arXiv:2303.01364v2 [math.AP] 6 Apr 2023

反应扩散系统中向自相似剖面的收敛*

Alexander Mielke† 和 Stefanie Schindler‡

2023年4月5日

摘要

我们研究实数轴上的一个反应扩散系统，其中物种之间的反应由一个满足质量作用定律的可逆反应对给出 $\alpha X_1 \rightleftharpoons \beta X_2$ 。我们描述了在 $x \to -\infty$ 和 $x \to +\infty$ 处的不同正极限，并研究其长时间行为。按照抛物缩放对空间和时间进行重缩放，其中包含 $\tau = \log(1+t)$ 和 $y = x/\sqrt{1+t}$，我们证明，当 $\tau \to \infty$时，解会指数收敛到一个相似剖面。在原始变量中，这些剖面对应于渐近自相似行为，描述了无穷远处不同状态发生扩散混合的现象。

我们的方法为所有相对熵有限的初始状态提供全局指数收敛。对于 $\alpha = \beta \geq 1$ 的情形，我们允许自相似剖面具有任意平衡态；而对于 $\alpha > \beta \geq 1$，则需要假设无穷远处的两个状态足够接近，使得自相似剖面相对平坦。

关键词：质量作用动力学、相对玻尔兹曼熵、无限质量系统、能量耗散估计、自相似剖面。

数学主题分类：35K57 35C06 35B45

1 引言

本文研究满足细致平衡条件、具有质量作用动力学的非线性耦合反应扩散系统的解的长时间行为。尽管关于定义在有界区域 [Ali79, Smo94, DeF06, DeF07, BJ*14, MHM15], 上的这类系统，已有大量文献，但当底层区域选为全空间 $\Omega = \mathbb{R}^d$时，相关研究仍然很少；有限质量情形可参见例如 [HH*18]。我们将看到，在有界区域和无限质量的情形下，相似剖面可能是定性描述其渐近行为的关键工具。这里我们遵循 [BrK92, CoE92, GaM98]中关于扩散混合的思想；然而，我们的方法完全不同。我们不对相关相似剖面进行局部分析——其存在性已在 [MiS23a], 中得到证明——而是使用相对

*本研究部分得到德国研究联合会通过 SFB 910“自组织非线性系统的控制”（项目编号 163436311）及其子项目 A5“耦合抛物系统中的图案形成”的资助。

†魏尔施特拉斯应用分析与随机研究所，柏林莫伦街 39 号，邮编 10117；以及柏林洪堡大学数学研究所，德国柏林。

‡魏尔施特拉斯应用分析与随机研究所，柏林莫伦街 39 号，邮编 10117

玻尔兹曼熵，并在整体范围内推导指数收敛，即对所有具有有限相对熵的初始条件均成立。因此，我们的工作更接近于 [BJ*14] ，后者通过对适当的相对熵推导全局能量耗散估计，以研究有界区域上趋于（非平衡）稳态的指数收敛；其中还给定了非平凡的狄利克雷边界数据。据作者所知，当前工作是首个针对无限质量系统采用相对熵方法的研究。

标量非线性扩散方程的渐近自相似行为，在有限质量的情形下已形成经典理论，参见例如 [CaT00、V´az07] 及其中的参考文献。无限质量情形的研究始于 [Pel71] ，并由 [vaP77、Ber82], 加以扩展，其理论建立在比较原理之上。 $x \to -\infty$ 和 $x \to \infty$ 处极限不同的偏微分方程系统，在绝热气体流经多孔介质的背景下于 [MaP01] 中得到了研究。通过采用加权索伯列夫范数的局部估计，证明了其收敛到渐近剖面。

对于我们的模型，我们考虑 $\Omega = \mathbb{R}^d$ 上的两种物种 X_1 和 X_2 ，并将它们在时间 $t > 0$、位置 $x \in \mathbb{R}^d$处的浓度分别记为 $\widetilde{\mathbf{u}}(t,x) = \big(\widetilde{u}(t,x)\ \widetilde{v}(t,x)\big)^\top$。这些物种以扩散系数 d_1、$d_2 > 0$ 发生扩散，并通过彼此之间唯一的一对可逆化学反应 $\alpha X_1 \overset{k}{\rightleftharpoons} \beta X_2$ 相互作用。这里， α、$\beta \geq 1$ 为化学计量系数， $k > 0$表示反应强度。浓度的变化可由相应的反应扩散系统描述

$$\widetilde{\mathbf{u}}_t = \mathbf{D}\,\Delta\widetilde{\mathbf{u}} + \mathbf{R}(\widetilde{\mathbf{u}}) \quad \text{for } t > 0,\ x \in \mathbb{R}^d, \tag{1.1}$$

以及扩 散矩阵 $\mathbf{D} = \mathrm{diag}(d_1, d_2)$，并利用质量作用定律，反应项 m

$$\mathbf{R}(\widetilde{\mathbf{u}}) = k(\widetilde{v}^\beta - \widetilde{u}^\alpha)\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}.$$

此外，我们要求解在无穷远处由处于反应平衡的状态指定。此处 $d = 1$ 这仅仅意味着，我们要求解在无穷远的两端都处于平衡态，因此有 $\widetilde{\mathbf{u}}(t,\pm\infty) = (A_\pm^\beta, A_\pm^\alpha)^\top$，其中 A_- 和 $A_+ \geq 0$ 是两个给定常数。这里我们利用了系统 (1.1) 的特殊性质：它具有连续统个常数解。与只有有限个常数稳态的反应扩散系统不同，在这类系统中，典型的长时间行为是行波或脉冲（例如参见 [Smo94、VVV94、Vol14]），我们证明，当时间趋于无穷时，解会收敛到所谓的自相似剖面。这种渐近自相似行为在 [CoE92、GaM98、MSU01], 中被称为扩散混合；这些文献研究的是实金兹堡-朗道方程这一特殊系统。

