$\left\|u_Q\right\|_{L^\infty_\nu} \le 1 =$

$3^{m/\infty}\nu(Q)^{1/\infty}$。因此，根据 Hölder 不等式，注意到 $Q_n(a)$ 中的立方体以及 Q_n 中的立方体分别互不相交，并且 $\int_{\langle Q\rangle_3} u_Q^2 \,\mathrm{d}\nu \geq \int_Q 1 \,\mathrm{d}\nu = \nu(Q) > 0$，可得对于 $q < \infty$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}_n f\|_{L_\nu^q}^q &= \sum_{Q\in Q_n(a)} \left|\frac{\int f u_Q \,\mathrm{d}\nu}{\int u_Q^2 \,\mathrm{d}\nu}\right|^q \|u_Q\|_{L_\nu^q}^q \leq \sum_{Q\in Q_n(a)} \frac{\|f|_{\langle Q\rangle_3}\|_{L_\nu^q}^q}{\nu(Q)^q} \|u_Q\|_{L_\nu^{q'}}^q \|u_Q\|_{L_\nu^q}^q \\ &\leq \sum_{Q\in Q_n(a)} \frac{\|f|_{\langle Q\rangle_3}\|_{L_\nu^q}^q}{\nu(Q)^q} \left(3^{m/q'}\nu(Q)^{1/q'}\, 3^{m/q}\nu(Q)^{1/q}\right)^q \leq 3^{mq}\|f\|_{L_\nu^q}^q\end{aligned}$$

且对于 $q = \infty$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}_n f\|_{L_\nu^\infty} &= \max_{Q\in Q_n} \left|\frac{\int f u_Q \,\mathrm{d}\nu}{\int u_Q^2 \,\mathrm{d}\nu}\right| \|u_Q\|_{L_\nu^\infty} \leq \max_{Q\in Q_n} \frac{\|f|_{\langle Q\rangle_3}\|_{L_\nu^\infty}}{\nu(Q)} \|u_Q\|_{L_\nu^1} \|u_Q\|_{L_\nu^\infty} \\ &\leq \max_{Q\in Q_n} \frac{\|f|_{\langle Q\rangle_3}\|_{L_\nu^\infty}}{\nu(Q)} 3^m \nu(Q) \leq 3^m \|f\|_{L_\nu^\infty}.\end{aligned}$$

□

命题4.8 (离散化——下界)。对于 $\star \in \{K,G\}$、$a > 0$、$k < c_{a,n}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，当 $q < \infty$ 时，我们有

$$d_k^\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) \gg 2^{-an/q} d_k^\star\left(\ell_p^{c_{a,n}}, \ell_q^{c_{a,n}}\right)$$

以及当 $q = \infty$ 且 $k < c_n$ 时

$$d_k^\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^\infty\right) \gg 2^{-n\hat{\varrho}} d_k^\star\left(\ell_p^{c_n}, \ell_\infty^{c_n}\right).$$

证明。我们先考虑 $\star = G$ 的情形。对于 $q < \infty$，注意到当 n 足够大且$(a_Q) \in \ell_p^{c_{a,n}}$ 时，有 $\sum_{Q\in Q_n(a)} C2^{-n\hat{\varrho}} a_Q u_Q \in \mathscr{B}W_0^{\alpha,p}$，由引理 4.6 得出。此外，由引理 4.4、注 4.5 和引理 4.1 可知，当 n 足够大时，我们有

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{Q\in Q_n(a)} C2^{-n\hat{\varrho}} a_Q u_Q\right\|_{L_\nu^q}^q &\gg \left(\sum_{Q\in Q_n(a)} \left(2^{-n\hat{\varrho}} \|a_Q u_Q\|_{L_\nu^q}\right)^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{Q\in Q_n(a)} |a_Q|^q \Lambda(Q)^{\varrho/m} \|u_Q\|_{L_\nu^q}^q\right)^{1/q} \\ &\geq \left(\sum_{Q\in Q_n(a)} |a_Q|^q \Lambda(Q)^{\varrho/m} \nu(Q)\right)^{1/q} \\ &\geq \left(\min_{Q\in Q_n(a)} \mathfrak{J}_Q(Q)\right)^{1/q} \left(\sum_{Q\in Q_n(a)} |a_Q|^q\right)^{1/q} \geq 2^{-an/q} \|(a_Q)\|_{\ell_q^{c_{a,n}}}.\end{aligned}$$

