arXiv:2303.01333v1 [math.NT] 2 Mar 2023

关于 Zagier 的某些双重 Nahm 和

曹志能、Hjalmar Rosengren 和王留全

Abstract. Zagier 为 Nahm 问题提出了十一个猜想性的秩二例子。除第五个例子外，文献中已证明了所有例子；而第十个例子尚无 q级数证明。我们证明第五个和第十个例子实际上是等价的。随后，我们给出第五个例子的一个 q级数证明，从而证实了王最近提出的一个猜想。这也为第十个例子首次给出了 q级数证明；其显式形式由 Vlasenko 和 Zwegers 于 2011年猜想提出。

1. 引言与主要结果

在他 1894年 的论文中，Rogers [10] 发现了许多和-乘积 q级数恒等式。其中最著名的是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q,q^4;q^5)_\infty},\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(q;q)_n}=\frac{1}{(q^2,q^3;q^5)_\infty}. \tag{1.1}$$

本文中以及全文其余部分，我们都使用标准的 q级数记号：

$$(a;q)_0:=1,\quad (a;q)_n:=\prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k),\quad (a;q)_\infty:=\prod_{k=0}^{\infty}(1-aq^k), \tag{1.2}$$

$$(a_1,\cdots,a_m;q)_n:=(a_1;q)_n\cdots(a_m;q)_n,\quad n\in\mathbb{N}\cup\{\infty\}. \tag{1.3}$$

恒等式 (1.1) 称为 Rogers–Ramanujan 恒等式，因为 Ramanujan 在 1913 年之前的某个时候重新发现了它们。这些恒等式启发了大量寻找类似恒等式的研究。Rogers–Ramanujan 型恒等式是 q 级数理论与模形式之间深刻联系的有力例证。将右端乘以适当次幂的 q 后，(1.1) 的右端就成为模形式。这一点从求和式一侧并不明显。

一般而言，要判定给定的 q-超几何级数是否为模形式，可能非常困难。受共形场论应用的启发，Nahm [9]建议针对一类特殊的多重级数研究这一问题。更确切地说，给定正整数 r，Nahm 问题旨在确定所有满足下述条件的 $r\times r$ 正定有理矩阵 A、长度为 r 的有理向量 B 以及有理标量 C：

$$f_{A,B,C}(q):=\sum_{n=(n_1,\ldots,n_r)^{\mathrm{T}}\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^r}\frac{q^{\frac{1}{2}n^{\mathrm{T}}An+n^{\mathrm{T}}B+C}}{(q;q)_{n_1}\cdots(q;q)_{n_r}} \tag{1.4}$$

2010年 数学主题分类。11P84、33D15、33D45。关键词和短语：Nahm 和；Rogers–Ramanujan 恒等式；和积恒等式；常数项方法。

是一个模形式。级数 $f_{A,\ B,\ C}(q)$ 通常称为 Nahm 和；当 $f_{A,\ B,\ C}(q)$ 是模形式时，(A,B,C) 称为模三元组。

当秩为 $r=1$ 时，Zagier [13] 证明恰有七个模三元组，其中两个对应于 Rogers–Ramanujan 恒等式 (1.1)。当秩为 $r=2$ 时，他进行了大规模计算机搜索，得到十一组可能的模三元组，并记录于 [13] 中的表 2。除一个例子外，其余例子均已由 Zagier [13], Vlasenko 和 Zwegers [11],Cherednik 和 Feigin [5], Lee [8], Calinescu、Milas 和 Penn [4], 以及王 [12]予以证实。关于这十一个例子的全面讨论见王的著作 [12]。循此，我们按照 Zagier 列表 [13, 表 2] 中各例出现的顺序，将其编号为 1 至 11。

在这些例子中，第五个和第十个相当特殊。迄今为止，除例 5 外，其余十个例子均已得到证明；例 5 对应于

$$A=\begin{pmatrix}1/3 & -1/3\\ -1/3 & 4/3\end{pmatrix},\quad B\in\left\{\begin{pmatrix}-1/6\\ 2/3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/2\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

