arXiv:2303.01327v1 [math.NA] 2 Mar 2023

计算广义张量特征对的 Noda 迭代

Wanli Ma* Weiyang Ding† Yimin Wei‡

摘要

本文提出张量 Noda 迭代（NI）及其非精确版本，用于求解一类特定张量对（称为广义 $\mathcal{M}$张量对）的特征值问题。广义 $\mathcal{M}$张量对由一个弱不可约非负张量和一个线性组合中的非奇异 $\mathcal{M}$张量构成。本文证明，任意广义 $\mathcal{M}$张量对都存在唯一的正广义特征值及与之对应的正特征向量。本文还提出修正张量 Noda 迭代（MTNI），以推广用于非负矩阵特征值问题的 Noda 迭代。此外，为了提高实现效率并加快收敛，还介绍了非精确广义张量 Noda 迭代法（IGTNI）和广义 Newton-Noda 迭代法（GNNI）。在对初始值作出温和假设的条件下，这些算法均能保证收敛。数值实验展示了这些算法的效率。

关键词：广义张量特征值问题、修正 Noda 迭代、广义 Noda 迭代、非精确算法、Newton法、非负张量、$\mathcal{M}$–张量、正性保持

1 引言

张量谱理论以及具有广泛应用的特征值问题受到广泛研究[10, 21, 47, 48]。从矩阵情形推广而来的张量特征值存在多种变体定义。近期一些论文 [8, 17, 35] 指出，这一广义特征值框架统一了张量特征值的若干定义。由于广义张量特征值问题有着广泛的应用，例如高阶马尔可夫链 [15], 量子信息处理 [43], 和多标签学习 [50]。

张量 $\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})$ 是由元素 $a_{i_1\cdots i_m}\in\mathrm{F}$ 构成的多维数组，其中 $i_j=1,\ \ldots,\ n_j$ 对于 $j=1,\ \ldots,\ m$，且 F 是一个域。本文仅考虑实张量，即 $\mathrm{F}=\mathbb{R}$。当 $n=n_1=\cdots=n_m$， $\mathcal{A}$ 时，称其为 m 阶 n 维张量。将所有 m 阶 n 维实张量的集合记为 $T_{m,\ n}$。对于任意张量 $\mathcal{A}\in T_{m,\ n}$ 和任意向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$，张量-向量乘法 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}$ 定义为

$$\mathcal{A}\,\mathbf{x}^{m-1}=\left(\sum_{i_2,\ldots,i_m=1}^{n}a_{ii_2\cdots i_m}x_{i_2}\cdots x_{i_m}\right)\in\mathbb{R}^n.$$

张量特征值的定义由 Qi [46] 和 Lim [36] 于2005年分别提出。令$\mathcal{A}=(a_{i_1\cdots i_m})\in T_{m,\ n}$。若存在非零向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{C}^n$满足以下齐次多项式方程，则称数 $\lambda\in\mathbb{C}$ 为 $\mathcal{A}$ 的特征值：

$$\mathcal{A}\,\mathbf{x}^{m-1}=\lambda\mathbf{x}^{[m-1]},\tag{1.1}$$

*电子邮件：18110840010@fudan.edu.cn。中国上海市复旦大学数学科学学院，邮编200433。该作者获国家自然科学基金委员会项目（批准号：12271108）资助。

†电子邮件：dingwy@fudan.edu.cn。中国上海市复旦大学脑启发智能科学与技术研究院；中国上海市上海脑科学与脑启发技术中心；教育部计算神经科学与脑启发智能重点实验室（复旦大学）；中国上海市复旦大学教育部脑科学前沿科学中心；张江复旦国际创新中心。W. Ding的研究获上海市科学技术重大项目（编号：20JC1419500、2018SHZDZX01）资助。

‡通讯作者（Y. Wei）。电子邮件：ymwei@fudan.edu.cn和yimin.wei@gmail.com。中国上海市复旦大学数学科学学院及上海市现代应用数学重点实验室，邮编200433。该作者获国家自然科学基金委员会项目（批准号：12271108）、上海市教育委员会创新计划和上海市科学技术委员会项目（批准号：22WZ2501900）资助。

其中，记号 $\mathbf{x}^{[m-1]}$ 表示 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^\top \in \mathbb{C}^n$，定义为 $\mathbf{x}^{[m-1]} = (x_1^{m-1}, \ldots, x_n^{m-1})^\top$。于是，称非零向量 $\mathbf{x}$ 为 $\mathcal{A}$ 对应于特征值 λ 的特征向量，并称数对 $(\mathbf{x}\ \lambda)$ 为 $\mathcal{A}$的特征对。张量的所有特征值组成的集合称为其谱。 $\mathcal{A}$ 的谱中元素的最大模记为 $\rho(\mathcal{A})$。

Chang、Pearson 和 Zhang [8] 首次引入了广义特征值，称为 $\mathcal{B}$张量的 -特征值 $\mathcal{A}$ 。设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是两个维度相同的方张量。假设 $\lambda \in \mathbb{C}$和 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ 满足

$$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} = \lambda \mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1},\ \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \tag{1.2}$$

我们称 $\mathcal{A}$ 和 $\mathbf{x}$ 的 λ $\mathcal{B}$–特征值为相应的 $\mathcal{B}$–特征向量。Ding 和 Wei [19] 进一步系统地研究了广义特征值问题的扰动与误差分析。

下面介绍一些常用符号。对于任意实张量 $\mathcal{A} = (a_{i_1 \ldots i_m}) \in T_{m,\ n}$，若 $\mathcal{A}$ 非负，记作 $\mathcal{A} \geq 0$，当且仅当对所有 $i_1, \ldots, i_m$，均有 $a_{i_1 \ldots i_m} \geq 0$。若对所有 $i_1, \ldots, i_m$，均有 $a_{i_1 \ldots i_m} > 0$，则称张量 $\mathcal{A}$为正，记作 $\mathcal{A} > 0$。若 $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in T_{m,\ n}$，则 $\mathcal{A} \geq \mathcal{B} (\mathcal{A} > \mathcal{B})$ 表示对于所有 $i_1, \ldots, i_m$，均有 $a_{i_1 \ldots i_m} \geq b_{i_1 \ldots i_m} (a_{i_1 \ldots i_m} > b_{i_1 \ldots i_m})$。非负（正）向量或矩阵的定义相同。

对于实向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^\top$，若对所有 i都有 $y_i \neq 0$，我们用 $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{y}}$表示其第 i 个分量为 $\frac{x_i}{y_i}$ 的列向量。我们还定义 $\max \mathbf{x} = \max_i\ ^{x_i}$和 $\min \mathbf{x} = \min_i\ ^{x_i}$。记 $\mathbf{x}^{[m-1]} = (x_1^{m-1}, \ldots, x_n^{m-1})^\top$ 且 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$。为简便起见，本文用 $\|\cdot\|$ 表示向量和矩阵的 2-范数。

文献中已提出多种数值方法，用于计算不同类型张量对的广义特征对。Kolda 和 Mayo [35] 提出了一种幂方法，用于计算对称张量对的广义特征对。Cui、Dai 和 Nie [17], 提出了一种半定松弛方法，用于求出对称张量对的所有实特征值。在 [11, 12], 中，Chen、Han 和 Zhou 提出了用于计算（广义）张量特征对的同伦方法。Yu、Yu、Xu、Song 和 Zhou [54] 提出了一种自适应梯度法，用于计算广义张量特征对。Zhao、Yang 和 Liu [56] 计算了弱对称张量的广义特征值。Che、Cichocki 和 Wei [9] 应用神经动力学网络计算实值张量的最佳秩一逼近，并求解张量特征值问题。Mo、Wang 和 Wei [40] 通过 Zhang 神经网络研究了时变广义张量特征分析。

本文受 Chen、Vong、Li 和 Xu 的工作启发 [13], ，将证明 Perron-Frobenius 理论对一类特殊张量对的推广，并提出用于求解这类特殊张量对的 Perron 对的迭代方法。Chen、Vong、Li 和 Xu [13] 研究了一类特殊矩阵对的广义特征值问题；这类矩阵对具有 Perron-Frobenius 理论所揭示的非负矩阵的相同性质。受 Perron-Frobenius 理论的非线性推广 [41], 启发，Fujimoto [24] 研究了满足以下条件的矩阵广义特征值问题 $A\mathbf{x} = \lambda B\mathbf{x}$:

(C1) $A \geq 0$.

(C2) A不可约。

(C3) 存在一个向量 $\mathbf{v} > 0$，使得 $B\mathbf{v} > A\mathbf{v}$。

(C4) 对所有 $i \neq j$, $b_{ij} \leq a_{ij}$。

这些条件的经济学解释见 [24]。在 [4], 中，证明了 Perron-Frobenius 理论的以下推广。

定理 1.1 [4] 设 A和 B为满足条件 (C1) – (C4) 的 $n \times n$ 矩阵。则存在$\lambda \in (0, 1)$ 以及一个向量 $\mathbf{x}_*$，使得 $A\mathbf{x}_* = \lambda B\mathbf{x}_*$。

此外，如果 $A\mathbf{v} = \lambda' B\mathbf{v}$，其中具有一个非负的 λ' 以及一个非零非负向量 $\mathbf{v}$，则 $\lambda = \lambda'$ 且 $\mathbf{v} = \alpha\mathbf{x}_*$，其中某个 $\alpha > 0$。

Chang、Pearson 和 Zhang [7] 将 Perron-Frobenius 理论推广到了非负张量情形。不可约非负张量 $\mathcal{A}$ 的谱半径实际上是一个正特征值，并具有一个正特征向量。这个特征对被称为 $\mathcal{A}$的 Perron 对。它与超图 [29, 30] 中的高阶连通性以及高阶马尔可夫链 [42]的平稳概率分布有关。

1971年，Noda [44] 提出了一种保正性方法——Noda 迭代（NI），用于计算非负矩阵的 Perron 对。在 [13], 中，NI 被扩展到满足以下条件的矩阵对（A, B）：

条件 (C1) – (C4)，包括修正 Noda 迭代（MNI）和广义 Noda 迭代（GNI）。可以保证相应的广义特征向量始终为正。此外，Noda 迭代也被用于求解弱不可约非负张量的 Perron 对 [39]。

本文考虑满足类似于 (C1) – (C4) 条件的张量对，并将其称为广义 $\mathcal{M}$-张量对。我们证明，任意广义 $\mathcal{M}$- 张量对都具有唯一的正特征值及其对应的正特征向量，这是对矩阵佩龙 - 弗罗贝尼乌斯定理的推广。我们还设计了张量Noda迭代，用于求解这类张量对的 Perron 对（$\mathcal{A}, \mathcal{B}$）。

本文其余部分安排如下。首先，我们给出适用于张量对的、类似于 (C1) – (C4) 的假设，并在第 2 节证明张量对的佩龙–弗罗贝尼乌斯型理论。基于这一推广理论，我们在第 3 节提出经过实际改进的张量 Noda迭代，用于求解这类张量对的 Perron 对。接着，我们在第 4 节分析这些算法的收敛性。最后，我们在第 5 节给出数值算例，以展示所提方法的有效性及其收敛表现。

2 广义 $\mathcal{M}$-张量对的张量特征值问题

与 [13]，中的矩阵情形类似，我们研究具有某些特殊结构的张量广义特征值问题。为了给出张量情形下的条件，我们需要引入几个关于张量不可约性的概念。

定义 2.1 若存在一个非空真指标子集 $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$，使得张量 $\mathcal{A} \in T_{m,n}$ 满足

$$a_{i_1 \ldots i_m} = 0, \ \forall i_1 \in J, \ \forall i_2, \ldots, i_m \notin J.$$

若 $\mathcal{A}$ 不可约，则称其为不可约。此外，若对每个非空真指标子集 $S \subset \{1, 2, \ldots, n\}$，都存在 $i_1 \in S$ 和 $i_2, \ldots, i_m$，其中至少有一个 $i_q \notin S, q = 2, \ldots, m$，使得 $a_{i_1 i_2 \ldots i_m} \neq 0$，则称张量 $\mathcal{A} \in T_{m,n}$ 弱不可约。

我们考虑实张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 的广义特征值问题，并假设满足以下条件：

(C1') $\mathcal{A} \geq 0$.

(C2') $\mathcal{A}$ 是弱不可约的。

(C3') 存在一个向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{v} > 0$，使得 $\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-1} > \mathcal{A}\mathbf{v}^{m-1}$。

(C4') For all $(i_2, \ldots, i_m) \neq (i, \ldots, i)$, $b_{i i_2 \ldots i_m} \leq a_{i i_2 \ldots i_m}$.

以三阶张量为例，上述假设的经济学解释如下。假设有 n 种商品、n 个产业，以及 n 种可用于生产这些商品的技术。$\mathcal{A}$ 中的元素 a_{ijk} 和 $\mathcal{B}$ 中的元素 b_{ijk} 分别表示第 j 个产业采用第 k 种技术时所使用的第 i 种商品的投入量和产出量。因此，(C3′)表明该技术足以使每种商品都产生盈余。此外，(C1′)和(C2′)意味着每个产业采用的每种技术都需要直接或间接地使用每种商品。另外，(C4′)意味着不存在净联产品。

为简单起见，我们将满足条件 (C1′) – (C4′) 的张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 称为“广义 $\mathcal{M}$-张量对”，下文均采用此称呼。

为了证明 Perron-Frobenius 理论在广义 $\mathcal{M}$-张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 中的推广，我们进一步给出 $\mathcal{M}$-张量的一些性质。

首先，我们介绍 $\mathcal{M}$-张量的定义。若张量 $\mathcal{D} = (d_{i_1 \ldots i_m}) \in T_{m,\,n}$ 的元素满足以下条件，则称其为对角张量：

$$d_{i_1 \ldots i_m} = \begin{cases} d_{i \ldots i}, & \text{if } (i_1, \ldots, i_m) = (i, \ldots, i) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \tag{2.1}$$

条目 $d_{i \ldots i}$ $(i \in [n])$ 称为对角元，其余称为非对角元。If $d_{i \ldots i} = 1$ 若对 $i \in [n]$，则 $\mathcal{D}$ 称为单位张量。

实张量 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{Z}$–张量，当且仅当其所有非对角元均为非正数；这等价于 $\mathcal{A} = s\mathcal{I} - \mathcal{B}$，其中 $\mathcal{I}$ 是单位张量，$\mathcal{B}$ 是非负张量。若一个 $\mathcal{Z}$– 张量 $\mathcal{A} = s\mathcal{I} - \mathcal{B}(\mathcal{B} \geq 0)$ 满足 $s \geq \rho(\mathcal{B})$，则称其为 $\mathcal{M}$– 张量；若 $s > \rho(\mathcal{B})$，则称其为非奇异 $\mathcal{M}$–张量。

综合 [18, 55] 和 [21, 第 81–96],页中的结果，非奇异 $\mathcal{M}$–张量有数十种等价定义。这里只列出本文将用到的几种，如下所示。

命题 2.1 若 $\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{Z}$–张量，则以下条件等价:

(1) $\mathcal{A}$ 是非奇异 $\mathcal{M}$–张量。(2) 存在 $\mathbf{x} > 0$ 满足 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} > 0$.(3) 存在 $\mathbf{x} \geq 0$ 满足 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} > 0$.

因此，对于广义 $\mathcal{M}$-张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$，$\mathcal{B} - \mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{Z}$-张量，因为对于所有 $(i_2, \ldots, i_m) \neq (i, \ldots, i)$，均有 $b_{ii_2\ldots i_m} \leq a_{ii_2\ldots i_m}$。此外，命题 2.1 表明，$\mathcal{B} - \mathcal{A}$ 是一个非奇异 $\mathcal{M}$-张量，因为 (C3′) 可改写为 $(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1} > 0$，其中 $\mathbf{x}$ 是一个正向量。因此，我们可以记作 $\mathcal{B} - \mathcal{A} = s\mathcal{I} - \mathcal{C}$，其中 $\mathcal{I}$ 是单位张量，$\mathcal{C}$ 是非负的，且 $s > \rho(\mathcal{C})$。

设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 $\mathbb{C}^{n\times\cdots\times n}$中的两个 m阶张量。若存在某个 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}_1$,2，使得 $\det(\beta\mathcal{A} - \alpha\mathcal{B}) \neq 0$，则称张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 为正则张量对。反之，若对所有 $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}_1$,2，均有 $\det(\beta\mathcal{A} - \alpha\mathcal{B}) = 0$，则称 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 为奇异张量对。这里，张量行列式的定义见 Qi [28] [48, 第 23]页；$\mathbb{C}_1$,2 表示一个射影平面，其中，若存在非零标量 $\gamma \in \mathbb{C}$，使得 $(\alpha_1, \beta_1) = (\gamma\alpha_2, \gamma\beta_2)$，则认为 (α_1, β_1) 和 (α_2, β_2) 是同一个点。若一个张量对是奇异的，则任意非零复数都是它的特征值。因此，在继续证明 Perron-Frobenius 理论对广义 $\mathcal{M}$-张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 的推广之前，我们应指出 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是一个正则张量对。事实上，若 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是奇异张量对，则 $\det(\mathcal{B} - \mathcal{A}) = 0$。根据[28, 定理 3.1]，，存在一个向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n \backslash \{\mathbf{0}\}$，使得 $(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1} = 0$。这意味着 $(s\mathcal{I} - \mathcal{C})\mathbf{x}^{m-1} = 0$，或者等价地，$\mathcal{C}\mathbf{x}^{m-1} = s\mathbf{x}^{[m-1]}$。因此，$s$ 是 $\mathcal{C}$的一个特征值，这与条件 $s > \rho(\mathcal{C})$ 矛盾。所以 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 是一个正则张量对。

对于任意张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$，$(s, \mathbf{x})$ 是张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B} - \mathcal{A})$ 的一个特征对，当且仅当 $(\frac{s}{1+s}, \mathbf{x})$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 的一个特征对。因此，我们可以考虑特征值问题 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} = s(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}$，而不是$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} = \lambda\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}$。稍后我们将证明，在适当条件下，第一个问题的正解必然存在。我们在下面的引理中总结这两个特征值问题之间的关系。

引理 2.1 对于张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$，记 $\mathcal{C} = \mathcal{B} - \mathcal{A}$。设 s 是张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ 的一个广义特征值，则 $\lambda = \frac{s}{1+s}$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 的一个广义特征值。λ 与 s 之间的关系可描述如下。

(1) $s \geq 0$ 当且仅当 $\lambda \in [0, 1)$；(2) $-1 \neq s < 0$ 当且仅当 $\lambda \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$；(3) $s = -1$ 当且仅当 $\lambda = \infty$；(4) s 是复数且 $\mathrm{Im}(s) \neq 0$，当且仅当 λ 是复数且 $\mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$，其中 $\mathrm{Im}(z)$ 表示复数 z 的虚部。

现在，我们可以将 Perron-Frobenius 理论推广到广义 $\mathcal{M}$-张量对的情形。首先，我们证明广义特征值问题 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} = s(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}$ 存在一个非负解 $(s, \mathbf{x})$。我们需要以下关于 $\mathcal{M}$-张量方程的引理。

引理 2.2 [20, 定理 3.2][21, 定理 6.3] 如果 $\mathcal{T}$ 是非奇异 $\mathcal{M}$–张量，那么对于任意正向量 $\mathbf{b}$，多线性方程组 $\mathcal{T}\mathbf{x}^{m-1} = \mathbf{b}$ 存在唯一正解。

Lemma 2.3 设 $\mathcal{T}$ 是非奇异 $\mathcal{M}$-张量。若 $\mathcal{T}\mathbf{x}^{m-1} \geq \mathcal{T}\mathbf{y}^{m-1} > 0$，则有 $\mathbf{x} \geq \mathbf{y} > 0$.

