arXiv:2303.01336v1 [math.CA] 2 Mar 2023

外部 $L^{p,\infty}$ 空间的对偶性

MARCO FRACCAROLI

摘要。测度空间上函数的 $L^{p,\infty}$ 准范数可以通过它们与归一化示性函数的配对来刻画。我们将这一结果推广到适当大小函数对应的外部 $L^{p,\infty}$ 准范数情形。这一刻画为 Di Plinio 和 Fragkos 的一篇文章中出现的某些隐式定义的准范数提供了显式形式。

1. 引言

在分析学中，通过与适当归一化的示性函数配对来刻画测度空间 (X,ω) 上函数的经典 $L^{p,\infty}$ 准范数（或弱 L^p 准范数），是一项标准结果。一方面，对于每个 $p\in(1,\infty]$，它揭示了 $L^{p,\infty}$ 空间与赋予类似于 L^p 空间和 $L^{p'}$ 空间之间 Köthe 对偶性的 $L^{p'_1}$ 准范数的示性函数集合族之间的 Köthe 对偶性。另一方面，对于每个$p\in(0,1]$，这种配对更为微妙。

为陈述这两个刻画，对于每个测度空间 $(X、\omega)$，我们引入以下辅助记号。首先，定义 Σ 为ω-可测子集的集合族，并定义 $\mathcal{M}$ 为 X 上的 Σ-可测函数的集合族。接下来，我们定义集合族 $\Sigma_\omega\subseteq\Sigma$ 为

$$\Sigma_\omega\coloneqq\Big\{A\in\Sigma\colon\omega(A)\notin\{0,\infty\}\Big\},$$

对于每个可测子集 $A\in\Sigma_\omega$，我们定义集合族 $\Sigma''_\omega(A)\subseteq\Sigma$ 为

$$\Sigma''_\omega(A)\coloneqq\Big\{B\in\Sigma\colon B\subseteq A,\omega(B)\geqslant\frac{\omega(A)}{2}\Big\}.$$

我们有如下关于 $L^{p、\infty}$ 准范数的刻画。[1]

定理 1.1（例如，[10]中的引理 2.6）。对于每个 $p\in(0,\infty]$ 存在一个常数 $C=C(p)$，使得对于每个测度空间 (X,ω) 以下性质成立。

(i) 对于每个 $p>1$ 以及每个函数 $f\in L^{p,\infty}(X,\omega)$，我们有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\omega)}\sim_C\sup\Big\{\omega(A)^{\frac{1}{p}-1}\|f1_A\|_{L^1(X,\omega)}\colon A\in\Sigma_\omega\Big\}.$$

日期：2023年3月3日。2020 数学主题分类。42B35（主类），46E30（次类）。关键词和短语。外 Lorentz $L^{p、q}$ 空间，L^p的 Köthe 对偶性、∞ 准范数、外测度、上半三维空间。[1]全文中，记号 $\alpha\sim_C\beta$ 与 $\alpha、\beta、C>0$ 表示 $\alpha\leqslant C\beta$ 且 $\beta\leqslant C\alpha$。

(ii) 对于每个 $p \leqslant 1$ 以及每个函数 $f \in L^{p,\infty}(X, \omega)$，我们有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}(X,\omega)} \sim_C \sup\left\{ \inf\left\{\omega(A)^{\frac{1}{p}-1}\|f1_B\|_{L^1(X,\omega)} \colon B \in \Sigma''_\omega(A)\right\} \colon A \in \Sigma_\omega \right\}.$$

在本文中，我们旨在证明外 $L^{p,\infty}$ 测度空间上函数的准范数情形下的类似结果。该准范数由 Do 和 Thiele 于 [4]中引入。关于 Do 和 Thiele 的文章 [4], 、本文作者的相关论文及博士论文 [5, 7, 6] ，可参阅以更详细地了解外 L^p 空间理论的引言。不过，为使本文自洽，我们将简要回顾一些基本定义。

特别地，我们关注外 $L^{p,\infty}$ 准范数在σ-有限情形 (X, μ, ω) 下的情形，其定义如下。首先，我们回顾一下，集合 X 上的一个外测度μ 是从 $\mathcal{P}(X)$（即 X的子集集合族）到 $[0, \infty]$的函数，并满足以下性质：

(i) $\mu(\varnothing) = 0$。(ii) 对任意满足 $A \subseteq B$ 的子集 $A, B \subseteq X$，有 $\mu(A) \leqslant \mu(B)$。(iii) 对于每个可数集合族 $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$ 有

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

定义 1.2 (σ-有限情形)。设 X 为一个集合，ω 为 σ上的一个 X-有限测度，μ 为 σ上的一个 X-有限外测度。也就是说，假设存在两个可数集合族 $\{A_n \colon n \in \mathbb{N}\}$，$\{B_n \colon n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(X)$，使得

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n,$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \omega(A_n) < \infty, \qquad \mu(B_n) < \infty.$$

我们假设对每个子集 $A \subseteq X$，都有

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow \omega(A) = 0.$$

我们将 (X, μ, ω) 称为 σ-有限情形。

接下来，设 $\mathcal{A} \subseteq \{A \in \Sigma \colon \mu(A) \notin \{0, \infty\}\}$ 为一个由可测子集构成的集合族，满足

$$X = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A.$$

回顾一下，在X 上，Σ-可测函数的集合族 $\mathcal{M}$ 上的一个大小函数 $S = (S, \mathcal{A})$，是一个从 $\mathcal{M} \times \mathcal{A}$ 到 $[0, \infty]$ 的函数，满足以下性质：

(i) 对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$、每个函数 $f \in \mathcal{M}$以及每个子集 $A \in \mathcal{A}$，都有

$$S(\lambda f)(A) = |\lambda| S(f)(A).$$

（ii）对于所有满足 $|f| \leqslant |g|$ ω-几乎处处成立的函数 f、$g \in \mathcal{M}$，以及每个子集 $A \in \mathcal{A}$，我们有

$$S(f)(A) \leqslant S(g)(A).$$

（iii）存在一个常数 $C \in [1, \infty)$，使得对于所有函数 f、$g \in \mathcal{M}$ 以及每个子集 $A \in \mathcal{A}$，我们有

$$S(f + g)(A) \leqslant C[S(f)(A) + S(g)(A)].$$

特别地，每个大小函数 $(S, \mathcal{A})$ 都满足以下较弱的性质。

（iv）存在一个常数 $K \in [1、\ \infty)$，使得对于 X上的每个可测函数 f、每个子集 $A \in \mathcal{A}$以及每个可测子集 $B \in \Sigma$，都有

$$S(f)(A) \leqslant K[S(f1_B)(A) + S(f1_{B^c})(A)]. \tag{1.1}$$

特别地，常数 K 小于或等于性质 (iii) 中出现的常数 C。

例如，在集合族 $\mathcal{A} = \{A \in \Sigma$ 上，我们有大小函数 ℓ^∞_ω 和 ℓ^r_ω，其中 $r \in (0, \infty)$：$\mu(A) \notin \{0, \infty\}\}$ 定义为

$$\begin{aligned} \ell^\infty_\omega(f)(A) &\coloneqq \|f1_A\|_{L^\infty(X,\omega)}, \\ \ell^r_\omega(f)(A) &\coloneqq \mu(A)^{-\frac{1}{r}} \|f1_A\|_{L^r(X,\omega)}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

容易看出，大小函数 $(\ell^1_\omega, \mathcal{A})$ 满足 (1.1) 中的不等式，其常数为 $K = 1$。事实上，它满足等式。

对于每个大小函数 $S = (S, \mathcal{A})$，我们通过函数 $f \in \mathcal{M}$ 上的以下准范数定义外部 $L^\infty_\mu(S)$ 空间

$$\|f\|_{L^\infty_\mu(S)} = \|f\|_{L^{\infty,\infty}_\mu(S)} \coloneqq \sup\Big\{S(f)(A) \colon A \in \mathcal{A}\Big\}.$$

接下来，对于每个 $\lambda \in (0, \infty)$ 以及每个函数 $f \in \mathcal{M}$，我们定义

$$\mu(S(f) > \lambda) \coloneqq \inf\Big\{\mu(A) \colon A \in \Sigma, \|f1_{A^c}\|_{L^\infty_\mu(S)} \leqslant \lambda\Big\}.$$

最后，对于所有的 $p \in (0、\ \infty)$、$q \in (0、\ \infty]$，我们通过函数 $f \in \mathcal{M}$ 上如下的准范数来定义外 Lorentz $L^{p,\ }{}_\mu{}^q(S)$ 空间

$$\|f\|_{L^{p,q}_\mu(S)} \coloneqq p^{\frac{1}{q}} \Big\|\lambda\mu(S(f) > \lambda)^{\frac{1}{p}}\Big\|_{L^q((0,\infty), \mathrm{d}\lambda/\lambda)},$$

其中，当 $q = \infty$ 取 q^{-1} 时，指数理解为 0。事实上，我们可以通过与 f 相关联、定义在 $[0、\ \infty)$ 上的递减重排函数 f^* 来定义相同的准范数，其定义为

$$f^*(t) \coloneqq \inf\Big\{\alpha \in [0, \infty) \colon \mu(S(f) > \alpha) \leqslant t\Big\},$$

其中，对空集合族取下确界时，理解为 8。特别地，我们有

$$\|f\|_{L^{p,q}_\mu(S)} = \Big\|t^{\frac{1}{p}} f^*(t)\Big\|_{L^q((0,\infty), \mathrm{d}t/t)}.$$

为了陈述本文的主定理，对于每个 σ-有限的情形 $(X、\ \mu、\ \omega)$，我们引入以下辅助记号。我们定义集合族 $\Sigma_\mu \subseteq \Sigma$ 为

$$\Sigma_\mu \coloneqq \Big\{A \in \Sigma \colon \mu(A) \notin \{0, \infty\}\Big\},$$

并且，对于每个可测子集 $A \in \Sigma_\mu$，我们定义集合族 $\Sigma'_\mu(A) \subseteq \Sigma$ 为

$$\Sigma'_\mu(A) \coloneqq \Big\{B \in \Sigma \colon B \subseteq A, \mu(A \backslash B) \leqslant \frac{\mu(A)}{2}\Big\}. \tag{1.3}$$