王 [12] 猜想了本例中 Nahm 和的显式模乘积表示，即 [12,猜想 3.5],

$$\begin{aligned}S_1(q)&:=\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{\frac{1}{2}i^2-ij+2j^2-\frac{1}{2}i+2j}}{(q^3;q^3)_i(q^3;q^3)_j}\\&=3\frac{(q^6;q^6)_\infty(q^{18},q^{27},q^{45};q^{45})_\infty}{(q^3;q^3)_\infty^2}-\frac{(q^4,q^6,q^{10};q^{10})_\infty(q,q^5,q^{11},q^{19},q^{25},q^{29};q^{30})_\infty}{(q^3;q^3)_\infty(q^3,q^{27};q^{30})_\infty},\end{aligned}\tag{1.5a}$$

$$\begin{aligned}S_2(q)&:=\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{\frac{1}{2}i^2-ij+2j^2+\frac{3}{2}i}}{(q^3;q^3)_i(q^3;q^3)_j}\\&=3q^2\frac{(q^6;q^6)_\infty(q^9,q^{36},q^{45};q^{45})_\infty}{(q^3;q^3)_\infty^2}+\frac{(q^2,q^8,q^{10};q^{10})_\infty(q^5,q^7,q^{13},q^{17},q^{23},q^{25};q^{30})_\infty}{(q^3;q^3)_\infty(q^9,q^{21};q^{30})_\infty}.\end{aligned}\tag{1.5b}$$

例 10 也很特别，因为迄今尚无针对它的 q-级数证明。对于其他所有例子，其模性都通过将级数显式求和为无穷乘积得到验证。相比之下，对于例 10，Cherednik 和 Feigin 使用幂零双仿射 Hecke 代数直接证明了和式一侧的模性 [5, p. 1074]。本例的矩阵部分和向量部分为

$$A=\begin{pmatrix}4/3 & 2/3\\ 2/3 & 4/3\end{pmatrix},\quad B\in\left\{\begin{pmatrix}-2/3\\ -1/3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/3\\ -2/3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right\}.$$

由于 A 的 (1, 1) 和 (2, 2) 项相同，实际上只涉及两个 Nahm 和。Vlasenko 和 Zwegers [11] 对这些 Nahm 和作出了如下猜想：

$$S_3(q):=\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{2i^2+2ij+2j^2-2i-j}}{(q^3;q^3)_i(q^3;q^3)_j}$$

$$= \frac{(q^{45};q^{45})_\infty}{(q^3;q^3)_\infty}\left(2(q^{18},q^{27};q^{45})_\infty + q(q^{12},q^{33};q^{45})_\infty + q^4(q^3,q^{42};q^{45})_\infty\right), \tag{1.6a}$$

$$S_4(q) := \sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{2i^2+2ij+2j^2}}{(q^3;q^3)_i(q^3;q^3)_j}$$

$$= \frac{(q^{45};q^{45})_\infty}{(q^3;q^3)_\infty}\left((q^{21},q^{24};q^{45})_\infty - q^3(q^6,q^{39};q^{45})_\infty + 2q^2(q^9,q^{36};q^{45})_\infty\right). \tag{1.6b}$$

这些恒等式源自 Cherednik 和 Feigin 的工作，因为已知等式两边具有相同的模行为，验证它们相等是直接的。然而，仍有待使用 q-级数技术给出直接证明。

本文的主要目标是为例 5 和例 10 提供 q-级数证明。令人惊讶的是，我们将证明这两个例子是等价的，也就是说，它们可以相互转化。为实现这种转化，我们建立了以下变换公式。

定理 1.1. 对于 $(a_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ 任意一个使下列级数绝对收敛的序列，

$$\sum_{i,j\geq 0}\frac{a_{i-j}q^{\frac{j(j-1)}{2}}x^j}{(q;q)_i(q;q)_j} = (-x;q)_\infty\sum_{i,j\geq 0}\frac{a_{i-j}q^{\frac{j(j-1)}{2}+ij}x^j}{(q;q)_i(q;q)_j(-x;q)_j}. \tag{1.7}$$