证明。 根据定义，我们可以记作 $\mathcal{T} = \mu\mathcal{I} - \mathcal{N}$，其中 $\mathcal{N}$是一个非负张量，且 $\mu > \rho(\mathcal{N})$。记 $\mathcal{T}\mathbf{x}^{m-1} = \mathbf{b}$ 以及 $\mathcal{T}\mathbf{y}^{m-1} = \mathbf{c}$。由引理 2.2，有 $\mathbf{x} > 0$ 且 根据 [20, 页702],迭代

$$\mathbf{x}_k = (\mu^{-1}\mathcal{N}\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} + \mu^{-1}\mathbf{b})^{[1/(m-1)]},\ k = 1, 2, \ldots$$

收敛到 $(\mu\mathcal{I} - \mathcal{N})\mathbf{x}^{m-1} = \mathbf{b} > 0$ 的唯一正解。对于 $(\mu\mathcal{I} - \mathcal{N})\mathbf{y}^{m-1} = \mathbf{c} > 0$，同样如此。如果我们令 $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$,，那么

$$\mathbf{x}_1 = (\mu^{-1}\mathcal{N}\mathbf{x}_0^{m-1} + \mu^{-1}\mathbf{b})^{[1/(m-1)]} \geq (\mu^{-1}\mathcal{N}\mathbf{y}_0^{m-1} + \mu^{-1}\mathbf{c})^{[1/(m-1)]} = y_1.$$

由归纳法可知，对于所有 $k = 1$、2、.....，$\mathbf{x}_k \geq \mathbf{y}_k$ 均成立。因此，$\mathbf{x} = \lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k \geq \lim_{k\to\infty}\mathbf{y}_k = \mathbf{y}$.□

定理 2.1 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对，则张量对 $(\mathcal{A},\mathcal{B}-\mathcal{A})$ 存在一个正特征对 $(s,\mathbf{x}_*)$。

证明。记 $\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} \geq 0\}$ 和 $\mathbb{R}^n_{++} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{x} > 0\}$。定义算子 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})^{-1}_{++}$: $\mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$ 为 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})^{-1}_{++}\mathbf{b} = \mathbf{x}$，其中 $\mathbf{x}$ 是方程 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1} = \mathbf{b}$ 的唯一正解。根据引理 2.2，$\mathbf{x}$ 存在且唯一，因为 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})$ 是一个非奇异 $\mathcal{M}$– 张量，因此 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})^{-1}_{++}$ 定义良好。$(\mathcal{B}-\mathcal{A})^{-1}_{++}$ 的连续性可由多项式根关于系数的连续性推出。

定义算子 F: $\mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$，使得 $F(\mathbf{x}) = (\mathcal{B}-\mathcal{A})^{-1}_{++}(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})$。容易验证，$F$是齐次的，也就是说，对于任意 $t > 0$和 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_{++}$，$F(t\mathbf{x}) = (\mathcal{B}-\mathcal{A})^{-1}_{++}\mathcal{A}(t\mathbf{x})^{m-1} = t(\mathcal{B}-\mathcal{A})^{-1}_{++}(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}) = tF(\mathbf{x})$。此外，根据引理 2.3，$F$是单调函数。参照 [25],，定义 F的关联图 $G(F)$：这是一个顶点为 $1,\ldots,n$ 的有向图；当且仅当 $\lim_{u\to\infty}(F(\mathbf{u}^{\{j\}}))_i = \infty$ 时，存在一条从 i 到 j 的边，其中 $\mathbf{u}^{\{j\}}$ 由 $(\mathbf{u}^{\{j\}})_i = u > 0$ 定义，适用于 $i = j$ 且 $(\mathbf{u}^{\{j\}})_i = 1$ 对于 $i \neq j$。定义算子 $F_{\mathcal{A}}$： $\mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}^n_{++}$，其定义为 $F_{\mathcal{A}}(\mathbf{x}) = \left(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}\right)^{[1/(m-1)]}$，则 $F_{\mathcal{A}}$是齐次且单调的。$F_{\mathcal{A}}$的关联图 $G(F_{\mathcal{A}})$ 以与 $G(F)$ 相同的方式定义。根据 [20, 定理 3.2]，$(\mathcal{A}\mathbf{u}^{m-1}_{\{j\}})$ 的证明，$\left((\mathcal{B}-\mathcal{A})^{-1}_{++}(\mathcal{A}\mathbf{u}^{m-1}_{\{j\}})\right)_i \to \infty$。因此，$F_{\mathcal{A}}$ 的关联图 $G(F_{\mathcal{A}})$ 是 F的关联图 $G(F)$ 的生成子图。由 [23, 引理 3.2] 和条件（C2′），$G(F_{\mathcal{A}})$是强连通的，因而 $G(F)$ 也是强连通的。利用 [25, 定理 2]，F 在 $\mathbb{R}^n_{++}$ 中有一个对应于正特征值的特征向量。也就是说，存在 $\mathbf{x}_* \in \mathbb{R}^n_{++}$和 $s > 0$，使得 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})^{-1}_{++}(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}_*) = s^{1/(m-1)}\mathbf{x}_*$，或者等价地，$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}_* = s(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}_*$。□

根据引理 2.2 和 2.3，我们可以证明任意广义 $\mathcal{M}$-张量对的正特征值唯一。

注 2.1 我们需要假设张量 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是半对称的，即 $\mathcal{A}_{ii_2\ldots i_m} = \mathcal{A}_{ij_2\ldots j_m}, \mathcal{B}_{ii_2\ldots i_m} = \mathcal{B}_{ij_2\ldots j_m}, 1 \leq i \leq n, j_2\ldots j_m$ 是 $i_2\ldots i_m, 1 \leq i_2,\ldots,i_m \leq n$ 的任意排列，这样我们就可以计算偏导数 $D\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}, D\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}$，并将结果写成简单的形式。对于任意张量 $\mathcal{A}$，我们可以通过定义 $\overline{\mathcal{A}}$ 为如下形式，得到一个半对称张量 $\overline{\mathcal{A}}$，使得 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} = \overline{\mathcal{A}}\mathbf{x}^{m-1}$,

$$\overline{a}_{i_1 i_2\ldots i_m} = \frac{1}{(m-1)!}\sum_{j_2\ldots j_m} a_{i_1 j_2\ldots j_m}, \tag{2.2}$$

其中 $j_2\ldots j_m$是 $i_2\ldots i_m$的任意排列。注意，本文中的张量 $\mathcal{A}$和 $\mathcal{B}$总是直接或间接地通过形如 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}$和 $\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}$的项参与讨论，因此除非另有说明，我们可以直接假设它们是半对称的。

定理 2.2 设 $(s,\mathbf{x}_*)$ 是定理 2.1中的正特征对，则 s 是张量对 $(\mathcal{A},\mathcal{B}-\mathcal{A})$ 唯一的具有非负广义特征向量的非负广义特征值，并且$\mathbf{x}_*$ 是与 s对应的非负广义特征向量，且在相差一个乘法常数的意义下唯一。

证明。首先，我们证明 s 是唯一的。设 $\mathcal{A}\mathbf{y}^{m-1}_* = t(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}^{m-1}_*$，其中 $t > 0$ 且 $\mathbf{y}_* > 0$。令 $\sigma = \max\{\alpha : \mathbf{x}_* - \alpha\mathbf{y}_* \geq 0\}$，则 $\sigma > 0$ 且

$$s(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}_* = \mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}_* \geq \mathcal{A}(\sigma\mathbf{y}_*)^{m-1} = \sigma^{m-1}t(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}^{m-1}_* > 0.$$

由引理 2.3，这意味着 $\mathbf{x}_* \geq \sigma(t/s)^{1/(m-1)}\mathbf{y}_*$，因此 $t \leq s$。若交换 s 和 t，$\mathbf{x}_*$ 和$\mathbf{y}_*$，则有 $s \leq t$。因此 $s = t$，即 s 唯一。

接下来，我们证明 $\mathbf{x}_*$ 在相差一个乘法常数的意义下是唯一的。考虑矩阵 $D = DF(\mathbf{x}_*) = [\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}_*)]^n_{i,j=1}$。记 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}^{m-1} = \mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}_*$，由反函数定理可推出表达式 $DF(\mathbf{x}_*) = \left[(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}^{m-2}\right]^{-1}\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-2}_*$。容易看出，$(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}^{m-2}$是一个非奇异 M-矩阵。与[23, 定理 3.3], 中的分析类似，有向图 $G(F)$ 是有向图 $G(D)$ 的生成子图，后者由 D 的非负元素诱导。因此 $G(D)$ 是强连通的，根据 [53, 定理 1]，D 是不可约的。因此，由 [23, 定理 2.2] [45, 定理 2.5], ，特征向量 $\mathbf{x}_*$ 是唯一的。□

定理 2.1 和 2.2 构成了张量对版本的 Perron-Frobenius 理论，它是构建我们的算法并证明其收敛性的核心。基于上述结果，我们可以推导出另一个有用的结论，该结论类似于 Collatz-Wielandt 定理。

定理 2.3 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对。则对于任意满足 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}>0$ 的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$，我们有

$$\min_i \frac{(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_i}{((\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1})_i} \le s \le \max_i \frac{(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_i}{((\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1})_i}, \tag{2.3}$$

其中，s 是张量对（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}-\mathcal{A}$）对应于正广义特征向量的唯一正广义特征值。

证明。记 $\mathbf{x}_*$ 为对应于 s的唯一正特征向量。首先，我们证明，如果 $t\ge 0$和非零向量 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+$ 满足 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}\ge t($ $\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}>0$，则 $t\le s$。

令 $\sigma=\max\{\alpha:\mathbf{x}_*-\alpha\mathbf{x}\ge 0\}$，则 $\sigma>0$。我们有

$$s(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_*^{m-1}=\mathcal{A}\mathbf{x}_*^{m-1}\ge\sigma^{m-1}\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}\ge\sigma^{m-1}t(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}>0.$$

这意味着 $\mathbf{x}_*\ge(t/s)^{1/(m-1)}\sigma\mathbf{x}$，因此 $t\le s$。在上述结果中令 $\min(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})\big(\ \mathcal{B}-\mathcal{A}\ \ ()\mathbf{x}^{m-1}\big)_i$，即可立即得到式（2.3）的左侧。

另一侧的证明类似。 □

由关系 $\lambda=\frac{s}{1+s}$，可以立即得到以下推论。

推论 2.1 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对。那么对于任意满足 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}>0$ 的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n_+\backslash\{0\}$，我们有

$$\min_i \frac{(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_i}{(\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1})_i} \le \lambda \le \max_i \frac{(\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1})_i}{(\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1})_i},$$

其中，λ 是张量对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 对应于正广义特征向量的唯一正广义特征值。

在提出用于计算广义 $\mathcal{M}$-张量对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 的 Perron 对的 Noda 迭代方法之前，我们需要证明，对于任意 $\mu\in(\lambda,1]$，张量 $\mu\mathcal{B}-\mathcal{A}$ 都是一个非奇异 $\mathcal{M}$-张量，其中 λ 是 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 的唯一正广义特征值。

定理 2.4 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对。假设 $\lambda=\frac{s}{s+1}$，其中 s 是张量对 $(\mathcal{A},\mathcal{B}-\mathcal{A})$ 对应于正广义特征向量的唯一正广义特征值。那么对于任意 $\mu\in(\lambda,1]$，$\mu\mathcal{B}-\mathcal{A}$ 是一个非奇异 $\mathcal{M}$-张量。

证明。由于 $s>0$，我们有 $0<\lambda<1$。因此 $\mu\mathcal{B}-\mathcal{A}$ 是一个 $\mathcal{Z}$-张量，符合条件（C4′）。根据定理 2.1 和 2.2，存在一个向量 $\mathbf{x}>0$ 使得（$\lambda\mathcal{B}-\mathcal{A}$）$\mathbf{x}^{m-1}=0$，因此$\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}=\frac{1}{\lambda}\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}>0$，因为 $\mathcal{A}$ 是弱不可约非负张量。此外，由于 $\mu>\lambda$，我们有

$$(\mu\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}=(\mu-\lambda)\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}+(\lambda\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}=(\mu-\lambda)\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}>0.$$

根据命题 2.1，$\mu\mathcal{B}-\mathcal{A}$ 是一个非奇异 $\mathcal{M}$-张量。 □

注 2.2 满足条件 (C1′) –(C4′) 的张量对可见于有向超图的广义特征值问题中。考虑一个强连通的有向一致超图 $H=(V,E)$。假设 H是一个 k-图，这意味着对于弧集 $E=\{e_1,\dots,e_m\}$中的每条弧 e_i，都有 $|e_i|=k$。记 $\mathcal{A}$ 为 H 的邻接张量，记 $\mathcal{B}$ 为符号拉普拉斯张量 $\mathcal{D}+\mathcal{A}$。有向 k-图 H的邻接张量 $\mathcal{A}$定义为一个 k 阶、n 维的张量，其 $(i_1,\dots,i_k)$ 项为

$$a_{i_1\dots i_k}=\begin{cases}\dfrac{1}{(k-1)!} & \text{if } (i_1,\dots,i_k)=e\in E \text{ and } i_1 \text{ is the tail of } e,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

若顶点 i_1 位于弧 e 的第一个位置，即 $e(i_1,i_2,\dots,i_k)$ 中的 $e=$，则称其为该弧的尾端点。对所有 $i\in[n]$，对角张量 $\mathcal{D}$ 定义为 $d_{i\dots i}=d_i^+$，即顶点 i 的出度。顶点 $i\in V$ 的出度定义为 $d_i^+=|E_i^+|$，其中 $E_i^+=\{e\in E:\ i\ \text{是}\ e\}$ 的尾端点。关于有向一致超图的更详细定义，读者可参阅 [48, 第 163] 页。根据 [48, 定理 4.59]，$\mathcal{A}$ 是弱不可约非负张量。此外，$\mathcal{B}-\mathcal{A}=\mathcal{D}$ 是正对角张量，因此是一个 $\mathcal{M}$-张量。广义张量特征值问题 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}=\lambda\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}$ 可视为图嵌入问题 [5, 6]，的高阶推广，类似于 [50] 中讨论的矩阵情形。此外，若 $\mathcal{B}=\mathcal{E}$，则单位张量满足对所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$[8], 均有 $\mathcal{E}\mathbf{x}^{m-1}=\|\mathbf{x}\|^{m-2}\mathbf{x}$，此时广义特征值问题 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}=\lambda\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}$ 等价于 $Z-$特征值问题[48, 第 26], 页，该问题可用于计算拉普拉斯张量 [14] 的菲德勒向量。

3 广义张量特征值问题的 Noda 迭代

起源 al NI 是为不可约非负矩阵的 Perron 对而设计的，其迭代过程为 [4 4]:

(1) $\mathrm{y}_k = (\rho_{k-1}I - C)^{-1}\mathrm{x}_{k-1}$;
(2) $\rho_k = \rho_{k-1} - \min_{\mathbf{x}_{k-1}} \mathbf{y}_k$;
(3) $\mathrm{x}_k = \mathrm{y}_k/\|\mathrm{y}_k\|$。

基于定理 1.1，文献 [13] 提出了一种修正 Noda 迭代（MNI），用于计算满足条件 (C1) – (C4) 的矩阵对 (A, B) 的 Perron 对。与上述步骤 (1) 和步骤 (2) 类似，该方法通过 $(\rho_k B - A)\mathrm{y}_{k+1} = (B - A)\mathrm{x}_k$ 更新 y_{k+1}，并通过 $\rho_{k+1} = \rho_k - (1-\rho_k)\frac{\tau_k}{1-\tau_k}$ 更新 ρ_{k+1}，其中 $\tau_k = \min \mathbf{x}_k\mathbf{y}^{k+1}$。基于 Collatz-Wielandt 定理，文献 [13] 还提出了广义 Noda 迭代（GNI）。与 MNI 相比，它通过 $(\rho_k B - A)\mathrm{y}_{k+1} = A\mathrm{x}_k$ 更新 y_{k+1}，并通过 $\rho_{k+1} = \rho_k (1 - \min {}^{A}\mathbf{x}_A \quad {}^{k}\mathbf{y}_{k+1} + A\mathbf{x}_k)$ 更新 ρ_{k+1}。如文献 [13], 所述，GNI 的一个优点是我们总可以直接选择 $\rho_0 = 1$, 而在 MNI 中， ρ_0 必须小于 1。否则，对于所有 k， $\rho_k = 1$ ，MNI 将无法收敛。

3.1 修正张量 Noda 迭代（MTNI）

对于广义 $\mathcal{M}$-张量对（$\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$），根据定理 2.1 和 2.2，其唯一的正广义特征对可通过求解问题 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} = s(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}$得到。类似于 MNI，我们可以构造如下迭代格式:

$$\left[s_{k-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A}) - \mathcal{A}\right]\mathbf{z}_k^{m-1} = (\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}. \tag{3.1}$$

记 $\mathbf{y}_k = (1 + s_{k-1})^{1/(m-1)}\mathbf{z}_k$ 以及 $\rho_{k-1} = s_{k-1}/(1 + s_{k-1})$，则（3.1）变为

$$(\rho_{k-1}\,\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} = (\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}. \tag{3.2}$$

根据引理 2.2 和定理 2.4，如果我们能确保（$\mathcal{B} - \mathcal{A}$） $\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} > 0$ 且 $\rho_{k-1} > \lambda$，其中 λ 是张量对（$\mathcal{A}$， $\mathcal{B}$）的唯一正广义特征值，那么我们就能找到唯一的$\mathbf{y}_k > 0$和（$\mathcal{B} - \mathcal{A}$） $\mathbf{y}_k^{m-1} = \left[(\mathcal{B} - \frac{1}{\rho_{k-1}}\mathcal{A}) + \frac{1-\rho_{k-1}}{\rho_{k-1}}\mathcal{A}\right]\mathbf{y}_k^{m-1} > 0$。

根据定理 2.3，我们可以采用与原始 NI 的步骤 (2) 类似的方式更新 s_k ，即 $s_k = \max \mathcal{A}\mathbf{x}_k^{m-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1} = \max \mathcal{A}\mathbf{z}_k^{m-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{z}_k^{m-1} = s_{k-1} - \tau_{k-1}$，其中 $\tau_{k-1} = \min (\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{z}_k^{m-1}$。由于 $\rho_k = s_k/(1 + s_k)$，我们可以通过以下方式自适应地更新 ρ_k

$$\rho_k = \frac{s_{k-1} - \tau_{k-1}}{1 + (s_{k-1} - \tau_{k-1})}. \tag{3.3}$$

方程 (3.3) 可改写为

$$\rho_k = \frac{s_{k-1}/(1 + s_{k-1}) - \tau_{k-1}/(1 + s_{k-1})}{1 - \tau_{k-1}/(1 + s_{k-1})} = \frac{\rho_{k-1} - (1 - \rho_{k-1})\tau_{k-1}}{1 - (1 - \rho_{k-1})\tau_{k-1}} = \rho_{k-1} - \frac{(1 - \rho_{k-1})^2\tau_{k-1}}{1 - (1 - \rho_{k-1})\tau_{k-1}}.$$

由于 $\mathrm{y}_k = (1 + s_{k-1})^{1/(m-1)}\mathrm{z}_k$，若记

$$\tilde{\tau}_{k-1} = \min \frac{(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}}{(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1}} = (1 - \rho_{k-1})\min \frac{(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}}{(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{z}_k^{m-1}} = (1 - \rho_{k-1})\tau_{k-1},$$

then

$$\rho_k = \rho_{k-1} - \frac{(1 - \rho_{k-1})\tilde{\tau}_{k-1}}{1 - \tilde{\tau}_{k-1}}. \tag{3.4}$$

由于 $(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} > 0$ 且 $(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{z}_k^{m-1} > 0$，可得 $s_k < s_{k-1}$。另一方面，$s_{k-1} = {}^{s_{k-1}}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{z}_k^{m-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{z}_k^{m-1}$ 蕴含 $s_k = \max \mathcal{A}\mathbf{z}_k^{m-1}(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{z}_k^{m-1} \geq s = \lambda/(1 - \lambda) > 0$，其中 λ 是张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 的唯一正特征值。我们将上述内容总结于算法 1 中。

在算法 1中，初始化部分旨在保证 $(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_0^{m-1} > 0$。如果我们只初始化$\mathbf{x}_0 > 0$ 而不执行步骤 1，那么 $(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_0^{m-1}$可能不是正的。反例见 [21,

算法 1 修正张量 Noda 迭代 (MTNI)

1: Given $\mathbf{b} > 0$, solve $(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_0^{m-1} = \mathbf{b}$
2: Given $\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_0\|}$, $\rho_0 = \max \frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_0^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_0^{m-1}}$, tol$> 0$, $\varepsilon > 0$
3: **for** $k = 1, 2, 3, \ldots$ **do**
4: Solve $(\rho_{k-1}\,\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} = (\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}$
5: $\tau_{k-1} = \min \frac{(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}}{(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1}}$
6: $\rho_k = (1 + \varepsilon)(\rho_{k-1} - \frac{(1-\rho_{k-1})\tau_{k-1}}{1-\tau_{k-1}})$
7: $\mathbf{x}_k = \frac{\mathbf{y}_k}{\|\mathbf{y}_k\|}$
8: $\bar{s}_k = \max \frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1}}$
9: $\bar{\rho}_k = \bar{s}_k/(1 + \bar{s}_k)$
10: $\underline{s}_k = \min \frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{(\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1}}$
11: $\underline{\rho}_k = \underline{s}_k/(1 + \underline{s}_k)$
12: **if** $|\bar{\rho}_k - \underline{\rho}_k|/\bar{\rho}_k <$tol **then**
13: break
14: Output: $\lambda \leftarrow \bar{\rho}_k$, $\mathbf{x}_* \leftarrow \mathbf{x}_k$

第 93] 页。在算法 1 的步骤 4 中，我们使用雅可比迭代求解 $\mathcal{M}$-张量方程，这可以保证解 $\mathbf{y}_k$ 是 $\mathcal{M}$-张量方程的唯一正解。注意， $\mathcal{D}\mathbf{x}^{m-1} = \mathbf{b}$ 的解为 $x_i = (b_i/d_{i\ldots i})^{1/(m-1)}$ ，其中 $\mathcal{D}$ 是正对角张量，且 $\mathbf{b}$ 是正向量。或者，我们也可以使用高斯-赛德尔迭代或 SOR 迭代。有关 $\mathcal{M}$-张量方程的这些迭代方法的详情见 [21, 第 108-110]页。

在算法 1的第 6 步中，我们在 $\varepsilon > 0$ 更新中引入了一个参数 ρ_k。此参数可避免ρ_k 趋近于特征值 λ。否则，系数张量 $(\rho_k\,\mathcal{B} - \mathcal{A})$ 会逐渐趋近于奇异 $\mathcal{M}$-张量，因此在第 4 步中求解方程会变得越来越困难。加入参数 ε 可以减少求解第 4 步中方程所需的迭代步数。

3.2 Ex行为与非精确广义张量 Noda 迭代 (GTNI, IGTNI)

根据定理 2.3 和推论2.1，我们可以为广义$\mathcal{M}$-张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$构造类似于 GNI 的广义 Noda 迭代，如算法 2所示。

算法 2 广义张量 Noda 迭代 (GTNI)

1: 给定 $\mathbf{x}_0 > 0$, $\|\mathbf{x}_0\| = 1$, $\rho_0 = 1$, 容差> 0, 和 $\varepsilon > 0$
2: 对于 $k = 1, 2, 3, \cdots$ 执行
3: 计算 $(\rho_{k-1}\,\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} = \mathcal{A}\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}$
计算 $\rho_k = (1 + \varepsilon_k)\rho_{k-1}\left(1 - \text{最小化}_{\mathcal{A}} \frac{\mathcal{A}^{m-1}_{k-1}\,\mathbf{x}\,\mathbf{y}_k^{m-1} + \mathcal{A}\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}}{}\right)$
4:
5: 将向量 $\mathbf{y}_k$ 归一化: $\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k/\|\mathbf{y}_k\|$
6: 计算 $\bar{\rho}_k = \text{最大值}_i \frac{\mathcal{A}\text{乘以}^{m-1}}{\mathcal{B}\text{乘以}_k^{m-1}}$
7: 计算 $\underline{\rho}_k = \text{分钟}_i \frac{\mathcal{A}\text{乘以}^{m-1}_k}{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}$
8: 如果 $|\bar{\rho}_k - \underline{\rho}_k|/\bar{\rho}_k <$容差然后
9: 中断
10: 输出: $\lambda \leftarrow \rho_k$ and $\mathbf{x}_* \leftarrow \mathbf{x}_k$.

Insp所需的 [26], 我们可以计算一个近似解 $\mathbf{y}_k$ 在算法 2 使得 t

$$(\rho_{k-1}\,\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} = \mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} + \mathbf{f}_k,$$

其中 $\mathbf{f}_k$ 是残差向量，其大小由内层容差界定。因此

$$\rho_k = (1+\varepsilon_k)\max\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}} = (1+\varepsilon_k)\rho_{k-1}\max\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{y}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{y}_k^{m-1}}$$
$$= (1+\varepsilon_k)\rho_{k-1}\left(1-\min\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}+\mathbf{f}_k}{\mathcal{A}\,\mathbf{y}_k^{m-1}+\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}+\mathbf{f}_k}\right).$$

因此，我们得到一种针对张量的非精确广义 Noda 迭代。我们在算法 3 中总结了该方法。注 3.1 在算法 2 和 3 的第 4 步中，ε_k 的选取由以下折半过程确定：首先，令 $\varepsilon_k = 1$ 并检查是否

$$(1+\varepsilon_k)\left(1-\min\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}+\mathbf{f}_k}{\mathcal{A}\,\mathbf{y}_k^{m-1}+\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}+\mathbf{f}_k}\right)\le 1. \tag{3.5}$$

否则，我们将 ε_k 更新为 $\varepsilon_k \leftarrow \varepsilon_k/2$，直至满足（3.5）。

算法 3 非精确广义张量 Noda 迭代（IGTNI）

Given $\mathbf{x}_0 > 0$, $\|\mathbf{x}_0\| = 1$, $\rho_0 = 1$, tol> 0, and $\varepsilon > 0$
for $k = 1, 2, 3, \ldots$ **do**
  Compute $(\rho_{k-1}\,\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} = \mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} + \mathbf{f}_k$, where $|\mathbf{f}_k| \le \beta_k\,\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}, \beta_k \in [0,1)$,
  Compute $\rho_k = (1+\varepsilon_k)\rho_{k-1}\left(1-\min\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}+\mathbf{f}_k}{\mathcal{A}\,\mathbf{y}_k^{m-1}+\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}+\mathbf{f}_k}\right)$
  Normalize the vector $\mathbf{y}_k$: $\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k/\|\mathbf{y}_k\|$
  Compute $\overline{\rho}_k = \max_i \frac{\mathcal{A}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}$
  Compute $\underline{\rho}_k = \min_i \frac{\mathcal{A}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}$
  if $|\overline{\rho}_k - \underline{\rho}_k|/\overline{\rho}_k <$tol **then**
    break
Output: $\lambda \leftarrow \rho_k$ and $\mathbf{x}_* \leftarrow \mathbf{x}_k$.