注意，假设 $\operatorname{card}(\operatorname{supp}(\nu)) = \infty$ 保证了 $c_{a,n} \to \infty$ 对于$n \to \infty$成立。因此，对于$k \in \mathbb{N}$，我们可以选择$n \in \mathbb{N}$，使得 $2k \leq c_{a,n}$，并得到

$$\begin{aligned}d_k^G\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) &= \inf\left\{\sup_{u\in U\cap\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}} \|u\|_{L_\nu^q} : U <^n L_\nu^q\right\} \geq \inf\left\{\sup_{u\in U\cap\mathscr{W}_{a,n}\cap\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}} \|u\|_{L_\nu^q} : U <^n L_\nu^q\right\} \\ &\geq \inf\left\{\sup_{u\in U\cap\mathscr{W}_{a,n}\cap\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}} \|u\|_{L_\nu^q} : U <^n \mathscr{W}_{a,n}\right\} \\ &\gg 2^{-an/q} \inf\left\{\sup_{u\in U\cap\ell_p^{c_{a,n}}} \|u\|_{\ell_q^{c_{a,n}}} : U <^n \ell_q^{c_{a,n}}\right\} = 2^{-an/q} d_k^G\left(\ell_p^{c_{a,n}}, \ell_q^{c_{a,n}}\right).\end{aligned}$$

现在，对于$q = \infty$，我们有 $\sum_{Q\in Q_n} C2^{-\hat{\varrho}} a_Q u_Q \in \mathscr{B}W_0^{\alpha,p}$，对于$a = (a_Q) \in \ell_p^{c_n}$。这给出

$$\left\|\sum_{Q\in Q_n} C2^{-n\hat{\varrho}} a_Q u_Q\right\|_{L_\nu^\infty} \gg 2^{-n\hat{\varrho}} \max_{Q\in Q_n} |a_Q| \|u_Q\|_{L_\nu^\infty} = 2^{-n\hat{\varrho}} \|a\|_{\ell_\infty^{c_n}}$$

由于$u_Q = 1$在$Q \in Q_n$上，且 $\nu(Q) > 0$，即 $\left\|u_Q\right\|_{L_\nu^\infty} = 1$。我们得到

$$d_k^G\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^\infty\right) \geq \inf\left\{\sup_{u\in U\cap\mathscr{W}_{a,n}\cap\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}} \|u\|_{L_\nu^\infty} : U <^n \mathscr{W}_n\right\}$$
$$\gg 2^{-n\hat{\varrho}} \inf\left\{\sup_{u\in U\cap\ell_p^{c_n}} \|u\|_{\ell_\infty^{c_n}} : U <^n \ell_\infty^{c_n}\right\} = 2^{-n\hat{\varrho}} d_k^G\left(\ell_p^{c_n}, \ell_\infty^{c_n}\right),$$

这证明了 Gel′fand 宽度的结论。

对于情形 $\star = K$ 和 $q < \infty$，注意到对于 $v \in \mathscr{W}_{a,n}$，我们有 $\mathcal{Q}_n v = v$，因此根据引理 4.7，对于 $f \in L_\nu^q$，有

$$\|v - \mathcal{Q}_n f\|_{L_\nu^q} = \|\mathcal{Q}_n(v - f)\|_{L_\nu^q} \leq 3^m \|v - f\|_{L_\nu^q}. \tag{4.2}$$

由此可得柯尔莫哥洛夫宽度的如下估计

$$\begin{aligned}\inf_{W<_k L_\nu^q} \sup_{u\in\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}} \inf_{f\in W} \|u - f\|_{L_\nu^q} &\geq \inf_{W<_k L_\nu^q} \sup_{v\in\mathscr{B}\mathscr{W}_{c_{a,n}}} \inf_{f\in W} \|v - f\|_{L_\nu^q} \\ &\gg \inf_{W<_k L_\nu^q} \sup_{v\in\mathscr{B}\mathscr{W}_{a,n}} \inf_{f\in W} \|v - \mathcal{Q}_n f\|_{L_\nu^q} \qquad (4.3)\\ &\geq \inf_{W<_k\left(\mathscr{W}_{c_{a,n}}, \|\cdot\|_{L_\nu^q}\right)} \sup_{v\in\mathscr{B}\mathscr{W}_{a,n}} \inf_{w\in W} \|v - w\|_{L_\nu^q}.\end{aligned}$$