我们只会用到 $a_k = q^{ak^2+bk}$ and $x = q$ 的特殊情形，此时收敛需要$a > 0$。它的形式为

$$\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{a(i-j)^2+b(i-j)+\frac{j(j+1)}{2}}}{(q;q)_i(q;q)_j} = (-q;q)_\infty\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{a(i-j)^2+b(i-j)+\frac{j(j+1)}{2}+ij}}{(q;q)_i(q^2;q^2)_j}. \tag{1.8}$$

利用 (1.8) 和常数项方法 [3,§4], ，我们发现例 5 和例 10 中的 Nahm 和仅相差一个简单因子。

定理 1.2. 我们有

$$S_1(q) = (-q^3;q^3)_\infty S_3(q), \quad S_2(q) = (-q^3;q^3)_\infty S_4(q). \tag{1.9}$$

鉴于这一定理，例 5 和例 10 等价，因此只需证明其中一个。我们将给出例 5 的一个 q-级数证明，由此得到以下结果。

定理 1.3。我们有

$$S_1(q) = \frac{(q^4;q^4)_\infty}{(q^3;q^3)_\infty(q^6;q^{12})_\infty}\left(2\frac{(-q^4;q^4)_\infty^2}{(q^{24},q^{96};q^{120})_\infty} + q\frac{(-q^2;q^4)_\infty^2}{(q^{12},-q^{18};-q^{30})_\infty}\right), \tag{1.10a}$$

$$S_2(q) = \frac{(q^4;q^4)_\infty}{(q^3;q^3)_\infty(q^6;q^{12})_\infty}\left(\frac{(-q^2;q^4)_\infty^2}{(-q^6,q^{24};-q^{30})_\infty} + 2q^5\frac{(-q^4;q^4)_\infty^2}{(q^{48},q^{72};q^{120})_\infty}\right). \tag{1.10b}$$

注意，(1.10) 中的右端看起来与 (1.5) 和 (1.6) 中的表达式不同。然而，由于所有这些表达式（除相差 q 的幂次因子外）都是模形式，相应的恒等式可以自动证明。我们使用 [6] 中介绍的 Maple 软件包完成了这项工作。因此，下面的结果是定理 1.2 和定理 1.3 的推论。

定理 1.4。猜想的恒等式 (1.5) 和此前已知的恒等式 (1.6) 均成立。

2. Proofs of Theorems 1.1 and 1.2

我们需要欧拉的 q-指数恒等式 [1, 推论 2.2]

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(q;q)_n}=\frac{1}{(z;q)_\infty},\quad |z|<1,\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{\binom{n}{2}}z^n}{(q;q)_n}=(-z;q)_\infty. \tag{2.1}$$

我们引入乘法型 theta 函数

$$\theta(z;q):=(q,z,q/z;q)_\infty,$$

它满足雅可比三重积恒等式 [1, 定理 2.8]

$$\theta(z;q)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\binom{n}{2}}z^n \tag{2.2}$$

以及拟周期性

$$\theta(zq^k;q)=(-1)^k q^{-\frac{k(k-1)}{2}}z^{-k}\theta(z;q). \tag{2.3}$$

对于任意级数 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a(n)z^n$，我们将常数项提取算子 CT（关于 z）定义为

$$\mathrm{CT}f(z)=a(0).$$

定理 1.1 的证明。我们将使用 q-Chu–Vandermonde 求和公式的一个特殊情形，其写法见 [2, 第 20], 页。

$$\frac{1}{(q;q)_i(q;q)_j}=\sum_{k=0}^{\min(i,j)}\frac{q^{(i-k)(j-k)}}{(q;q)_k(q;q)_{i-k}(q;q)_{j-k}}. \tag{2.4}$$