3.3 广义 Newton-Noda 迭代（GNNI）

如果我们选择 Newton 方法来求解算法 1 第 4 步中的多线性方程，则可以直接令 $\varepsilon_k = 0$。受 [27, 39, 38], 的启发，我们构造如下针对广义$\mathcal{M}$-张量对（$\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$）的 Newton-Noda 迭代方法。

为了应用 Newton 方法，我们定义函数 $\mathbf{r}$: $\mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ 和 $\mathbf{f}$: $\mathbb{R}_+^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$，如下

$$\mathbf{r}(\mathbf{x},\rho) = (\rho\,\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1},\ \mathbf{f}(\mathbf{x},\rho) = \begin{bmatrix} -\,\mathbf{r}(\mathbf{x},\rho) \\ \frac{1}{2}(1-\mathbf{x}^\top\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \tag{3.6}$$

我们考虑使用 Newton法求解 f(x ρ) $= 0$。f(x ρ) 的雅可比矩阵为

$$\mathbf{J}\mathbf{f}(\mathbf{x},\rho) = -\begin{bmatrix} \mathbf{J}_\mathbf{x}\mathbf{r}(\mathbf{x},\rho) & \mathcal{B}\,\mathbf{x}^{m-1} \\ \mathbf{x}^\top & 0 \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

其中 J$_\mathbf{x}$r (x ρ) 是 r(x ρ) 关于 x 的偏导数矩阵。直接计算得 es

$$\mathbf{J}_\mathbf{x}\mathbf{r}(\mathbf{x},\rho) = (m-1)(\rho\,\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}^{m-2}, \tag{3.8}$$

我们将在下文推导求解 f(x ρ) $= 0$ 的 Newton法。给定一个近似值 ($\hat{}$x$_k$, $\hat{}\rho_k$)，Newton法按如下方式生成下一个近似值 ($\hat{}$x$_{k+1}$, $\hat{}\rho_{k+1}$):

$$-\begin{bmatrix} \mathbf{J}_\mathbf{x}\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}_k,\hat{\rho}_k) & \mathcal{B}\,\hat{\mathbf{x}}_k^{m-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k^\top & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{d}_k \\ \delta_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}_k,\hat{\rho}_k) \\ \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{x}}_k^\top\hat{\mathbf{x}}_k - 1) \end{bmatrix}, \tag{3.9a}$$
$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{d}_k, \tag{3.9b}$$
$$\hat{\rho}_{k+1} = \hat{\rho}_k + \delta_k. \tag{3.9c}$$

在（3.9a）中使用消元法，并假设 $\hat{\mathbf{x}}_k^\top \hat{\mathbf{x}}_k = 1$，可得

$$\delta_k = \frac{-1}{(m-1)\hat{\mathbf{x}}_k^\top \left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\rho}_k)\right)^{-1} \mathcal{B}\hat{\mathbf{x}}_k^{m-1}} = \frac{-1}{(m-1)\hat{\mathbf{x}}_k^\top \hat{\mathbf{w}}_k}, \tag{3.10}$$

其中我们记

$$\hat{\mathbf{w}}_k = \left(\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\hat{\mathbf{x}}_k, \hat{\rho}_k)\right)^{-1} \mathcal{B}\hat{\mathbf{x}}_k^{m-1}. \tag{3.11}$$

然后结合（3.8）进行回代，可得

$$\mathbf{d}_k = \frac{-1}{m-1}\left(\hat{\mathbf{x}}_k - \frac{\hat{\mathbf{w}}_k}{\hat{\mathbf{x}}_k^\top \hat{\mathbf{w}}_k}\right). \tag{3.12}$$

令 $\hat{\mathbf{y}}_k = \hat{\mathbf{w}}_k / \|\hat{\mathbf{w}}_k\|$。由（3.10）和（3.12），有

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_k + \mathbf{d}_k = \frac{1}{m-1}\left((m-2)\hat{\mathbf{x}}_k + \frac{1}{\hat{\mathbf{x}}_k^\top \hat{\mathbf{y}}_k}\hat{\mathbf{y}}_k\right), \tag{3.13a}$$

$$\hat{\rho}_{k+1} = \hat{\rho}_k + \delta_k = \hat{\rho}_k - \frac{1}{(m-1)\hat{\mathbf{x}}_k^\top \hat{\mathbf{y}}_k \|\hat{\mathbf{w}}_k\|}. \tag{3.13b}$$

基于上述讨论，我们提出广义 Newton-Noda 迭代（GNNI），如算法 4所示。

注 3.2 在算法 4的第 7 步中，我们需要适当选择 θ_k，使得 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\,\mathbf{x}_{k+1}^{m-1} > 0$，以确保我们可以对 2.3 定理和推论 2.1 应用于 $\overline{\rho}_{k+1}$、$\underline{\rho}_{k+1}$ 和 $\mathbf{w}_{k+1} > 0$。我们可以通过以下操作实现这一点。

首先，令 $\theta_k = 1$，并检查是否满足 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\,\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1} > 0$。若不满足，则通过 $\theta_k \leftarrow \theta_k/2$ 更新 θ_k，直到 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\,\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1} > 0$ 成立。由于 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\,\mathbf{x}_k^{m-1} > 0$，且多线性算子 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})$ 连续，因此总能实现这一点。

为保证序列 $\{\overline{\rho}_k\}$ 单调递减，我们需要对 θ_k 的选择施加额外限制。我们将在第 4 节中对此进行详细讨论。

根据注 3.2，我们可以证明 $(\rho_k\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-2}$ 是一个非奇异 M-矩阵。

定理 3.1 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对。设 $\{\mathbf{x}_k\}$ 和 $\{\rho_k\}$ 由算法 4生成。则 $(\rho_k\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-2}$ 是一个非奇异 M-矩阵，且 $\mathbf{x}_k > 0$ 对所有 k都成立。

证明。我们对 k 使用归纳法证明这一点。记 $M_k = (\rho_k\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-2}$。首先，考虑 $k=0$。容易看出，根据条件 (C4′)，M_0 是一个 Z-矩阵，且 $M_0\mathbf{x}_0 = (\rho_0\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_0^{m-1} \geq 0$。定义 $J \subseteq [n]$ 为 $J = \{i | (M_0\mathbf{x}_0)_i = 0\}$，并令 $\mathbf{e}_J \in \mathbb{R}^n$ 为满足以下条件的向量：对于所有 $i \in J$，$\mathbf{e}_J$ 的第 i 个元素等于 1，其余元素均为 0。于是，我们可以找到适当的 $\varepsilon > 0$，使得 $M_0(\mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{e}_J) > 0$。因此，$M_0$ 是一个非奇异 M-矩阵。由此可得唯一的 $\mathbf{w}_0 > 0$，进而有 $\tilde{\mathbf{x}}_1 = (m-2)\mathbf{x}_0 + \theta_k\mathbf{w}_k/\|\mathbf{w}_k\| > 0$。

假设结论对 $k-1$ 成立，即 $\rho_{k-1} < 1$，$\mathbf{x}_{k-1} > 0$，且 $(\rho_{k-1}\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-2}$ 是一个非奇异 M-矩阵。通过与上述类似的分析，我们可以得到 $\mathbf{x}_k > 0$。根据注 3.2，我们有 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1} > 0$，因此 $\rho_k = \max\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{x}\mathbf{x}_k^{m-1}} < 1$。然后，通过与上述类似的分析，可以证明 $(\rho_k\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-2}$ 是一个非奇异 M-矩阵，且 $\mathbf{x}_{k+1} > 0$。根据归纳假设，结论对所有 k 都成立。□

3.4 复杂度分析

本节分析我们算法每次迭代的开销。假设张量 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是稠密的，很容易看出，算法 1 至 3 每次迭代的主要开销是求解 $\mathcal{M}$-张量方程。如第 3.1 节所述，我们使用雅可比迭代法求解这些 $\mathcal{M}$-张量方程。记 $\mathcal{M} = \rho_{k-1}\mathcal{B}-\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{D}$ 为对角张量，其对角元素 $d_{i\ldots i}$ 等于 $\rho_{k-1}b_{i\ldots i} - a_{i\ldots i}$。每次内迭代需要进行 3 步计算：首先，计算 $(\mathcal{D}-\mathcal{M})\mathbf{y}_k^{m-1}$。然后计算 $\mathbf{b}_k = (\mathcal{D}-\mathcal{M})\mathbf{y}_k^{m-1} + (\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}$（或 $(\mathcal{D}-\mathcal{M})\mathbf{y}_k^{m-1} + \mathcal{A}\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}$，或 $(\mathcal{D}-\mathcal{M})\mathbf{y}_k^{m-1} + (\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} + \mathbf{f}_k$）。最后，对 $i = 1,\ldots,n$执行运算 $((\mathbf{b}_k)_i/d_{i\ldots i})^{1/(m-1)}$。因此，一次内迭代的开销为 $(m-1)n^m + n + 2n$ 次运算。所以，算法 1 至 3 的开销为 $O(n^m)$。对于算法 4，每次迭代的主要开销由四次乘积组成：$\mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1}^{m-2}$、$\mathcal{B}\mathbf{x}_{k+1}^{m-2}$、$\mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}$ 和 $\mathcal{B}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}$。我们可以通过 $\mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1} = (\mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1}^{m-2})\mathbf{x}$ 计算 $\mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}$，开销为 $2n^2 - n$ 次运算。因此，算法 4 每次迭代的主要开销为 $2(m-1)n^m + 4n^2 - 2n = O(n^m)$。如果 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是对称的，那么算法 1 至 4 每次迭代的开销可降至 $O(n^m/m!)$ [49]。

算法 4 广义 Newton-Noda 迭代（GNNI）

1：给定 b >0，求解 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_0^{m-1}=\mathbf{b}$ 2：给定 $\mathbf{x}_0=\mathbf{x}/\|\mathbf{x}_0\|$, $\rho_0=\max_i \frac{\mathcal{A}\mathbf{x}_0^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{x}_0^{m-1}}$，以及 tol$>0$ 3：对于 $k=0,1,2,\ldots$ 执行

4 $\mathbf{x}_k$ $\rho_k = (m-1)(\rho_k\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-2}$:

5 $\mathbf{x}_k$ ρ_k $k=\mathcal{B}$

计算 J r(x ,) ( )( )x： 求解线性系统 J r(x ,)w $\mathbf{x}_k^{m-1}$ 6：归一化向量 $\mathbf{w}_k$：$\mathbf{y}_k=\mathbf{w}_k/\|\mathbf{w}_k\|$7：计算向量 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}=(m-2)\mathbf{x}_k+\theta_k\mathbf{y}_k$8：归一化向量 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}$：$\mathbf{x}_{k+1}=\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}/\|\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}\|$9：计算 $\overline{\rho}_{k+1}=\max_i \frac{\mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}$ 10：计算 $\underline{\rho}_{k+1}=\min_i \frac{\mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}$ 11：令 $\rho_{k+1}=\overline{\rho}_{k+1}$ 12：如果 $|\overline{\rho}_{k+1}-\underline{\rho}_{k+1}|/\overline{\rho}_{k+1}<$tol，则 13：跳出 14：输出：$\lambda\leftarrow\rho_{k+1}$ 和 $\mathbf{x}_*\leftarrow\mathbf{x}_{k+1}$.

4 收敛性分析

在本节中 我们将证明算法 1、3和4 的收敛性及其收敛速率 .

4.1 MTNI 的收敛性

本节分析算法 1。首先，我们在以下引理中证明序列 $\{(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k, \rho_k)\}$ 的一些性质。

引理 4.1 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对。设序列 $\{(\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_k,\rho_k)\}$ 由算法 1 生成。则对所有 $k\geq 0$，$\mathbf{x}_k>0$, $\mathcal{A}\mathbf{y}_k^{m-1}>0$，且 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1}>0$；序列 $\{\rho_k\}$有下界 $(1+\varepsilon)\lambda$，即对所有 k， $\rho_k\geq(1+\varepsilon)\lambda$。

证明。 由于 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_0^{m-1}>0$，我们有 $(\rho_0\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_1^{m-1}=(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_0^{m-1}>0$。根据定理 2.4，$(\rho_0\mathcal{B}-\mathcal{A})$ 是一个非奇异的 $\mathcal{M}$-张量。因此，根据引理 $\mathbf{y}_1>0$，由引理 2.2可得。然后由 (3.1)，我们有

$$s_0(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_1^{m-1}=\mathcal{A}\mathbf{y}_1^{m-1}+(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_0^{m-1}>0.$$

由于 $s_0=\rho_0/(1-\rho_0)>0$，我们有 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_1^{m-1}>0$。因此 $\tau_0=\min_{(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_0^{m-1}}\frac{}{(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_1^{m-1}}>0$，并且 $s_1=s_0-\tau_0<s_0$。此外，

$$s_1=s_0-\tau_0=\max\frac{\mathcal{A}\mathbf{y}_1^{m-1}}{(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_1^{m-1}}\geq s=\lambda/(1-\lambda)>0.$$

由于函数 $f(t)=t/(1+t)$ 是单调递增的，我们得到

$$\rho_1=(1+\varepsilon)\frac{s_0-\tau_0}{1+(s_0-\tau_0)}\geq(1+\varepsilon)\frac{s}{1+s}=(1+\varepsilon)\lambda.$$

现在假设 $\mathbf{y}_k>0$ and $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1}>0$。那么 $\mathbf{x}_k=\mathbf{y}/\|\mathbf{y}_k\|\geq 0$，并且

$$(\rho_k\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}=(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1}>0.$$

类似地，我们有 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}>0$。因此 $\tau_k=\min_{(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1}}\frac{}{(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}}>0$，并且 $s_{k+1}=s_k-\tau_k\geq s$。也就是说，

$$\tau_{k+1}=(1+\varepsilon)\frac{s_{k+1}}{1+s_{k+1}}\geq(1+\varepsilon)\frac{s}{1+s}=(1+\varepsilon)\lambda.$$

根据归纳法，该命题对任意 k 都成立。 □

我们在下面的引理中证明，序列 $\{\overline{s}_k\}$ 是单调递减的。

引理 4.2 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对。设序列 $\{(\mathbf{x}_k,\mathbf{y}_k,\bar{s}_k)\}$ 由算法 1生成。则序列 $\{\bar{s}_k\}$ 单调递减且有下界 s，即$\bar{s}_1 \geq \cdots \geq \bar{s}_k \geq \bar{s}_{k+1} \geq \cdots \geq s$。

证明。 根据定理 2.3，我们有 $\bar{s}_k \geq s$。根据（3.1）和（3.2），我们有

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} &= \left[\frac{s_{k-1}}{1+s_{k-1}}(\mathcal{B}-\mathcal{A}) - \frac{1}{1+s_{k-1}}\mathcal{A}\right]\mathbf{y}_k^{m-1} \\ &\geq \left[\frac{s_{k-1}}{1+s_{k-1}}(\mathcal{B}-\mathcal{A}) - \frac{1}{1+s_{k-1}}\bar{s}_k(\mathcal{B}-\mathcal{A})\right]\mathbf{y}_k^{m-1} \\ &= \frac{s_{k-1}-\bar{s}_k}{1+s_{k-1}}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1}.\end{aligned}$$

注意到 $s_{k-1}-\bar{s}_k = \min\,(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{z}_k^{m-1} = (1+s_{k-1})\,\min\,(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} > 0$，因此 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} \geq \frac{s_{k-1}-\bar{s}_k}{1+s_{k-1}}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} > 0$。根据引理 2.3，我们可以看到 $\mathbf{x}_{k-1} \geq \left(\frac{s_{k-1}-\bar{s}_k}{1+s_{k-1}}\right)^{1/(m-1)}\mathbf{y}_k > 0$。这意味着 $\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} \geq \frac{s_{k-1}-\bar{s}_k}{1+s_{k-1}}\mathcal{A}\,\mathbf{y}_k^{m-1}$。此外，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} \leq \bar{s}_{k-1}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1} &= \bar{s}_{k-1}(\rho_{k-1}\,\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} \\ &= \bar{s}_{k-1}\left[\frac{s_{k-1}}{1+s_{k-1}}(\mathcal{B}-\mathcal{A}) - \frac{1}{1+s_{k-1}}\mathcal{A}\right]\mathbf{y}_k^{m-1}.\end{aligned}$$

重新整理上述不等式，可得 $\frac{\bar{s}_{k-1}s_{k-1}}{s_{k-1}-\bar{s}_k+\bar{s}_{k-1}}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} \geq \mathcal{A}\mathbf{y}_k^{m-1}$。这意味着$\frac{\bar{s}_{k-1}s_{k-1}}{s_{k-1}-\bar{s}_k+\bar{s}_{k-1}} \geq \bar{s}_k$。由于 $\bar{s}_k = s_{k-1}-(1+s_{k-1})\,\min\,(\mathcal{B}-\mathcal{A})\,\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}\,(\mathcal{B}-\mathcal{A})\,\mathbf{y}_k^{m-1} \leq s_{k-1}$，我们最终得到 $\bar{s}_k \leq \bar{s}_{k-1}$。因此 $\bar{s}_1 \geq \cdots \geq \bar{s}_k \geq \bar{s}_{k+1} \geq \cdots \geq s$。□

注 4.1 （1）根据引理 4.2，我们可以看到 $\{\overline{\rho}_k\}$ 也是单调递减的，并且下界为 λ，因为函数 $f(t) = \frac{t}{1+t}$ 是单调递增的。

(2) 类似地，我们可以证明序列 $\{\underline{s}_k\}$ 单调递增，且有上界 s；序列 $\{\underline{\rho}_k\}$ 也单调递增，且有上界 λ。

根据引理 4.1，我们可以看出存在一个子序列 $\{\mathbf{x}_{k_j}\}$ 收敛到一个非负向量$\mathbf{v}$。下面的引理表明，$\mathbf{v}$ 实际上是正的。

引理 4.3 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对，并设 $\{\mathbf{x}_k\}$ 由算法 1生成。那么，对于任意收敛子序列 $\{\mathbf{x}_{k_j}\} \subseteq \{\mathbf{x}_k\}$，$\lim_{j\to\infty}\mathbf{x}_{k_j} > 0$。

证明。 设 $\mathbf{v} = \lim_{j\to\infty}\mathbf{x}^{k_j}$。根据引理 4.1，$\mathbf{v} \geq 0$。设 S_0 为所有满足条件的指标的集合 i。由于 $v_i = 0$。因为 $\|\mathbf{x}_{k_j}\| = 1$，S_0 是 $\{1,\ldots,n\}$的真子集。记 $|S_0|$ 为 S_0中元素的个数，我们需要证明 $|S_0| = 0$。

由于 $\mathcal{B}-\mathcal{A}$ 是非奇异的 $\mathcal{M}$-张量，存在一个非负张量 $\mathcal{R}$ 和一个标量 $\gamma > \rho(\mathcal{R})$，使得 $\mathcal{B}-\mathcal{A} = \gamma\mathcal{I}-\mathcal{R}$。接着，由 $\overline{s}_{k_j} = \max\left(\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k_j}^{m-1}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k_j}^{m-1}}{}\right)$ 可得 $\overline{s}_{k_j}(\gamma\mathcal{I}-\mathcal{R})\mathbf{x}_{k_j}^{m-1} \geq \mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k_j}^{m-1}$。因此，$\overline{s}_{k_j}\gamma\mathbf{x}_{k_j}^{[m-1]} \geq \overline{s}_{k_j}\mathcal{R}\mathbf{x}_{k_j}^{m-1} + \mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k_j}^{m-1} \geq \mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k_j}^{m-1}$。根据引理 4.2，序列 $\{\overline{s}_{k_j}\}$ 有界。因此，我们有

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\sum\limits_{i_2,\ldots,i_m} a_{ii_2\ldots i_m}x_{k_j,i_2}\cdots x_{k_j,i_m}}{x_{k_j,i}^{m-1}} < \infty.$$

证明的其余部分与 [39, 引理 4] 类似。□

现在我们可以证明序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 的收敛性。

引理 4.4 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是广义 $\mathcal{M}$-张量对，且 $\{\mathbf{x}_k\}$ 由算法 1 生成。对于收敛子列 $\{\mathbf{x}_{k_j}\} \subseteq \{\mathbf{x}_k\}$，假设 $\lim_{j\to\infty}\mathbf{x}^{k_j} = \mathbf{v}$。记 $\mathbf{x}_* > 0$, $\|\mathbf{x}_*\| = 1$ 为张量对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 对应于唯一正特征值 λ 的正特征向量。则 $\mathbf{v} = \mathbf{x}_*$，因此 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_*$。

证明。通过对迭代步骤 $\rho_k = (1+\varepsilon)\left(\rho_{k-1} - (1-\rho_{k-1})_{1-\tau_{k-1}}^{\tau_{k-1}}\right)$ 作简单推导，~~可得~~$\rho_k = (1+\varepsilon)\left(1 - \min\left(\right.\right.$ $\left.\left._{1-\rho_{k-1}}\right)(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathrm{y}_k^{m-1}(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathrm{y}_k^{m-1}-(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathrm{x}_{k-1}^{m-1}\right) = (1+\varepsilon)\max \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}{}_k^{m-1}\mathrm{y}\,\mathrm{y}_k^{m-1} = (1+\varepsilon)\max \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}{}_k^{m-1}\mathrm{x}\,\mathrm{x}_k^{m-1}$，因此序列 $\{\rho_k\}$ 有上界。结合引理 4.2，可知序列 $\{\overline{\rho}_k\}$ 收敛。因此

$$\begin{aligned}\overline{\rho}_k - \overline{\rho}_{k+1} &= \overline{\rho}_k - \rho_k \max \frac{\mathcal{A}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}}{\rho_k\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}} = \overline{\rho}_k \left[1 - (1+\varepsilon)\max \frac{\mathcal{A}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}}{\rho_k\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}}\right] \\ &= \overline{\rho}_k \min \frac{\rho_k\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1} - (1+\varepsilon)\,\mathcal{A}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}}{\rho_k\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}} = \min \frac{\rho_k\,\mathcal{B}\,\mathbf{x}_{k+1}^{m-1} - (1+\varepsilon)\,\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{(1+\varepsilon)\,\mathcal{B}\,\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}} \to 0.\end{aligned}$$

假设 $\mathrm{Lim}_{j\to\infty}\mathrm{x}^{k_j+1} = \mathrm{v} > 0$，由于 $(\mathcal{B}-\mathcal{A})\ \mathrm{x}_{k_j+1}^{m-1} > 0$，我们有

$$\lim_{j\to\infty} \mathcal{B}\,\mathbf{x}_{k_j+1}^{m-1} = \lim_{j\to\infty} (\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k_j+1}^{m-1} + \mathcal{A}\,\mathbf{v}^{m-1} > 0.$$

不失一般性，我们可以假设 $\mathrm{Lim}_{j\to\infty}\rho_{k_j} = \rho > 0$，因此

$$\lim_{j\to\infty} \min \frac{\rho_{k_j}\,\mathcal{B}\,\mathbf{x}_{k_j+1}^{m-1} - (1+\varepsilon)\,\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k_j+1}^{m-1}}{(1+\varepsilon)\,\mathcal{B}\,\mathbf{x}_{k_j+1}^{m-1}} = \min \frac{\rho\,\mathcal{B}\,\mathbf{v}^{m-1} - (1+\varepsilon)\,\mathcal{A}\,\mathbf{v}^{m-1}}{(1+\varepsilon)\,\mathcal{B}\,\mathbf{v}^{m-1}} = 0.$$

类似地，考虑 $\underline{\rho}_k - \underline{\rho}_{k+1}$，我们可以证明 $\max \frac{\rho\,\mathcal{B}\mathrm{v}^{m-1} - (1+\varepsilon)\ \mathcal{A}\mathrm{v}^{m-1}}{(1+\varepsilon)\ \mathcal{B}\mathrm{v}_{m-1}} = 0$。因此，$\rho\,\mathcal{B}\,\mathbf{v}^{m-1} = (1+\varepsilon)\ \mathcal{A}\mathrm{v}^{m-1}$。根据定理 2.2，$\mathrm{v} = \mathrm{x}_*$ and $\rho = (1+\varepsilon)\lambda$。由于 x_* 的唯一性，对于任意收敛子列 $\{\mathrm{x}_{k_j}\} \subseteq \{\mathrm{x}_k\}$，Then $\mathrm{Lim}_{j\to\infty}\mathrm{x}^{k_j} = \mathrm{x}_*$。因此，我们可以说 $\mathrm{Lim}_{k\to\infty}\mathrm{x}_k = \mathrm{x}_*$。□

我们在以下定理中总结算法 1 的全局收敛性。

定理 4.1 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对，并设 $\{\mathrm{x}_k\}$、$\{\mathrm{y}_k\}$、$\{\rho_k\}$、$\{\bar{s}_k\}$ 和 $\{\bar{\rho}_k\}$ 由算法 1 生成。则 $\lambda = \lim_{k\to\infty}\bar{\rho}_k$ 是张量对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 的唯一正广义特征值，且 $\mathrm{x}_* = \lim_{k\to\infty}\mathrm{x}_k$ 是相应的正特征向量，即 $\mathcal{A}\,\mathbf{x}_*^{m-1} = \lambda\mathcal{B}\mathbf{x}_*^{m-1}$.