对于子空间 $\widetilde{W} <_k \left(\mathscr{W}_{a,n}, \|\cdot\|_{L_\nu^q}\right)$，定义 $\widetilde{W} := \left\{\left((bQ)_{Q\in Q_n(a)} : \sum_{Q\in Q_n(a)} b_{\ Q} u_Q \in \widetilde{W}\right)\right\}$，由引理 4.6 和引理 4.1 可得

$$\begin{aligned}\sup_{v\in\mathscr{B}\mathscr{W}_{a,n}} \inf_{w\in\widetilde{W}} \|v - w\|_{L_\nu^q} &\gg \sup_{(a_Q)\in\ell_p^{c_{a,n}}} \inf_{w\in\widetilde{W}} 2^{-n\hat{\varrho}} \left\|w - \sum_{Q\in Q_n(a)} a_Q u_Q\right\|_{L_\nu^q} \\ &= \sup_{(a_Q)\in\ell_p^{c_{a,n}}} \inf_{(b_Q)\in W} 2^{-n\hat{\varrho}} \left\|\sum_{Q\in Q_n(a)} (a_Q - b_Q) u_Q\right\|_{L_\nu^q} \\ &\geq \sup_{a\in\ell_p^{c_{a,n}}} \inf_{b\in W} \left(\sum_{Q_n(a)} \Lambda(Q)^\varrho \left\|(a_Q - b_Q) u_Q\right\|_{L_\nu^q}^q\right)^{1/q} \\ &\geq \sup_{a\in\ell_p^{c_{a,n}}} \inf_{b\in W} \min_{Q\in Q_n(a)} \mathfrak{J}_\varrho(Q)^{1/q} \left(\sum_{Q_n(a)} \left|a_Q - b_Q\right|^q\right)^{1/q} \\ &\geq \sup_{a\in\ell_p^{c_{a,n}}} \inf_{b\in W} 2^{-na/q} \left\|(a_Q - b_Q)\right\|_{\ell_q^{c_{a,n}}}\end{aligned}$$

因为对于所有的$Q \in Q_n(a)$，都有 $\Lambda(Q)^{-\hat{\varrho}/m} \nu(Q)^{1/q} = \mathrm{J}(Q)^{1/q} \geq 2^{-na/q}$。因此，

$$d_k^K\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) \geq d_k^K\left(\mathscr{B}\mathscr{W}_{a,n}, L_\nu^q\right) \gg d_k^K\left(\mathscr{B}\mathscr{W}_{a,n}, \left(\mathscr{W}_{a,n}, \|\cdot\|_{L_\nu^q}\right)\right)$$
$$\gg 2^{-na/q} d_k\left(\ell_p^{c_{a,n}}, \ell_q^{c_{a,n}}\right).$$

最后，对于$q = \infty$，我们也有$Q_n v = v$，其中$v \in \mathscr{W}_n$，因此在这种情形下，(4.2) 和 (4.3) 仍然成立。利用这一点及 4.6，我们得到

$$\sup_{(a_Q)\in\ell_p^{c_n}} \inf_{w\in\widetilde{W}} 2^{-n\hat{\varrho}} \left\|w - \sum_{Q\in Q_n} a_Q u_Q\right\|_{L_\nu^\infty} = \sup_{(a_Q)\in\ell_p^{c_n}} \inf_{(b_Q)\in W} 2^{-n\hat{\varrho}} \left\|\sum_{Q\in Q_n} (a_Q - b_Q) u_Q\right\|_{L_\nu^\infty}$$
$$\geq \sup_{(a_Q)\in\ell_p^{c_n}} \inf_{(b_Q)\in W} 2^{-n\hat{\varrho}} \max_{Q\in Q_n} \left|a_Q - b_Q\right|$$

对于 $\widetilde{W} <_k \left(\mathscr{W}_n, \|\cdot\|_{L_\nu^q}\right)$和 $\widetilde{W} := \left\{\left((bQ)_{Q\in Q_n(a)} : \sum_{Q\in Q_n(a)} b_{\ Q} u_Q \in \widetilde{W}\right)\right\}$。对这类子 W 空间取下确界，即可得出所述结论。

□

现在我们可以陈述所讨论的下界了。

命题4.9. 假设对于 $\gamma \in \mathbb{R}, \star \in \{K,G\}$，我们有 $d_n^\star\left(\mathscr{C}_p^{2n}, \ell_q^{2n}\right) \gg n^{-\gamma}$，那么

(1) $-\overline{S}_\varrho - \gamma \leq \overline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right)$ *and*

(2) $-\underline{S}_\varrho - \gamma \leq \underline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right)$.