现在我们可以陈述本文的主定理。为提高可读性，我们省略常数的显式表达式。然而，在证明中，我们会追踪它们对参数的依赖关系。

定理 1.3。对于所有 $a,\ p,\ q,\ r \in (0,\ \infty]$，存在一个常数 $C = C(a,\ p,\ q,\ r)$，使得对于每个 σ-有限情形 $(X,\ \mu,\ \omega)$，以下性质均成立。

(i) 对于每个 $p > a$ 以及每个函数 $f \in L^{p,\,\mu}{}^{\infty}(\ell^r_\omega)$，我们有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)} \sim_C \sup\left\{\mu(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}\|f1_A\|_{L^{a,q}_\mu(\ell^r_\omega)} \colon A \in \Sigma_\mu\right\}.$$

(ii) 对每个 $p \leqslant a$ 以及每个函数 $f \in L^{p,\,\mu}{}^{\infty}(\ell^r_\omega)$ 我们都有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)} \sim_C \sup\left\{\inf\left\{\mu(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}\|f1_B\|_{L^{a,q}_\mu(\ell^r_\omega)} \colon B \in \Sigma'_\mu(A)\right\} \colon A \in \Sigma_\mu\right\}.$$

我们对定理 1.3 的陈述作几点说明。首先，对于$p \neq \infty$，我们可以将性质 (i) 推广到任意大小函数的情形，见定理 2.1。此外，对于 $p = \infty$，性质 (i) 也有一个轻微的推广，见注释 4.3。特别是，用于证明定理2.1 的论证，与作者先前一篇文章 [5], 中通过外部 $L^p_\mu(\ell^r_\omega)$ 准范数刻画外部 $L^1_\mu(\ell^1_\omega)$ 配对的方法不同；该方法使用具有归一化外部 $L^{p'}_\mu(\ell^{r'}_\omega)$ 准范数的任意函数。区别在于，在定理1.3 和定理 2.1 中，用于刻画的外部 $L^{p,\,\infty}(S)$ 准范数与用于度量配对的外部 $L^{a,\,q}(S)$ 准范数采用相同的大小函数 S。因此，我们只依赖大小函数的拟次可加性，即大小函数的性质 (iv)，来比较超水平测度

$$\mu(S(f) > \rho), \qquad \mu(S(f1_A) > \lambda),$$

其中 $A \in \Sigma$ 是适当的可测子集，且 ρ、$\lambda \in (0,\ \infty)$。

接下来，我们比较定理 $\Sigma''_\omega(A)$ 和定理 $\Sigma'_\mu(A)$ 中性质 (ii) 的陈述中分别出现的集合族 1.1 和 1.3。根据测度 ω 在不相交集合上的可加性，对于集合族 $\Sigma''_\omega(A)$，我们有等式

$$\Sigma''_\omega(A) = \Sigma'_\omega(A) \coloneqq \left\{B \in \Sigma \colon B \subseteq A, \omega(A\backslash B) \leqslant \frac{\omega(A)}{2}\right\}.$$

然而，对于集合族 $\Sigma'_\mu(A)$，一般而言我们只能得到包含关系

$$\Sigma'_\mu(A) \subseteq \Sigma''_\mu(A) \coloneqq \left\{B \in \Sigma \colon B \subseteq A, \mu(B) \geqslant \frac{\mu(A)}{2}\right\}.$$

事实上，在定理 L^p 中性质 (ii) 对外部 1.3 准范数的刻画中，我们不能用 $\Sigma'_\mu(A)$ 替换 $\Sigma''_\mu(A)$。我们将在备注 4.4 中阐明这一点。

最后，通过与归一化示性函数配对来刻画外部 $L^{p,\infty}$ 拟范数的研究兴趣，源于 Di Plinio 和 Fragkos [2] 文章第 3.8 小节中出现的函数空间。后者记作 $X^{p,\,q}_{a}(J, \kappa, \text{size2}, \star)$，是定义在 $\mathbb{R}^2$ 中的二进海森堡瓦片集合族 $\mathcal{H}$ 上的函数准范数空间。特别地，集合 $\mathcal{H}$ 是 $\mathbb{R}^2$ 中面积为 1 的二进矩形集合族。Di Plinio 和 Fragkos 引入的空间与新的隐式定义的拟范数相关。更具体地说，函数 f 的新拟范数，是根据 f 与适当归一化的示性函数之间的配对来定义的。特别地，配对以及示性函数的重新归一化，都是相对于适当大小函数的外部 Lorentz$L^{p,q}$ 空间中的量。作为定理 2.1 的推论，我们证明 $X^{p,\,q}_{a}(J, \kappa, \text{size2}, \star)$ 拟范数等价于相对于适当大小函数的显式外部 $L^{p,8}$ 拟范数，见推论 5.1。我们将在第5节给出陈述这一等价性所需的全部定义。这里我们简要指出，Di Plinio 和 Fragkos 文章中出现的大小函数 $(S^r, \mathcal{A})$ 与 $r \in [1, \infty)$ 的定义有所不同，

与以下方式定义的1.2）不同，即对每个子集 $A \in \mathcal{A}$ 我们都有

$$S^{r}(f)(A) \coloneqq \sup\{\ell^{r}_{\omega}(f)(\widetilde{A})\colon \widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{A}}\},$$

其中 $\widetilde{\mathcal{A}}$ 是 A的一个适当真子集集合族。大小函数 $(S^{1},\ \mathcal{A})$ 满足（1.1）中的不等式，常数为 $K = 1$，但不满足等式。这一区别使得使用类似于作者先前的文章 ℓ^{1}_{ω} 中出现的大小函数 [5]的分解论证变得更加困难。

我们简要评论一下 Di Plinio 和 Fragkos 的文章中对空间 $X^{p,\ {}_{a}\ q}(J,\kappa$、大小函数$_{2,\ \star})$ 的使用。 [2] 作者主要关注改进对 Carleson 极大算子 $\mathcal{C}$ 的估计，该算子对每个 Schwartz 函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 以及每个 $x \in \mathbb{R}$ 定义为

$$\mathcal{C}f(x) \coloneqq \sup\Big\{\Big|\int_{\xi\leqslant N} \widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}\,\mathrm{d}\xi\Big|\colon N \in \mathbb{R}\Big\}.$$

特别地，Di Plinio 和 Fragkos 关注指数接近端点情形 $p = 1$的情况。此前已知的最佳估计是以下形式的限制弱型 L^{p} 估计。对每个 $p \in (1,\infty)$、每个子集 $|F| \subseteq \mathbb{R}$ 以及满足条件 $|f| \leqslant 1_{F}$的每个可测函数 f，我们有

$$\|\mathcal{C}f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R})} \leqslant \frac{Cp^{2}}{p-1}|F|^{\frac{1}{p}},$$

其中常数 C 与 p无关。这一界由 Hunt [8] 在 Carleson [1]开创性论文的基础上开展的工作所得到。后来，Lacey 和 Thiele 在 [9] 中以广义限制弱型 L^{p} 界的语言证明了一个等价的估计。

Di Plinio和Fragkos所取得的改进，是证明了如下形式的弱型L^{p} 估计。对于任意 $p \in (1,\ 2]$ 以及任意 Schwartz 函数$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，我们有

$$\|\mathcal{C}f\|_{L^{p,\infty}(\mathbb{R})} \leqslant \frac{C}{p-1}\|f\|_{L^{p}(\mathbb{R})},$$

其中常数 C 与 p无关。这一结果（ [2]中的定理 A）源于 Carleson 极大算子的稀疏范数界（ [2]中的定理 B）。事实上，Di Plinio和Fragkos证明了与 Hörmander–Mihlin 乘子相关的 Carleson 极大算子的稀疏范数界。关于稀疏范数界的定义，以及该稀疏范数界所蕴含的关于该算子的加权估计族的描述，我们均参见 Di Plinio和Fragkos的文章。

稀疏范数界的证明源于标准的停止形式论证，以及涉及空间 $X^{p,{}_{a}\ q}(J,\kappa$、大小函数$_{2,\star})$ 的两个不等式。这两个不等式所起的作用，类似于 Do 和 Thiele [4] 的文章中概述的两步方案。首先是外部 L^{p} 空间上的 Hölder 不等式。其次是 Carleson 嵌入映射从经典空间到外部 L^{p} 空间的有界性。

事实上，第一个不等式是在 σ-有限设置 $(E(J),\mu_{\kappa},\omega_{\kappa})$ 下，针对外 Lorentz $L^{p,q}$ 空间的广义外 Hölder 不等式（ [2]中的命题 3.9）。特别地，对于所有满足以下条件的 $a,p_{1} \in (1,\infty)$，$a \leqslant p_{1}$ 和 $p_{2},\dots,p_{m} \in [1,\infty)$

$$\varepsilon \coloneqq \Big(\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{p_{j}}\Big) - 1 > 0,$$

我们有

$$\Big\|\prod_{j=1}^{m} F_j\Big\|_{L^1(E(J),\omega_\kappa)} \leqslant \frac{Ca}{\varepsilon(a-1)}\|F_1\|_{X_a^{p_1,\infty}(J,\kappa,\mathsf{size}_{2,\star})}\times \\ \times \prod_{j=2}^{m}\max\{\|F\|_{L^{p_j,\infty}_{\mu_\kappa}(s_j)}, \|F\|_{L^{\infty}_{\mu_\kappa}(s_j)}\}, \tag{1.4}$$

其中大小函数 大小函数$_{2,\star}, s_2, \ldots, s_m$ 满足适当的条件。我们在第 5节给出所有必要的定义。鉴于推论5.1 中陈述的等价性，我们可将 [2] 中的命题 3.9 作为外 L^p 空间理论中标准插值结果的推论得到，见附录 A。

第二个不等式是 Carleson 嵌入映射 W在 $X^{tp'}_{,2}{}^{\infty}(J,\kappa,$大小函数$_{2,\star})$空间上的有界性，其常数与 p(定理 D，见 [2]) 无关。对于每个 Schwartz 函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，嵌入后的函数$W[f]\colon \mathcal{H} \to [0,\infty)$在每个 $H = I_H \times J_H \in \mathcal{H}$上定义为

$$W[f](H) \coloneqq \sup\Big\{|\langle f,\phi\rangle|\colon \phi \in \Phi(H)\Big\},$$