证明。根据引理 4.2，我们知道序列 $\{\bar{s}_k\}$ 单调递减且以下界 s 为界，因此收敛。记 $\bar{s} = \lim_{k\to\infty}\bar{s}_k$，则 $\bar{s} \geq s$。根据引理 4.4，

$$\bar{s} = \lim_{k\to\infty}\bar{s}_k = \lim_{k\to\infty}\max \frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1}} = \max \frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_*^{m-1}}{(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_*^{m-1}}.$$

因此 $\bar{s} = s$，这等价于 $\lim_{k\to\infty}\bar{\rho}_k = \lambda$。 □

我们在以下定理中证明算法1 的收敛速率。

定理4.2 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对，且 $\{\rho_k\}$, $\{\mathrm{x}_k\}$, $\{\mathrm{y}_k\}$以及 $\{\bar{\rho}_k\}$ 由算法1生成。则序列 $\{\bar{\rho}_k\}$ 至少线性收敛。

证明。首先，我们可以很容易地看到，对于所有 $k \geq 1$，$\overline{\rho}_k = \max \frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}{}_k^{m-1}\mathrm{x}\mathrm{x}_k^{m-1}$。记 $\zeta_k = \overline{\rho}_k - \lambda$。于是

$$\begin{aligned}\zeta_k - \zeta_{k+1} &= \overline{\rho}_k - \lambda - \overline{\rho}_{k+1} + \lambda = \overline{\rho}_k - \max \frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}} \\ &= \overline{\rho}_k \left(1 - \max \frac{\mathcal{A}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}}{\overline{\rho}_k\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}}\right) = \min \frac{(\overline{\rho}_k - \rho_k)\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1} + (\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}}\end{aligned}$$

Thus

$$\begin{aligned}\frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_k} &= 1 - \min \frac{(\overline{\rho}_k - \rho_k)\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1} + (\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{\zeta_k\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}} \\ &= \max \frac{(\zeta_k - \overline{\rho}_k + \rho_k)\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1} - (\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1}}{\zeta_k\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}} \\ &= \max \frac{(\mathcal{A}-\lambda\,\mathcal{B})\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}}{(\overline{\rho}_k - \lambda)\,\mathcal{B}\,\mathbf{y}_{k+1}^{m-1}} = \max \frac{(\mathcal{A}-\lambda\,\mathcal{B})\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{(\overline{\rho}_k - \lambda)\,\mathcal{B}\,\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}\end{aligned}$$

根据引理 4.2 和备注 4.1，我们有 $\overline{\rho}_k \geq \overline{\rho}_{k+1}$。因此 $\overline{\rho}_k \mathcal{B}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1} \geq \overline{\rho}_{k+1}\mathcal{B}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1} \geq \mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}$。所以，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\zeta_{k+1}}{\zeta_k} = \lim_{k\to\infty}\max\frac{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{B})\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{(\overline{\rho}_k-\lambda)\mathcal{B}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}} \leq \lim_{k\to\infty}\max\frac{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{B})\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{B})\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}} = 1$$

□

4.2 IGTNI 的收敛性

本节将证明算法 3 的收敛性。

引理 4.5 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对。设序列 $\{\mathbf{x}_k\},\{\mathbf{y}_k\}$ 和$\{\rho_k\}$ 由算法 3 生成。那么，对于所有 $\mathbf{x}_k > 0$，均有 $k \geq 0$；并且序列 $\{\rho_k\}$ 的下界为 λ，即$\rho_k \geq \lambda$，对于所有 k 均成立。

证明。我们对 k 使用归纳法来证明这些结论。先从方程 $(\rho_0\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_1^{m-1} = \mathcal{A}\mathbf{x}_0^{m-1}+\mathbf{f}_1$ 开始。由于 $|\mathbf{f}_1| \leq \beta_1\mathcal{A}\mathbf{x}_0^{m-1}$with $\beta_1 \in [0,1)$ 且 $\mathbf{x}_0 > 0$，我们有

$$0 < (1-\beta_1)\mathcal{A}\mathbf{x}_0^{m-1} \leq \mathcal{A}\mathbf{x}_0^{m-1}+\mathbf{f}_1 \leq (1+\beta_1)\mathcal{A}\mathbf{x}_0^{m-1}.$$

由命题 2.1 可知，$\rho_0\mathcal{B}-\mathcal{A} = \mathcal{B}-\mathcal{A}$ 是一个非奇异 $\mathcal{M}$-张量，因此存在唯一正解 $\mathbf{y}_1$，进而 $\mathbf{x}_1 = \mathbf{y}_1/\|\mathbf{y}_1\| > 0$。

此外，$\rho_1 = (1+\varepsilon_1)\rho_0\left(1-\text{最小}\,\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}_0^{m-1}+\mathbf{f}_1}{\mathbf{y}_1^{m-1}+\mathcal{A}\mathbf{x}_0^{m-1}+\mathbf{f}_1}\right) = (1+\varepsilon_1)\text{最大}\,\frac{\mathcal{A}\mathbf{y}_1^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{y}_1^{m-1}}$。根据推论 2.1，

$$\rho_1 = (1+\varepsilon_1)\max\frac{\mathcal{A}\mathbf{y}_1^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{y}_1^{m-1}} \geq (1+\varepsilon_1)\min_{(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}^{m-1}>0}\max\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}} \geq \lambda.$$

假设 $\mathbf{x}_{k-1} > 0$。类似地，我们有 $(\rho_{k-1}\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1} = \mathcal{A}\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}+\mathbf{f}_k > 0$，因此 $\mathbf{y}_k > 0$，$\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k/\|\mathbf{y}_k\| > 0$。
此外，$\rho_k = (1+\varepsilon_k)\rho_{k-1}\left(1-\text{最小}\,\frac{\mathcal{A}\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}+\mathbf{f}_k}{\mathbf{y}_k^{m-1}+\mathcal{A}\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}+\mathbf{f}_k}\right) = (1+\varepsilon_k)\text{最大}\,\frac{\mathcal{A}\mathbf{y}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{y}_k^{m-1}} \geq \lambda$。

根据归纳假设，该结论对任意 k 均成立。□

根据引理 4.5，我们可以推导出一个与引理 4.3类似的引理。

引理 4.6 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对，且设 $\{\mathbf{x}_k\}$ 由算法 3生成。则对于任意收敛子列 $\{\mathbf{x}_{k_j}\} \subseteq \{\mathbf{x}_k\}$，$\lim_{j\to\infty}\mathbf{x}_{k_j} > 0$。

如果通过折半过程选取的序列 $\{\varepsilon_k\}$ 没有下界，则存在一个子序列 $\{\varepsilon_{k_j}\}$，使得 $\lim_{j\to\infty}\varepsilon_{k_j} = 0$。根据引理 4.6 以及注 3.1 中的折半过程，可以立即推出 $\lim_{j\to\infty}\|\mathbf{y}_{k_j}\| = +\infty$，进而有 $\lim_{j\to\infty}(\rho_{k_j-1}\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k_j}^{m-1} = 0$。假设 $\lim_{j\to\infty}\rho_{k_j-1} = \rho$ 且 $\lim_{j\to\infty}\mathbf{x}^{k_j} = \mathbf{v}$，则 $(\rho\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{v}^{m-1} = 0$。因此，我们很容易看出，如果通过折半过程选取的序列 $\{\varepsilon_k\}$ 没有下界，那么 $\{(\mathbf{x}_k,\rho_k)\}$ 收敛到 $(\mathbf{x}_*,\lambda)$。因此，从现在起，我们基于以下假设进行收敛性分析：$\{\varepsilon_k\}$ 有一个常数下界 $\varepsilon > 0$。

引理 4.7 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对。设序列 $\{\mathbf{x}_k\},\{\mathbf{y}_k\},\{\bar{\rho}_k\}$ 由算法 3生成。那么序列 $\{\bar{\rho}_k\}$ 单调递减，且以下界 λ为下界，即$\bar{\rho}_1 \geq \cdots \geq \bar{\rho}_k \geq \bar{\rho}_{k+1} \geq \cdots \geq \lambda$。

证明。根据备注 3.1中的折半过程，可以找到适当的 ε_k 使得 (3.5) 成立。根据假设，存在常数 $\varepsilon > 0$ 使得 $\varepsilon_k \geq \varepsilon > 0$。因此，序列 $\{\rho_k\}$ 单调递减，且由 $(1+\varepsilon)\lambda$可知其有下界。由于 $\rho_k = (1+\varepsilon)\overline{\rho}_k$，我们有 $\overline{\rho}_1 \geq \cdots \geq \overline{\rho}_k \geq \overline{\rho}_{k+1}\cdots \geq \lambda$。□

Now 我们可以得出结论，该序列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 收敛。证明与引理 4.4 .

引理 4.8 设 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 是广义 $\mathcal{M}$-张量对。设 $\{\mathbf{x}_k\}$ 由算法 3 生成。假设对于一个收敛子列 $\{\mathbf{x}_{k_j}\} \subseteq \{\mathbf{x}_k\}$，$\lim_{j\to\infty}\mathbf{x}^{k_j} = \mathbf{v}$。记 $\mathbf{x}_* > 0$, $\|\mathbf{x}_*\| = 1$ 为张量对 $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ 对应于唯一正特征值 λ 的唯一正特征向量。则 $\mathbf{v} = \mathbf{x}_*$，因此 $\lim_{k\to\infty}\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_*$。

算法 3 的全局收敛性总结如下定理所述。

定理4.3 设（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）为一个广义 $\mathcal{M}$-张量对，且 $\{\rho_k\}$、$\{\mathbf{x}_k\}$、$\{\mathbf{y}_k\}$和 $\{\bar{\rho}_k\}$ 由算法 3 生成。则 $\lambda = \lim_{k\to\infty} \bar{\rho}_k$ 是张量对（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）的唯一正广义特征值，且 $\mathbf{x}_* = \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}_k$ 是相应的正特征向量，即 $\mathcal{A}\mathbf{x}_*^{m-1} = \lambda\mathcal{B}\mathbf{x}_*^{m-1}$.

我们还可以类似于定理 4.2证明 IGTNI 的线性收敛性。

定理4.4 设（$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$）为一个广义 $\mathcal{M}$-张量对，且 $\{\rho_k\}$、$\{\mathbf{x}_k\}$、$\{\mathbf{y}_k\}$以及 $\{\bar{\rho}_k\}$ 由算法 3生成。则序列 $\bar{\rho}_k$ 的收敛速度至少为线性。

注4.2 显然，本节的结论对于算法 2 同样成立，只需令 $\mathbf{f}_k = 0$。

4.3 GNNI 的收敛性

最后，我们给出算法 4 的收敛性分析。首先，需要讨论如何选择一个合适的 θ_k。

引理 4.9 假设序列 $\{\rho_k\}, \{\mathbf{x}_k\}$，以及 $\{\mathbf{y}_k\}$ 由算法 4生成，且 $\{\rho_k\}$有界。那么序列 $\{\|\mathbf{w}_k\|\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\|\}$ 有界，即存在常数 $\alpha_1 > 0$ 使得$\|\mathbf{w}_k\|\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\| \le \alpha_1$ 对所有 k均成立。

证明。根据 $J_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k)$ 的定义，我们有

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k)\mathbf{y}_k - \mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k)(\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k) = \mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k)\mathbf{x}_k = (m-1)\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k) \ge 0,$$

因此 $J_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k)(\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k) \le J_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k)\mathbf{y}_k$。假设 $\mathbf{x}_k \ne \mathbf{y}_k$，于是 $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\| \ne 0$。令 $\mathbf{p}_k = (\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k)/\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\|$, 则 $\|\mathbf{p}_k\| = 1$ 并且

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k)\mathbf{p}_k \le \frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\|}. \tag{4.1}$$

假设 $\{\|\mathbf{w}_k\|\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\|\}$ 无界。由于 $\{\mathbf{x}_k\}$、$\{\mathbf{y}_k\}$、$\{\rho_k\}$和 $\{\mathbf{p}_k\}$ 有界，我们可以找到一个子序列 $\{k_j\}$，使得 $\lim_{j\to\infty} \|\mathbf{w}_{k_j}\|\|\mathbf{y}^{k_j} - \mathbf{x}_{k_j}\| = \infty$，且 $\lim_{j\to\infty} \|\mathbf{w}_{k_j}\| = \infty$、$\lim_{j\to\infty} \mathbf{x}^{k_j} = \mathbf{v}$、$\lim_{j\to\infty} \rho_{k_j} = \rho$ 和 $\lim_{j\to\infty} \mathbf{p}^{k_j} = \mathbf{p}$。与引理 4.3 类似，我们有 $\mathbf{v} > 0$。由于对所有 j，$\rho_{k_j}\mathcal{B}\mathbf{x}_{k_j}^{m-1} \ge \mathcal{A}\mathbf{x}_{k_j}^{m-1}$，令 j 趋于无穷大，可得 $\rho\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-1} \ge \mathcal{A}\mathbf{v}^{m-1}$。

考虑矩阵对 $(\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2}, \mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})$。容易看出，$\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2}$ 满足条件 (C1) 和 (C2)。此外，$(\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})_{ij} \le (\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2})_{ij}, \forall i \ne j$，因此它也满足条件 (C4)。对于条件 (C3)，注意到 $\rho_0 < 1$，且序列 $\{\rho_k\}$ 单调递减，因此 $(\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})\mathbf{v} > \rho\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-1} \ge (\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2})\mathbf{v}$。因此，矩阵对 $(\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2}, \mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})$ 满足条件 (C1) – (C4)。

根据 [4, 定理 2.3], , 该矩阵对有唯一的正广义特征值，记为 $\rho(\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2}, \mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})$。此外，我们有 $\rho = \max_{(\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2})\mathbf{v}/(\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})\mathbf{v}} \ge \rho(\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2}, \mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})$。

若 $\rho > \rho(\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2}, \mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})$，则 $(\rho\mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{v}^{m-2}$ 是非奇异 M-矩阵。由算法 4 中的步骤 5 可得 $\lim_{j\to\infty} \mathbf{w}^{k_j} = \mathbf{w} > 0$，这导致矛盾。因此 $\rho = \rho(\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2}, \mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})$。通过与 [4, 定理 3.2], 类似的分析可知，当且仅当 $\max_{(\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2})\mathbf{v}/(\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})\mathbf{v}} = \min_{(\mathcal{A}\mathbf{v}^{m-2})\mathbf{v}/(\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-2})\mathbf{v}}$ 时，该等式成立，因此 $\rho\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-1} = \mathcal{A}\mathbf{v}^{m-1}$。由定理 2.2，$\rho$是张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 的唯一正广义特征值，$\mathbf{v}$ 是对应的唯一正特征向量，即 $\rho = \lambda$ 且 $\mathbf{v} = \mathbf{x}_*$。于是由 (4.1) 得 $\lim_{j\to\infty} J_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}^{k_j}, \rho_{k_j})\mathbf{p}^{k_j} = J_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}\ \lambda)\mathbf{p} \le 0$。另一方面，对所有 j，$J_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}^{k_j}, \rho_{k_j})\mathbf{p}_{k_j} > 0$。因此 $J_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}\ \lambda)\mathbf{p} = 0$。也就是说，$\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-2}\mathbf{p} = \lambda\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-2}\mathbf{p}$。

然而，我们知道 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-2}\mathbf{x} = \lambda\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-2}\mathbf{x}$。因此，根据定理 2.2，有 $\mathbf{p} = \pm\mathbf{x}$。回顾 $\mathbf{p}_k$ 的定义，由于 $\|\mathbf{x}_k\| = \|\mathbf{y}_k\| = 1$ 且 $\mathbf{x}_k$、$\mathbf{y}_k > 0$，$\mathbf{p}_k$ 的元素不可能全为非负或全为非正，因此 $\mathbf{p}$ 既非正也非负。这导致矛盾。因此，序列 $\{\|\mathbf{w}_k\|\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\|\}$ 是有界的。□

如备注 3.2所述，我们证明可以找到适当的 $\{\theta_k\}$，使序列 $\{\rho_k\}$ 单调递减。我们从下列方程开始

$$\overline{\rho}_k - \overline{\rho}_{k+1} = \overline{\rho}_k - \max \frac{\mathcal{A}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}}{\mathcal{B}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1}} = \overline{\rho}_k - \max \frac{\mathcal{A}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}{\mathcal{B}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}} = \min \frac{\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \overline{\rho}_k)}{\mathcal{B}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}. \tag{4.2}$$

记 $\mathbf{h}_k(\theta) = \mathbf{r}\big((m-2)\mathbf{x}_k + \theta\mathbf{y}_k, \overline{\rho}_k\big)$，则有 $\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \overline{\rho}_k) = \mathbf{h}_k(\theta_k)$。

引理 4.10 对于任意给定的常数 $\eta > 0$，存在标量 $\theta_k \in (0, 1]$ 使得

$$\mathbf{h}_k(\theta_k) \geq \frac{\theta_k \mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{(1+\eta)\|\mathbf{w}_k\|}. \tag{4.3}$$

证明。对于 $m = 2$, (4.3) 对 $\theta_k = 1$ 成立，因为

$$\mathbf{h}_k(1) = (\overline{\rho}_k \mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{y}_k = \frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{w}_k\|} \geq \frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k}{(1+\eta)\|\mathbf{w}_k\|}.$$

对于 $m \geq 3$，令

$$\mathbf{g}_k(\theta) = \mathbf{h}_k(\theta) - \frac{\theta \mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{(1+\eta)\|\mathbf{w}_k\|}. \tag{4.4}$$

于是 $\mathbf{g}_k(0) = \mathbf{r}\big((m-2)\mathbf{x}_k, \overline{\rho}_k\big) = (m-2)^{m-1}(\overline{\rho}_k \mathcal{B} - \mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1} \geq 0$ 且

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_k'(0) &= (m-1)(\overline{\rho}_k \mathcal{B} - \mathcal{A})\big((m-2)\mathbf{x}_k\big)^{m-2}\mathbf{y}_k - \frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{(1+\eta)\|\mathbf{w}_k\|} \\
&= (m-2)^{m-2}\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \overline{\rho}_k)\mathbf{y}_k - \frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{(1+\eta)\|\mathbf{w}_k\|} \\
&= \left[(m-2)^{m-2} - \frac{1}{1+\eta}\right]\frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|} > 0.
\end{aligned}$$

因此，存在标量 $\theta_k \in (0, 1]$，使得 $\mathbf{g}_k(\theta_k) \geq 0$。 □

根据引理 4.10 我们可以在算法 $\theta_k \in (0, 1]$ 4 中选择 $\{\overline{\rho}_k\}$，使序列严格递减。此外，根据引理 4.10的证明，我们在 $\eta = 0$ 时取 $m \geq 4$。类似于 [39], ，我们有如下分析。利用泰勒展开，可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_k(\theta_k) &= \mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, \rho_k) \\
&= \mathbf{r}\big((m-1)\mathbf{x}_k, \rho_k\big) + \mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}\big((m-1)\mathbf{x}_k, \rho_k\big)(\theta_k\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k) + \mathbf{R}(\theta_k\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \rho_k),
\end{aligned} \tag{4.5}$$

其中，对于某个常数 α_2 （与 k无关）

$$\|\mathbf{R}(\theta_k\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \rho_k)\| \leq \alpha_2\|\theta_k\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\|^2. \tag{4.6}$$

此外，

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}((m-1)\mathbf{x}_k, \rho_k) &= (m-1)^{m-2}\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k)\mathbf{x}_k \\
&= (m-1)^{m-2}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k) = \mathbf{r}((m-1)\mathbf{x}_k, \rho_k).
\end{aligned}$$

于是由（4.5）

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}_k(\theta_k) &= (m-1)^{m-2}\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_k, \rho_k)\theta_k\mathbf{y}_k + \mathbf{R}(\theta_k\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \rho_k) \\
&= (m-1)^{m-2}\frac{\theta_k \mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|} + \mathbf{R}(\theta_k\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \rho_k).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