证明. 对于 *(1)*：对于 $q < \infty$，考虑序列 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lfloor c_{a,n}/2 \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$，并注意到 $\lfloor c_{a,n}/2 \rfloor \asymp \mathscr{N}_{\varrho,n}(a)$ 对于 $a > 0$。根据上逼近阶的定义以及命题4.8，我们有

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(d_n^\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right)\right)}{\log(n)} \geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(d_{k_n}^\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right)\right)}{\log(k_n)} \\ &\gg \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(2^{-an/q} d_{k_n}^\star\left(\mathscr{C}_p^{c_{a,n}}, \ell_q^{c_{a,n}}\right)\right)}{\log(k_n)} \\ &\gg \limsup_{n\to\infty} \frac{-a\log(2^n)}{q\log\left(\mathscr{N}_{\varrho,n}(a)\right)} - \frac{\gamma\log(k_n)}{\log(k_n)} = \frac{-a}{q\overline{F}_\varrho(a)} - \gamma.\end{aligned}$$

对所有 $a > 0$ 取上确界，得到

$$\overline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) \geq \sup_{a>0} \frac{-a}{q\overline{F}_\varrho(a)} - \gamma = \frac{-1}{q\overline{\mathscr{F}}_\varrho} - \gamma.$$

对于 $q = \infty$，由命题4.8可得，其中 $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} := (\lfloor c_n/2 \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $\lfloor c_n/2 \rfloor \asymp \mathscr{N}_n$，

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^\infty\right) &\geq \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(d_{k_n}^\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^\infty\right)\right)}{\log(k_n)} \gg \limsup_{n\to\infty} \frac{\log\left(2^{-n\hat{\varrho}} d_{k_n}^\star\left(\mathscr{C}_p^{c_n}, \ell_\infty^{c_n}\right)\right)}{\log(k_n)} \\ &\gg \limsup_{n\to\infty} \frac{-\hat{\varrho}\log(2^n)}{\log(\mathscr{N}_n)} - \frac{\gamma\log(n_k)}{\log(n_k)} = \frac{-\hat{\varrho}}{\overline{\dim}_M(\nu)} - \gamma.\end{aligned}$$

关于 *(2)*：对于 $q < \infty$，我们考虑满足 $a > \underline{0}$ 使得 $F_\varrho(a) > 0$ 的情形，否则无需证明。根据定义，这意味着对所有 $\varepsilon \in \left(0, F_\varrho(a)\right)$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对所有 $n \geq N$

$$\frac{\log\left(5^{-m}\mathscr{N}_{\varrho,n}(a)\right)}{n\log 2} \geq \underline{F}_\varrho(a) - \varepsilon.$$

因此，$5^{-m}\mathscr{N}_{\varrho,n}(a) \geq 2^{n\left(\underline{F}_{\varrho(a)-\varepsilon}\right)}$ 当 n 足够大时成立。对于 $k \in \mathbb{N}$，令

$$n_k := \left\lceil \frac{\log 2k}{\left(\underline{F}_\varrho(a) - \varepsilon\right)\log 2} \right\rceil$$

得到 $c_{a,n_k} \geq \left\lfloor 5^{-m}\mathscr{N}_{\varrho,n_k}(a) \right\rfloor \geq \left\lfloor 2^{n_k\left(\underline{F}_{\varrho(a)-\varepsilon}\right)} \right\rfloor \geq 2k$。利用命题4.8即可得出

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{ord}}_\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right) &= \liminf_{k\to\infty} \frac{\log\left(d_k^\star\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^q\right)\right)}{\log(k)} \gg \liminf_{k\to\infty} \frac{\log\left(2^{-n_k a/q} d_k^\star\left(\mathscr{C}_p^{c_{a,n_k}}, \ell_q^{c_{a,n_k}}\right)\right)}{\log(k)} \\ &= \liminf_{k\to\infty} \frac{-an_k\log(2)}{q\log(k)} + \frac{\log\left(d_k^\star\left(\mathscr{C}_p^{2k}, \ell_q^{2k}\right)\right)}{\log(k)} \\ &\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{-a\log(2k)}{q\log(k)\left(\underline{F}_\varrho(a) - \varepsilon\right)} - \frac{\gamma\log(k)}{\log(k)} = \frac{-a}{q\underline{F}_\varrho(a) - \varepsilon} - \gamma.\end{aligned}$$