其中 $\Phi(H)$ 是由适当的、足够光滑的 L^1-归一化函数构成的集合族，这些函数适配于 I_H 且满足 supp $\phi \subseteq J_H$。那么，对于所有 $t \in (1, \infty)$、$p \in (1, 2]$，每个二进区间 J、每个由二进 Heisenberg 瓦片组成的集合族 $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}$，以及每个 Schwartz 函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，我们有

$$\|W[f]1_{\mathcal{P}}\|_{X_2^{tp',\infty}(J,\kappa,\mathsf{size}_{2,\star})} \leqslant C(t,\kappa)[f]_{p,\mathcal{P}}. \tag{1.5}$$

在上一个表达式中，准范数$[f]_{p,\mathcal{P}}$ 衡量了对每个 I_H，在 $H \in \mathcal{P}$ 上取最大 L^p 平均值的 f的最小值。鉴于推论5.1 中所述的等价性，估计式（1.5）是 Carleson嵌入映射 W有界性的一个弱版本，即

$$\|W[f]1_{\mathcal{P}}\|_{L^{tp',\infty}_{\mu_\kappa}(s_\kappa)} \leqslant C(t,\kappa)[f]_{p,\mathcal{P}},$$

对于适当的大小函数 s_κ。这应与此前已知的两个结果相比较。首先，Do 和 Thiele 在 W 中证明了 Carleson嵌入映射 [4], 的弱型估计，即

$$\|W[f]1_{\mathcal{P}}\|_{L^{2,\infty}_{\mu_\kappa}(s_\kappa)} \leqslant C(\kappa)[f]_{2,\mathcal{P}}.$$

接下来，Di Plinio 和 Ou 在 [3]，中证明了 Carleson嵌入映射 W 对函数 f 的局部化的强型估计，即

$$\|W[f1_{3J}]1_{\mathcal{P}}\|_{L^{tp'}_{\mu_\kappa}(s_\kappa)} \leqslant C(t,\kappa,p)[f]_{p,\mathcal{P}}.$$

文章导读。 在第 2 节中，我们将引入其他定义，作一些辅助观察，并在定理 2.1 中将性质 (i) 推广到定理 1.3 中的任意大小函数情形。在第 3 节中，我们证明定理 2.1。随后，在第 4 节中，我们证明定理 1.3 中陈述的其余性质。最后，在第 5 节中，我们介绍集合族 $\mathcal{H}$ 中二进海森堡瓦片 $\mathbb{R}^2$ 的相关设定及所有相关概念。此外，我们在推论5.1中陈述并证明 Di Plinio 和 Fragkos 引入的空间的相关结果。鉴于这一结果，我们在 [2] 的附录 A中详细说明命题 3.9 的另一种证明。在附录 B 中，我们给出第 4节中陈述的辅助结果的证明。

致谢

作者衷心感谢德国研究联合会资助的 CRC 1060 项目 涌现效应的数学 为波恩大学提供的经费支持。

这项工作始于2022年第一季度在波恩数学研究所 Hausdorff 研究所举行的 HIM 三个月项目几何测度论、奇异积分与偏微分方程之间的相互作用 。作者衷心感谢该项目的组织者，以及研究所的学术和支持人员给予的热情款待。

作者感谢 Francesco Di Plinio、Anastasios Fragkos 和 Christoph Thiele 富有帮助的讨论、评论和建议，这些意见极大地改善了本文的表述。

2. 预备知识

定理 1.3 的辅助定义与推广。 设 $(X,\ \mu,\ \omega)$ 构成一个 σ-有限设置。首先，对每个可测子集 $A \in \Sigma$，我们定义集合族$\Sigma_\mu(A) \subseteq \Sigma$ 如下:

$$\Sigma_\mu(A) \coloneqq \Big\{B \in \Sigma\colon B \subseteq A, \mu(B) \notin \{0,\infty\}\Big\},$$

集合族 $\Sigma_\omega^\circ(A) \subseteq \Sigma$ by

$$\Sigma_\omega^\circ(A) \coloneqq \Big\{B \in \Sigma\colon B \subseteq A, \omega(A\backslash B) = 0\Big\},$$

以及值 $\mu^\circ(A) \in [0,\infty]$ by

$$\mu^\circ(A) \coloneqq \inf\Big\{\mu(B)\colon B \in \Sigma_\omega^\circ(A)\Big\}.$$

接下来，对于每个 $r \in (0,\infty)$ 和每个大小函数 $(S,\mathcal{A})$，我们定义大小函数 $(S_r,\mathcal{A})$, $(S_\infty,\mathcal{A})$ 如下。对于每个 $A \in \mathcal{A}$ 以及定义在 X 上的每个可测函数 f，我们定义

$$S_r(f)(A) \coloneqq (S(f^r)(A))^{\frac{1}{r}}, \tag{2.1}$$

$$S_\infty(f)(A) \coloneqq \lim_{r\to\infty}(S(f^r)(A))^{\frac{1}{r}}. \tag{2.2}$$

容易看出

$$S_\infty(f)(A) = \|f1_A\|_{L^\infty(X,\omega)},$$

因此，对于所有 $p,q \in (0,\infty]$ 以及定义在 X 上的每个可测函数 f，都有

$$\|f\|_{L^{p,q}_\mu(S_\infty)} = \|f\|_{L^{p,q}_\mu(\ell^\infty_\omega)}.$$

此外，容易看出，对于每个 $r \in (0,\infty]$，都有

$$(\ell^r_\omega,\Sigma_\mu) = ((\ell^1_\omega)_r,\Sigma_\mu).$$

最后，我们将定理 (i) 中的性质推广到1.3 任意大小函数的情形。

定理 *2.1.* 对于所有 a、q、$r \in (0,\ \infty]$，任意 $p \in (0,\ \infty)$，以及任意 $K \in [1,\ \infty)$，存在常数 $C = C(a,\ p,\ q,\ r,\ K)$，使得对于每个 σ-有限设置 $(X,\ \mu,\ \omega)$，以及定义在 X 上且满足条件 ***(1.1)*** （常数为 K ）的任意大小函数 $(S\ ,\ \mathcal{A})$，以下性质成立。

(i) 对于每个 $p > a$、 $p \neq \infty$ 以及任意函数 $f \in L^{p,\ _\mu}{}^{\infty}(S_r)$，我们有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(S_r)} \sim_C \sup\left\{\mu(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}\|f1_A\|_{L^{a,q}_\mu(S_r)} \colon A \in \Sigma_\mu\right\}.$$

辅助观察。 设 (X, μ, ω) 是一个 σ-有限的情形。首先，我们注意到，对于所有 $p \in (0, \infty)$, $q \in (0, \infty]$ 以及每个可测子集 $A \in \Sigma$，都有

$$\|1_A\|_{L^{p,q}_\mu(\ell^\infty_\omega)} = p^{\frac{1}{q}}\left\|\lambda\mu(\ell^\infty_\omega(1_A) > \lambda)^{\frac{1}{p}}\right\|_{L^q((0,\infty),\mathrm{d}\lambda/\lambda)} = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{q}}\mu^\circ(A)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.3}$$

其中，对于 $q = \infty$， $(p/q)^{\frac{1}{q}}$ 理解为 1。

接下来，我们陈述并证明以下辅助结果。

引理 2.2。 设 (X, μ, ω) 是一个 σ-有限的情形，并设 $(S, \mathcal{A})$ 是 X上的大小函数，满足 (1.1) 中的条件，其常数为 $K \in [1, \infty)$。

对于每个 $r \in (0, \infty)$、每个 $\rho \in (0, \infty)$、每个 $\delta \in [0, 1]$、定义在 X上的每个可测函数f，以及每个满足以下条件的可测子集 $\Omega \in \Sigma$

$$\|f1_{\Omega^c}\|_{L^\infty_\mu(S_r)} \leqslant K^{-\frac{1}{r}}(1-\delta^r)^{\frac{1}{r}}\rho, \tag{2.4}$$

我们有

$$\mu(S_r(f) > \rho) \leqslant \mu\Big(S_r(f1_\Omega) > K^{-\frac{1}{r}}\delta\rho\Big).$$

证明。 我们用反证法，假设

$$\mu(S_r(f) > \rho) > \mu\Big(S_r(f1_\Omega) > K^{-\frac{1}{r}}\delta\rho\Big).$$

特别地，存在一个可测子集 $\Theta \in \Sigma, \Theta \subseteq \Omega$，使得

$$\|f1_\Omega 1_{\Theta^c}\|_{L^\infty_\mu(S_r)} \leqslant K^{-\frac{1}{r}}\delta\rho, \qquad \mu(\Theta) < \mu(S_r(f) > \rho).$$

因此，存在一个子集 $A \in \mathcal{A}$ 使得

$$S(f^r 1_\Omega 1_{\Theta^c})(A) = S_r(f1_\Omega 1_{\Theta^c})(A)^r \leqslant K^{-1}\delta^r\rho^r,$$
$$S(f^r 1_{\Theta^c})(A) = S_r(f1_{\Theta^c})(A)^r > \rho^r.$$

由（1.1）中的不等式可得

$$S_r(f1_{\Omega^c})(A)^r = S(f^r 1_{\Omega^c})(A) > K^{-1}(1-\delta^r)\rho^r.$$

结合（2.4）中的条件，前面显示的不等式导出了一个矛盾。 □

3. 定理 2.1 的证明

我们在假设 $K = 1$下证明定理 2.1 。对于任意 $K \in [1, \infty)$我们采用相同的论证，只是得到不同的常数 C。

此外，我们还作出了一些额外的假设。在证明的最后，我们将说明去除这些假设所需的修改。

- 对于每个任意函数 $f \in L^{p,\ _\mu}{}^{\infty}(S_r)$ 以及每个 $p \in (0, \infty)$ 我们假设存在 $\rho \in (0, \infty)$ 使得