引理 4.11 设序列 $\{\overline{\rho}_k, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k\}$ 由算法 4生成，且 $\{\overline{\rho}_k\}$ 有界。假设 $\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\| \leq \min\big((\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_k^{m-1}\big)$，其中 α_1和 α_2如式 ~~(4.1) 和 (4.6)~~ 所示。则（4.3）成立，且$\theta_k = 1$。

证明。由 引理 4.10 的证明可知，当 $m = 2$ 且 $\theta_k = 1$时，（4.3）总是成立。

因此我们假设 $m \geq 3$。根据引理 4.9 及假设，

$$\frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\alpha_2\|\mathbf{w}_k\|\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\|} \geq \frac{\min(\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1})}{\alpha_1\alpha_2} \geq \|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\|\mathbf{e}, \tag{4.8}$$

其中 $\mathbf{e} = [1, \ldots, 1]^\top$。由（4.6）和（4.8）可得

$$\frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|} \geq \alpha_2\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\|^2\mathbf{e} \geq \|\mathbf{R}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \rho_k)\|. \tag{4.9}$$

因此，由（4.7）和（4.9）可得

$$\begin{aligned}\mathbf{h}_k(1) &= (m-1)^{m-2}\frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|} + \mathbf{R}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \rho_k)\\ &\geq \big(1+(m-2)^{m-2}\big)\frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|} + \mathbf{R}(\mathbf{y}_k, \mathbf{x}_k, \rho_k)\\ &\geq (m-2)^{m-2}\frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|} \geq \frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{(1+\eta)\|\mathbf{w}_k\|}.\end{aligned}$$

因此（4.3）在 $\theta_k = 1$ 下成立。 □

现在我们可以将引理 4.10加强如下。

引理 4.12 对于一个序列（4.3），条件 $\{\theta_k\}$ 在 $\theta_k \in [\xi, 1]$ 固定 $\xi > 0$ 时成立。

证明。 当 4.3）成立时，条件（ $\theta_k = 1$ 其中 $m = 2$。对于 $m \geq 3$，可以定义一个特定的序列 $\{\theta_k\}$ 如下：

$$\theta_k = \begin{cases} 1, & \text{if } \mathbf{h}_k(1) \geq \dfrac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{(1+\eta)\|\mathbf{w}_k\|}; \\ \eta_k, & \text{otherwise;} \end{cases} \tag{4.10}$$

其中 $\eta_k =$ 上确界$\{\xi_k :\ \mathbf{g}_k'(\theta) \geq 0$ 在 $[0, \xi_k]\}$ 上，其中 $\mathbf{g}_k(\theta)$ 由（4.4）给出。回忆一下，$\mathbf{g}_k(0) \geq 0$ 并且

$$\mathbf{g}_k'(0) = \left[(m-2)^{m-2} - \frac{1}{1+\eta}\right]\frac{\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|} > 0. \tag{4.11}$$

我们很容易看出 $0 < \eta_k \leq 1$、$\mathbf{g}_k(\eta_k) \geq 0$，以及 $\mathbf{g}_k'(\eta_k) \not> 0$。

假设 θ_k 不被任何 $\xi > 0$从下方有界，则存在一个子序列 $\{\theta_{k_j}\}$，使得 $\lim_{j\to\infty} \eta_{k_j} = 0$。由于 $\{\mathbf{x}_k\}$ 有界，我们可以假设 $\lim_{j\to\infty}\mathbf{x}^{k_j} = \mathbf{v}$ 存在。注意到我们有 $\mathbf{v} > 0$。由于序列 $\{\rho_k\}$ 单调递减，且被 λ从下方有界，由引理 4.9 可知，对于某个常数 $K > 0$, $\|\mathbf{w}_k\|\|\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_k\| \leq K$。现在，序列 $\{\mathbf{w}_{k_j}\}$ 必定有界，否则由引理 4.11 可知，对于某个 k_j，$\mathbf{h}^{k_j}(1) \geq \mathcal{B}\mathbf{x}_{k_j}^{m-1}(1+\eta)\|\mathbf{w}_{k_j}\|$，而 η_{k_j} 将无定义。因此，根据 (4.11~~), 对于某~~个 $\mathbf{q} > 0$ 以及所有充分大的 j，有 $\mathbf{g}^{k_j}(0) \geq \mathbf{q}$。注意，对某个常数 $M > 0$，有 $|\mathbf{g}_{k_j}'(\eta_{k_j}) - \mathbf{g}_{k_j}'(0)| = |\mathbf{h}_{k_j}'(\eta_{k_j}) - \mathbf{h}_{k_j}'(0)| \leq M\eta_{k_j}$，因为 $\mathbf{h}_k(\theta) = \mathbf{r}\big((m-2)\mathbf{x}_k + \theta\mathbf{y}_k,\ \rho_k\big)$ 具有高阶导数，并且 $\{\mathbf{x}_k\}$、$\{\mathbf{y}_k\}$、$\{\rho_k\}$ 均有界。由于 $\lim_{j\to\infty} \eta_{k_j} = 0$，对于充分大的 j，我们便有 $\mathbf{g}_{k_j}'(\eta_{k_j}) > 0$，从而导出矛盾。□

根据引理 4.12，容易看出，通过折半过程，我们总能找到适当的 $\{\theta_k\}$，使其满足条件（4.3）。下面我们证明当 $\{\theta_k\}$ 满足条件（4.3）时算法 4 的收敛性。

定理 4.5 设 $\mathcal{A}$、$\mathcal{B} \in T_{m,\ n}$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对，且 $\{\rho_k\}$、$\{\mathbf{x}_k\}$和 $\{\mathbf{y}_k\}$ 由算法 4生成。则单调递减序列 $\{\rho_k\}$ 收敛于 λ，且 $\{\mathbf{x}_k\}$收敛于 $\mathbf{x}_*$。此外， $\{\mathbf{y}_k\}$ 也收敛于 $\mathbf{x}_*$。

证明。 由（4.2）和（4.3）可得

$$\rho_k - \rho_{k+1} = \min\frac{\mathbf{h}_k(\theta_k)}{\mathcal{B}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}} \geq \min\frac{\theta_k\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{(1+\eta)\|\mathbf{w}_k\|\mathcal{B}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}} \geq \min\frac{\xi\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}}{(1+\eta)\|\mathbf{w}_k\|\mathcal{B}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}. \tag{4.12}$$

由于 $\theta_k \in (0, 1],$，我们有 $\|\tilde{}\mathbf{x}_{k+1}\| = \|(m-2)\mathbf{x}_k + \theta_k\mathbf{y}_k\| \leq m-1.$。由于序列 $\{\rho_k\}$ 收敛，由（4.12）可得 $\lim_{k\to\infty}\|\mathbf{w}_k\|^{-1}\min(\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1}) = 0$。

假设 $\min(\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1})$ 没有正的下界，则存在一个子序列 $\{k_j\}$，使得 $\lim_{j\to\infty}\min(\mathcal{B}\mathbf{x}_{k_j}^{m-1}) = 0$。不妨设 $\lim_{j\to\infty}\mathbf{x}^{k_j} = \mathbf{v}$。因此 $\min(\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-1}) = \lim_{j\to\infty}\min(\mathcal{B}\mathbf{x}_{k_j}^{m-1}) = 0$。然而，我们有 $\mathbf{v} > 0$ 且 $\mathcal{B}\mathbf{v}^{m-1} = (\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{v}^{m-1} + \mathcal{A}\mathbf{v}^{m-1} > 0$，这就导出了矛盾。因此，$\min(\mathcal{B}\mathbf{x}_k^{m-1})$ 有正的下界。于是 $\lim_{j\to\infty}\|\mathbf{w}_k\|^{-1} = 0$。

设 v 是 $\{x_k\}$ 的任意一个聚点，且 $\lim_{j\to\infty} x^{k_j} = v > 0$。若 $\lim_{j\to\infty} \rho_{k_j} = \rho > \rho(\mathcal{A}v^{m-2}, \mathcal{B}v^{m-2})$，则 $\lim_{j\to\infty} w^{k_j}$ 存在，这与 $\lim_{j\to\infty} \|w_k\|^{-1} = 0$ 矛盾。因此 $\rho = \rho(\mathcal{A}v^{m-2}, \mathcal{B}v^{m-2})$，由此可得 $v = x_*$，如引理 4.9 的证明所示。因此，$\{x_k\}$ 的任意收敛子列都收敛到相同的极限 x_*，故 $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$。从而 $\lim_{k\to\infty} \rho_k = \max \frac{\mathcal{A}^{m-1}}{\mathcal{B}^{m-1}} x\, x_{m-1} = \lambda$。根据引理 4.9，存在常数 $\alpha_1 > 0$，使得 $\|y_k - x_k\| \le \alpha_1 \|w_k\|^{-1}$。由于 $\lim_{k\to\infty} \|w_k\|^{-1} = 0$ 且 $\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$，我们有 $\lim_{k\to\infty} y_k = x_*$。□

为进行算法 4的收敛速率分析，我们先给出一个关于牛顿's 方法的结果。

定理 4.6 设 f (x, ρ) 由 (3.6) 定义，且 f (x*, λ) = 0。则由 (3.7) 给出的雅可比矩阵 Jf(x, λ) 非奇异。设 $\{x_k\}$ 和 $\{\rho_k\}$ 由算法 4 生成，其中 $\{\theta_k\}$ 如引理 4.11 所示。则存在常数 β，使得对于所有充分接近 (x*, λ) 的 (x_k, ρ_k)

$$\left\| \begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{\rho}_{k+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_* \\ \lambda \end{bmatrix} \right\| \le \beta \left\| \begin{bmatrix} x_k \\ \rho_k \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_* \\ \lambda \end{bmatrix} \right\|^2, \tag{4.13}$$

其中 $\{\hat{x}_{k+1}, \hat{\rho}_{k+1}\}$ 由牛顿步（3.9a）- （3.9c）从 $\{x_k, \rho_k\}$生成，而非 $\{\hat{x}_k, \hat{\rho}_k\}$。

证明。假设 $(z^\top, \zeta)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$ 满足

$$0 = (z^\top, \zeta) Jf(x_*, \lambda) = (z^\top, \zeta) \begin{bmatrix} -J_x r(x_*, \lambda) & -\mathcal{B}x_*^{m-1} \\ -x_*^\top & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.14}$$

我们需要证明$z^\top, \zeta) = 0$。根据 (3.8),

$$(m-1) z^\top (\lambda \mathcal{B} - \mathcal{A}) x_*^{m-2} + \zeta x_*^\top = 0. \tag{4.15}$$

在等式两边右乘 x*，得到 $\zeta = -(m-1) z^\top (\lambda \mathcal{B} - \mathcal{A}) x_*^{m-1} = 0$。然后由 (4.15)，$\lambda z^\top \mathcal{B} x_*^{m-2} = z^\top \mathcal{A} x_*^{m-2}$。因此，由佩龙-弗罗贝尼乌斯定理 1.1 可知，对于某个 c，有 $z = c x_*$。由 (4.14) 中的方程 $z^\top \mathcal{B} x_*^{m-1} = 0$，可得 $c = 0$，因此 z = 0，$(z^\top, \zeta) = 0$。故 Jf (x*, λ) 非奇异。我们还知道，Jf(x*, λ) 在 (x*, λ) 处满足利普希茨条件，因为它的 Fr´échet 导数在 (x*, λ) 的某个邻域内连续。接着，不等式 (4.13) 是 Newton法的一个基本结果，例如可参见 [33, 定理 5.1.2] □

接下来，我们考察 $\|x_k - x\|$ 与 $|\rho_k - \lambda|$ 在定理 4.6中的关系。

定理 4.7 设 $\{x_k, \rho_k\}$ 由算法 4生成，其中 $\{\theta_k\}$ 如引理 4.12中所述。则存在常数 c_1, $c_2 > 0$，使得对所有 $c_1 \|x_k - x_*\| \le |\rho_k - \lambda| \le c_2 \|x_k - x_*\|$ 均有 $k \ge 0$。

证明。对于任意的 $x \in \mathbb{R}^n_+$, $x > 0$，考虑方程

$$\frac{\mathcal{A}x^{m-1}}{\mathcal{B}x^{m-1}} = \frac{(\lambda\mathcal{B} - \lambda\mathcal{B} + \mathcal{A})x^{m-1}}{\mathcal{B}x^{m-1}} = \lambda e - \frac{r(x, \lambda)}{\mathcal{B}x^{m-1}}.$$

则 $\frac{\mathcal{A}^{m-1}}{\mathcal{B}^{m-1}} xx$的 Fr´echet 导数为

$$-D(\mathcal{B}x^{m-1})^{-1} J_x r(x, \lambda) + (m-1)(D(\mathcal{B}x^{m-1}))^{-2} \mathcal{B}x^{m-2} D(r(x, \lambda)),$$

其中 D(v) 定义为

$$D(v) = \begin{bmatrix} v_1 & & & \\ & v_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_n \end{bmatrix}$$

对任意 $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^n$，根据泰勒公式，我们有

$$\frac{\mathcal{A}x_k^{m-1}}{\mathcal{B}x_k^{m-1}} - \frac{\mathcal{A}x_*^{m-1}}{\mathcal{B}x_*^{m-1}} = -D(\mathcal{B}x_*^{m-1}) J_x r(x_*, \lambda)(x_k - x_*) + O(\|x_k - x_*\|^2)$$

因为 $\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)=0$。因此，存在一个常数 $c_2>0$ 使得

$$|\rho_k-\lambda|=\max\left(\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}-\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_*^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_*^{m-1}}\right)\le\left\|\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}-\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_*^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_*^{m-1}}\right\|\le c_2\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_*\|.$$

另一方面，

$$|\rho_k-\lambda|=\max\left(\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}-\frac{\mathcal{A}\,\mathbf{x}_*^{m-1}}{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_*^{m-1}}\right)\ge\max\left(-D(\mathcal{B}\,\mathbf{x}_*^{m-1})\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_*)\right)-c_3\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_*\|^2$$

对于某个 $c_3>0$。记 $\mathbf{q}_k=(\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_*)/\|\mathbf{x}_k-\mathbf{x}_*\|$，则 $\|\mathbf{q}_k\|=1$。由于 $\mathbf{x}_k$、$\mathbf{x}_*>0$ 和 $\|\mathbf{x}_k\|=\|\mathbf{x}_*\|=1$，我们对每个 k 都有 $\mathbf{q}_k\not\ge 0$ 和 $\mathbf{q}_k\not\le 0$，也就是说，$\mathbf{q}_k$ 的元素既非全为非负，也非全为非正。我们声称存在常数 $c_4>0$，使得 $\max\left(-D(\mathcal{B}\,\mathbf{x}_*^{m-1})\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)\mathbf{q}_k\right)\ge c_4$。否则，则存在一个子序列 $\{\mathbf{q}_{k_j}\}$，使得 $\lim_{j\to\infty}\mathbf{q}^{k_j}=\mathbf{q}$，其中 $\mathbf{q}\not\ge 0$ 且 $\mathbf{q}\not\le 0$, $\|\mathbf{q}\|=1$,

且 $\max\left(-D(\mathcal{B}\,\mathbf{x}_*^{m-1})\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)\mathbf{q}\right)\le 0$。因此，我们有 $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)\mathbf{q}\ge 0$。若 $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)\mathbf{q}\ne 0$，则可找到充分大的 $s>0$，使得 $s\mathbf{x}_*+\mathbf{q}>0$，$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)(s\mathbf{x}_*+\mathbf{q})\ge 0$，且 $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)(s\mathbf{x}_*+\mathbf{q})\ne 0$。因此，$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)$ 是一个非奇异 M-矩阵，这与其实际上是奇异的这一事实矛盾，因为 $\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)\mathbf{x}_*=0$。因此，$\mathbf{J}_{\mathbf{x}}\mathbf{r}(\mathbf{x}_*,\lambda)\mathbf{q}=0$ 且 $\mathbf{q}=\pm\mathbf{x}_*$，从而导致矛盾。□

现在我们可以证明，当 算法 4 中的 k 充分大时，其收敛是二次的。

定理 4.8 设 $\{\mathbf{x}_k,\rho_k\}$ 由算法 4生成，其中 $\{\theta_k\}$ 如引理 4.12所述。那么，当 k充分大时， ρ_k 以二次速度收敛到 λ，且 $\mathbf{x}_k$ 以二次速度收敛到 $\mathbf{x}_*$。

证明。 我们假设 $(\mathbf{x}_k,\rho_k)$ 与 $(\mathbf{x}_*,\lambda)$ 足够接近。令 $\{\hat{}\,\mathbf{x}_{k+1},\hat{}\,\rho_{k+1}\}$ 由牛顿步 (3.9a)-(3.9c) 根据 $\{\mathbf{x}_k,\lambda\}$生成，而非根据 $\{\hat{}\,\mathbf{x}_k,\hat{}\,\rho_k\}$，并假设 (4.13) 成立。

令 $\zeta_k=\rho_k-\lambda$。由 (4.13) 和定理 4.7，可得 $\hat{}\,\rho_{k+1}-\lambda=O(\zeta_k^2)$。由 (3.13b)，可得 $\rho_k-\lambda-\frac{1}{(m-1)\mathbf{x}_k^\top\mathbf{y}_k\|\mathbf{w}_k\|}=\hat{}\,\rho_{k+1}-\lambda=O(\zeta_k^2)$。因此

$$\|\mathbf{w}_k\|=\frac{1}{(m-1)\mathbf{x}_k^\top\mathbf{y}_k\zeta_k(1-O(\zeta_k))}.\tag{4.16}$$

因此根据引理 4.9，有 $\|\mathbf{y}_k-\mathbf{x}_k\|=O(\|\mathbf{w}_k\|^{-1})=O(\zeta_k)$。因此

$$\zeta_{k+1}=\zeta_k+\max\frac{\mathcal{A}\,\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}{\mathcal{B}\,\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}-\rho_k=\zeta_k-\min\frac{\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1},\rho_k)}{\mathcal{B}\,\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}.\tag{4.17}$$

根据引理 4.11，有 $\theta_k=1$ 近似收敛。因此，当 k 足够大时，根据（4.5）-（4. 7)

$$\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1},\rho_k)=(m-1)^{m-2}\frac{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|}+O(\|\mathbf{y}_k-\mathbf{x}_k\|^2)=(m-1)^{m-2}\frac{\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{\|\mathbf{w}_k\|}+O(\zeta_k^2).$$

则根据（4.16）有

$$\begin{aligned}
\zeta_k\mathbf{e}-\frac{\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1},\rho_k)}{\mathcal{B}\,\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}&=\zeta_k\mathbf{e}-\frac{\mathbf{x}_k^\top\mathbf{y}_k\zeta_k\big(1-O(\zeta_k)\big)(m-1)^{m-1}\,\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\,\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}+O(\zeta_k^2)\\
&=\zeta_k\mathbf{e}-\frac{\mathbf{x}_k^\top(\mathbf{x}_k+\mathbf{y}_k-\mathbf{x}_k)\zeta_k\big(1-O(\zeta_k)\big)(m-1)^{m-1}\,\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{\mathcal{B}\left((m-1)\mathbf{x}_k+\mathbf{y}_k-\mathbf{x}_k\right)^{m-1}}+O(\zeta_k^2)\\
&=\zeta_k\mathbf{e}-\frac{\big(1+O(\zeta_k)\big)\zeta_k\big(1-O(\zeta_k)\big)(m-1)^{m-1}\,\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}{(m-1)^{m-1}\big(1+O(\zeta_k)\big)^{m-1}\,\mathcal{B}\,\mathbf{x}_k^{m-1}}+O(\zeta_k^2)\\
&=\zeta_k\mathbf{e}-\frac{\big(1+O(\zeta_k)\big)\zeta_k\big(1-O(\zeta_k)\big)\mathbf{e}}{\big(1+O(\zeta_k)\big)^{m-1}\mathbf{e}}+O(\zeta_k^2)\\
&=\frac{\zeta_k\big(1+O(\zeta_k)\big)^{m-1}-\big(\zeta_k-O(\zeta_k^3)\big)}{\big(1+O(\zeta_k)\big)^{m-1}}\mathbf{e}+O(\zeta_k^2)\\
&=O(\zeta_k^2).
\end{aligned}\tag{4.18}$$

将（4.18）代入（4.17），得到 $\zeta_{k+1}=O(\zeta_k^2)$。因此， ρ_k 二次收敛到 λ，随后 $\mathbf{x}_k$二次收敛到 $\mathbf{x}_*$，根据定理 4.7。□

由于 $|\overline{\rho}_k-\underline{\rho}_k|/\overline{\rho}_k$用于算法 4的停止准则中，我们还给出以下结果。

定理 4.9 设 $\{\mathbf{x}_k,\ \rho_k\}$ 由算法 4生成，且 $\{\theta_k\}$ 如引理 4.12所示。则当$\theta_k = 1$ 对于 k 充分大时，$|\overline{\rho}_k - \underline{\rho}_k|/\overline{\rho}_k$ 二次收敛至 0。

证明。由 $\frac{\mathcal{A}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}{\mathcal{B}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}\mathbf{x}\mathbf{x}_{k+1}^{m-1} = \overline{\rho}_k\mathbf{e} - \mathbf{r}(\underline{\tilde{\mathbf{x}}_{k+1},\overline{\rho}_k})\mathcal{B}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}$ 可得

$$\frac{|\overline{\rho}_{k+1} - \underline{\rho}_{k+1}|}{\overline{\rho}_{k+1}} = \frac{\left|\overline{\rho}_k - \min\left(\overline{\rho}_k\mathbf{e} - \frac{\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1},\overline{\rho}_k)}{\mathcal{B}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}\right)\right|}{\overline{\rho}_{k+1}} = \frac{\left|\zeta_{k+1} - \min\left(\zeta_k\mathbf{e} - \frac{\mathbf{r}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1},\overline{\rho}_k)}{\mathcal{B}\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^{m-1}}\right)\right|}{\overline{\rho}_{k+1}}$$
$$= O(\zeta_k^2) = O\big(|\overline{\rho}_k - \underline{\rho}_k|^2/\overline{\rho}_k^2\big),$$

其中使用了 $\zeta_{k+1} = O(\zeta_k^2)$ 和 $\zeta_k \le \overline{\rho}_k - \underline{\rho}_k$。 □

5 数值实验

本节给出一些数值算例，以验证这些算法的理论结果，并说明其有效性。所有数值测试均使用 MATLAB R2021a 版本和 Tensor Toolbox 3.2 版本进行。该工具箱定义了一种新的数据类型“张量”。对于“ 双精度”类型的数据 A，可以通过函数 $\mathcal{A}$=tensor(A) 将其转换为“张量” $\mathcal{A}$ 。对于“张量” $\mathcal{A}$ 和向量 x，可以通过函数 ttsv($\mathcal{A}$,x,-1) 计算张量-向量乘积 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}$ ，并通过 ttsv($\mathcal{A}$,x,-2) 计算乘积 $\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-2}$ 。此外，还可以使用函数 symtensor($\mathcal{A}$) 将“张量” $\mathcal{A}$对称化。实验在一台配备英特尔四核 i5-5287U CPU（2.90GHz）和 8 GB 内存的笔记本电脑上进行。