最后，对所有 $a > 0$ 和 $\varepsilon \to 0$ 取上确界，即可证明此情形。

对于 $q = \infty$，我们假设 $\underline{\dim}_M(\nu) > 0$，以排除平凡情形。如上所述，由于 $c_n \asymp \mathscr{N}_n$，这意味着对于所有 $\varepsilon > 0$ 以及足够大的 $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\log(c_n)}{n\log 2} \geq \underline{\dim}_M(\nu) - \varepsilon,$$

即 $c_n \geq 2^{n\left(\dim_M(\nu)-\varepsilon\right)}$，令 $n_k := \left\lceil \log(2k) \,/\, \left(\left(\dim_M \nu - \varepsilon\right)\log 2\right)\right\rceil$，对于$k \in \mathbb{N}$可得$c_{n_k} \geq 2k$。利用命题4.8可得

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{ord}}_{\star}\left(\mathscr{B}W_0^{\alpha,p}, L_\nu^\infty\right) &\gg \liminf_{k\to\infty} \frac{\log\left(2^{-n_k\hat{\varrho}} d_k^{\star}\left(\mathscr{O}_p^{c_{n_k}}, \ell_\infty^{c_{n_k}}\right)\right)}{\log(k)} \\
&\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{-\hat{\varrho} n_k \log(2)}{\log(k)} + \frac{\log\left(d_k^{\star}\left(\mathscr{O}_p^{2k}, \ell_\infty^{2k}\right)\right)}{\log(k)} \\
&\geq \liminf_{k\to\infty} \frac{-\hat{\varrho}\log(2k)}{\log(k)\left(\underline{\dim}_M(\nu)-\varepsilon\right)} - \frac{\gamma\log(k)}{\log(k)} = \frac{-\hat{\varrho}}{\underline{\dim}_M(\nu)-\varepsilon} - \gamma.
\end{aligned}$$

最后，取 $\varepsilon \to 0$ 即可证明第二个断言 f¨ur $q = \infty$。 □

定理 *1.1* 和定理 *1.5* 中下界的证明。我们结合引理 2.6、推论 2.7 和推论 2.8、命题4.9 (1)以及事实 $\mathscr{F}_\varrho = s\varrho$，从而得到定理 1.1 中上近似阶的所有下估计情形；对于 Kolmogorov 情形以及备注1.2(4)中的 Gel′fand 情形，则结合命题4.9(2)得到定理 1.5 所需的下逼近阶的下估计。证明的最后一步是观察到 (1.3)。

参考文献

[BB71] M. v. Birman 和 V. V. Borzov。某些奇异微分算子的离散谱渐近行为。《数学物理问题》第5期：谱理论（俄文）。1971年，第24–38页。[Bor70] V. V. Borzov。奇异测度的定量特征。《数学物理问题》第4期：谱理论、波过程。列宁格勒大学出版社，列宁格勒，1970年，第42–47页。[Bor71] V. V. Borzov。“奇异测度的定量特征”。《谱理论与波过程》。M. S. Birman 编。马萨诸塞州波士顿：Springer US，1971年，第37–42页。doi: 10.1007/978-1-4684-8926-2_5。[BS66] M. v. Birman 和 M. Z. Solomjak。W_p^α类函数的分段多项式函数逼近。《苏联科学院院报》171（1966），1015–1018。[BS67] M. v. Birman 和 M. Z. Solomjak。W_p^α类函数的分段多项式逼近。《数学文集》（新系列）73（115）（1967），331–355。[BS74] M. v. Birman 和 M. Z. Solomjak。Sobolev嵌入定理的定量分析及其在谱理论中的应用。《第十次数学学校》（1972年夏季学校，卡齐韦利/纳尔奇克）（俄文）。1974年，第5–189页。[Glu83] E. D. Gluskin。随机矩阵的范数与有限维集合的直径。《数学文集》（新系列）120（162）.2（1983），180–189，286。[GP13] D. Geller 和 I. Z. Pesenson。紧黎曼流形上的 n-宽度与逼近论。《交换与非交换调和分析及其应用》。第603卷。《当代数学》。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2013年，第111–122页。doi: 10.1090/conm/603/12043。[GP14] D. Geller 和 I. Z. Pesenson。紧流形上Sobolev空间中球的Kolmogorov宽度与线性宽度。Math. Scand. 115.1（2014），96–122。doi: 10. 7146/math.scand.a-18005。[Ism68] R. S. Ismagilov。希尔伯特空间中紧集的n维直径。《泛函分析与应用》2.2（1968），32–39。[Ism74] R. S. Ismagilov。赋范线性空间中集合的直径，以及用三角多项式逼近函数。《数学科学进展》29.3(177)（1974），161–178。