相关自相似剖面的存在性已在 [MiS23a，第 5]节中得到证明。本文着重证明解向这些剖面的收敛。我们的分析基于两个关键步骤:

- 我们不使用物理变量（t, x），而是采用抛物缩放变量（τ, y），其定义为 $\tau = \log(t+1)$ 和 $y = x/\sqrt{t+1}$ and
- 我们推导出关于（玻尔兹曼型）相对熵的能量耗散估计。

作变换 $\mathbf{u}(\tau, y) = \widetilde{\mathbf{u}}(t,x)$ 后，缩放系统为

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{D}\,\mathbf{u}_{yy} + \frac{y}{2}\mathbf{u}_y + \mathrm{e}^\tau\,\mathbf{R}(\mathbf{u}) \quad \text{with } \mathbf{u}(\tau,\pm\infty) = (A_\pm^\beta, A_\pm^\alpha)^\top. \tag{1.2}$$

请注意，由于边界条件固定，我们无法缩放变量 u 和 v 的大小。显然，抛物缩放适用于扩散项，但我们看到，反应项前

还出现了一个依赖于时间的因子。由于这个前置因子随时间呈指数增长，它迫使反应快速衰减，以使整个系统达到平衡。 [GaS22] 中确实针对 $\alpha = 2$ 和 $\beta = 1$的情形证明了这一点。

渐近剖面 $\mathbf{U} = (U, V) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ 的方程可以通过以下方式来说明。我们考虑满足约束 $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = 0$ 的方程 (1.2)，并将极限 $\mathrm{e}^{\tau}\,\mathbf{R}(\mathbf{u}) \to$“$\infty \cdot 0$”替换为向量值拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda} = \Lambda(y)\binom{\alpha}{-\beta}$。由此得到 $\mathbf{U}$ 的剖面方程，形式如下

$$0 = \mathbf{D}\mathbf{U}''(y) + \frac{y}{2}\mathbf{U}'(y) + \Lambda(y)\begin{pmatrix}\alpha\\ -\beta\end{pmatrix}, \quad 0 = \mathbf{R}(\mathbf{U}(y)), \quad \mathbf{U}(\pm\infty) = \begin{pmatrix}A_{\pm}^{\beta}\\ A_{\pm}^{\alpha}\end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

关于这一剖面方程及更一般的剖面方程的处理，请参阅 [MiS23a] 。该方法将 [GaM98] 中依赖单调算子理论的方法推广到了向量值情形。

其思路是利用熵估计研究具有质量作用动力学（且满足详细平衡）的反应扩散系统的解的渐近行为。这一思路可追溯至 [Gr¨o83、Gr¨o92、GGH96] 的研究，并在近年来经多位作者加以完善，例如参见 [DeF06、DeF07、MHM15、FeT17、PSZ17]。通常的策略是取如下相对熵

$$\mathcal{E}_{\phi}(\mathbf{u}(\tau) \,|\, \mathbf{U}) = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{j_*} \phi\big(u_j(\tau, y)/U_j(y)\big) U_j(y)\,\mathrm{d}y$$

对于满足条件 $\phi(\rho) > \phi(1) = 0$ （对所有 $\rho \neq 1$ 均成立）的凸熵函数 ϕ，并证明 $\mathcal{E}_{\phi}$ 是李雅普诺夫函数，即沿着解满足所谓的熵耗散关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_{\phi}(\mathbf{u}(\tau) \,|\, \mathbf{U}) = -\mathcal{D}_{\phi}(\mathbf{u}(\tau)) \leq 0$$

该关系成立，且耗散泛函 $\mathcal{D}_{\phi}$ 非负。若能建立一个下界 $\mathcal{D}_{\phi} \geq \mu\mathcal{E}_{\phi}$，其中 $\mu > 0$，则由 Gr¨onwall 引理可得 $\mathcal{E}_{\phi}(\mathbf{u}(\tau)|\mathbf{U}) \leq \mathrm{e}^{-\mu\tau}\mathcal{E}_{\phi}(\mathbf{u}(0)|\mathbf{U})$，这意味着 $\mathbf{u}(\tau)$ 收敛到 $\mathbf{U}$，因为 $\mathcal{E}_{\phi}(\mathbf{u}|\mathbf{U}) = 0$ 当且仅当 $\mathbf{u} = \mathbf{U}$。

由于质量作用动力学，为了使反应项 $\alpha \neq \beta$ 所产生的耗散项具有正确的符号，相对玻尔兹曼熵 $\mathcal{E}_{\mathrm{B}}$ （其玻尔兹曼函数为 $\phi = \lambda_{\mathrm{B}} : z \mapsto z\log z - z + 1$ ）是唯一的选择。命题 3.1 中对此有更详细的说明，这一点在第 5 节中将很重要。我们将在第 4.2 节看到，对于 $\alpha = \beta$，其他熵函数也很有用。

关于有界区域 Ω 上未缩放系统 (1.1) 的解的长时间行为的经典研究（参见例如 [Gr¨o83、DeF06、Mie17] 及其中的参考文献）恰恰依赖于这种方法。然而，在我们的情形中，由于 $\mathbf{U} = (U, V)^{\top}$ 并非缩放系统 (1.2) 的真正稳态（参见剖面方程 (1.3) 中的拉格朗日乘子 Λ ），我们无法在无界区域 $\Omega = \mathbb{R}^1$ 上得到真正的李雅普诺夫函数。只有在非常特殊的情形 $\alpha = \beta$ 和 $d_1 = d_2$ 下，才有 $\Lambda \equiv 0$，并且我们很容易得到 $\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}(\tau)|\mathbf{U}) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}(0)|\mathbf{U})$。