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(S_r)} = \rho\mu(S_r(f) > \rho)^{\frac{1}{p}} \in (0, \infty). \tag{3.1}$$

- 对于任意的 $\lambda \in (0, \infty)$，我们假设存在一个可测子集 $\Omega_\lambda \in \Sigma$，使得

$$\|f1_{\Omega_\lambda^c}\|_{L^\infty_\mu(S_r)} \leqslant \lambda, \qquad \mu(\Omega_\lambda) = \mu(S_r(f) > \lambda) \in [0, \infty). \tag{3.2}$$

- 对于任意可测子集 $A\in\Sigma$，我们假设存在一个可测子集 $B\in\Sigma_\omega^\circ(A)$，使得

$$\mu(B)=\mu^\circ(A)=\inf\Big\{\mu(D)\colon D\in\Sigma_\omega^\circ(A)\Big\}. \tag{3.3}$$

- 我们作出以下附加假设：$a=1$ 并定义 $p'\in(-\infty、0)\cup[1、\infty]$ 为

$$1=\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}.$$

因此，对于 $p\in[1,\infty]$ 我们有 $p'\in[1、\infty]$；对于 $p\in(0,1)$ 我们有 $p'\in(-\infty、0)$。

定理2.1的证明。不失一般性，假设 $f\neq 0$，否则该性质显然成立。

对于每个 $p\in(1,\infty]$ 我们有 $p'\neq\infty$。因此，对于每个 $q\in(0,\infty]$ 不等式

$$\sup\Big\{\mu(A)^{-\frac{1}{p'}}\|f1_A\|_{L_\mu^{1,q}(S_r)}\colon A\in\Sigma_\mu\Big\}\leqslant 2\Big(\frac{p'}{q}\Big)^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L_\mu^{p,\infty}(S_r)},$$

其中 $(p'/q)^{\frac{1}{q}}$ 对于 $q=\infty$ 理解为1，由外 Hölder 不等式（外 Lorentz $L^{p、q}$ 空间的定理A.2，见附录）以及（2.3）中的等式可得。

下面转而证明该不等式

$$\|f\|_{L_\mu^{p,\infty}(S_r)}\leqslant C\sup\Big\{\mu(A)^{-\frac{1}{p'}}\|f1_A\|_{L_\mu^{1,q}(S_r)}\colon A\in\Sigma_\mu\Big\}.$$

我们分两种情形讨论。

情形 I： $r=\infty$。不失一般性，我们假设

$$\Omega_\rho\subseteq\Big\{x\in X\colon|f(x)|>\rho\Big\}.$$

由前一个展示式中的包含关系以及式（2.3）中的等式，对于每个 $q\in(0,\infty]$我们有

$$\|f1_{\Omega_\rho}\|_{L_\mu^{1,q}(\ell_\omega^\infty)}\geqslant\|\rho 1_{\Omega_\rho}\|_{L_\mu^{1,q}(\ell_\omega^\infty)}=q^{-\frac{1}{q}}\rho\mu(\Omega_\rho),$$

其中，当 $q^{\frac{1}{q}}$ 对于 $q=\infty$ 时，理解为 1。结合（3.1）–（3.3）中的假设，前一个不等式即得到所需的不等式。

情形 II： $r\neq\infty$。由引理 2.2，对于每个 $\delta\in[0,1]$ 我们有

$$\mu(S_r(f)>\rho)\leqslant\mu\Big(S_r(f1_{\Omega_{(1-\delta^r)^{1/r}\rho}})>\delta\rho\Big).$$

根据关于 ρ 在（3.1）中的假设，我们有

$$\mu(\Omega_{(1-\delta^r)^{1/r}\rho})=\mu\Big(S_r(f)>(1-\delta^r)^{\frac{1}{r}}\rho\Big)\leqslant(1-\delta^r)^{-\frac{p}{r}}\mu(S_r(f)>\rho).$$

根据前两个公式中的不等式，对于每个 $q\in(0、\infty]$，我们有

$$\|f1_{\Omega_{(1-\delta^r)^{1/r}\rho}}\|_{L_\mu^{1,q}(S_r)}\geqslant\delta(1-\delta^r)^{\frac{p}{rp'}}\mu(\Omega_{(1-\delta^r)^{1/r}\rho})^{\frac{1}{p'}}\rho\mu(S_r(f)>\rho)^{\frac{1}{p}},$$

结合（3.1）–（3.3）中的假设，前述不等式对每个 $q\in(0,\infty]$均给出了所需的不等式

$$\|f\|_{L_\mu^{p,\infty}(S_r)}\leqslant C\sup\Big\{\mu(A)^{-\frac{1}{p'}}\|f1_A\|_{L_\mu^{1,q}(S_r)}\colon A\in\Sigma_\mu\Big\},$$

其中，常数 C 对于 $q \in (0、\ \infty]$ 的最小值定义为

$$\inf\left\{\delta^{-1}(1-\delta^r)^{-\frac{p}{rp'}} : \delta \in [0,1]\right\} = p^{\frac{p}{r}}(p-1)^{\frac{1-p}{r}}.$$

□

我们将说明为去除额外假设所需的修改。

- 对于每个函数 $f \in L^{p,\ \mu}{}^{\infty}(S_r)$ 以及每个 $\delta > 0$，都存在 $\rho_\delta \in (0,\infty)$，使得

$$\rho_\delta \mu(S_r(f) > \rho_\delta) \leqslant \|f\|_{L_\mu^{p,\infty}(S_r)} \leqslant (1+\delta)\rho_\delta \mu(S_r(f) > \rho_\delta).$$

- 对于每个函数 $f \in L^{p,\ \mu}{}^{\infty}(S_r)$，每个 $\lambda \in (0、\ \infty)$以及每个 $\delta > 0$，都存在一个可测子集 $\Omega_{\lambda,\ \delta} \in \Sigma$，使得

$$\|f1_{\Omega_{\lambda,\delta}^c}\|_{L_\mu^\infty(S_r)} \leqslant \lambda, \qquad \mu(\Omega_{\lambda,\delta}) \leqslant (1+\delta)\mu(S_r(f) > \lambda).$$

- 对于每个可测子集 $A \in \Sigma$ 以及每个 $\delta > 0$，都存在一个可测子集 $B_\delta \in \Sigma_\omega^\circ(A)$，使得

$$\mu(B) \leqslant (1+\delta)\mu^\circ(A).$$

特别地，对于每个可测子集 $A \in \Sigma$，我们有

$$\mu(A) \geqslant \mu^\circ(A) = \|1_A\|_{L_\mu^{1,q}(\ell_\omega^\infty)}.$$

- 对于所有的 $a、\ p、\ q、\ r \in (0、\ \infty]$，以及每个设定 $(X、\ \mu、\ \omega)$和每个函数 $f \in L^{p,\ \mu}{}^{q}(S_r)$我们都有

$$\|f\|_{L_\mu^{p,q}(S_r)} = \|f^a\|_{L_\mu^{p/a,q/a}(S_{r/a})}^{\frac{1}{a}}.$$

特别地，对于满足以下条件的每个常数 $C = C\left(1、\ \frac{p}{a}、\ \frac{q}{a}、\ \frac{r}{a}\right)$

$$\|f\|_{L_\mu^{p/a,\infty}(S_{r/a})} \leqslant C \sup\left\{\mu(A)^{\frac{a}{p}-1}\|f1_A\|_{L_\mu^{1,q/a}(S_{r/a})} : A \in \Sigma_\mu\right\},$$

我们有

$$\|f\|_{L_\mu^{p,\infty}(S_r)} \leqslant C^{\frac{1}{a}} \sup\left\{\mu(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}\|f1_A\|_{L_\mu^{a,q}(S_r)} : A \in \Sigma_\mu\right\},$$

反向的不等式同样成立。

对于任意固定的 $\delta > 0$，我们可以应用前面证明中描述的论证。取 $\delta > 0$ 任意小，我们便得到定理 2.1 的证明，其中使用适当的常数。

4. 定理 1.3的证明

我们证明定理2.1 在上一节开头列出的额外假设下。此外，我们还作出一些其他额外假设。在证明结束时，我们将说明去除这些假设所需的修改。

- 对于任意函数 $f \in L_\mu^\infty(\ell_\omega^r)$，我们假设存在 $A_\rho \in \mathcal{A} \subseteq \Sigma_\mu$，使得

$$\|f\|_{L_\mu^\infty(\ell_\omega^r)} = \ell_\omega^r(f)(A_\rho) = \rho \in (0,\infty). \tag{4.1}$$

• 对于任意函数 $f \in L^{p,\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)$、任意可测子集 $B \in \Sigma$以及任意 $\lambda \in (0\infty)$，我们假设存在一个可测子集 $\Omega_\lambda(B) \in \Sigma$、$\Omega_\lambda(B) \subseteq B$，使得

$$\|f1_B 1_{\Omega_\lambda(B)^c}\|_{L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)} \leqslant \lambda, \qquad \mu(\Omega_\lambda(B)) = \mu(\ell^r_\omega(f1_B) > \lambda) \in [0,\infty). \tag{4.2}$$

接下来，我们陈述并证明以下辅助结果。其证明留待附录 B。

引理 4.1。设 $(X,\ \mu,\ \omega)$ 是一个 σ-有限框架。设 $r \in (0,\ \infty)$。设 $f \in L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)$。设 $A \in \Sigma_\mu$ 是一个可测子集，使得

$$\ell^r_\omega(f)(A) \geqslant \rho \in (0,\infty). \tag{4.3}$$

那么，对每个 $\lambda \in (0,\ \rho)$，都有

$$\mu(A) \leqslant \frac{\|f\|^r_{L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)}}{\rho^r - \lambda^r}\mu(\ell^r_\omega(f) > \lambda).$$

引理 4.2。设 $(X,\ \mu,\ \omega)$ 是一个 σ-有限框架。设 $p,\ r \in (0,\ \infty]$。设 $f \in L^{p,\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)$。对每个满足以下条件的 $\lambda \in (0,\ \infty)$，

$$\|f\|_{L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)} > \lambda, \tag{4.4}$$

存在一个可测子集 $B \in \Sigma$，使得

$$\ell^r_\omega(f)(B) > \lambda, \qquad \|f1_{B^c}\|_{L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)} \leqslant \lambda. \tag{4.5}$$