由此可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j\ge0}\frac{a_{i-j}q^{\frac{j(j-1)}{2}}x^j}{(q;q)_i(q;q)_j}=\sum_{i,j\ge0}\sum_{k=0}^{\min(i,j)}\frac{a_{i-j}q^{\frac{j(j-1)}{2}+(i-k)(j-k)}x^j}{(q;q)_{i-k}(q;q)_{j-k}(q;q)_k}\\
&=\sum_{i,j,k\ge0}\frac{a_{i-j}q^{\frac{(j+k)(j+k-1)}{2}+ij}x^{j+k}}{(q;q)_i(q;q)_j(q;q)_k}=\sum_{i,j\ge0}\frac{a_{i-j}q^{\frac{j(j-1)}{2}+ij}x^j}{(q;q)_i(q;q)_j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{q^{\frac{k(k-1)}{2}+jk}x^k}{(q;q)_k}\\
&=(-x;q)_\infty\sum_{i,j\ge0}\frac{a_{i-j}q^{\frac{j(j-1)}{2}+ij}x^j}{(q;q)_i(q,-x;q)_j},
\end{aligned}$$

最后一步用到了 (2.1)。 □

现在我们可以证明定理 1.2 中的关系式。

定理 1.2 的证明。由 (1.8) 可得

$$S_1(q)=\sum_{i,j\ge0}\frac{q^{\frac12 i^2-ij+2j^2-\frac12 i+2j}}{(q^3;q^3)_i(q^3;q^3)_j}=(-q^3;q^3)_\infty\sum_{i,j\ge0}\frac{q^{\frac12 i^2+2ij+2j^2-\frac12 i+2j}}{(q^3;q^3)_i(q^6;q^6)_j}, \tag{2.5a}$$

$$S_2(q)=\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{\frac{1}{2}i^2-ij+2j^2+\frac{3}{2}i}}{(q^3;q^3)_i(q^3;q^3)_j}=(-q^3;q^3)_\infty\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{\frac{i^2}{2}+2ij+2j^2+\frac{3i}{2}}}{(q^3;q^3)_i(q^6;q^6)_j}. \tag{2.5b}$$

接下来，我们使用常数项方法将等式右侧的双重级数转换为新的形式。考虑更一般的级数

$$F(x,y):=\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{\frac{1}{2}(i+2j)(i+2j-1)}x^iy^j}{(q^3;q^3)_i(q^6;q^6)_j}.$$

由 (2.1) 和 (2.2)，我们可以写成

$$F(x,y)=\mathrm{CT}\sum_{i,j\geq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1)}x^iy^jz^{i+2j}(-1)^{i+n}}{(q^3;q^3)_i(q^6;q^6)_jz^n}=\mathrm{CT}\frac{\theta(1/z;q)}{(-xz;q^3)(yz^2;q^6)_\infty}.$$

特别地，

$$\frac{S_1(q)}{(-q^3;q^3)_\infty}=F(1,q^3)=\mathrm{CT}\frac{\theta(1/z;q)}{(-z;q^3)_\infty(q^3z^2;q^6)_\infty}. \tag{2.6}$$

也可以将其写成

$$\begin{aligned}\frac{S_1(q)}{(-q^3;q^3)_\infty}&=\mathrm{CT}\frac{(z;q^3)_\infty\theta(1/z;q)}{(z^2;q^3)_\infty}\\&=\mathrm{CT}\sum_{i,j\geq 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^iq^{\frac{3}{2}i(i-1)}z^i}{(q^3;q^3)_i}\frac{z^{2j}}{(q^3;q^3)_j}\frac{(-1)^nq^{\frac{n(n-1)}{2}}}{z^n}\\&=\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{\frac{3}{2}i(i-1)+\frac{1}{2}(i+2j)(i+2j-1)}}{(q^3;q^3)_i(q^3;q^3)_j},\end{aligned} \tag{2.7}$$

我们由此认出它是和 $S_3(q)$。同理，

$$\frac{S_2(q)}{(-q^3;q^3)_\infty}=F(q^2,q)=\mathrm{CT}\frac{\theta(1/z;q)}{(-q^2z;q^3)_\infty(qz^2;q^6)_\infty}=\mathrm{CT}\frac{(q^2z;q^3)_\infty\theta(1/z;q)}{(qz^2;q^3)_\infty}.$$