在所有数值实验中，我们采用以下设置。最大迭代次数设为 300。容差参数“tol”设为 10^{-13}。对于算法 4，我们取 $\eta = 1$ for $m = 3$and $\eta = 0$ for $m = 4$。对于算法 3，参照 [37, 第 19]，页，我们将 $\mathbf{f}_k$ 的内层容差定义为 $\|\mathbf{f}_k\| \le \max\{\beta_k \min(\mathcal{A}\mathbf{x}_{k-1}^{m-1})\ 10^{-12}\}$ for $k \ge 2$and $\|\mathbf{f}_1\| \le 10^{-3}$ $\min(\mathcal{A}\mathbf{x}_0^{m-1})$，其中 β_k =$\min\{10^{-3}, \frac{\overline{\rho}_k - \underline{\rho}_k}{\overline{\rho}_k}\}$。算法 1 第 6 步中的参数 ε 在示例 1 和示例 4 中取 0.01，在示例 2 和示例 3 中取 0.005。对于算法 1 和 4，我们设 b $= [1, \ldots, 1]^\top$；对于算法 2 和 3，我们设 $\mathbf{x}_0 = [1, \ldots, 1]^\top$。记号“Residual”定义为 Residual=$\|\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1} - \lambda\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}\|_2$。

5.1 生成非奇异 $\mathcal{M}$-张量

在数值测试中，我们需要构造一个正张量 $\mathcal{A}$ 和一个非奇异的 $\mathcal{M}$–张量 $\mathcal{C}$，然后 $\mathcal{B}$将为 $\mathcal{A} + \mathcal{C}$。我们按如下方式构造非奇异的 $\mathcal{M}$–张量 $\mathcal{C}$ [21, 页 112]。首先，生成一个非负张量 $\mathcal{R} \in T_{m,\ n}$ 其中包含从 (0, 1) 上的标准均匀分布中随机抽取的值。接着，令标量 $\gamma = (1 + \omega) \cdot \max_{i=1,\ 2,\ \ldots,\ n}(\mathcal{R}\mathbf{1}^{m-1})_i$，其中 $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\top$ 且 $\omega = 0.01$。

显然， $\mathcal{C} = \gamma\mathcal{I} - \mathcal{R}$ 是一个对角占优的 $\mathcal{Z}$–张量，即 $\mathcal{C}\mathbf{1}^{m-1} > 0$。因此， $\mathcal{C}$ 是一个非奇异的$\mathcal{M}$-张量。

5.2 随机生成的广义 $\mathcal{M}$-张量对

在本节中，我们在随机生成的张量对 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ 上测试算法，这些张量对满足条件 (C1′) –(C4′)。

示例 1 在本例中，我们生成一个正张量 $\mathcal{A} \in T_{3,\ 3}$ 其包含从 (0，1) 上的标准均匀分布中抽取的随机值，并采用第 5.1 节的方法构造非奇异 $\mathcal{M}$–张量 $\mathcal{B} - \mathcal{A}$。结果如图1a 和 1b所示。

在图 1a中， y 轴为 $\overline{\rho}_k - \overline{\rho}_{k+1}$，我们可以看到，序列 $\{\bar{\rho}_k\}$ 对于算法 1 至 4均单调递减，正如我们在引理 4.2 和 4.7 以及定理4.5中所证明的。

在图 1b中，正如我们在定理 4.9中所证明的，可以看到算法 4 收敛最快。其他结果见表 1。此处“内层迭代”表示求解$\mathcal{M}$-张量方程所需的内迭代总次数。

示例 2 我们考虑一个规模更大的例子。使用与示例 1 相同的方法构造 $\mathcal{A},\mathcal{B} \in T_{4,\ 50}$ 。为节省时间，我们将第一次外层迭代中的最大内层迭代次数设为

算法1 的内层迭代次数上限设为 3000。结果如图1c 和表2所示。在图1c中，我们可以看到，算法2 至4 的收敛速度远快于算法1。

示例 3 在本例中，我们将所提出的算法与 GEAP（广义特征值问题自适应幂方法） [35] 和 AG（自适应梯度）方法 [54]进行比较。这两种方法适用于张量对（$\mathcal{A},\mathcal{B}$），其中 $\mathcal{A}$ 是对称的，且 $\mathcal{B}$ 是对称正定的。若实值张量 $\mathcal{A}\in T_{m,n}$ 满足对所有 $i_1,\ldots,i_m\in\{1,\ldots,n\}$ 和 $p\in\Pi_m$均有 $a_{i_{p(1)}\cdots i_{p(m)}}=a_{i_1\ldots i_m}$，则称其为对称张量，其中$\Pi_m$ 表示所有 m-置换构成的空间。我们用 $\mathbb{S}^{[m,n]}$ 表示所有对称实值 m阶、 n 维张量构成的空间。若对于所有 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$且 $\mathbf{x}\neq 0$，张量 $\mathcal{B}\in\mathbb{S}^{[m,n]}$ 均满足 $\mathcal{B}\mathbf{x}^m>0$，则称其为正定张量。我们将 $\mathbb{S}_+^{[m,n]}$ 记为 $\mathbb{S}^{[m,n]}$中正定张量构成的空间。我们按如下方式构造本例。首先，生成两个对称正张量 $\mathcal{A},\mathcal{R}\in\mathbb{S}^{[6,4]}$，其元素为从区间 (0, 1) 上的标准均匀分布中抽取的随机值。然后，令标量 $\gamma=1.01\cdot\max\left(\max_{i=1,\ldots,n}(\mathcal{R}\mathbf{1}^{m-1})_i, n^{m-1}\max_{i_1,\ldots,i_m}(\mathcal{R}-\mathcal{A})\right)$ and $\mathcal{B}=\gamma\mathcal{I}-\mathcal{R}+\mathcal{A}$。因此，$\mathcal{B}\in\mathbb{S}_+^{[6,4]}$和$\mathcal{B}-\mathcal{A}$是一个非奇异 $\mathcal{M}$-张量。本例的停止准则为 $\|\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}-\lambda\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}\|_2<$tol。结果如图 1d 和表 3 所示。

5.3 计算弱不可约非负张量的 Perron 对

示例 4 [**37,** 示例 **2**] 根据 [48, 定理 3.26], 中关于不可约非负张量的佩龙–弗罗贝尼乌斯定理，对于弱不可约非负张量 $\mathcal{A}$，$\rho(\mathcal{A})$ 是具有正特征向量 $\mathbf{x}$ 的唯一特征值，而 $\mathbf{x}$ 是与 $\rho(\mathcal{A})$ 相关联的唯一非负特征向量，且相差一个乘法常数。（$\rho(\mathcal{A})$，$\mathbf{x}$）称为 $\mathcal{A}$ 的 Perron 对。

考虑张量 $\mathcal{A}\in T_4$、50，使得 $\mathcal{A}=\omega\mathcal{D}+\mathcal{C}$ 属于 4-一致连通超图 [29, 30], ，其中 $\mathcal{D}$ 是对角张量，其对角元素 $d_{i\ldots i}$ 等于每个顶点 i 的度数， i，而 $\mathcal{C}$ 是在 [16, 29, 30] 中定义的邻接张量。根据 [48, 定理 4.1], $\mathcal{A}$ 是弱不可约的。我们考虑边集为 $E=\{(i,\ j,\ j+1,\ j+2)\}$ 的超图，其中 $i=1$ 取 2、3、4、5，且 $j=i+1$、.....、$n-2$。我们选择 $w=1$ 并设定 $\mathcal{B}=\rho\mathcal{I}$，其中 $\rho>\rho(\mathcal{A})$。该示例的停止准则同样为 $\|\mathcal{A}\mathbf{x}^{m-1}-\lambda\mathcal{B}\mathbf{x}^{m-1}\|_2<$容差。该示例的结果见图 1e 和 1f 以及表 4。我们在此将所提出的算法与 GEAP、AG 和 NQZ [42] 进行比较。

表 1：示例 1 的结果

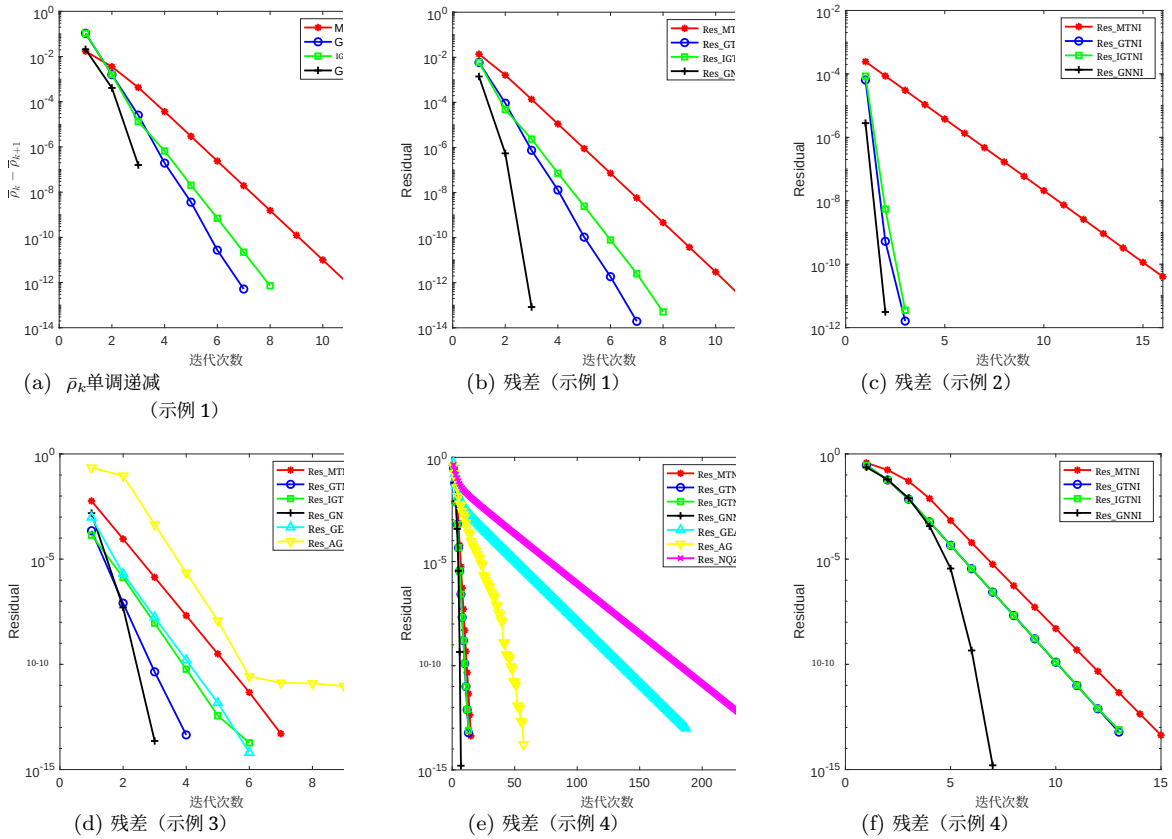
方法	λ	$\mathbf{x}$	外层迭代	内层迭代	残差	时间（秒）
MTNI	0.8774	[0.6028, 0.5234, 0.6023]	12	17086	1.9082e-14	0.7588
GTNI	0.8774	[0.6028, 0.5234, 0.6023]	7	1096	1.9347e-14	0.0757
IGTNI	0.8774	[0.6028, 0.5234, 0.6023]	8	1184	5.0898e-14	0.0684
GNNI	0.8774	[0.6028, 0.5234, 0.6023]	3	/	8.3544e-14	0.0115

表 2：示例 2 的结果

方法	λ	外层迭代	内层迭代	残差	时间（秒）
MTNI	0.9859	16	41600	4.0477e-11	161.4059
GTNI	0.9859	3	6860	1.6140e-12	25.5504
IGTNI	0.9859	3	6137	3.5401e-12	22.3650
GNNI	0.9859	2	/	3.1140e-12	6.5572

5.4 计算具有特征向量非线性的非线性特征值问题（NEPv）的正特征对

在本部分中，我们考虑将我们的方法应用于具有特征向量非线性的非线性特征值问题（NEPv），并将数值结果与其他方法进行比较。NEPv 起源于玻色–爱因斯坦凝聚体（BECs），可视为张量广义特征值问题的一种特殊情形。



(a) $\bar{\rho}_k$单调递减（示例 1）　(b) 残差（示例 1）　(c) 残差（示例 2）

(d) 残差（示例 3）　(e) 残差（示例 4）　(f) 残差（示例 4）

图 1：示例 1、2、3、4 的结果

表 3：示例 3 的结果

方法	λ	外层迭代	内层迭代	残差	时间（秒）
MTNI	0.6712	7	19475	5.0431e-14	0.9461
GTNI	0.6712	4	379	4.4267e-14	0.0443
IGTNI	0.6712	6	400	1.8631e-14	0.0366
GNNI	0.6712	3	/	2.2748e-14	0.0083
GEAP	0.6712	6	/	6.4047e-15	0.0074
AG	0.6712	10	/	3.3375e-14	0.0042

表 4：示例 4 的结果

方法	λ	外层迭代	内层迭代	残差	时间（秒）
MTNI	51.7310	15	6189	4.2891e-14	24.6596
GTNI	51.7310	13	5650	6.0176e-14	21.8478
IGTNI	51.7310	13	4432	7.7549e-14	17.0098
GNNI	51.7310	7	/	1.5861e-15	0.4592
GEAP	51.7310	187	/	9.8886e-14	1.4453
AG	51.7310	57	/	1.6767e-14	1.1369
NQZ	51.7310	245	/	9.8212e-14	0.9080

在凝聚态物理中，玻色–爱因斯坦凝聚体（BEC）是一种物质状态，通常由低密度的玻色子气体冷却至非常接近绝对零度的温度时形成。在这种条件下，大量玻色子占据同一个量子基态。假设该基态可由波函数 $\psi(\mathbf{x}\ t)$表示。那么 ψ 就是以下带有归一化约束的能量泛函最小化问题的解[2, 第 10]页：

$$\begin{cases} \min\ E\big(\psi(\cdot,t)\big) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} \big[\frac{1}{2}|\nabla\psi(\mathbf{x},t)|^2 + V(\mathbf{x}|\psi(\mathbf{x},t)|^2) + \frac{\beta}{2}|\psi(\mathbf{x},t)|^4\big]d\mathbf{x}, \\ \text{s.t.} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} = 1,\ E\big(\psi(\mathbf{x},t)\big) < \infty, \end{cases} \tag{5.1}$$

其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ 是空间坐标向量（$d = 1, 2, 3$），$V(\mathbf{x})$是外部囚禁势，且 d 给定的实常数 β 是无量纲相互作用系数，参见 [2, 第 12]页。

凝聚体运动的控制方程可通过 [2, 31]推导得到

$$\begin{cases} \imath\partial_t\psi(\mathbf{x},t) = -\frac{1}{2}\Delta\psi(\mathbf{x},t) + V(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x},t) + \beta|\psi(\mathbf{x},t)|^2\psi(\mathbf{x},t), \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} |\psi(\mathbf{x},t)|^2 d\mathbf{x} = 1, \end{cases} \tag{5.2}$$

这是一个具有三次非线性的非线性薛定谔方程（NLSE），称为 Gross-Pitaevskii 方程（GPE）。这里“ı”表示虚数单位。

采用有限差分离散[3], BEC 问题的一维情形（5.1）可转化为带球面约束的非凸四次优化问题：

$$\begin{cases} \min\limits_{\mathbf{u}\in\mathbb{R}^{N-2}} \dfrac{\alpha}{2}\displaystyle\sum_{i=1}^{N-2} u_i^4 + \mathbf{u}^\top B\mathbf{u}, \\ \text{s.t.}\ \|\mathbf{u}\|_2^2 = 1, \end{cases} \tag{5.3}$$

其中 $\alpha = \beta/h$, $h = (b-a)/(N-1)$, $[a,b]$ 是计算区域，N 是 $[a,b]$上的分割点总数。向量 $\mathbf{u} = \sqrt{h}\Psi$, 其中 $\Psi = (\psi_2, \ldots, \psi_{N-1})^\top$，$\psi_j$ 是 $j = 1, \ldots, N$对应分割点 $x_j \in [a,b]$ 上的数值近似值。$B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{(N-2)\times(N-2)}$ 的元素定义如下：

$$b_{jk} = \begin{cases} \dfrac{1}{h^2} + V(x_j), & j = k, \\ -\dfrac{1}{2h^2}, & |j-k| = 1, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Wu 等 [52] 和 Tian 等 [51] 采用牛顿法计算 BECs 的基态。Huang 等 [32, 节 3] 指出，优化问题（5.3）等价于以下非线性特征值问题

$$\begin{cases} \alpha\,\mathcal{A}\,\mathbf{u}^3 + B\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}, \\ \|\mathbf{u}\|^2 = 1, \end{cases} \tag{5.4}$$

其中 $\mathcal{A}$ 等于单位张量 $\mathcal{I}$。根据 [32, 引理 1]，，存在唯一特征对（λ，$\mathbf{u}$），其中$\mathbf{u} > 0$，且 $\lambda > 0$ 是非线性特征值问题（5.4）的最小特征值。

回顾一下，单位张量 $\mathcal{E}$ 的定义为 $\mathcal{E}\mathbf{x}^{m-1} = \|\mathbf{x}\|^{m-2}\mathbf{x}$，对所有$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$均成立。利用该定义，我们可以将（5.4）改写为

$$\begin{cases} \mathcal{E}\mathbf{u}^3 = \dfrac{1}{\lambda}(\alpha\,\mathcal{A} + \mathcal{E}\times_1 B)\mathbf{u}^3, \\ \|\mathbf{u}\|_2^2 = 1, \end{cases} \tag{5.5}$$

这是张量对（$\mathcal{E}$，$\alpha\,\mathcal{A} + \mathcal{E}\times_1 B$）的广义特征值问题。将等式两边乘以常数 $c = \max\limits_j\ b_{jj}$，式（5.5）变为

$$\begin{cases} c\mathcal{E}\mathbf{u}^3 = \dfrac{c}{\lambda}(\alpha\,\mathcal{A} + \mathcal{E}\times_1 B)\mathbf{u}^3, \\ ||\mathbf{u}||_2^2 = 1. \end{cases} \tag{5.6}$$

显然，张量 $c\mathcal{E}$ 是非负且弱不可约的。当 β 足够大时，存在一个向量 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{N-2}$，满足 $\mathbf{v} > 0$，使得 $(\alpha\mathcal{A}+\mathcal{E}\times_1 B)\mathbf{v}^3 > c\mathcal{E}\mathbf{v}^3$。对于任意 $(i_2,\ i_3,\ i_4) \neq (i,\ i,\ i)$，我们很容易看出

$$\begin{aligned}(\alpha\mathcal{A}+\mathcal{E}\times_1 B)_{i,i_2,i_3,i_4} &= \sum_j e_{ji_2i_3i_4}b_{ij} = b_{ii}e_{ii_2i_3i_4} + \sum_{j\neq i} e_{ji_2i_3i_4}b_{ij} \\ &\leq b_{ii}e_{ii_2i_3i_4} \leq ce_{ii_2i_3i_4} = (c\mathcal{E})_{ii_2i_3i_4}.\end{aligned}$$

因此，张量对 $(c\mathcal{E}, \alpha\mathcal{A}+\mathcal{E}\times_1 B)$ 是一个广义 $\mathcal{M}$-张量对，因此可以使用我们的算法计算唯一特征对 $(\frac{c}{\lambda}, \mathbf{u})$。

例 **5** [**31**, 例 **1**] 考虑网格尺寸为 $h = 2L/(N+1)$ 的 (5.2) 的有限差分近似，并在 $[-L, L]\times[-L, L]$上施加狄利克雷边界条件，其中 $L > 0$ 足够大，即

$$\frac{\beta}{h^2}\operatorname{diag}(\mathbf{u}^{[2]})\mathbf{u} + B\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u},\ \mathbf{u}^\top\mathbf{u} = 1,$$

其中 $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ ， $n = N^2$。矩阵 $B = A + V$其中 $A = I\otimes L_h + L_h\otimes I$ 是一个负的二维拉普拉斯算子矩阵，满足

$$L_h = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N}$$

并且 $V = h^2\operatorname{diag}(1^2+1^2, 1^2+2^2, \ldots, N^2+N^2)$ 是调和势 $V(x,y) = x^2+y^2$ 的离散化结果。在本例中，我们将 GNNI 方法与牛顿求根迭代（NRI）[31] 以及用于非线性特征值问题（NEPv）的牛顿–野田迭代（NNI） [31, 22] 进行比较。对于 NNI，每次迭代中的线性系统可能是病态的，如果没有适当的预条件子则很难求解。因此，我们使用 MATLAB 函数“bicgstab”求解线性系统，容差为 10^{-9}，最大迭代次数为 200。对于 GNNI，可以直接使用 MATLAB 函数“mldivide”（“\”）求解线性系统，但我们发现当 n 相对较大时，使用“bicgstab”速度更快。因此，对于该方法，我们仅在规模较大的示例中使用“bicgstab”。对于 NRI，内迭代中的线性系统具有三对角（或块三对角）结构，因此可以通过块三对角 LU 分解高效求解。此外，NRI 方法需要用于 λ 的初始区间 $[a, b]$，在实验中，我们将初始 λ 视为该方法的已知常数。

单位张量 $\mathcal{E} \in T_{4,\ n}$ 可由 [34, 性质 2.4]生成

$$e_{i_1i_2i_3i_4} = \frac{1}{4!}\sum_{p\in\Pi_4}\delta_{i_{p(1)}i_{p(2)}}\delta_{i_{p(3)}i_{p(4)}} \tag{5.7}$$

当 $i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4 \in \{1, \ldots, n\}$，其中 δ是标准克罗内克δ，即 $\delta_{ij} = 1$ 当 $i = j$ 且 $\delta_{ij} = 0$ 当$i \neq j$。结果见表 5。

例 **6** [**22**, 例 **3**] 考虑修正Gross-Pitaevskii方程（MGPE）

$$A\mathbf{u} + V\mathbf{u} + \frac{\beta}{h^2}\mathbf{u}^{[3]} + 2\frac{\alpha}{h^2}A\mathbf{u}^{[3]} = \lambda\mathbf{u},\ \mathbf{u}^\top\mathbf{u} = 1 \tag{5.8}$$

其光学势为 $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + 40\big(\sin^2(\frac{\pi x}{2}) + \sin^2(\frac{\pi y}{2})\big)$，定义域为 $[-2, 2]^2$，其中 $A = \frac{1}{2}($ $I\otimes L_h + L_h\otimes I)$。该方程也可以改写为张量广义特征值问题

$$\begin{cases} c\mathcal{E}\mathbf{u}^3 = \dfrac{c}{\lambda}\big(2\dfrac{\alpha}{h^2}\mathcal{I}\times_1 A + \dfrac{\beta}{h^2}\mathcal{I} + \mathcal{E}\times_1 (A+V)\big)\mathbf{u}^3, \\ \|\mathbf{u}\|_2^2 = 1, \end{cases}$$