性质的证明 (i) 定理*1.3*中的。不失一般性，我们假设 $f \neq 0$，否则该性质显然成立。

我们开始证明不等式

$$\|f\|_{L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)} \leqslant C \sup\left\{\mu(A)^{-1}\|f1_A\|_{L^{1,q}_\mu(\ell^r_\omega)} \colon A \in \Sigma_\mu\right\}.$$

我们区分两种情形。

情形 I： $r = \infty$。参见**定理2.1** 的证明中的情形 I。

情形 II： $r \neq \infty$。由引理4.1，对于任意 $k \in (0,\ 1)$ 有

$$\mu(A_\rho) \leqslant (1-k^r)^{-1}\mu(\Omega_{k\rho}(A_\rho)). \tag{4.6}$$

由前一个不等式，对于任意 $q \in (0、\ \infty]$ 以及任意 $k \in (0、\ 1)$，我们有

$$\|f1_{A_\rho}\|_{L^{1,q}_\mu(\ell^r_\omega)} \geqslant (k - k^{r+1})\rho\mu(A_\rho).$$

结合（3.1）–（3.3）以及（4.1）–（4.2）中的假设，前面的不等式便对每个 $q \in (0,\ \infty]$

$$\|f\|_{L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)} \leqslant C \sup\left\{\mu(A)^{-1}\|f1_A\|_{L^{1,q}_\mu(\ell^r_\omega)} \colon A \subseteq X, A \neq \varnothing\right\},$$

其中常数 C 的最小值定义为

$$\inf\left\{(k-k^{r+1})^{-1} \colon k \in (0,1)\right\} = (r+1)^{\frac{r+1}{r}} r^{-1}.$$

□

注 4.3。将大小函数 $(S,\ \mathcal{A})$ 推广引理 *4.1*和定理 (i) 中的性质 *1.3* 到大小函数的情形，的一个充分条件如下。

对于定义在 X 上的任意可测函数 f、任意子集 $A \in \mathcal{A}$以及任意可测子集 $B \in \Sigma$，我们有

$$S(f)(A)\mu(A) \leqslant \|f\|_{L^\infty_\mu(S)}\mu(B) + \|f1_{A\setminus B}\|_{L^\infty_\mu(S)}\mu(A). \tag{4.7}$$

容易看出，大小函数 $(\ell^1_\omega,\ \Sigma_\mu)$ 满足 (4.7)中的不等式。

定理 (ii) 中的性质证明 *1.3*。不失一般性，假设 $f \neq 0$，否则该性质显然成立。

令 K' 定义为

$$K' \coloneqq \sup\left\{ \inf\left\{\mu(A)^{-\frac{1}{p'}}\|f1_B\|_{L^{1,q}_\mu(\ell^r_\omega)} \colon B \in \Sigma'_\mu(A)\right\} \colon A \in \Sigma_\mu\right\}.$$

情形 I： $r = \infty$。我们先证明这个不等式

$$K' \leqslant C\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^\infty_\omega)}.$$

对于每个可测子集 $A \in \Sigma_\mu$，我们定义 $\lambda_0 \in (0,\infty)$ 为

$$\lambda_0 \coloneqq 2^{\frac{1}{p}}\mu(A)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^\infty_\omega)}.$$

根据外部 $L^{p,\ {}^\infty_\mu}(\ell^\infty_\omega)$ 准范数的定义，我们有

$$\mu(\Omega_{\lambda_0}) \leqslant \lambda_0^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^\infty_\omega)} \leqslant \frac{\mu(A)}{2},$$

因此，我们定义可测子集 $B \in \Sigma'_\mu(A)$ 如下

$$B \coloneqq A\backslash\Omega_{\lambda_0} \subseteq \left\{x \in A \colon |f(x)| < \lambda_0\right\}.$$

根据前一个公式中的包含关系以及（2.3）中的等式，对于每个 $q \in (0,\ \infty]$，我们有

$$\begin{aligned}\mu(A)^{-\frac{1}{p'}}\|f1_B\|_{L^{1,q}_\mu(\ell^\infty_\omega)} &\leqslant 2^{\frac{1}{p}}\mu(A)^{-1}\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^\infty_\omega)}\|1_B\|_{L^{1,q}_\mu(\ell^\infty_\omega)}\\ &\leqslant 2^{\frac{1}{p}}q^{-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^\infty_\omega)}.\end{aligned}$$

其中 $q^{\frac{1}{q}}$ 对于 $q = \infty$，理解为 1。结合（3.1）–（3.3）中的假设，前一个不等式便得到所需的不等式。

我们转而证明该不等式

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^\infty_\omega)} \leqslant CK'.$$

不失一般性，我们假设

$$\Omega_\rho \subseteq \left\{x \in X \colon |f(x)| > \rho\right\}. \tag{4.8}$$

对于每个可测子集 $B_\rho \in \Sigma'_\mu(\Omega_\rho)$，我们有

$$\mu(B_\rho) \geqslant \frac{\mu(\Omega_\rho)}{2}.$$

根据（4.8）中的包含关系、（2.3）中的等式以及前面的不等式，对于每个$q \in (0,\ \infty]$我们有

$$\|f1_{B_\rho}\|_{L^{1,q}(\ell^\infty_\omega)} \geqslant \|\rho 1_{B_\rho}\|_{L^{1,q}(\ell^\infty_\omega)} = q^{-\frac{1}{q}}\rho\mu(B_\rho),$$

其中 $q^{\frac{1}{q}}$ 当 $q = \infty$ 时视为 1。结合（3.1）–（3.3）中的假设，前面两个不等式给出了所需的不等式。

情形 II： $r \neq \infty$。我们先证明不等式

$$K' \leqslant C\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)}.$$

对于每个可测子集 $A \in \Sigma_\mu$，我们定义 $\lambda_0 \in (0、\ \infty)$ 如下

$$\lambda_0 \coloneqq 2^{\frac{1}{p}}\mu(A)^{-\frac{1}{p}}\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)}.$$

根据外部 $L^{p,\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)$ 准范数的定义，我们有

$$\mu(\Omega_{\lambda_0}) \leqslant \lambda_0^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)} \leqslant \frac{\mu(A)}{2}.$$

并将可测子集 $B \in \Sigma'_\mu(A)$ 定义为

$$B \coloneqq A\backslash\Omega_{\lambda_0}.$$

根据外 Lorentz $L^{p,q}$ 空间的外 Hölder 不等式（附录 A.2 A 中的定理）以及（2.3）中的等式，对每个 $q \in (0,\infty]$ 有

$$\begin{aligned}\mu(A)^{-\frac{1}{p'}}\|f1_B\|_{L^{1,q}_{\mu}(\ell^r_\omega)} &\leqslant 2\mu(A)^{-\frac{1}{p'}}\|f1_{\Omega^c_{\lambda_0}}\|_{L^{\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)}\|1_B\|_{L^{1,q}_{\mu}(\ell^\infty_\omega)}\\ &\leqslant 2^{1+\frac{1}{p}}q^{-\frac{1}{q}}\|f\|_{L^{p,\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)},\end{aligned}$$

其中 $q^{\frac{1}{q}}$ 对于 $q=\infty$ 应理解为 1。结合（3.1）–（3.3）中的假设，前述不等式给出了所需的不等式。

我们转而证明不等式

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)} \leqslant CK'.$$

根据外 $L^{p,\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)$ 准范数的定义、 ρ的选取以及 μ的次可加性，对每个 $M \in (1,\infty)$ 有

$$\begin{aligned}M\rho\mu(\Omega_{M\rho})^{\frac{1}{p}} &\leqslant \rho\mu(\Omega_\rho)^{\frac{1}{p}},\\ \mu(\Omega_\rho) &\leqslant \mu(\Omega_{M\rho}) + \mu(\Omega_\rho(\Omega^c_{M\rho})).\end{aligned}$$

因此，我们有

$$0 < M^p\mu(\Omega_\rho) - \mu(\Omega_\rho) \leqslant M^p[\mu(\Omega_\rho) - \mu(\Omega_{M\rho})] \leqslant M^p\mu(\Omega_\rho(\Omega^c_{M\rho})). \tag{4.9}$$

由前述不等式链可得

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)} \leqslant M(M^p-1)^{-\frac{1}{p}}\rho\mu(\Omega_\rho(\Omega^c_{M\rho}))^{\frac{1}{p}}. \tag{4.10}$$

此外，由（4.9）中的不等式链可得 $\Omega_\rho(\Omega^c_{M\rho}) \neq \varnothing$。特别地，对于每个 $\varepsilon > 0$，我们有

$$\|f1_{\Omega^c_{M\rho}}\|_{L^{\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)} > \rho_\varepsilon,$$

其中 $\rho_\varepsilon \in (0,\rho)$ 由下式定义

$$\rho_\varepsilon \coloneqq (1-\varepsilon)\rho.$$

因此，由引理 4.2 存在一个可测子集 $B_{\rho_\varepsilon} \in \Sigma_\mu(\Omega^c_{M\rho})$ 使得

$$\ell^r_\omega(f)(B_{\rho_\varepsilon}) > \rho_\varepsilon, \qquad \|f1_{\Omega^c_{M\rho}}1_{B^c_{\rho_\varepsilon}}\|_{L^{\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)} \leqslant \rho_\varepsilon. \tag{4.11}$$

由（4.10）中的不等式以及（4.11）中的第二个不等式可得

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_{\mu}(\ell^r_\omega)} \leqslant M(M^p-1)^{-\frac{1}{p}}\rho\mu(B_{\rho_\varepsilon})^{\frac{1}{p}}. \tag{4.12}$$

根据 K' 的定义，存在一个子集 $D_{\rho_\varepsilon} \in \Sigma'_\mu(B_{\rho_\varepsilon})$，使得

$$\|f1_{D_{\rho_\varepsilon}}\|_{L^{1,q}(\ell^r_\omega)} \leqslant K'\mu(B_{\rho_\varepsilon})^{\frac{1}{p'}}. \tag{4.13}$$