按 (2.7) 展开后，我们会多出一个因子 q^{2i+j}。也就是说，我们得到级数 $S_4(q)$。□

3. Proof of Theorem 1.3

定理 1.3 的证明将基于以下四个恒等式

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n}}=\frac{1}{(q;q^2)_\infty(q^4,q^{16};q^{20})_\infty}, \tag{3.1a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(q;q)_{2n}}=\frac{1}{(q;q^2)_\infty(-q,q^4;-q^5)_\infty}, \tag{3.1b}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+1)}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{1}{(q;q^2)_\infty(q^2,-q^3;-q^5)_\infty}, \tag{3.1c}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n(n+2)}}{(q;q)_{2n+1}}=\frac{1}{(q;q^2)_\infty(q^8,q^{12};q^{20})_\infty}, \tag{3.1d}$$

这些恒等式是 Rogers 在与式 (1.1) 相同的论文中得到的， [10, 第 331–332] 页。

我们注意到 $S_1(q) = G(1, q^2)$ 和 $S_2(q) = G(q^2, 1)$，其中

$$G(x,y) := \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{i(i-1)}{2}-ij+2j^2} x^i y^j}{(q^3;q^3)_i (q^3;q^3)_j}.$$

By t根据以下结果，这两个双重级数都可以约化为单个级数 s.

引理 3.1. 我们有如下约化公式

$$\begin{aligned}&(q^3;q^3)_\infty G(x, q^2/x)\\ &\quad = \theta(-x;q^4) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{6j^2} x^{3j}}{(q^6;q^6)_{2j}} + qx^2 \theta(-q^2x;q^4) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{6j(j+1)} x^{3j}}{(q^6;q^6)_{2j+1}}. \quad (3.2)\end{aligned}$$

证明。由于

$$\frac{i^2}{2} - ij + 2j^2 = \frac{3j^2}{2} + \frac{(i-j)^2}{2},$$

我们可以写成

$$G(x,y) = \mathrm{CT} \sum_{i,j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{q^{-\frac{i}{2}+\frac{3j^2}{2}+\frac{k^2}{2}} x^i y^j z^{i-j-k}}{(q^3;q^3)_i (q^3;q^3)_j}.$$

在对级数求和之前，我们乘以 $(-1)^{i+j+k} q^{(i-j-k)/2}$，这不会改变常数项。由此得到

$$\begin{aligned}G(x,y) &= \mathrm{CT} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-xz)^i}{(q^3;q^3)_i} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{q^{\frac{3j(j-1)}{2}} (-qy/z)^j}{(q^3;q^3)_j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2}} z^{-k}\\ &= \mathrm{CT} \frac{(qy/z;q^3)_\infty \theta(1/z;q)}{(-xz;q^3)_\infty},\end{aligned}$$

这里用到了 (2.1) 和 (2.2)。当 $y = q^2/x$ 时，可以将其写为

$$\mathrm{CT} \frac{(q^3/xz;q^3)_\infty \theta(1/z;q)}{(-xz;q^3)_\infty} = \mathrm{CT} \frac{\theta(q^3/xz;q^3)_\infty \theta(1/z;q)}{(q^3;q^3)_\infty (x^2z^2;q^6)_\infty}.$$

分子具有如下洛朗展开

$$\begin{aligned}\theta(q^3/xz;q^3)_\infty \theta(1/z;q) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{\frac{3k(k+1)}{2}} (xz)^{-k} \sum_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^l q^{\frac{l(l-1)}{2}} z^{-l}\\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m z^{-m} q^{\frac{m(m-1)}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{k(2k+2-m)} x^{-k}\\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m z^{-m} q^{\frac{m(m-1)}{2}} \theta(-q^{4-m}/x;q^4),\end{aligned}$$

其中我们代入了 $l = m - k$，并再次使用了 (2.2)。由此可得

$$G(x, q^2/x) = \frac{1}{(q^3;q^3)_\infty} \mathrm{CT} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(xz)^{2j}}{(q^6;q^6)_j} \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m z^{-m} q^{\frac{m(m-1)}{2}} \theta(-q^{4-m}/x;q^4)$$

$$= \frac{1}{(q^3;q^3)_\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{j(2j-1)}x^{2j}}{(q^6;q^6)_j}\theta(-q^{4-2j}/x;q^4).$$