[Kaˇs77] B. S. Kaˇsin。某些有限维集合和光滑函数类的直径。《苏联数学杂志》11.2（1977年4月），317。doi: 10. 1070/IM1977v011n02ABEH001719。[KN22a] M. Kesseb¨ohmer 和 A. Niemann。通过 L^q谱研究Kolmogorov直径的逼近阶及其在多调和算子中的应用。《函数分析杂志》283.7（2022），论文编号109598，共22页。doi: 10.1016/j.jfa.2022.109598。[KN22b] M. Kesseb¨ohmer 和 A. Niemann。自共形分形（含重叠）上弱吉布斯测度对应的 Kreˇın-Feller 算子的谱渐近式。《数学进展》403（2022），论文编号108384。doi: 10.1016/j.aim.2022.108384。[KN22c] M. Kesseb¨ohmer 和 A. Niemann。Kreˇın–Feller 算子的谱维数与 L^q谱。《数学进展》399（2022），论文编号108253。doi: 10.1016/ j.aim.2022.108253。[KN22d] M. Kesseb¨ohmer 和 A. Niemann。高维情形下 Kreˇın–Feller 算子的谱维数。arXiv（2022）。doi: 10.48550/arXiv.2202.05247。[KNZ23] M. Kesseb¨ohmer、A. Niemann 和 S. Zhu。通过 Rényi 维数研究概率测度的量化维数。即将发表于《美国数学会汇刊》（2023）。doi: 10.1090/tran/8863。[LGM96] G. G. Lorentz、M. v. Golitschek 和 Y. Makovoz。构造性逼近。第304卷。数学科学基础丛书 [《数学科学基本原理]》。高级问题。施普林格出版社，柏林，1996年，第xii页。doi: 10.1007/978-3-642-60932-9。[Maˇı75] V. E. Maˇıorov。直径问题的离散化。《数学科学进展》30.6(186)（1975），179–180。[Nik61] S. M. Nikol′skii。关于多变量可微函数的嵌入、延拓与逼近定理。《俄罗斯数学评论》16.5（1961年10月），55–104。doi: 10.1070/RM1961v016n05ABEH004113。[Pes16] I. Z. Pesenson。紧黎曼流形上Kolmogorov、Gelfand和线性n-宽度的估计。《美国数学会会刊》144.7（2016），2985–2998。doi: 10.1090/proc/13054。[Pin85] A. Pinkus。《逼近论中的n-宽度》。第7卷。数学及其边缘领域成果（第3辑）[《数学及相关领域成果》（第3辑）]。施普林格出版社，柏林，1985年，第x页。doi: 10.1007/978-3-642- 69894-1。[Rie95] R. Riedi。改进的多重分形形式与自相似测度。《数学分析与应用杂志》189.2（1995），462–490。doi: 10.1006/jmaa.1995.1030。[Shm19] P. Shmerkin。关于傅斯滕伯格交集猜想、自相似测度以及卷积的 L^q 范数。《数学年刊》（第2辑）189.2（2019），319–391。doi: 10.4007/annals.2019.189.2.1。[Sob91] S. L. Sobolev。《泛函分析在数理物理中的若干应用》。第90卷。数学专著译丛。由 Harold H. McFaden 根据俄文第三版译出，附 V. P. Palamodov 评论。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1991年，第viii页。doi: 10. 1090/mmono/090。[Tik90] V. M. Tikhomirov。《分析 II》。R. V. Gamkrelidze 编。第14卷。数学科学百科全书。《凸分析与逼近论》，译自《现代数学问题：基础方向》第14卷，苏联科学院全苏科学与技术信息研究所，莫斯科，1987年；D. Newton 译。施普林格出版社，柏林，1990年，第viii页。doi: 10.1007/978-3-642-61267-1。

□