此外，根据 (4.11) 中的第一个不等式以及包含关系 $B_{\rho_\varepsilon} \subseteq \Omega^c_{M\rho}$，对于每个子集 $D \in \Sigma'_\mu(B_{\rho_\varepsilon})$，都有

$$\begin{aligned}\ell^r_\omega(f)(D) &\geqslant \mu(D)^{-\frac{1}{r}}[\rho^r_\varepsilon \mu(B_{\rho_\varepsilon}) - M^r\rho^r\mu(B_{\rho_\varepsilon}\setminus D)]^{\frac{1}{r}} \\ &\geqslant \mu(B_{\rho_\varepsilon})^{-\frac{1}{r}}\left[\rho^r_\varepsilon\mu(B_{\rho_\varepsilon}) - M^r\rho^r\frac{\mu(B_{\rho_\varepsilon})}{2}\right]^{\frac{1}{r}} \\ &\geqslant \left(1 - \frac{M^r_\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{r}}\rho_\varepsilon,\end{aligned}$$

其中 $M_\varepsilon \in (M, \infty)$ 定义为

$$M_\varepsilon \coloneqq \frac{M}{1 - \frac{M^r_\varepsilon}{2}^{1/r}}.$$

特别地，对于每个满足 $k \in (0$ 的 $\lambda = k\left(1 - \frac{M^r_\varepsilon}{2}\right)^{1/r}\rho_\varepsilon, 1)$，我们有

$$\mu(B_{\rho_\varepsilon}) \leqslant 2\mu(D) \leqslant 2M^r_\varepsilon\left(1 - \frac{M^r_\varepsilon}{2}\right)^{-1}(1-k^r)^{-1}\mu(\Omega_\lambda(D)), \tag{4.14}$$

其中第二个不等式由引理 4.1 得出。由（4.14）中的第二个不等式，对于每个 $q \in (0, \infty)$ 以及每个 $k \in (0, 1)$，我们有

$$\|f1_D\|_{L^{1,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)} \geqslant M^{-r}_\varepsilon\left(1 - \frac{M^r_\varepsilon}{2}\right)^{\frac{r+1}{r}}(k - k^{r+1})\rho_\varepsilon\mu(D).$$

任取足够小的 $\varepsilon > 0$，结合（3.1）–（3.3）和（4.2）中的假设、（4.12）中的不等式、（4.14）中的第一个不等式以及（4.13）中的不等式，前一个不等式便给出了对每个 $q \in (0, \infty]$

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)} \leqslant 2CK',$$

对于每个 $q \in (0, \infty]$，常数 C 的最小值定义为

$$\begin{aligned}&\inf\left\{(1-M^{-p})^{-\frac{1}{p}}\left(1 - \frac{M^r}{2}\right)^{-\frac{r+1}{r}}M^r(k-k^{r+1})^{-1} \colon M \in (1, 2^{\frac{1}{r}}), k \in (0,1)\right\} = \\ &= \frac{(r+1)^{\frac{r+1}{r}}}{r}\inf\left\{M^r(1-M^{-p})^{-\frac{1}{p}}\left(1 - \frac{M^r}{2}\right)^{-\frac{r+1}{r}} \colon M \in (1, 2^{\frac{1}{r}})\right\}.\end{aligned}$$

□

我们说明为去除这一附加假设所需的修改。

- 对于每个函数 $f \in L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)$ 以及每个 $\delta > 0$，存在 $A_{\rho,\,\delta} \in \mathcal{A}$ 使得

$$(1-\delta)\rho \leqslant \ell^r_\omega(f)(A_{\rho,\delta}) \leqslant \rho = \|f\|_{L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)}.$$

对于每个固定的 $\delta > 0$，我们可以应用前述证明中所描述的论证。令 $\delta > 0$ 任意小，即可用适当的常数得到定理 1.3 的证明。

注 4.4。对于每个可测子集 $A \in \Sigma$，我们回顾集合族 $\Sigma''_\mu(A) \subseteq \Sigma$ 的定义如下：

$$\Sigma''_\mu(A) \coloneqq \left\{B \in \Sigma \colon B \subseteq A, \mu(B) \geqslant \frac{\mu(A)}{2}\right\}.$$

令 K'' 定义为

$$K'' \coloneqq \sup\left\{\inf\left\{\mu(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}}\|f1_B\|_{L^{a,q}_\mu(\ell^r_\omega)} \colon B \in \Sigma''_\mu(A)\right\} \colon A \in \Sigma_\mu\right\}.$$

对于每个可测子集 $B \in \Sigma'_\mu(A)$，我们有 $\mu(A) \leqslant 2\mu(B)$，因此

$$K'' \leqslant K'.$$

事实上，对于每个 $p \leqslant a$ 以及每个函数 $f \in L^{p,\ {}_\mu\infty}(\ell^\infty_\omega)$ 我们都有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^\infty_\omega)} \sim_C K''.$$

此外，对于所有 $p \leqslant a$、$r \neq \infty$ 以及每个函数 $f \in L^{p,\ {}_\mu\infty}(\ell^r_\omega)$ 我们都有

$$K'' \leqslant C\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)}.$$

然而，对于每个 $M \in (1,\ \infty)$ 都存在一个 σ-有限的设置 $(X,\ \mu,\ \omega)$ 以及一个函数$f \in L^{p,\ {}_\mu\infty}(\ell^r_\omega)$ 使得

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)} \geqslant MK''.$$

特别地，令

$$\begin{aligned} X &= \{j \in \mathbb{N} \colon 1 \leqslant j \leqslant m\}, \\ \mu(A) &= 1, && \text{for every subset } A \subseteq X,\ A \neq \varnothing, \\ \omega(A) &= |A|, && \text{for every subset } A \subseteq X, \\ f &= 1_X. \end{aligned}$$

那么，我们有

$$\|f\|_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)} = m^{\frac{1}{r}}, \qquad K'' \leqslant \sup\left\{\mu(\{x_A\})^{\frac{1}{p}} \colon A \subseteq X, A \neq \varnothing\right\} = 1,$$

其中，对于每个子集 $A \subseteq X,\ A \neq \varnothing$，我们任意选取 $x_A \in A$。取足够大的 $m \in \mathbb{N}$，即可得到所需的不等式。

5. 海森堡瓦片集上的函数空间

σ-有限的海森堡瓦片集合族与稀疏大小函数情形。对于所有 $m,\ l \in \mathbb{Z}$，我们定义二进区间 $D(m,\ l)$ 在 $\mathbb{R}$ 中如下：

$$D(m,l) \coloneqq (2^l m, 2^l(m+1)],$$

以及 $\mathcal{D}$ 中二进区间的集合族 $\mathbb{R}$，定义如下：

$$\mathcal{D} \coloneqq \left\{D(m,l) \colon m,l \in \mathbb{Z}\right\}.$$

此外，对于所有 $m,n,l \in \mathbb{Z}$，我们定义二进海森堡瓦片 $H(m,n,l)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中如下：

$$H(m,n,l) \coloneqq D(m,l) \times D(n,-l),$$

以及 $\mathbb{R}^2$ 中二进海森堡瓦片的集合族 $\mathcal{H}$，定义如下：

$$\mathcal{H} \coloneqq \left\{H(m,n,l) \colon m,n,l \in \mathbb{Z}\right\}.$$

那么，对于所有 $M,L \in \mathbb{Z}$，我们将条带 $E(M,L) \subseteq \mathcal{H}$ 定义为

$$E(M,L) = E(D(M,L)) \coloneqq \left\{H(m,n,l) \in \mathcal{H} \colon D(M,L) \subseteq D(m,l)\right\}.$$

此外，对于所有 $M,N,L \in \mathbb{Z}$ 以及每个 $\kappa \in \mathbb{Z},\ \kappa \geqslant 0$，我们将树$2^\kappa$-瓦片 $T_\kappa(M,N,L) \subseteq \mathcal{H}$ 定义为

$$T_\kappa(M,N,L) \coloneqq \left\{H(m,n,l) \in \mathcal{H} \colon D(m,l) \subseteq D(M,L), D(N,-L) \subseteq D(\lfloor n/2^\kappa \rfloor, \kappa - l)\right\},$$

其中，对每个 $x \in \mathbb{R}$，我们定义 $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ 为小于或等于 x 的最大整数。

接下来，对每个 $\kappa \in \mathbb{Z}$、 $\kappa \geqslant 0$，我们将二进海森堡瓦片集合族 $\mathcal{H}$ 上的 σ-有限情形定义为 $(X_\kappa, \mu_\kappa, \omega_\kappa)$，如下所示。令

$$\begin{aligned} X_\kappa &= \mathcal{H}, \\ \mathcal{T}_\kappa &= \Big\{ T_\kappa(m,n,l) \colon m,n,l \in \mathbb{Z} \Big\}, \\ \sigma_\kappa(T_\kappa(m,n,l)) &= 2^l, && \text{for all } m,n,l \in \mathbb{Z}, \\ \omega_\kappa(H(m,n,l)) &= 2^l, && \text{for all } m,n,l \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

并令 μ_κ 为定义在 X_κ 上的外测度，它们由 σ_κ 通过最小覆盖生成，如下所示。对于每个子集 $A \subseteq X_\kappa$，我们定义 $\mu_\kappa(A) \in [0, \infty]$ 如下：

$$\mu_\kappa(A) \coloneqq \inf \Big\{ \sum_{T_\kappa \in \mathcal{A}} \sigma_\kappa(T_\kappa) \colon \mathcal{A} \subseteq \mathcal{T}_\kappa, A \subseteq \bigcup_{T_\kappa \in \mathcal{A}} T_\kappa \Big\},$$

空集合族上的下确界约定为 0。

之后，对于每个 $\kappa \in \mathbb{Z}$、 $\kappa \geqslant 0$，我们将瓦片集合族 $T \subseteq \mathcal{H}$ 称为κ-稀疏树，若其满足以下性质：

- 存在 M、 N、 $L \in \mathbb{Z}$，使得
$$T \subseteq T_\kappa(M,N,L).$$
- 对于所有满足以下条件的 m、 n、 l、 m'、 n'、 $l' \in \mathbb{Z}$：
$$H(m,n,l), H(m',n',l') \in T, \qquad D(n,-l) \neq D(n',-l'),$$
我们有
$$D(n,-l) \cap D(n',-l') = \varnothing.$$