在第2节中，我们通过将该方法应用于带有边界条件 $u(\tau, \pm\infty) = A_{\pm} > 0$ 的缩放线性扩散方程$u_{\tau} = Du_{yy} + \frac{y}{2}u_y$来阐述该方法。这给出了能量耗散估计

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_{\phi}(u|U) = -\mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(u) - \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\phi}(u|U) \quad \text{with } \mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(u) = D\int_{\mathbb{R}} \phi''(u/U)\big((u/U)_y\big)^2 U\,\mathrm{d}y.$$

新的且非常有用的项 $-\frac{1}{2}\mathcal{E}_\phi(u\,|\,U)$ 来自漂移项 $\frac{y}{2}u_y$，而漂移项源于抛物缩放。利用 $\mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}} \geq 0$，我们得到 $\mathcal{E}_\phi(u(\tau)|\,U) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}\mathcal{E}_\phi(u(0)|\,U)$，且无需对 $\mathbb{R}$ 使用任何 Poincar´e 不等式或对数 Sobolev 估计。因此，因子 $1/2$ 随后将被称为额外因子。

在第 3 节中，我们证明，在我们的情形下，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathrm{u}(\tau)|\mathrm{U}) = -\mathcal{D}_{\mathrm{B}}(\mathrm{u})$ 具有如下形式的耗散泛函：

$$\mathcal{D}_{\mathrm{B}} = \mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}} + \mathrm{e}^{\tau}\,\mathcal{D}_{\mathrm{react}} + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\mathrm{B}} - \mathcal{I}_\Lambda \quad \text{with } \mathcal{D}_{\mathrm{react}} = \int_{\mathbb{R}} kU^\alpha\,\Gamma\big((\frac{u(y)}{U(y)})^\alpha, (\frac{v(y)}{V(y)})^\beta\big)\,\mathrm{d}y,$$

其中，$\Gamma(a,b) \geq 0$ 定义为

$$\Gamma(a,b) := \begin{cases} (a-b)\big(\log a - \log b\big) \geq 0 & \text{for } a,b>0, \\ 0 & \text{for } a=b=0, \\ \infty & \text{for } (0,c) \text{ and } (c,0) \text{ for } c>0. \end{cases} \tag{1.4}$$

这里，$\mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}$ 由两个非负项组成，分别对应于 u 和 v。$\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$ 的特殊形式及其正性源于质量作用定律与玻尔兹曼熵之间的特殊相互作用；具体而言，利用 $\mathrm{D}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathrm{u}|\mathrm{U}) = \binom{\log u}{\log v}$ 以及对数运算法则，可得 $(u^\alpha - v^\beta)\binom{\alpha}{-\beta}\cdot\binom{\log u}{\log v} = \Gamma(u^\alpha, v^\beta) \geq 0$。同样，我们还有由漂移项 $\frac{y}{2}\mathrm{u}_y$ 产生的额外因子 $1/2$。新的难点项是混合项

$$\mathcal{I}_\Lambda(\mathbf{u}) = \int_{\mathbb{R}} \Big(\big(1-\frac{u}{U}\big)\alpha - \big(1-\frac{v}{V}\big)\beta\Big)\Lambda\,\mathrm{d}y,$$

该项源于 U 不是稳态，而是需要拉格朗日乘子Λ，参见剖面方程 (1.3)。特别是，$\mathcal{I}_\Lambda$ 没有确定的符号。

$\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$ 的有用分解推导属于第 3.2 节，其精确表述见命题 3.1。由于 $\Omega = \mathbb{R}^1$ 是无界的，我们无法利用费舍尔信息 $\mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}$，但可以依靠额外因子 $1/2$。此外，反应耗散 $\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$ 前面带有因子 e^τ，我们将在第 4 节和第 5 节中利用这一点来控制 $\mathcal{I}_\Lambda$。由于混合项 $\mathcal{I}_\Lambda$没有固定符号，相对玻尔兹曼熵 $\mathcal{E}_{\mathrm{B}}$ 可能会增长，即它并不是真正的李雅普诺夫函数。因此，我们的目标是证明

$$\frac{1}{2}\,\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) + \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\mathbf{u}) - \mathcal{I}_\Lambda(\mathbf{u}) \geq (\eta - \mu\,\mathrm{e}^{-\tau})\,\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) - K\mathrm{e}^{-\sigma\tau} \quad \text{for } \tau \geq 0 \tag{1.5}$$

对于某些 η、$\sigma > 0$ 和 μ、$K \geq 0$，结论成立。由此，我们将得到定理 4.1 和 5.2 中的收敛结果。

对问题项 $\mathcal{I}_\Lambda$ 的控制，在较简单的情形 $\alpha = \beta \geq 1$（见第 4 节）和较困难的情形 $\alpha > \beta \geq 1$（见第 5 节）中有所不同。对于 $\alpha = \beta \geq 1$，$\mathcal{I}_\Lambda$ 的被积函数仅依赖于 $\frac{u}{U} - \frac{v}{V}$，因此仅凭 $\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$ 即可对其进行控制。于是，当 $\alpha = \beta \in [1,2)$ 时，我们得到带有 $\eta = 1/2$ 和 $\sigma = 1$ 的（1.5）；或者对于$\alpha = \beta \geq 2$，得到 $\sigma = 1/(\alpha-1)$，且无需对自相似剖面 U 作任何限制。利用 Gr¨onwall 不等式的一个版本（见引理 3.3），我们发现，对于 $\alpha = \beta \in [1,3)$，衰减为 $\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathrm{u}(\tau)\,|\,\mathrm{U}) \leq C\mathrm{e}^{-\min\{\eta,\sigma\}\tau} = C\mathrm{e}^{-\tau/2}$，而对于 $\alpha = \beta > 3$，衰减较慢，类似于 $\mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)}$。