其中， c为正常数。记 $\mathcal{A} = c\mathcal{E}$、 $\mathcal{B} = 2\frac{\alpha}{h^2}\mathcal{I}\times_1 A + \frac{\beta}{h^2}\mathcal{I} + \mathcal{E}\times_1(A+V)$，并令 $c = \max\big(\operatorname{diag}($ $A+V)\big)$，则容易看出，对于任意 $i = 1,$ ....., n 以及$(i_2, i_3, i_4) \neq (i, i, i)$， $b_{ii_2i_3i_4} \leq a_{ii_2i_3i_4}$。此外，当 β 足够大时，存在一个向量 $\mathbf{v} > 0$ 使得$(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{v}^3 > 0$。因此，MGPE同样满足我们的假设，并且可以通过我们的方法求得(5.8)的唯一正特征对。在此例中，我们将GNNI方法与NNI方法 [22]进行了比较，结果见表6。

表5：示例 5 的结果

$n=15^2$, $\beta=100000$, $L=8$					
方法	λ	外层迭代	内层迭代	残差	时间（秒）
GNNI	610.0432	5	/	3.5411e-13	0.0090
NRI	610.0432	3	[12,13,13]	2.2609e-13	0.0465
NNI	610.0432	5	/	2.4747e-12	0.0301
$n=63^2$, $\beta=200000$, $L=8$					
方法	λ	外层迭代	内层迭代	残差	时间（秒）
GNNI	976.5971	4	/	1.9504e-12	1.9694
NRI	976.5971	3	[16,16,16]	4.1177e-13	4.8632
NNI	976.5971	4	/	6.8873e-13	2.3075
$n=99^2$, $\beta=200000$, $L=8$					
方法	λ	外层迭代	内层迭代	残差	时间（秒）
GNNI	968.5025	4	/	2.7739e-12	18.0728
NRI	968.5025	3	[18,18,18]	6.0493e-13	34.7647
NNI	968.5025	4	/	1.0452e-12	19.4114

表6：示例6的结果

$n=63^2$, $\beta=100000$, $\alpha=100$, $L=2$					
方法	λ	外层迭代	内层迭代	残差	时间（秒）
GNNI	7.9343e+03	6	/	1.7693e-11	3.5730
NNI	7.9343e+03	4	/	7.6481e-11	3.6068

6 结论

本文提出了用于计算广义 $\mathcal{M}$-张量对的Perron 对的Noda 迭代（NI）方法。基于[13, 21, 39, 55]中的技术，我们证明了MTNI、GTNI、IGTNI和GNNI的收敛性。我们在随机生成的张量对、超图特征值问题以及非线性特征值问题上测试了我们的方法，并展示了其精度方面的收敛性。方法的加速可能是未来研究的一个主题。具体而言，我们需要开发一种更快的方法来求解 $\mathcal{M}$-张量方程$(\rho_{k-1}\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1}=(\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}$，并且参数 ε 的选择也需要进一步讨论。对于算法 4，还需要考虑其他步长选择方式以及 Newton 方法的一些变体。鉴于算法 1和算法 2，另一项需要开展的工作是考虑更一般的迭代公式，例如$(\rho_{k-1}\mathcal{B}-\mathcal{A})\mathbf{y}_k^{m-1}=(\alpha_{k-1}\mathcal{A}+\beta_{k-1}\mathcal{B})\mathbf{x}_{k-1}^{m-1}$。正如数值实验所显示的，算法 2比算法 1执行得更快。如何在每次迭代中选择 α_{k-1}、β_{k-1} 以提高方法的效率，还需要进一步讨论。

致谢

作者谨向负责处理本文的编辑和审稿人致谢，感谢他们对本文表述提出的详尽意见。我们还要感谢南开大学的 Qingzhi Yang 教授、高雄大学的 Ching-Sung Liu 教授、复旦大学的 Xinming Wu 教授以及中国科学院的 Hehu Xie 教授，感谢他们给予的启发，并向我们介绍他们的再版论文和预印本 [31, 32, 27, 39, 37, 38, 22,52, 51]。

参考文献

[1] B. Bader、T. Kolda 等。MATLAB张量工具箱，2021年。版本 3.2.1。

[2] W. Bao 和 Y. Cai。玻色–爱因斯坦凝聚的数学理论与数值方法。《动力学及相关模型》，6(1)：1–135，2013年。

[3] W. Bao 和 Y. Cai. 带角动量旋转的 Gross-Pitaevskii方程有限差分方法的最优误差估计. 《计算数学》，82(281):99–128, 2013年.

[4] R. B. Bapat、D. D. Olesky 和 P. Van Den Driessche. 广义特征值问题的 Perron-Frobenius 理论. 线性与多重线性代数, 40(2):141–152, 1995年.[5] D. Cai、X. He 和 J. Han. 谱回归：用于基于内容的图像检索的统一子空间学习框架. 收录于第15届 ACM 多媒体国际会议论文集，第403–412页，2007年.[6] H. Cai、V. W. Zheng 和 K. C.-C. Chang. 图嵌入问题、技术与应用的全面综述. IEEE知识与数据工程汇刊, 30(9):1616–1637, 2018年.[7] K. C. Chang、K. Pearson 和 T. Zhang. 非负张量的佩龙–弗罗贝尼乌斯定理. 《数学科学通讯》, 6(2):507–520, 2008年.[8] K. C. Chang、K. Pearson 和 T. Zhang. 关于实对称张量的特征值问题. 《数学分析与应用杂志》, 350(1):416–422, 2009年.[9] M. Che、A. Cichocki 和 Y. Wei. 用于计算张量最佳秩一逼近及其应用的神经网络. 神经计算, 267:114–133, 2017年.[10] M. Che 和 Y. Wei. 复张量理论与计算及其应用. 施普林格，新加坡，2020年.[11] L. Chen、L. Han 和 L. Zhou. 利用同伦方法计算张量特征值. 《SIAM矩阵分析与应用杂志》, 37(1):290–319, 2016年.[12] L. Chen、L. Han 和 L. Zhou. 计算广义张量特征对的线性同伦方法. 《中国数学前沿》, 12(6):1303–1317, 2017年.[13] X. S. Chen、S.-W. Vong、W. Li 和 H. Xu. 基于佩龙–弗罗贝尼乌斯理论的广义特征值问题野田迭代. 《数值算法》 , 80(3):937–955, 2019 年 .[14] Y. Chen 、 L. Qi 和 X. Zhang. 用于超图划分的拉普拉斯张量 Fiedler向量. 《SIAM科学计算杂志》, 39(6):A2508–A2537, 2017年.[15] W.-K. Ching、X. Huang、M. K. Ng 和 T.-K. Siu. 马尔可夫链：模型、算法与应用，《运筹学与管理科学国际丛书》第189卷. 纽约, 纽约州：施普林格，第2版，2013年.[16] J. Cooper 和 A. Dutle. 均匀超图的谱. 《线性代数及其应用》, 436(9):3268–3292, 2012年.[17] C.-F. Cui、Y.-H. Dai 和 J. Nie. 对称张量的所有实特征值. 《SIAM矩阵分析与应用杂志》, 35(4):1582–1601, 2014年.[18]W. Ding、L. Qi 和 Y. Wei. $\mathcal{M}$-张量与非奇异 $\mathcal{M}$-张量. 《线性代数及其应用》, 439(10):3264–3278, 2013年.[19]W. Ding 和 Y. Wei. 广义张量特征值问题. 《SIAM矩阵分析与应用杂志》, 36(3):1073–1099, 2015年.[20] W. Ding 和 Y. Wei. 利用 $\mathcal{M}$-张量求解多重线性系统. 《科学计算杂志》, 68(2):689–715, 2016年.[21] W. Ding 和 Y. Wei. 张量理论与计算：多维数组. 阿姆斯特丹：爱思唯尔/学术出版社，2016年.[22] C.-E. Du 和 C.-S. Liu. 用于计算非线性薛定谔方程基态的牛顿–野田迭代. 《SIAM科学计算杂志》, 44(4):A2370–A2385, 2022年.[23] S. Friedland、S. Gaubert 和 L. Han. 非负多重线性形式及其推广的佩龙–弗罗贝尼乌斯定理. 《线性代数及其应用》, 438(2):738–749, 2013年.

[24] T. Fujimoto。《弗罗贝尼乌斯定理》的一般化。Toyama University Economic Review，23(2):269–274，1979年。[25] S. Gaubert 和 J. Gunawardena。齐次单调函数的佩龙–弗罗贝尼乌斯定理。《美国数学会汇刊》，356(12):4931–4950，2004年。[26] X. Ge、X. S. Chen 和 S.-W. Vong。广义特征值问题的非精确广义 Noda 迭代。《计算与应用数学杂志》，366:112418，12，2020年。[27] C.-H. Guo、W.-W. Lin 和 C.-S. Liu。求解非负 Z-张量非负特征对的修正牛顿迭代。《数值算法》，80(2):595–616，2019年。[28] S. Hu、Z.-H. Huang、C. Ling 和 L. Qi。关于张量的行列式与特征值理论。《符号计算杂志》，50:508–531，2013年。[29] S. Hu 和 L. Qi。均匀超图的拉普拉斯算子。《组合优化杂志》，29(2):331–366，2015年。[30] S. Hu、L. Qi 和 J. Xie。均匀超图的最大拉普拉斯算子和无符号拉普拉斯算子 H-特征值。《线性代数及其应用》，469:1–27，2015年。[31] P. Huang 和 Q. Yang。求解 Gross-Pitaevskii 方程正基态的基于牛顿法的方法。《科学计算杂志》，90(1):论文第49号，23，2022年。[32] P. Huang、Q. Yang 和 Y. Yang。一类四次最小化问题的全局最优解。《计算与优化应用》，81(3):923–954，2022年。[33] C. T. Kelley。线性与非线性方程的迭代方法，《应用数学前沿》第16卷。工业与应用数学学会（SIAM），宾夕法尼亚州费城，1995年。另有单独提供的软件。[34] T. G. Kolda 和 J. R. Mayo。计算张量特征对的移位幂法。《SIAM矩阵分析与应用杂志》，32(4):1095–1124，2011年。[35] T. G. Kolda 和 J. R. Mayo。计算广义张量特征对的自适应移位幂法。《SIAM矩阵分析与应用杂志》，35(4):1563–1581，2014年。[36] L. Lim。张量的奇异值与特征值：一种变分方法。载于：第1届 IEEE 多传感器自适应处理计算进展国际研讨会，2005年，第129–132页。IEEE，2005年。[37] C.-S. Liu。求解弱不可约非负张量最大特征对的精确与非精确迭代方法。《科学计算杂志》，91(3):论文第78号，24，2022年。[38] C.-S. Liu、C.-H. Guo 和 W.-W. Lin。求解不可约非负三阶张量 Perron 对的保正逆迭代。《SIAM矩阵分析与应用杂志》，37(3):911–932，2016年。[39] C.-S. Liu、C.-H. Guo 和 W.-W. Lin。求解弱不可约非负张量 Perron 对的牛顿–野田迭代。《数值数学》，137(1):63–90，2017年。[40] C. Mo、X. Wang 和 Y. Wei。通过 Zhang神经网络进行时变广义张量特征分析。《神经计算》，407:465–479，2020年。[41] M. Morishima 和 T. Fujimoto。弗罗贝尼乌斯定理、其索洛–萨缪尔森扩展与库恩–塔克定理。《数学经济学杂志》，1(2):199–205，1974年。[42] M. Ng、L. Qi 和 G. Zhou。求解非负张量的最大特征值。《SIAM矩阵分析与应用杂志》，31(3):1090–1099，2009年。[43] G. Ni、L. Qi 和 M. Bai。纠缠几何度量与张量的 U-特征值。《SIAM矩阵分析与应用杂志》，35(1):73–87，2014年。[44] T. Noda。关于非负不可约矩阵最大特征值计算的注记。《数值数学》，17:382–386，1971年。

[45] R. D. Nussbaum。希尔伯特射影度量与迭代非线性映射。美国数学会回忆录，75(391):iv+137，1988年。[46] L. Qi。实对称张量的特征值。《符号计算杂志》，40(6):1302–1324，2005年。[47] L. Qi、H. Chen 和 Y. Chen。张量特征值及其应用，《力学与数学进展》第39卷。施普林格，新加坡，2018年。[48] L. Qi 和 Z. Luo。张量分析：谱理论与特殊张量，《其他应用数学著作》第151卷。宾夕法尼亚州费城：工业与应用数学学会（SIAM），2017年。[49] M. D. Schatz、T. M. Low、R. A. van de Geijn 和 T. G. Kolda。利用张量中的对称性实现高性能：与对称张量进行乘法。《SIAM科学计算杂志》，36(5):C453–C479，2014年。[50] L. Sun、S. Ji 和 J. Ye。用于多标签分类的超图谱学习。载于：第14届 ACM SIGKDD 国际知识发现与数据挖掘会议论文集，第668–676页，2008年。[51] T. Tian、Y. Cai、X. Wu 和 Z. Wen。自旋-F 玻色–爱因斯坦凝聚体的基态。《SIAM科学计算杂志》，42(4):B983–B1013，2020年。[52] X. Wu、Z. Wen 和 W. Bao。计算玻色–爱因斯坦凝聚体基态的正则化牛顿法。《科学计算杂志》，73(1):303–329，2017年。[53] L. You、X. Huang 和 X. Yuan。非负弱不可约张量谱半径的紧确界。《中国数学前沿》，14(5):989–1015，2019年。[54] G. Yu、Z. Yu、Y. Xu、Y. Song 和 Y. Zhou。计算广义张量特征对的自适应梯度法。《计算与优化应用》，65(3):781–797，2016年。[55] L. Zhang、L. Qi 和 G. Zhou。 $\mathcal{M}$-张量及其一些应用。《SIAM矩阵分析与应用杂志》，35(2):437–452，2014年。[56] N. Zhao、Q. Yang 和 Y. Liu。计算弱对称张量的广义特征值。《计算与优化应用》，66(2):285–307，2017年。

附录（MATLAB 代码）

为了　正确运行以下代码，必须将张量工具箱 [1] 添加到路径中　　.

ExampleGenerator.m

%% 示例 1（随机 3x3x3）m = 3; n = 3; I = tenzeros(n∗ones(1,m)); for i = 1:n I(i∗ones(1, m)) = 1; end R = tenrand(n∗ones(1,m)); epsilon = 0.01; c = (1 + epsilon) ∗ max(ttsv(R,ones(n,1),-1)); C = c ∗ I - R; A = tenrand(n∗ones(1,m)); B = A + C; save(’ A(example 1 random 3x3x3).mat’,’A’); save(’ B(example 1 random 3x3x3).mat’,’B’); %% 示例 2（随机 50x50x50x50）m = 4; n = 50; I = tenzeros(n∗ones(1,m)); for i = 1:n I(i∗ones(1, m)) = 1; end R = tenrand(n∗ones(1,m)); epsilon = 0.01; c = (1 + epsilon) ∗ max(ttsv(R,ones(n,1),-1)); C = c ∗ I - R; A = tenrand(n∗ones(1,m)); B = A + C; save(’ A(example 2 random 50x50x50x50).mat’,’A’); save(’B(example 2 random 50x50x50x50).mat’,’ B’); %% 示例 3（随机 4x4x4x4x4x4 对称）m = 6; n = 4; R = rand(n∗ones(1,m)); R = tensor(symtensor(tensor(round(R,4)))); I = tenzeros(size(R)); for i = 1:n I(i∗ones(1,m)) = 1; end A = rand(n∗ones(1,m)); A = tensor(symtensor(tensor(round(A,4)))); gamma = max([1.01 ∗ max(ttsv(R,ones(n,1),-1)),max(R(:)-A(:))∗nˆ (m-1)]);

B = gamma ∗ I - R + A; 保存(’A(示例 3 随机 4x4x4x4x4x4 对称)。mat’,’A’);
保存(’B(示例 3 随机 4x4x4x4x4x4 对称)。mat’,’B’);
%% 示例 4（超图 50x50x50x50）m = 4; n = 50; omega = 1; D =tenzeros(n∗ ones(1,m));

```
for i = 1:5 D(i*ones(1,m)) = n - 2 -i; end D(6*ones(1,m)) = 12;
D(7*ones(1,m)) = 14; for i = 8:n-2 D(i*ones(1,m)) = 15; end
D((n-1)*ones(1,m)) = 10; D(n*ones(1,m)) = 5; C = t
enzeros(n*ones(1,m)); for i1 = 1:5 for i2 =i1+1:n-2 C(i1,i2,i
2+1,i2+2) = factorial(m) / factorial(m-1); end end C =
tensor(symtensor(C)); A = omega * D + C; I = zeros(n*
ones(1,m)); for i = 1:n I(i,i,i,i) = 1; end B = tensor(100 * I);
save('A(示例 4 超图 50x50x50x50).mat','A'); save('B(示例 4 超
图 50x50x50x50).mat','B'); %% 示例 5（非线性特征值二维情形）
m = 4; N = 15; n = N^2; L = 8; h = 2*L / (N+1); beta
= 100000; beta = beta / h^ 2; L = 1/h^ 2 * (2*
eye(N)-diag(ones(N-1,1),1)-diag(ones(N-1,1),-1)); V =
zeros(n,n); for i = 1:N for j = 1:N V((i-1)*N+j,(i-1)*N+j) =h^
2 * (i^ 2+j^ 2); end end A = kron(eye(N),L)+kron(L,eye(N));
B = A + V; kappa = sqrt(norm(A,1)*norm(A,inf)) + beta;
save('data(示例 5 非线性特征值问题).mat','A','B','beta','m','n','
kappa'); %% 示例6（非线性特征值-MGPE）m = 4; N = 63; n
= N^2; L = 2; h = 2*L / (N+1); beta = 100000; beta = beta /
h^ 2; alpha = 100; alpha = alpha / h^ 2; L = 1/h^ 2 * (2*
eye(N)-diag(ones(N-1,1),1)-diag(ones(N-1,1),-1)); V =
zeros(n,n); for i = 1:N
```

for j = 1:N V((i-1)*N+j,(i-1)*N+j) = 1/2 * (i^ 2+j^ 2) + 40 * (sin(pi*i/2)^ 2+ sin(pi*j/2)^2); end end A = 1/2 * (kron(eye(N),L)+kron(L,eye(N))); B = A + V; kappa = sqrt(范数(A,1)*范数(A,inf)) + beta; save('data(示例6 MGPE).mat','A','B','beta','m','n','kappa');

MTNI.m

clearvas; clc; %% 生成示例 %% 示例 1 load("A(example 1 random 3x3x3).mat"); load("B(example 1 random 3x3x3).mat"); %% 示例 2 % load("A(example 2 random 50x50x50x50).mat"); % load("B(example 2 random 50x50x50x50).mat"); %% 示例 3（随机 4x4x4x4x4x4 对称） % load("A(example 3 random 4x4x4x4x4x4 symmetric).mat"); % load("B(example 3 random 4x4x4x4x4x4 symmetric).mat"); %% 示例 4（超图 50x50x50x50） % load("A(example 4 hypergraph 50x50x50x50).mat"); % load("B(example 4 hypergraph 50x50x50x50).mat"); %% 初始化 tic; m = length(size(A)); N = size(A); n = N(1); tol = 1e-13; C = double(B - A); D = zeros(n*ones(1,m)); d = zeros(n,1); for i = 1 : n d(i) = C(i,i,i); % for m=3% d(i) =C(i,i,i,i); % for m=4D(i,i,i) = d(i); % for m=3% D(i,i,i,i) =d(i); % for m=4end b = ones(n,1); x = ones(n,1); x old =x; Temp = tensor(D - C); C = tensor(C); b temp =double(ttsv(Temp,x,-1)) +b; x new = (b temp ./ d) .^ (1/(m-1)); while norm(x new - x old,2) > tol x old = x new; b temp = double(ttsv(Temp,x old,-1)) + b; x new =(b temp ./ d) .^ (1/(m-1)); end x = x new / norm(x new,2); temp1 = ttsv(A,x,-1); temp2 = ttsv(B,x,-1);

temp3 = temp2 - temp1; rho max = max(temp1 ./ temp2); rho = rho max; y = ones(n,1); %% epsilon = 0.01; % 用于示例 1、4 % epsilon = 0.005; % 用于示例 2、3 delta = 1e-13; % 用于示例 1、3 % delta = 1 e-15; % 用于示例 2、4 d = zeros(n,1); 最大迭代次数 = 50; Differ rho = zeros(1,MaxIter); 残差比率 = zeros(1,MaxIter); 残差 = zeros(1,MaxIter); count = zeros(1,MaxIter); for k = 1 : MaxIter M = double(rho * B - A); D = zeros(n* ones(1,m)); for i = 1: n d(i) = M(i,i,i); % for m=3% d(i) = M(i,i,i,i); % for m=4 D(i,i,i) = d(i); % for m=3% D(i,i,i,i) =d(i); % for m=4end y old = y; r = temp3; Temp = tensor(D - M); b temp = ttsv(Temp,y old,-1) + r; y new =(b temp ./ d) .^ (1/(m-1)); count(k) = 0; while norm(y new - y old,2) > delta y old = y new; b temp = ttsv(Temp,y old,-1) + r; y new = (b temp ./ d) .^ (1/(m-1)); count(k) = count(k) + 1; if count(k) >= 3000&& k == 1break; end end y =y new; rho old = rho max; tau =min(temp3 ./ ttsv(C,y,-1)); rho =rho - (1- rho) * tau / (1 - tau); rho = (1 + epsilon) *rho; x = y / norm(y,2); temp1 =ttsv(A,x,-1); temp2 = ttsv(B,x,-1); temp3 = temp2 - temp1; s max = max(temp1 ./ temp3); rho max = s max / (1 + s max); s min =min(temp1 ./ temp3); rho min = s min / (1 + s min); Differ rho(k) =rho old - rho max; 残差比率(k) = abs(rho max-rho min)/rho m

ax;

残差(k) =范数(temp1-rho max*temp2,2); % if 残差(k) < 容差 % 对于对称情形 % break;

% end if 残差比率
(k) < 容差 break;
end end time=toc;