我们将求和拆分为 j 为偶数和奇数的项。再利用 (2.3)，第一项可写为

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{2j(4j-1)}x^{4j}}{(q^6;q^6)_{2j}}\theta(-q^{4-4j}/x;q^4) = \theta(-q^4/x;q^4)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{6j^2}x^{3j}}{(q^6;q^6)_{2j}}.$$

同理，第二项为

$$\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{(2j+1)(4j+1)}x^{4j+2}}{(q^6;q^6)_{2j+1}}\theta(-q^{2-4j}/x;q^4) = qx^2\theta(-q^2/x;q^4)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{6j(j+1)}x^{3j}}{(q^6;q^6)_{2j+1}}. \quad \square$$

P定理 1.3 的证明。在特殊情形 $x=1$ 和 $x=q^2$下，(3.2) 化简为 o

$$G(1,q^2) = \frac{(q^4;q^4)_\infty}{(q^3;q^3)_\infty}\left(2(-q^4;q^4)_\infty^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{6j^2}}{(q^6;q^6)_{2j}} + q(-q^2;q^4)_\infty^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{6j(j+1)}}{(q^6;q^6)_{2j+1}}\right),$$

$$G(q^2,1) = \frac{(q^4;q^4)_\infty}{(q^3;q^3)_\infty}\left((-q^2;q^4)_\infty^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{6j(j+1)}}{(q^6;q^6)_{2j}} + 2q^5(-q^4;q^4)_\infty^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{6j(j+2)}}{(q^6;q^6)_{2j+1}}\right).$$

我们注意到，这四个级数可利用 Rogers 恒等式 (3.1) 求和。化简后即可得到定理 1.3。□

4. Some Byproducts and Concluding Remarks

在结束本文之前，我们提出几点意见。

正如我们在定理 1.2 的证明中所见，对于本质上相同的 Nahm 和，我们可能有不同的双重级数表示。事实上，例 5 中的 Nahm 和还有另一对双重求和表示。我们可以将 (2.6) 写成

$$\frac{S_1(q)}{(-q^3;q^3)_\infty} = \mathrm{CT}\frac{\theta(1/z;q)_\infty}{(-z;q^{3/2})_\infty(q^{3/2}z;q^3)_\infty} = \sum_{i,j\ge 0}\frac{(-1)^j q^{\frac{(i+j)^2}{2}-\frac{i}{2}+j}}{(q^{3/2};q^{3/2})_i(q^3;q^3)_j}. \tag{4.1a}$$

同理，

$$\frac{S_2(q)}{(-q^3;q^3)_\infty} = \mathrm{CT}\frac{\theta(1/z;q)}{(-q^{1/2}z;q^{3/2})_\infty(q^{1/2}z;q^3)_\infty} = \sum_{i,j\ge 0}\frac{(-1)^j q^{\frac{(i+j)^2}{2}}}{(q^{3/2};q^{3/2})_i(q^3;q^3)_j}. \tag{4.1b}$$

请注意，定理 1.3 不仅计算了例 5 中的 Nahm 和，也计算了 (2.5) 和 (4.1) 右端的另一种双重求和。

在定理 1.2 的证明中，我们从例 5 中的双重级数开始。如果改从例 10 开始，则会得到一个有趣的副结果。令

$$H(x,y) := \sum_{i,j\ge 0}\frac{q^{2i^2+2ij+2j^2}x^iy^j}{(q^3;q^3)_i(q^3;q^3)_j}. \tag{4.2}$$

将 $2i^2+2ij+2j^2=(2i+j)^2/2+3j^2/2$ 写成这种形式，我们发现

$$\begin{aligned} H(x,y) &= \mathrm{CT}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{q^i x^i z^{2i}}{(q^3;q^3)_i}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j q^{j(3j+1)/2}y^j z^j}{(q^3;q^3)_j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k(k-1)/2}z^{-k} \\ &= \mathrm{CT}\frac{(yzq^2;q^3)_\infty \theta(1/z;q)}{(qxz^2;q^3)_\infty}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