对于 $\alpha > \beta \geq 1$，控制 $\mathcal{I}_\Lambda$ 更加困难，因此我们需要利用带有额外因子的项 $\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}$。根据 [MiS23a]，我们知道，当 $|A_+ - A_-|$ 较小时，$\|\Lambda\|_\infty$ 也较小。因此，当 $|A_+ - A_-|$充分小时，我们有

$$\theta := (\alpha-\beta)\sup\big\{\,\Lambda(y)/V(y)\,\big|\,y \in \mathbb{R}\,\big\} < 1/2,$$

而定理5.2表明，对于 $\eta = 1/2 - \theta > 0$ 以及合适的 K 和 σ，(1.5)成立。目前尚不清楚在 $\alpha > \beta$ 的情况下，差异$|A_+ - A_-|$ 较大的渐近剖面是否稳定。我们注记，剖面U的平坦性条件（编码在 $\|\Lambda\|_\infty \le C|A_+ - A_-|$中）也出现在 [MaP01，定理1.1]中。

我们预计，基于能量耗散估计的方法具有足够的灵活性，可以推广到若干情形。根据 [MiS23a]，中关于相似剖面向量值存在性的结果，我们应当能够处理一般的反应系统：其中 i_*个物种通过采用质量作用动力学的 r_* 个反应对相互作用，且 $m_* := i_* - r_* \ge 1$ 给出平衡流形的维数，而相似剖面 U 将属于该流形。当然，控制混合项 $\mathcal{I}_\Lambda$ 的问题会更加复杂，因为 $\mathcal{I}_\Lambda$ 现在涉及 m_* 个拉格朗日乘子。此外，我们的收敛理论同样适用于空间维数 $d \ge 2$：只要相似剖面的存在性得到证明，能量耗散估计就可以借助额外因子 $d/2$完成。

2 全空间上线性扩散方程的自相似性收敛

在本节 中，我们展示针对研究充分的线性扩散方程所采用的方法 n

$$\widetilde{u}_t = D\,\widetilde{\Delta}\widetilde{u} \ \text{ on } \ \mathbb{R}^d, \tag{2.1}$$

扩散常数为 $D > 0$。对于初始数据 $\widetilde{u}^0 \in L^1(\mathbb{R}^d)$，已知解的渐近行为类似于高斯函数，参见例如 [J¨un16，第 2.4] 节。本文关注具有非平凡边界条件的解的长时间行为（$|x| \to \infty$），使得这些解具有无限质量。

在一维情形下，我们考虑扩散方程 (2.1) 及其边界条件

$$\widetilde{u}(t, \pm\infty) := \lim_{x \to \pm\infty} \widetilde{u}(t, x) = A_\pm$$

并探究当时间 t 趋于 ∞时，解如何混合这两个稳态 $A_\pm$ 。由于方程具有线性性质，不难证明，对于任意给定的一对渐近边界条件 $(A_-, A_+) \in \mathbb{R}^2$，解在 $x \in \mathbb{R}$ 上一致收敛于以下自相似解

$$U(x/\sqrt{t}) := \frac{1}{2}(A_+ - A_-)\,\mathrm{erf}\big(x/\sqrt{4Dt}\big) + \frac{1}{2}(A_+ + A_-), \tag{2.2}$$

其中 $\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-z^2)\,\mathrm{d}z$ 是误差函数。不过，我们不想利用线性性质来验证这一收敛，也不想使用由误差函数给出的剖面的精确表达式，因为我们希望将以下策略推广到给定的非线性反应扩散系统。因此，我们将使用熵估计来证明这一收敛。

在此之前，我们从另一个角度来看剖面函数 (2.2)。我们发现，U 取决于商 $x/\sqrt{t}$，而不是分别取决于变量 t 和 x。这促使我们进行变量变换，引入所谓的抛物缩放变量：$y = (1+t)^{-1/2}x \in \mathbb{R}^d$ 和 $\tau = \log(1+t)$。回到多维情形，我们定义

$$u(\tau, y) := \widetilde{u}(t, x) = \widetilde{u}\big(\mathrm{e}^\tau - 1,\, \mathrm{e}^{\tau/2} y\big)$$

并 fi 并得到具有相同渐近边界条件的缩放扩散方程 s:

$$u_\tau = D\,\Delta u + \frac{1}{2} y \cdot \nabla u \quad \text{and} \quad u(\tau, y) - U(y) \to 0 \text{ for } |y| \to \infty, \tag{2.3}$$

其中， Δ 和 ∇ 现在均取为关于 $y \in \mathbb{R}^d$。渐近边界条件由一个固定函数 $U\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$给出，我们将其视为自相似剖面，即它满足剖面方程

$$D\,\Delta U + \frac{1}{2} y \cdot \nabla U = 0 \ \text{ on } \mathbb{R}^d. \tag{2.4}$$

显然，(2.2)中的解给出了 $d = 1$情形下所有可能的解。对于$d \geq 2$ ，解的集合要丰富得多，即使限制在 $U \in \mathsf{C}^2(\mathbb{R}^d)$且 $\inf U \geq \underline{U} > 0$的情形也是如此。当然，我们再次看到， $\widetilde{u}(t,x) = U\big((1+t)^{-1/2}x\big)$ 是未缩放方程(2.1)的一个精确自相似解。

为了给后续对反应扩散系统的分析做准备，我们现在证明缩放线性扩散方程的所有解都收敛，具体来说，相对熵

$$\mathcal{E}_\phi(u|U) := \int_{\mathbb{R}} \phi(u/U)\, U \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \phi(\rho) U \,\mathrm{d}y, \quad \text{where } \rho = u/U,$$

指数收敛至 0。这里， ϕ 是任意一个满足对所有 $\rho \geq 0$均有$\phi(\rho) \geq \phi(1) = 0$ 的凸熵函数。我们将由此产生的指数衰减率 $d/2$ 称为额外因子，因为它完全来自缩放，也就是说，来自漂移项 $\frac{1}{2} y \cdot \nabla u$。