GTNI.m

清除变量；清屏；%% 生成示例 %% 示例 1 加载(”A(示例 1 随机 3x3x3).mat”); 加载(”B(示例 1 随机 3x3x3).mat”); %% 示例 2 % 加载(”A(示例 2 随机 50x50x50x50).mat”); % 加载(”B(示例 2 随机 50x50x50x50).mat”); %% 示例 3（随机 4x4x4x4x4x4 对称） % 加载(”A(示例 3 随机 4x4x4x4x4x4 对称).mat”); % 加载(”B(示例 3 随机 4x4x4x4x4x4 对称).mat”); %% 示例 4（超图 50x50x50x50） % 加载(”A(示例 4 超图 50x50x50x50).mat”); % 加载(”B(示例 4 超图 50x50x50x50).mat”); %% 初始化 tic; m = length(size(A)); N = size(A); n = N(1); 容差 = 1e-13; x = ones(n,1); x = x / 范数(x,2); temp1 = 张量向量乘法(A,x,-1); temp2 = 张量向量乘法(B,x,-1); rho 最大 = max(temp1 ./ temp2); rho 最小 = min(temp1 ./ temp2); rho = 1; y = ones(n,1); %% delta = 1e-13; % 对于示例 1、2 %delta = 1e-15; % 对于示例 3、4 d = zeros(n,1); 最大迭代次数 = 50; 差异 rho = zeros(1,最大迭代次数); 残差比率 = zeros(1,最大迭代次数); 残差 = zeros(1,最大迭代次数); count = zeros(1,最大迭代次数); Epsilon = zeros(1,最大迭代次数); for k = 1 : 最大迭代次数 M = 双精度(rho * B - A); D = zeros(n*ones(1,m)); for i = 1: n d(i) = M(i,i,i); % 对于 m=3% d(i) = M(i,i,i,i); % 对于 m=4D(i,i,i) = d(i); % 对于 m=3% D(i,i,i,i) =d(i); % 对于 m=4

```
end y old = y; r = temp1; Temp = 张量(D - M); b temp = 张量向量乘法(Temp,y old,-1) + r; y new =(b temp ./ d) .^ (1/(m-1)); count(k) = 0; while 范数(y new - y old,2)>delta y old = y new; b temp = 张量向量乘法(Temp,y old,-1) + r; y new = (b temp ./ d) .^ (1/(m-1)); count(k) =count(k) + 1; end y =y new; Epsilon(k) = 1; % Epsilon(k) = 0.01; % 对于示例 4 temp = 1-min(temp1./(张量向量乘法(A,y,-1)+temp1)); while 1 if (1+Epsilon(k)) * temp <= 1break; else Epsilon(k) = Epsilon(k)/2; end end epsilon = Epsilon(k); rho = (1+epsilon) * rho * temp; x = y / 范数(y,2); temp1 =张量向量乘法(A,x,-1); temp2 =张量向量乘法(B,x,-1); rho old =rho 最大; rho 最大 = max(temp1 ./ temp2); rho 最小 = min(temp1 ./ temp2); 差异 rho(k) = rho old - rho 最大; 残差比率(k) = abs(rho 最大-rho 最小)/rho 最大; 残差(k) =范数(temp1-rho 最大*temp2,2); % if 残差(k) < 容差 % 对于对称情形 % break; % end if 残差比率(k) < 容差 break; end end time=toc;
```

IGTNI.m

```
clearvas; clc; %% 生成示例 %% 示例 1 load(”A(example 1 random 3x3x3).mat”); load(”B(example 1 random 3x3x3).mat”); %% 示例 2 % load(”A(example 2 random 50x50x50x50).mat”); % load(”B(example 2 random 50x50x50x50).mat”); %% 示例 3 (随机 4x4x4x4x4x4 对称)
```

% 加载(”A(示例 3 随机 4x4x4x4x4x4 对称).m at”);
% load(”B(示例 3 随机 4x4x4x4x4x4 对称).m at”);
%% 示例 4（超图 50x50x50x50）% load(”
A(example 4 hypergraph 50x50x50x50).mat”); %
load(”B(example 4 hypergraph 50x50x50x50).mat”);
%% 初始化 tic; m = length(size(A)); N = size(A); n =
N(1); 容差 = 1e-13; x = ones(n,1); x = x / 范数(x,2);
temp1 = 张量向量乘法(A,x,-1); temp2 = 张量向量乘法
(B,x,-1); rho max = max(temp1 ./ temp2); rho min =
min(temp1 ./ temp2); rho = 1; y = ones(n,1); %% d
= zeros(n,1); 最大迭代次数 = 50; Differ rho =
zeros(1,最大迭代次数); 残差比率 = zeros(1,最大迭代次
数); 残差 = zeros(1,最大迭代次数); count = zeros(1,最
大迭代次数); gama = zeros(1,最大迭代次数); f =
zeros(1,最大迭代次数); Epsilon= zeros(1,最大迭代次
数); for k = 1 : 最大迭代次数 M = 双精度(rho * B -
A); D = zeros(n*ones(1,m)); for i = 1: n d(i) =
M(i,i,i); % for m=3% d(i) = M(i,i,i,i); % for m=4
D(i,i,i) = d(i); % for m=3% D(i,i,i,i) =d(i); % for m=4
end y old = y; r = temp1; gama(k) = min((rho
max-rho min)/rho max,1e-3); f(k) =max(gama(k)*
min(r),1e-12); Temp = 张量(D - M); b temp = 张量
向量乘法(Temp,y old,-1) + r + f(k); y new =(b
temp ./ d) .^ (1/(m-1)); count(k) = 0; while norm(y
new-y old,2) > 1e-13 % 例如 1、4 % while norm(y
new-y old,2) > 1e-12 % 例如 2 % while norm(y
new-y old,2) > 1e-14 % 例如 3 y old = y new; b
temp = 张量向量乘法(Temp,y old,-1) + r + f(k); y
new = (b temp ./ d) .^ (1/(m-1)); count(k) =count(k)
+ 1; end y =y new; Epsilon(k) = 1; % Epsilon(k) = 0.
01; % 例如 4

temp = 1-min((temp1+f(k))./(张量向量乘法(A,y,-1)+ temp1+f(k))); while 1 if (1+Epsilon(k)) ∗ temp <= 1 break; else Epsilon(k) = Epsilon(k)/2; end end epsilon = Epsilon(k); rho = (1+epsilon) ∗ rho ∗ temp; x = y / 范数(y,2); temp1 =张量向量乘法(A,x,-1); temp2 =张量向量乘法(B,x,-1); rho old =rho max; rho max = max(temp1 ./ temp2); rho min = min(temp1 ./ temp2); Differ rho(k) = rho old- rho max; 残差比率(k) = abs(rho max-rho min)/rho max; 残差(k) =范数(temp1-rho max∗te mp2,2); % if 残差(k) < 容差 % 对称情形 % break; % end if 残差比率(k) < 容差 break; end end time =toc;

GNNI.m

清除变量; 清空命令窗口; %% 加载示例 %% 示例 1 load(” A(example 1 random 3x3x3).mat”); load(”B(example 1 random 3x3x3).mat”); m = length(size(A)); N = size(A); n = N(1); for i = 1:n A(i,:,:) =tensor(symtensor(A(i,:,:))); B(i,:,:) =tensor(symtensor(B(i,:,:))); end %% 示例 2 % load(”A(example 2 random 50x50x50x50).mat”); % load(” B(example 2 random 50x50x50x50).mat”); % m = length(size(A)); % N = size(A); % n = N(1); % for i = 1: n % A(i,:,:,:) =tensor(symtensor(A(i,:,:,:))); % B(i,:,:,:) = tensor(symtensor(B(i,:,:,:))); % end %% 示例 3（随机 4x4x4x4x4x4 对称） % load(”A(example 3 random 4x4x4x4x4x4 symmetric).mat”); % load(”B(example 3 random 4x4x4x4x4x4 symmetric).mat”);

```
% m = length(size(A)); % N = size(A); % n =
N(1); %% 示例 4（超图 50x50x50x50） % l
oad("A(example 4
hypergraph50x50x50x50).m                    在");
% load("B(示例 4 超图 50x50x50x50).m          在");
% m = length(A); % N = size(A); % n =
N(1); %% 初始化 tic; tol = 1e-13; C = double(B -
A); D =zeros(n*ones(1,m)); d = zeros(n,1); for
i = 1 : n d(i) =C(i,i,i); % for m=3% d(i) =
C(i,i,i,i); % for m=4D(i,i,i) =d(i); % for m=3%
D(i,i,i,i) =d(i); % for m=4end b = ones(n,1); x
= ones(n,1); x old =x; Temp = tensor(D - C);
C = tensor(C); b temp =
double(ttsv(Temp,x,-1)) +b; x new = (b te
mp ./ d) .^ (1/(m-1)); while norm(x new - x
old,2) > tol x old = x new; b temp =
double(ttsv(Temp,x old,-1)) + b; x new =(b
temp ./ d) .^ (1/(m-1)); end x = x new / norm(x
new,2); T = double(ttsv(A,x,-2)); T B =
double(ttsv(B,x,-2)); temp1 = T *x; temp2 = T
B *x; rho = max(temp1 ./ temp2); %% 最大迭代
次数 = 50; Differ rho = zeros(1,MaxIter); 残差比
率 = zeros(1,MaxIter); 残差 =
zeros(1,MaxIter); R = zeros(MaxIter,n); theta =
zeros(1,MaxIter); for k = 1: MaxIter M = rho *
B - A; b =temp2; J x = (m - 1) * (rho * T B -
T); w = J x \ b; y = w / norm(w,2); theta(k) = 1;
while 1 x new = (m-2) * x + theta(k) * y; r =
abs(ttsv(M,x new,-1)); R(k,1:n) = r - theta(k) *
b / (2*norm(w)); %
```

m=3

% R(k,1:n) = r - theta(k) * b / (norm(w)); % m>=4if R(k,1:n)>=0& ttsv(C,x new,-1)>0break; else theta(k) = theta(k)/2; end end x = x new / norm(x new,2); rho old =rho; T =double(ttsv(A,x,-2)); T B = double(ttsv(B,x,-2)); temp1 = T *x; temp2 = T B * x; rho max = max(temp1 ./ temp2); rho min = min(temp1 ./ temp2); rho = rho max; Differ rho(k) = rho old- rho; 残差比率(k) = abs(rho max-rho min)/rho max; 残差(k) =norm(temp1-rho max* temp2,2); if 残差比率(k) < tol break; end % if 残差(k) < tol % 对称情形 % break; % end end time =toc;

GNNI NEPv.m（用于示例 5）

清除变量；清空命令窗口；%% 加载示例 %% 示例 5（非线性特征值二维情形）加载(" data(example 5 NEPv).mat"); bb = diag(B); I = eye(n); tt =max(bb); %% 初始化 tic; 容差 = 1e-13; d = (beta - tt) * ones(n,1) + diag(B); b = ones(n,1); x = ones(n,1); x old =x; temp = x old.^(m-1); b temp = bb .* temp - tt * temp - norm(x old)^ (m-2) * (B * x old - tt * x old) + b; x new = (b temp ./ d) .^ (1/(m-1)); while norm(x new - x old,2) > 1e-1 x old = x new; temp = x old.^ (m-1); b temp = bb .* temp - tt * temp - norm(x old)^ (m-2) * (B * x old - tt * x old) + b; x new =(b temp ./ d) .^ (1/(m-1)); end x = x new / norm(x new,2); te mp1 = tt *x;

temp2 = beta * x.^ (m-1) + B * x; rho = max(temp1 ./ temp2); %% 最大迭代次数 = 50; 残差比率 = zeros(MaxIter,1); 残差 = zeros(MaxIter,1); R = zeros(MaxIter,n); theta = zeros(MaxIter,1); for k = 1: MaxIter b =temp2; T = 1/3 * I + 2/3 * (x * x'); T B = beta * diag(x.^ 2) + 1/3*B + 2/3*(B*x)*x'; T =tt * T; J x = (m - 1) * (rho * T B - T); w =双共轭梯度稳定法(J x,b,1e-9,200); y = w / norm(w,2); theta(k) = 1; x new- = (m-2) * x + theta(k) * y; x = x new / norm(x new,2); rho old =rho; temp1 =tt * x; temp2 = beta * x.^ (m-1) + B * x; rho max = max(temp1 ./ temp2); rho min = min(temp1 ./ temp2); rho = rho max; 残差比率(k) = abs(rho max-rho min)/rho max; 残差(k) = norm(temp1-rho max*temp2,2); if Res rho(k) < tol break; end % if Res(k) < tol % 对称情形 % break; % end end time =toc;

GNNI MGPE.m（用于示例6）

清除变量；清空命令窗口；%% 加载示例 %% 示例6（非线性特征值-MGPE）加载("data(example 6 MGPE).mat"); bb = diag(B); tt =max(bb); aa = diag(A); I = eye(n); Beta = beta * I + 2 * alpha * A; %% 初始化 tic; 容差 = 1e-12; d = (beta - tt) * ones(n,1) + bb + 2 * alpha * aa; x = ones(n,1); x = x / 范数(x); temp1 = tt *x; temp2 =beta *x.^ (m-1) + 2*alpha*A*x.^(m-1) + B *x;

```
rho = max(temp1 ./ temp2); %% 最大迭代次数 = 50; 残差比率
rho = zeros(1,最大迭代次数); 残差 = zeros(1,最大迭代次数); R
= zeros(最大迭代次数,n); theta = zeros(1,最大迭代次数); for
k = 1: 最大迭代次数 b =temp2; T B = diag(beta*xx) + A.*
repmat(2*alpha*xx',n,1) + 1/3 * B; T B = T B + 2/3 * (B*x) *
x'; T = 1/3 * tt * I + 2/3 * tt * (x * x'); J x = (m - 1) * (rho *
T B - T); w =双共轭梯度稳定法(J x,b,1e-9,200); y = w / 范数
(w,2); theta(k) = 1; x new = (m-2) * x + theta(k) * y; x = x
new./ 范数(x new,2); rho old =rho; temp1 =tt * x; temp2 =
beta *x.^ (m-1) + 2*alpha*A*x.^ (m-1) +B*x; rho max =
max(temp1 ./ temp2); rho min = min(temp1 ./ temp2); rho =
rho max; 残差比率 rho(k) = abs(rho max-rho min)/rho max;
残差(k) =范数(temp1-rho max*temp2,2); if 残差比率 rho(k) <
容差-break; end % if 残差(k) < 容差 % 对称情形 % break; %
end end_time =toc;
```

对比算法

GEAP.m

```
clearvas; clc; %% 加载示例 %% 示例 3（随机
4x4x4x4x4x4 对称） load("A(example 3 random
4x4x4x4x4x4 symmetric).mat"); load("B(example 3
random 4x4x4x4x4x4symmetric).mat"); %% 示例 4（超
图 50x50x50x50） % load("A(example 4 hypergraph
50x50x50x50).mat"); % load("B(example 4
hypergraph 50x50x50x50).mat"); %% tic; m =
length(size(A)); N = size(A); n = N(1); x = ones(n,1); x
= x / norm(x,2); temp1 = double(ttsv(A,x,-2));
```

temp2 = double(ttsv(B,x,-2)); temp3 = temp1 ∗x; temp4 = temp2 ∗x; temp5 = x’ ∗ temp3; temp6 = x’ ∗temp4; beta = 1; tau = 1e-6; tol = 1e-13; 最大迭代次数 = 50; % 适用于示例 3 % 最大迭代次数 = 200; % 适用于示例 4 Lambda = zeros(MaxIter,1); H = zeros(n); Alpha = zeros(MaxIter,1); 残差 = zeros(MaxIter,1); for k = 1 : MaxIter Lambda(k) = temp5 / temp6; H =mˆ 2∗temp5/(temp6)ˆ3∗2∗(temp4∗temp4’)+m/ t emp6∗((m-1)∗temp1+temp5∗(eye(n)+(m-2)∗(x∗x’))+m∗(temp3∗x’+x∗temp3’))- m/(temp6)ˆ 2∗((m-1)∗temp5∗temp2+m∗(temp3∗temp4’+temp4∗temp3’)+m∗temp5∗(x∗ temp4’+temp4∗x’)); e =eig(beta∗H); Alpha(k) = beta ∗ max(0,(tau-min(e))/m); x = beta ∗ (temp3-Lambda(k)∗temp4+(Alpha(k)+Lambda(k))∗temp6∗x); x = x / norm(x,2); temp1 =double(ttsv(A,x,-2)); temp2 =double(ttsv(B,x,-2)); temp3 = temp1 ∗ x; temp4 = temp2 ∗x; temp5 = x’ ∗temp3; temp6 = x’ ∗temp4; 残差(k) = norm(temp3-Lambda(k)∗temp4,2); if 残差(k) <容差 break; end end lambda = Lambda(k); time =toc;

AG.m

clearvas; clc; %% 加载示例 %% 示例 3（随机 4x4x4x4x4x4 对称张量） load(”A(example 3 random 4x4x4x4x4x4 symmetric).mat”); load(”B(example 3 random 4x4x4x4x4x4symmetric).mat”); %% 示例 4（超图 50x50x50x50） % load(”A(example 4 hypergraph 50x50x50x50).mat”); % load(”B(example 4 hypergraph 50x50x50x50).mat”); %% tic; m = length(size(A)); N = size(A); n = N(1); x = ones(n,1); x = x/norm(x,2); Temp1 = ttsv(A,x,-1);

temp1 = x' *Temp1; Temp2 = ttsv(B,x,-1); temp2 = x' *Temp2; rho = 0.001; % 示例 3 % rho = 0.5; % 示例 4 tol = 1e-13; 最大迭代次数 = 50; % 示例 3 % 最大迭代次数 = 100; % 示例 4 残差 = zeros(1, 最大迭代次数); for k = 1: 最大迭代次数 lambda = temp1 / temp2; g = m/temp2 * (Temp1 - lambda*Temp2); if k == 1alpha = 1/norm(g); else alpha = min(1/norm(g),norm(x-x old)/norm(g-g old)); end x new = sqrt(1-alphaˆ2*norm(g)ˆ 2)*x+alpha*g; count = 0; while ttsv(A,x new,0)/ttsv(B,x new,0) < lambda+rho*alpha*norm(g)ˆ2 alpha = alpha / 2; x new =sqrt(1-alphaˆ2*norm(g)ˆ 2)*x+alpha*g; count = count + 1; % if count >= 2 % 示例 4 % break; % end end Res(k) = norm(Temp1 - lambda * Temp2,2); g old = g; x old = x; x =x new; Temp1 =ttsv(A,x,-1); temp1 = x' *Temp1; Temp2 =ttsv(B,x,-1); te mp2 = x' *Temp2; lambda old = lambda; lambda = temp1 / te mp2; if Res(k) <tol break; end end time =toc;

NQZ.m

清除变量；清空命令窗口；%% 加载示例 %% 示例 4（超图 50x50x50x50）加载("A(example 4 hypergraph50x50x50x50).mat"); m = length(size(A)); N = size(A); n = N(1); %% 计时开始； x = ones(n,1);

x = x / 范数(x,2); y = 双精度(ttsv(A,x,-1)); 容差 = 1
e-13; 最大迭代次数 = 300; 残差比率 =
zeros(1,MaxIter); 残差 = zeros(1,MaxIter); 对 k = 1 :
最大迭代次数 x = y.^ (1/(m-1)); x = x / 范数(x,2); y =
双精度(ttsv(A,x,-1)); lambda ub = max(y ./ x.^ (
m-1)); lambda lb = min(y ./ x.^ (m-1)); 特征值 =
lambda ub; 残差比率(k) = abs(lambda ub - lambda
lb)/lambda ub; 残差(k) = 范数(y - lambda ∗ x.^
(m-1)); 若残差(k) <容差则 break; 结束 结束 时间 =
toc;

NNI NEPv.m（用于示例 5）

清除变量；清空命令窗口；%% 加载示例 %% 示例
5（非线性特征值二维情形）加载(”data(example 5
NEPv).mat”); I = eye(n); %% 初始化 计时； u =
ones(n,1); u = u / 范数(u); AAu = (beta ∗
diag(u.^ 2) + B) ∗ u; 特征值 = min(AAu./u); 最大
迭代次数 = 30; theta = zeros(最大迭代次数,1); 残
差 NNI = zeros(最大迭代次数,1); %% 对于 k = 1:最
大迭代次数 Temp = [B-特征值∗I+3∗beta∗diag(u.^
2),-u;-u’,0]; temp = [AAu-特征值∗u;1/2∗(1-u’∗u)];
delta =双共轭梯度稳定法(Te
mp,-temp,1e-9,200); theta(k) = 1; 当 1 w = u +
theta(k) ∗delta(1:n); w = w / 范数(w); WW =
diag(w.^ 2); h = (beta∗WW + B - 特征值∗I) ∗
w; 如果 h > 0中断; 否则 theta(k) = theta(k) / 2;
结束 结束 u =w;

AAu = beta * diag(u.^2) * u + B * u; 特征值 = min(AAu./u); 残差 NNI(k) = 范数(AAu-特征值*u) / ((kappa+abs(特征值))*范数(u)); 如果 残差 NNI(k) < 1e-11 中断; 结束 结束 时间 =toc;

NNI MGPE.m（用于示例6）

清除变量；清空命令窗口；%% 加载示例 %% 示例6（非线性特征值-MGPE）加载("data(example 6 MGPE).mat")；I = eye(n)；%% 初始化 计时；u = ones(n,1)；u = u / 范数(u)；uuu = u.^3；AAu = beta *uuu + 2 *alpha * A *uuu + B * u；特征值 = min(AAu./u)；最大迭代次数 = 30；theta = zeros(MaxIter,1)；残差 NNI = zeros(MaxIter,1)；%% 对于 k = 1:MaxIter uu = u.^ 2；Temp = [B-lambda*I+diag(3*beta*uu)+A.*repmat(6*alpha* uu',n,1),-u;-u',0]；temp = [AAu-lambda*u；1/2*(1-u'*u)]；delta =双共轭梯度稳定法(Temp,-temp,1e-9,200)；theta(k) = 1；当 1 w = u + theta(k) * delta(1:n)；w = w / 范数(w)；www = w.^ 3；h = beta*www + 2*alpha* A*www + (B - lambda*I)*w；如果 h > 0跳出；否则 theta(k) = theta(k) / 2；结束 结束 u =w；uuu = u.^3；AAu = beta * uuu + 2 * alpha * A * uuu + B * u；特征值 = min(AAu./u)；残差 NNI(k) = 范数(AAu-lambda* u) /-((kappa+abs(lambda))*范数(u))；如果 残差 NNI(k) < 1e-10 跳出；结束 结束 时间 =toc;

NRI 非线性特征值问题.m（用于示例 5）

清除变量；清空命令窗口；%% 加载示例 %% 示例 5（非线性特征值二维情形）加载(”data(example 5 NEPv).mat”)；I = eye(n)；%% 初始化 计时；u = ones(n,1)；特征值 = 1000；最大迭代次数 = 30；残差 NRI = zeros(MaxIter,1)；count = zeros(MaxIter,1)；%% 对于 k = 1:MaxIter u =ones(n,1)；对于 l = 1:100 u old = u；Temp = 3 ∗ beta ∗ diag(u.ˆ 2) + B - lambda ∗ I；temp = 2 ∗ beta ∗ u.ˆ 3；u = triblocksolve(Temp,temp,N)；count(k) =count(k) + 1；如果 (范数(u-u old)+范数(beta∗u.ˆ3+B∗u-lambda∗u))/范数(u) < 1e-10 跳出；结束 结束 Temp = 3 ∗ beta ∗ diag(u.ˆ 2) + B - lambda ∗ I；temp = triblocksolve(Temp,u,N)；特征值 = 特征值 - abs(u’∗u-1) / (2∗u’∗temp)；残差 NRI(k) = 范数(beta∗u.ˆ3+B∗u-lambda∗u)；如果 残差 NRI(k) < 1 e-11 跳出；结束 结束 时间 =toc；