这个表达式打破了 x 与 y之间的对称性。级数 $S_3(q)$可以表示为 $H(q^{-2},q^{-1})$，也可以表示为 $H(q^{-1},q^{-2})$。采用第一种形式会得到 (2.5a) 右端的双重级数，而采用第二种形式则会得到略有不同的结果。具体而言，

$$\begin{aligned} H(q^{-1},q^{-2}) &= \mathrm{CT}\frac{(qz;q^3)_\infty\theta(1/z;q)}{(q^{-1}z^2;q^3)_\infty} = \mathrm{CT}\frac{\theta(1/z;q)}{(-qz;q^3)_\infty(q^{-1}z^2;q^6)_\infty} \\ &= \mathrm{CT}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i q^i z^i}{(q^3;q^3)_i}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{q^{-j}z^{2j}}{(q^6;q^6)_j}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{k(k-1)/2}z^{-k} \\ &= \sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{\frac{1}{2}i^2+2ij+2j^2+\frac{1}{2}i-2j}}{(q^3;q^3)_i(q^6;q^6)_j}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

与 (2.5a) 右端的级数相比，唯一的区别是，q指数中的线性项里，(i,j) 被替换为 $(-i,-j)$。由此得到如下有趣的推论。

推论 4.1。我们有

$$\sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{\frac{1}{2}i^2+2ij+2j^2-\frac{1}{2}i+2j}}{(q^3;q^3)_i(q^6;q^6)_j} = \sum_{i,j\geq 0}\frac{q^{\frac{1}{2}i^2+2ij+2j^2+\frac{1}{2}i-2j}}{(q^3;q^3)_i(q^6;q^6)_j}. \tag{4.5}$$

本文最后提出一个自然的问题：能否直接证明这一推论?

致谢。本文得到国家自然科学基金（12171375）和瑞典科学研究委员会（2020- 04221）的资助。

References

[1] G.E. Andrews，《分拆理论》，Addison-Wesley，1976年；剑桥再版，1998年。[2] G.E. Andrews，多重 q-级数恒等式，《休斯敦数学杂志》7(1)（1981年），11–22。[3] G.E. Andrews，《 q-级数：其在分析、数论、组合学、物理学和计算机代数中的发展与应用》，美国数学会，1986年。[4] C. Calinescu、A. Milas 和 M. Penn，基本$A_{2n}^{(2)}$-模的主子空间的顶点代数结构，《纯粹与应用代数杂志》220（2016年），1752–1784。[5] I. Cherednik 和 B. Feigin，Rogers–Ramanujan 型恒等式与 Nil-DAHA，《数学进展》248（2013年），1050–1088。[6] J. Frye 和 F.G. Garvan，θ 函数恒等式的自动证明，载于《量子场论中的椭圆积分、椭圆函数与模形式》，《符号计算专著丛书》，Springer，Cham，2019年，第195–258页。[7] G. Gasper 和 M. Rahman，《基本超几何级数》，第2版，《数学及其应用百科全书》第96卷，剑桥大学出版社，2004年。

[8] C.-H. Lee，《模 q-超几何级数中的代数结构》，博士论文，加利福尼亚大学伯克利分校，2012年。[9] W. Nahm，共形场论与 Bloch 群的挠元，载于《数论、物理学与几何学前沿 II》，Springer，2007年，第67–132页。[10] L.J. Rogers，关于某些无穷乘积展开的第二篇论文，《伦敦数学学会会刊》25（1894年），318–343。[11] M. Vlasenko 和 S. Zwegers，Nahm 猜想：渐近计算与反例，《数论与物理学通讯》5(3)（2011年），617–642。[12] L. Wang，关于 Nahm 猜想中 Zagier 的秩二例子的恒等式，arXiv:2210.10748。[13] D. Zagier，二对数函数，载于《数论、物理学与几何学前沿 II》，Springer，2007年，第3–65页。

School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei, People's Republic of China电子邮箱：zhncao@whu.edu.cnMathematical Sciences, Chalmers University of Technology and University ofGothenburg, SE-41296 Gothenburg, Sweden电子邮箱：hjalmar@chalmers.se
School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, Hubei, People's Republic of China电子邮箱：wanglq@whu.edu.cn;mathlqwang@163.com