命题 2.1（线性扩散方程中的衰减）考虑缩放线性扩散方程，设 $U \in \mathsf{C}^2_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d)$ 是满足 (2.4) 和$U(y) \geq \underline{U} > 0$ 的相似剖面。那么，所有满足 $\mathcal{E}_\phi(u^0|U) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(u^0/U) U \,\mathrm{d}y < \infty$ 的柯西问题 (2.3) 的解 u 都收敛到 U，其意义是

$$\mathcal{E}_\phi(u(\tau)|U) \leq \mathrm{e}^{-d\tau/2}\, \mathcal{E}_\phi(u^0|U) \quad \textit{for all } \tau > 0.$$

证明。为简化计算，我们使用相对密度 $\rho(\tau, y) := u(\tau, y)/U(y)$，并注意到缩放扩散方程 (2.3) 可写为

$$\begin{aligned} U\rho_\tau &= D\big(U\Delta\rho + 2\nabla U \cdot \nabla\rho + \rho\Delta U\big) + \frac{1}{2} y \cdot \big(U\nabla\rho + \rho\nabla U\big) \\ &= D\big(U\Delta\rho + 2\nabla U \cdot \nabla\rho\big) + \frac{1}{2} U\, y \cdot \nabla\rho, \end{aligned}$$

其中，最后一个等式是将剖面方程 (2.4) 代入 U 后得到的。

我们计算相对熵对时间的导数。可得

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_\phi(u(\tau)|U) &= \int_{\mathbb{R}^d} \phi'(\rho)\rho_\tau U \,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}^d} \phi'(\rho)\big\{D\big(U\Delta\rho + 2\nabla U\cdot\nabla\rho\big) + \frac{1}{2} U y\cdot\nabla\rho\big\}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{*}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \big\{ - D\phi''(\rho)|\nabla\rho|^2 U + \big(D\nabla U + \frac{1}{2} U y\big)\cdot\big(\phi'(\rho)\nabla\rho\big)\big\}\,\mathrm{d}y \\ &\overset{*}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \big\{ - D\phi''(\rho)|\nabla\rho|^2 U - \big(D\Delta U + \frac{1}{2}\, y\cdot\nabla U + \frac{1}{2}(\operatorname{div} y) U\big)\phi(\rho)\big\}\,\mathrm{d}y \\ &= -\mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(\rho) \ - 0 \ - \frac{d}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \phi(\rho) U \,\mathrm{d}y \ =: \ -\mathcal{D}_\phi(\rho). \end{aligned}$$

这里， $\stackrel{*}{=}$ 表示一次分部积分，其中我们使用了 $\rho(y) \to 1$ 和 $\phi'(1) = 0$。对于倒数第二个等式，我们使用了费舍尔信息

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(\rho) := D \int_{\mathbb{R}^d} \phi''(\rho) |\nabla \rho|^2 U \, \mathrm{d}y \geq 0$$

以及剖面方程 $D\Delta U + \frac{1}{2}\, y \cdot \nabla U = 0$ 。额外因子来源于1 2 $\operatorname{div} y = d/2$。

–

Th我们有，耗散 $\mathcal{D}_\phi$ 非负，且满足 $\mathcal{D}_\phi(\rho) \geq \frac{d}{2}\, \mathcal{E}_\phi(u|U)$，从而得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \mathcal{E}_\phi(u(\tau)|U) = -\mathcal{D}_\phi(\rho) \leq -\frac{d}{2}\, \mathcal{E}_\phi(u(\tau)|U).$$

根据 Gr¨onwall 引理，我们得到 τ中的指数收敛。更确切地说，我们有

$$\mathcal{E}_\phi(u(\tau)|U) \leq \mathrm{e}^{-d\tau/2} \mathcal{E}_\phi(u(0)|U) \text{ for } \tau > 0,$$

正如所声称的那样。 ∎

在上述证明中，我们看到了抛物缩放的关键益处。缩放扩散方程 (2.3) 中的额外项 $\frac{1}{2} y \cdot \nabla u$ 带来了相对熵微分不等式中所谓的额外因子 $d/2$ ，进而保证了收敛并给出了明确的衰减率。

3 反应-扩散系统

本节的第一部分将更详细地介绍耦合反应扩散系统 (1.1) 及其缩放系统 (1.2)，并阐述它们的重要性质。接着，在第 3.2 节中，我们推导缩放系统的耗散泛函，并证明其满足适当的分解。

3.1 系统及其相似剖面

考虑无界区域 $\Omega = \mathbb{R}^1$ 上的一个耦合非线性反应扩散方程组，它描述扩散物种 X_1 和 X_2 通过单一可逆反应 $\alpha X_1 \rightleftharpoons \beta X_2$ 相互作用时浓度的变化。分别用 $\widetilde{u}$、$\widetilde{v} \geq 0$表示它们的密度时，质量作用定律给出如下系统

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_t &= d_1 \widetilde{u}_{xx} + \alpha k (\widetilde{v}^\beta - \widetilde{u}^\alpha), \\ \widetilde{v}_t &= d_2 \widetilde{v}_{xx} - \beta k (\widetilde{v}^\beta - \widetilde{u}^\alpha), \end{aligned} \tag{3.1}$$

对于 $t > 0$ 和 $x \in \mathbb{R}^1$，其中扩散系数 d_1、d_2 和反应速率 k 均假设为正。常数稳态构成一个单参数族，具体如下:

$$\big\{ (A^\beta, A^\alpha) \,\big|\, A > 0 \big\}.$$

我们关注初始数据 (u^0, v^0) 在无穷远处处于平衡态时解的行为；也就是说，对于给定的两个常数 $A_-, A_+ > 0$ ，连续初始数据满足渐近边界条件

$$\big(\widetilde{u}^0(\pm\infty), \widetilde{v}^0(\pm\infty)\big) := \lim_{x \to \infty} \big(\widetilde{u}^0(\pm x), \widetilde{v}^0(\pm x)\big) = \big(A_\pm^\beta, A_\pm^\alpha\big).$$