此外，我们将 $\mathcal{T}_{\kappa,\mathrm{lac}}$ 定义为所有 κ-稀疏树的集合族。

最后，我们如下定义稀疏大小函数 *lacunary size* $(S_{\kappa,\mathrm{lac}}, \mathcal{T}_{\kappa,\mathrm{lac}})$。对于每个 κ-稀疏树 $T_{\kappa,\mathrm{lac}} \in \mathcal{T}_{\kappa,\mathrm{lac}}$，我们定义

$$S_{\kappa,\mathrm{lac}}(f)(T_{\kappa,\mathrm{lac}}) \coloneqq \mu_\kappa(T_{\kappa,\mathrm{lac}})^{-1} \| f 1_{T_{\kappa,\mathrm{lac}}} \|_{L^1(X_\kappa, \omega_\kappa)},$$

以及引言中定义的外 Lorentz $L^{p,q}_{\mu_\kappa}(S_{\kappa,\mathrm{lac}})$ 空间。特别地，对于每个 $r \in (0, \infty]$，我们用 S^r_κ 表示在 $(,\mathrm{lac})_r$ 中定义的大小函数 2.1) 和 (2.2)。

容易看出，大小函数 $(S_{\kappa,\mathrm{lac}}, \mathcal{T}_{\kappa,\mathrm{lac}})$ 满足 (1.1) 中常数为 $K = 1$ 的不等式，以及 (4.7) 中的不等式。

空间 $X^{p,q}_a(J, \kappa$、大小函数 size2,$\star)$ 以及与外部 $L^{p,\infty}_{\mu_\kappa}(S^2_\kappa)$ 空间的等价性。Di Plinio 和 Fragkos [2] 的文章第 3.8 节中出现的空间 $X^{p,q}_a(J, \kappa$、大小函数 size2, $\star)$，与指数三元组 $p, q, a \in [1, \infty]$, $p \geqslant a$、一个二进区间 $J \subseteq \mathbb{R}$以及一个非负整数 $\kappa \in \mathbb{Z}$, $\kappa \geqslant 0$相关。在条带 $E(J)$ 上支撑的函数集合上的大小函数 size2,$\star$,$\mathcal{T}_{J,\kappa}$)定义如下。令 $\mathcal{T}_{J,\kappa} \subseteq \mathcal{T}_\kappa$ 为包含在条带 $E(J)$中的 2^κ-瓦片的树集合族。对于每棵树 $T_\kappa \in \mathcal{T}_{J,\kappa}$ 以及每个支撑在条带 $E(J)$ 上的函数 F，我们定义

$$\mathsf{size}_{2,\star}(F)(T_\kappa) \coloneqq \| F 1_{T_\kappa} \|_{L^\infty_{\mu_\kappa}(S^2_\kappa)}. \tag{5.1}$$

空间 $X^{p,q}_a(J, \kappa,$ 大小函数$_{2,\star})$ 由以下准范数定义，该准范数作用于支撑在条带 $E(J)$ 内的函数 F

$$\|F\|_{X^{p,q}_a(J,\kappa,\mathsf{size}_{2,\star})} \coloneqq \sup \Big\{ \mu_\kappa(A)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{a}} \| F 1_A \|_{L^{a,q}_{\mu_\kappa}(\mathsf{size}_{2,\star})} \colon A \in \Sigma_{\mu_\kappa}(E(J)) \Big\}. \tag{5.2}$$

现在可以陈述 $X^{p,q}_a(J, \kappa$ 大小函数$_{2,\star})$ 空间与外部 $L^{p,\infty}_{\mu_\kappa}(S^2_\kappa)$ 空间之间的等价性。

推论 5.1. 对于所有 $a,p,q\in[1,\infty]$, $p>a$ 存在一个常数 $C=C(a,p,q)$，使得以下性质成立。

对于每个 $\kappa\in\mathbb{Z}$, $\kappa\geqslant 0$，令 $(X_\kappa,\ \mu_\kappa,\ \omega_\kappa)$ 为上述设定，令 $\mathcal{T}_\kappa$ 为上述描述的生成元集合族。对于每个二进区间 $J\in\mathcal{D}$，以及定义在 X_κ 上的每个函数 f，我们有

$$\|f1_{E(J)}\|_{L^{p,\infty}_{\mu_\kappa}(S^2_\kappa)}=\alpha\sim_C\beta=\|f\|_{X^{p,q}_a(J,\kappa,\mathsf{size}_{2,\star})}.$$

特别地，我们有

$$\alpha\leqslant\sqrt{\frac{p-a}{a}}\Big(\frac{p}{p-a}\Big)^{\frac{p}{2a}}\beta,\qquad\qquad \beta\leqslant 2^{\frac{1}{a}}\Big(\frac{p}{q(p-a)}\Big)^{\frac{1}{q}}\alpha.$$

事实上，在 Do 和 Thiele 关于上半 3-空间的论文 $\mathbb{R}^2\times(0,\ \infty)$ 以及作者的论文 [4] 中所描述的设定下，我们也可以定义类似的准范数和空间，并证明类似的结论。[7]上述关于 $\mathcal{H}$ 的设定，是上半 3-空间中设定的离散模型。

证明。所需的等价性由定理 2.1、备注 4.3 、（5.1）和（5.2）中的定义，以及以下辅助观察得出。对于每个二进区间 $J\in\mathcal{D}$ 以及每个 F 支撑于 $E(J)$ 上的函数，我们有

$$\|F\|_{L^\infty_{\mu_\kappa}(S^2_\kappa)}=\|F\|_{L^\infty_{\mu_\kappa}(\mathsf{size}_{2,\star})},$$

因此，对于所有 p、$q\in(0$、$\infty]$ 以及每个支集包含于 $E(J)$ 的函数 F，我们都有

$$\|F\|_{L^{p,q}_{\mu_\kappa}(S^2_\kappa)}=\|F\|_{L^{p,q}_{\mu_\kappa}(\mathsf{size}_{2,\star})}.$$

□

附录 A. (1.4) 中不等式的证明 (1.4)

我们证明不等式（1.4），该不等式最初在 [2] 中命题 3.9 中陈述，应用外部 L^p 空间理论中的标准插值结果。

命题 A.1 (命题 3.9，见 [2])。对于每个 $m\in\mathbb{N}$, $m\geqslant 2$，都存在一个常数 $C=C(m)$，使得以下性质成立。

设 $J\in\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个二进区间。令 $a,p_1\in(1,\infty)$、$a\leqslant p_1$ 和 $p_2,..,p_m\in[1,\infty)$ 满足

$$\varepsilon:=\Big(\sum_{j=1}^m\frac{1}{p_j}\Big)-1>0.$$

令大小函数 (大小函数$_{2,\star},\mathcal{T}_\kappa$), $(s_2,\mathcal{T}_\kappa),..,(s_m,\mathcal{T}_\kappa)$ 满足：对每棵树 $T_\kappa\in\mathcal{T}_\kappa$ 以及所有支撑于 $E(J)$ 的函数 $F_1,...,F_m$，都成立。

$$\ell^1_{\omega_\kappa}\Big(\prod_{j=1}^m F_j\Big)(T_\kappa)\leqslant\mathsf{size}_{2,\star}(F_1)(T_\kappa)\prod_{j=2}^m s_j(F_j)(T_\kappa).$$

那么，对于所有支撑在 $E(J)$ 中的函数 F_1、.....、F_m，我们有

$$\Big\|\prod_{j=1}^m F_j\Big\|_{L^1(E(J),\omega_\kappa)}\leqslant\frac{Ca}{\varepsilon(a-1)}\|F_1\|_{X^{p_1,\infty}_a(J,\kappa,\mathsf{size}_{2,\star})}\times$$
$$\times\prod_{j=2}^m\max\{\|F\|_{L^{p_j,\infty}_{\mu_\kappa}(s_j)},\|F\|_{L^\infty_{\mu_\kappa}(s_j)}\}.$$

我们指出，在 Di Plinio和Fragkos的文章中 [2] 外测度μ_κ 按二进区间 J的长度进行了重新归一化，因此归一化因子$|J|^{-1}$ 出现在 [2]中命题 3.9陈述的不等式链左侧。

为提高证明的可读性，我们在 μ_κ 和 ω_κ 的记号中省略了对 κ 的明确说明。

证明。 首先，经典准范数与外 L^p 准范数之间的一个标准不等式（ [4] 中的命题 3.6）给出

$$\Big\|\prod_{j=1}^m F_j\Big\|_{L^1(E(J),\omega)} \leqslant \Big\|\prod_{j=1}^m F_j\Big\|_{L^{1,1}_\mu(\ell^1_\omega)}. \tag{A.1}$$

接下来，我们回顾外 Hölder 不等式，它适用于外 Lorentz $L^{p,\,q}$ 空间（[2] 中的命题 3.5）。

定理 A.2。 设 $(X,\ \mu,\ \omega)$ 是一个 σ-有限设置。设 $s,\ s_1,\ \ldots\ldots,\ s_m$ 是定义在$(X,\ \mu,\ \omega)$ 上的大小函数，使得对于 X 上的所有可测函数 $F_1,\ \ldots\ldots,\ F_m$ 以及每个可测子集 $A\in\Sigma$，都有

$$s\Big(\prod_{i=1}^m F_i\Big)(A) \leqslant \prod_{i=1}^m s_i(F_i)(A). \tag{A.2}$$

那么，对于所有满足以下条件的 $p,\ p_1,\ \ldots\ldots,\ p_m\in(0,\ \infty]$ 以及所有 $q,\ q_1,\ \ldots\ldots,\ q_m\in(0,\ \infty]$，都有

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}=\frac{1}{p}, \qquad\qquad \sum_{i=1}^m \frac{1}{q_i}=\frac{1}{q},$$

我们有

$$\Big\|\prod_{i=1}^m F_i\Big\|_{L^{p,q}_\mu(s)} \leqslant m^{\frac{1}{p}}\|F_i\|_{L^{p_i,q_i}_\mu(s_i)}.$$

我们将前述定理应用于由 s 和 s_1 定义的大小函数

$$s=\ell^1_\omega, \qquad s_1=S^2_\kappa,$$

以及满足与不等式（ $s_2,\ \ldots\ldots,\ s_m$ 相关条件的大小函数A.2）。此外，从满足命题 $a,\ p_1,\ p_2,\ \ldots\ldots,\ p_m$ 陈述中条件的指数开始，我们定义指数A.1 ，$\ldots\ldots$，$r_m\in(1,\ \infty)$以及 $q_2,\ \ldots\ldots,\ q_m\in(1,\ \infty)$ 如下：

$$P=\sum_{j=2}^m\frac{1}{p_j}=\frac{1}{p_1'}+\varepsilon, \qquad\qquad q_j=p_jP, \qquad\qquad r_j=a'q_j.$$

因此我们得到不等式

$$\Big\|\prod_{j=1}^m F_j\Big\|_{L^{1,1}_\mu(\ell^1_\omega)} \leqslant m\|F_1\|_{L^{a,\infty}_\mu(s_1)}\prod_{j=2}^m\|F_j\|_{L^{r_j,q_j}_\mu(s_j)}, \tag{A.3}$$

特别地，我们注意到

$$Pa'\geqslant\Big(\frac{1}{p_1'}+\varepsilon\Big)p_1'>1,$$

因此，对每个 $j\in\{2,\ldots,m\}$，我们有

$$r_j>p_j,$$

因此，外部 Lorentz $L^{p,q}$ 空间的对数凸性（ [4]中的命题 3.3）给出不等式

$$\|F_j\|_{L_\mu^{r_j,q_j}(s_j)} \leqslant \left(\frac{P}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{q_j}} \|F_j\|_{L_\mu^\infty(s_j)}^{\frac{r_j-p_j}{r_j}} \|F_j\|_{L_\mu^{p_j,\infty}(s_j)}^{\frac{p_j}{r_j}}. \tag{A.4}$$

最后， $X_a^{p,\infty}(J, \kappa,$ 大小函数2空间与外部$\star)$ 空间$L_\mu^{p,\infty}(S_\kappa^2)$ 空间之间的等价性（推论5.1）给出了不等式

$$\|F\|_{L_\mu^{p,\infty}(S_\kappa^2)} \leqslant \sqrt{\frac{p-a}{a}} \left(\frac{p}{p-a}\right)^{\frac{p}{2a}} \|F\|_{X_a^{p,\infty}(J,\kappa,\mathsf{size}_{2,\star})}. \tag{A.5}$$

（A.1）中的不等式以及（A.3）–（A.5）中的不等式给出了 [2]中命题3.9所述的结果。□

Appendix B. Proofs of Lemma 4.1 and Lemma 4.2

引理*4.1*的证明。设 $\varepsilon > 0$。由满足（4.3）中不等式的可测子集的存在性，对于每个 $\lambda \in (0, \rho)$ 我们有

$$\mu(\ell_\omega^r(f) > \lambda) > 0.$$

对于每个 $\lambda \in (0, \rho)$ 我们选取一个可测子集 $\Omega_\lambda \in \Sigma$ 使得

$$\|f1_{\Omega_\lambda^c}\|_{L_\mu^\infty(\ell_\omega^r)} \leqslant \lambda, \qquad \mu(\Omega_\lambda) \leqslant (1+\varepsilon)\mu(\ell_\omega^r(f) > \lambda).$$

我们有

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_\mu^\infty(\ell_\omega^r)}^r \mu(\Omega_\lambda) &\geqslant \|f1_{\Omega_\lambda}\|_{L^r(X,\omega)}^r \\ &\geqslant \|f1_A\|_{L^r(X,\omega)}^r - \|f1_A 1_{\Omega_\lambda^c}\|_{L^r(X,\omega)}^r \\ &\geqslant \mu(A)(\rho^r - \lambda^r). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon > 0$ 任意小，即可得到所需的不等式。 □

引理的证明*4.2*。 我们用反证法，假设不存在可测子集 $B \in \Sigma$ 使得

$$\ell_\omega^r(f)(B) \geqslant \lambda,$$

因此

$$\lambda \geqslant \|f\|_{L_\mu^\infty(\ell_\omega^r)},$$

这与（4.4）中的不等式矛盾。

因此，存在一个可测子集 $B \in \Sigma$ 满足（4.5）中的第一个不等式。我们通过对 $n \in \mathbb{N}_\lambda$ 进行向前递归，定义集合族 $\{B_n\colon\ n \in \mathbb{N}_\lambda\} \subseteq \Sigma$，其中 $\mathbb{N}_\lambda$ 是 $\mathbb{N}$ 的有限非空初始段。我们定义子集 $A_0 = \varnothing$，并且对所有 $n \in \mathbb{N}_\lambda$，定义可测子集 $A_n \in \Sigma$ 如下

$$A_n = \bigcup_{m \leqslant n} B_m,$$

并通过以下方式定义由 $\mathcal{B}_n \subseteq \Sigma$ 组成的 X 的可测子集集合族

$$\mathcal{B}_n = \left\{B \in \Sigma\colon \ell_\omega^r(f1_{A_{n-1}^c})(B) \geqslant \lambda\right\}.$$

特别地，我们有 $\mathcal{B}_1 \neq \varnothing$。

若 $\mathcal{B}_n$ 为空，我们将 $\mathbb{N}_\lambda \subseteq \mathbb{N}$ 定义为

$$\mathbb{N}_\lambda = \{1, \ldots, n-1\}.$$

若 $\mathcal{B}_n$ 非空，根据引理 4.1 对于每个可测子集 $B \in \mathcal{B}_n$，我们有

$$\mu(B) + \sum_{m\in\mathbb{N}, m<n} \mu(B_m) \leqslant C\mu(\ell^r_\omega(f) \geqslant \lambda/2) \leqslant C2^p\lambda^{-p}\|f\|^p_{L^{p,\infty}_\mu(\ell^r_\omega)} < \infty, \tag{B.1}$$

因此存在 $j = j(n) \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\sup\left\{\mu(B)\colon B \in \mathcal{B}_n\right\} \in (2^j, 2^{j+1}].$$

我们选择 $B_n \in \mathcal{B}_n$ 使得

$$\mu(B_n) \in (2^j, 2^{j+1}].$$

根据（B.1）中的不等式，存在 $N = N(r、\ \lambda、\ \|f\|_{L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)}) \in \mathbb{N}$ 使得

$$j(n+N) \leqslant j(n) - 1,$$

我们通过反证法进行论证，并假设存在一个集合族 $\{B_{n+i}\colon\ i \in \{0、\ ...、\ N\}\} \subseteq \Sigma$，其由两两不交的可测子集组成，使得对于每个 $i \in \{0、\ 1、\ ...、\ N\}$，都有

$$\ell^r_\omega(f)(B_{n+i}) \geqslant \lambda, \qquad \mu(B_{n+i}) \in (2^{j(n)}, 2^{j(n)+1}].$$

于是我们有

$$\left\|f1_{\bigcup_{i=0}^N B_{n+i}}\right\|^r_{L^r(X,\omega)} \geqslant \lambda^r \sum_{i=0}^N \mu(B_{n+i}) \geqslant \lambda^r(N+1)2^{j(n)},$$

根据 $j(n)$ 的定义，我们有

$$\mu\Big(\bigcup_{i=0}^N B_{n+i}\Big) \leqslant 2^{j(n)+1},$$

因此

$$\ell^r_\omega(f)\Big(\bigcup_{i=0}^N B_{n+i}\Big) \geqslant \Big(\frac{N+1}{2}\Big)^{\frac{1}{r}}\lambda > \|f\|_{L^\infty_\mu(\ell^r_\omega)},$$

当 N 过大时，便会导出矛盾。

因此，序列 $\{j(n)\colon\ n \in \mathbb{N}_\lambda\}$ 是非递增的，并且我们有：$\mathbb{N}_\lambda$ 要么是有限的，要么是无限的，且

$$\inf\left\{j(n)\colon n \in \mathbb{N}_\lambda\right\} = -\infty.$$

定义可测子集 $B \in \Sigma$ 为

$$B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_\lambda} B_n,$$

由此得到所需的不等式。 □

参考文献

1. Lennart Carleson, 《傅里叶级数部分和的收敛与增长》，数学学报**116** 199631 2 1966 135 157 ( ), – . MR . Francesco Di Plinio 和 Anastasios Fragkos, 《通过波包估计证明弱型 Carleson 定理》，arXiv 电子预印本（2022），arXiv:2204.08051。3. Francesco Di Plinio 和 Yumeng Ou, 《局部 L^2 **135** 2018 2, 675 711 3829613 之外的调制不变 L^p 4 Carleson 嵌入定理》，数学分析杂志（），第 – 期。MR。Yen Do 和 Christoph Thiele, 《外测度理论与 Lennart Carleson 的两大主题的结合》，美国数学会通报（新系列）**52** 3312633 5 2015 2, 249 296 ( ), no. – . MR . Marco Fraccaroli, 《外测度 $L^p_\mu(\ell^r)$ 空间的对偶性及其与帐篷空间的关系》，傅里叶分析及其应用杂志**27** （2021），第4期，论文编号67，48页。MR 4292789

6. Marco Fraccaroli, 《外测度空间理论中的主题》, 博士论文, 波恩大学, 2022年。7. Marco Fraccaroli, 《双重迭代外测度 L^p 空间的对偶性》, 数学研究（即将出版, 2023年）。8. Richard A. Hunt, 《傅里叶级数的收敛》, 《正交展开及其连续类比》（1967年, 伊利诺伊州爱德华兹维尔会议论文集）, 南伊利诺伊大学出版社, 伊利诺伊州卡本代尔, 1968年, 0238019 9 235 255页。–。MR。Michael Lacey 和 Christoph Thiele, 《卡尔森算子有界性的证明》, 数学研究快报**7** 1783613 10 2000年 4, 361 370 ( ), no. – . MR . Camil Muscalu 和 Wilhelm Schlag, 《经典与多线性调和分析。第二卷》, 剑桥高等数学研究丛书, 第138卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2013年。MR 3052499电子邮箱：mfraccar@math.uni-bonn.de