动机　根据第2节，我们将系统 (3.1) 转换到抛物缩放坐标中　s

$$y = x/\sqrt{t+1} \quad \text{and} \quad \tau = \log(t+1).$$

于是，变换后的系统为

$$\begin{aligned} u_\tau &= d_1 u_{yy} + \frac{y}{2} u_y + \mathrm{e}^\tau \alpha k (v^\beta - u^\alpha), \\ v_\tau &= d_2 v_{yy} + \frac{y}{2} v_y - \mathrm{e}^\tau \beta k (v^\beta - u^\alpha). \end{aligned} \tag{3.2}$$

因此，连续初始数据 (u^0, v^0) 满足渐近边界条件

$$\big(u^0(\pm\infty), v^0(\pm\infty)\big) = \big(A_\pm^\beta, A_\pm^\alpha\big). \tag{3.3}$$

注意，在 (3.2) 中，反应项前出现了指数因子，因为反应的变换方式不同于抛物线项。乍看之下，变换后的系统似乎比原系统复杂得多，因为它现在是非自治的。此外，该因子随时间呈指数增长，这可能会妨碍收敛。然而，进一步考虑后我们会发现，从技术角度看，前置因子 e^τ 是有益的，最终有助于问题得到解决。所幸，反应项中包含一个差值；因此，该前置因子预示了解在较大时间下的可能行为。第 4 节和第 5 节旨在严格证明这一点。

不过，我们现在就可以设想，指数增长因子会迫使反应在 $\tau \to \infty$ 处达到平衡。然而，仍可能存在非平凡的反应通量 $q = k\mathrm{e}^\tau(v^\beta - u^\alpha)$（当 $\tau \to \infty$ 时），这可以看作“$\infty \cdot 0$”型极限。正如 [MiS23a, MiS23b], 中所讨论的，相似剖面 $y \mapsto \mathrm{U}(y) = (U(y)\ V(y))^\top$ 必须满足以下微分代数系统

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 U''(y) + \frac{y}{2} U'(y) \\ d_2 V''(y) + \frac{y}{2} V'(y) \end{pmatrix} + \Lambda(y) \begin{pmatrix} \alpha \\ -\beta \end{pmatrix}, \quad U(y)^\alpha = V(y)^\beta, \quad \begin{pmatrix} U(\pm\infty) \\ V(\pm\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_\pm^\beta \\ A_\pm^\alpha \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

可以通过代数运算消去 Λ 和 $V = U^{\alpha/\beta}$，从而得到仅关于U 的非线性常微分方程，即

$$\big(\beta d_1 U + \alpha d_2 U^{\alpha/\beta}\big)'' + \frac{y}{2}\big(\beta U + \alpha U^{\alpha/\beta}\big)' = 0, \qquad \text{with } U(\pm\infty) = A_\pm^\beta.$$

在 [MiS23a] 中证明了，对于所有 (A_-, A_+)，方程 (3.4 存在唯一解 U　).

我们将函数 $\mathrm{U} = (U, V)^\top$ 称为相似剖面，并旨在证明方程 (3.2)–(3.3) 的解 $\mathrm{u} = (u, v)^\top$ 会收敛到这些剖面，其意义是相对玻尔兹曼熵 $\mathcal{E}_\mathrm{B}$ 满足如下定性估计

$$\mathcal{E}_\mathrm{B}(\mathbf{u}(\tau) \,|\, \mathbf{U}) \le \widetilde{C}\, \mathrm{e}^{-\eta\tau}\, \mathcal{E}_\mathrm{B}(\mathbf{u}(0) \,|\, \mathbf{U}) + \widetilde{K}\, \mathrm{e}^{-\sigma\tau}, \tag{3.5}$$

~　~其中，速率 η, $\sigma > 0$ 和常数 C, K 仅取决于给定的问题数据，而与初始条件 u(0) 无关。由此可推出$\mathcal{E}_\mathrm{B}$(u(τ) | U)以指数速率 min$\{\eta, \sigma\} > 0$指数收敛。

在 [MiS23a, 引理 3.2] 中还证明了，满足方程 (3.4) 的剖面 $\mathrm{U} = (U, V)^\top$ 是单调的，即对于 $A_- < A_+$，对所有 $y \in \mathbb{R}$ 都有 $U'(y)\ V'(y) > 0$。因此，我们有 $U(y) > A_-^\beta > 0$ 和 $V(y) > A_-^\alpha > 0$，对所有 $y \in \mathbb{R}$ 均成立；由此，相对熵是良定义的，其中玻尔兹曼函数的自变量为相对密度 $\rho = u/U$ 和 $\zeta = v/V$。

3.2 耗散的适当划分

请注意，通常的做法是取一个相对熵 $\mathcal{E}_\phi$，并证明它在所有时刻都满足所谓的熵耗散关系

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_\phi(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) = -\mathcal{D}_\phi(\mathbf{u}) \le 0$$

对于一个非负耗散泛函 $\mathcal{D}_\phi$。在我们的情形下，不能指望映射 $\tau \mapsto \mathcal{E}_\phi(\mathbf{u}(\tau)\,|\,\mathbf{U})$ 具有单调性，因为它定义在全空间上，而且 $\mathbf{U}$ 并非真正的稳态。这与 [DeF06, DeF07, BJ*14, Mie17], 的情况形成对比：这些文献研究的是有界区域上的未缩放系统 (3.1)，并且存在精确的稳态。不过，在第 4 节和第 5 节中，我们将证明，熵耗散关系在指数衰减项的意义下成立，参见 (1.5) 或引理 3.3。

我们来考虑相对玻尔兹曼熵

$$\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) = \int_{\mathbb{R}} \big(\lambda_{\mathrm{B}}(\rho)U + \lambda_{\mathrm{B}}(\zeta)V\big)\,\mathrm{d}y \quad \text{where } \rho := \frac{u}{U} \text{ and } \zeta := \frac{v}{V},$$

因为它与质量作用动力学相辅相成。

本节的首要目标是推导出满足以下条件的耗散泛函 $\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) =: -\mathcal{D}_{\mathrm{B}}(\rho,\zeta), \tag{3.6}$$

其次，我们要找到一种合适的划分方式，将其分为良性项和问题项。这一点很有用，因为正如我们已经猜到的，在我们的设定中，$\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$ 没有固定符号。因此，我们将以适当的方式考察其包含的各项。请注意，我们会将耗散项写成相对密度 $\rho = u/U$ 和 $\zeta = v/V$的函数，而相对熵则仍按标准形式写成关于 $\mathbf{u} = (u,v)^\top$ 的函数。

命题 3.1 满足 (3.6) 的耗散 $\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$ 可分解为

$$\mathcal{D}_{\mathrm{B}}(\rho,\zeta) = \mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta) + \frac{1}{2}\,\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) - \mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) + \mathrm{e}^\tau\,\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta),$$

其中 $\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta) := \int_{\mathbb{R}} kU^\alpha\Gamma(\rho^\alpha,\zeta^\beta)\,\mathrm{d}y \ge 0$ 是反应耗散，而 $\mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta) := \int_{\mathbb{R}} d_1 U\lambda_{\mathrm{B}}''(\rho)\rho_y^2 + d_2 V\lambda_{\mathrm{B}}''(\zeta)\zeta_y^2\mathrm{d}y \ge 0$ 称为费舍尔信息。附加项 $\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}$ 源于输运项 $\frac{y}{2}\partial_y\mathbf{u}$，而剩余项

$$\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) := \int_{\mathbb{R}} \big((1-\rho)\alpha - (1-\zeta)\beta\big)\Lambda\,\mathrm{d}y, \tag{3.7}$$

这是由于剖面方程 (3.4) 中出现了拉格朗日乘子 Λ。这一项称为混合项，因为它是唯一一个不定号的加项。

证明。取由泛函给出的相对玻尔兹曼熵 $\mathcal{E}_{\mathrm{B}}$

$$\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) = \int_{\mathbb{R}} U\lambda_{\mathrm{B}}(\rho) + V\lambda_{\mathrm{B}}(\zeta)\,\mathrm{d}y.$$

T相对密度 $\rho(\tau,y) := u(\tau,y)/U(y)$ 和 $\zeta(\tau,y) := v(\tau,y)/V(y)$ 满足

$$\begin{aligned} U\rho_\tau &= d_1\big(U\rho_{yy} + 2U'\rho_y + U''\rho\big) + \frac{y}{2}\big(U\rho_y + U'\rho\big) + \alpha k\mathrm{e}^\tau U^\alpha(\zeta^\beta - \rho^\alpha),\\ V\zeta_\tau &= d_2\big(V\zeta_{yy} + 2V'\zeta_y + V''\zeta\big) + \frac{y}{2}\big(V\zeta_y + V'\zeta\big) - \beta k\mathrm{e}^\tau V^\beta(\zeta^\beta - \rho^\alpha). \end{aligned}$$

因此，计算相对熵关于时间的导数可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) &= \int_{\mathbb{R}} U\lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\rho_\tau + V\lambda_{\mathrm{B}}'(\zeta)\zeta_\tau\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\Big\{d_1\big(U\rho_{yy}+2U'\rho_y+U''\rho\big)+\frac{y}{2}\big(U\rho_y+U'\rho\big)\Big\}\,\mathrm{d}y\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}} \lambda_{\mathrm{B}}'(\zeta)\Big\{d_2\big(V\zeta_{yy}+2V'\zeta_y+V''\zeta\big)+\frac{y}{2}\big(V\zeta_y+V'\zeta\big)\Big\}\,\mathrm{d}y\\ &\quad-\mathrm{e}^\tau\int_{\mathbb{R}} kU^\alpha\big(\beta\lambda_{\mathrm{B}}'(\zeta)-\alpha\lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\big)(\zeta^\beta-\rho^\alpha)\,\mathrm{d}y\\ &=: -\mathcal{D}_{\mathrm{diff}}(\rho,\zeta)-\mathrm{e}^\tau\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta),\end{aligned}$$

其中我们利用关系式 $U^\alpha = V^\beta$ 对反应项进行了化简。我们先考虑反应耗散。利用对数恒等式，我们可以确定 $\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$的符号。其成立形式为

$$\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta) := \int_{\mathbb{R}} kU^\alpha\big(\beta\lambda_{\mathrm{B}}'(\zeta)-\alpha\lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\big)(\zeta^\beta-\rho^\alpha)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} kU^\alpha\Gamma(\rho^\alpha,\zeta^\beta)\,\mathrm{d}y \geq 0,$$

其中 Γ 定义于（1.4）中。接下来，我们研究剩余的扩散耗散 $\mathcal{D}_{\mathrm{diff}}$。重新整理可得

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathrm{diff}}(\rho,\zeta) &= -\int_{\mathbb{R}} d_1U\lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\rho_{yy}+d_2V\lambda_{\mathrm{B}}'(\zeta)\zeta_{yy}\,\mathrm{d}y\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}}\lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\rho\big(d_1U''+\frac{y}{2}U'\big)+\lambda_{\mathrm{B}}'(\zeta)\zeta\big(d_2V''+\frac{y}{2}V'\big)\,\mathrm{d}y\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}}\lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\rho_y\big(2d_1U'+\frac{y}{2}U\big)+\lambda_{\mathrm{B}}'(\zeta)\zeta_y\big(2d_2V'+\frac{y}{2}V\big)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

与缩放扩散方程的处理方式相同，其思路是进行两次分部积分。对于边界项，我们利用极限 $\rho(y) \to 1$ 以及 $\zeta(y) \to 1$ 分别在 $y \to \pm\infty$ 下成立，并使用性质 $\lambda_{\mathrm{B}}'(1) = 0$。第一个积分项得到费舍尔信息

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta) := \int_{\mathbb{R}} d_1U\lambda_{\mathrm{B}}''(\rho)\rho_y^2+d_2V\lambda_{\mathrm{B}}''(\zeta)\zeta_y^2\,\mathrm{d}y \geq 0.$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathrm{diff}}(\rho,\zeta) &= \mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta)-\int_{\mathbb{R}}\lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\rho\big(d_1U''+\frac{y}{2}U'\big)+\lambda_{\mathrm{B}}'(\zeta)\zeta\big(d_2V''+\frac{y}{2}V'\big)\,\mathrm{d}y\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}}\lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\rho_y\big((2d_1-d_1)U'+\frac{y}{2}U\big)+\lambda_{\mathrm{B}}'(\zeta)\zeta_y\big((2d_2-d_2)V'+\frac{y}{2}V\big).\end{aligned}$$

在最后一行中，我们分别看到了 $\lambda_{\mathrm{B}}(\rho)$ 和 $\lambda_{\mathrm{B}}(\zeta)$ 的全导数。因此，对这些积分项进行分部积分后，分别得到因子 $d_1U''+\frac{y}{2}U'+\frac{1}{2}U = -\alpha\Lambda+\frac{1}{2}U$ 和 $d_2V''+\frac{y}{2}V'+\frac{1}{2}V = \beta\Lambda+\frac{1}{2}V$，其中用到了剖面方程 (3.4)。进一步利用 $\lambda_{\mathrm{B}}'(\rho)\rho-\lambda_{\mathrm{B}}(\rho) = \rho-1$，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{\mathrm{diff}}(\rho,\zeta) &= \mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta)+\frac{1}{2}\,\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U})-\int_{\mathbb{R}}\big((1-\rho)\alpha\Lambda-(1-\zeta)\beta\Lambda\big)\,\mathrm{d}y\\ &= \mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta)+\frac{1}{2}\,\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U})-\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta),\end{aligned}$$

这验证了所需的分解。 ∎

在命题 3.1 的证明中，我们看到，由于质量作用动力学，对于给定的反应扩散系统，若$\alpha \neq \beta$，则相对玻尔兹曼函数 $\phi = \lambda_{\mathrm{B}}$ 是获得反应耗散 $\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$符号的唯一选择。然而，如果 $\alpha = \beta$，也可以选择其他熵函数。常见的一族熵函数定义如下：

$$F_p(z) := \begin{cases} \frac{1}{p(p-1)}\big(z^p - pz + p - 1\big) & \text{for } p \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \\ z\log z - z + 1 & \text{for } p = 1, \\ z - \log z - 1 & \text{for } p = 0, \end{cases} \tag{3.8}$$

它由条件 $F_p''(z) = z^{p-2}$和 $F_p(1) = F_p'(1) = 0$确定。此外，它满足以下下界：

$$\text{For all } p \in (0,1) \text{ and } z > 0: \qquad F_p(z) \geq \frac{1}{p} F_1(z) = \frac{1}{p}\lambda_{\mathrm{B}}(z), \tag{3.9a}$$

$$\text{对所有 } p > 0 \text{ 和 } z > 0: \qquad F_p(z) \geq \frac{1/2}{\max\{p, 1-p\}} F_{1/2}(z), \tag{3.9b}$$

参见 [MiM18，式 (3.2)]。事实上，在 $\alpha = \beta$ 的情况下使用这族熵函数，可以得到更好的估计，正如我们将在第 4.2 节中看到的那样。不过，在第 5 节中研究相对玻尔兹曼熵的 $\alpha \neq \beta$ 收敛时，也使用了熵函数族 (3.8)，但在这种情况下，仅出于估计过程中的技术原因。

我们可以定义与函数 F_p 相关的相对熵：

$$\mathcal{E}_p(\mathbf{u}(\tau) \,|\, \mathbf{U}) := \int_{\mathbb{R}} U(y) F_p(\rho(y)) + V(y) F_p(\zeta(y)) \,\mathrm{d}y \quad \text{where } \rho := u/U \text{ and } \zeta := v/V,$$

使得 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{\mathrm{B}}$。熵 $\mathcal{E}_{1/2}$具有特殊性质，因为 $F_{1/2}(u/U)U = 2\big(\sqrt{u} - \sqrt{U}\big)^2$。因此我们有

$$\int_{\mathbb{R}} F_{1/2}(u/U) U \,\mathrm{d}y = 2\big\|\sqrt{u} - \sqrt{U}\|_{\mathrm{L}^2}^2 =: 2\mathsf{He}(u,U)^2,$$

其中，He 表示两个非负测度（的密度）之间的海灵格距离。利用 (3.9a)，我们看到，对于所有 $p > 0$，$\mathbf{u} = (u,v)^\top$ 与 $\mathbf{U} = (U,V)^\top$ 之间的海灵格距离可以由 $\mathcal{E}_p$ 控制。事实上，我们有

$$\mathsf{He}(u,U)^2 + \mathsf{He}(v,V)^2 = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{1/2}(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{U}) \leq \max\{p, 1-p\}\mathcal{E}_p(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{U}). \tag{3.10}$$

作为本节的最后一部分，我们将推导相应的耗散泛函 $\mathcal{D}_p$，它满足

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_p(\mathbf{u}(\tau) \,|\, \mathbf{U}) = -\mathcal{D}_p(\rho, \zeta)$$

并阐明其包含的各项。请注意，以下结论仅在化学计量系数相同时成立。

命题 3.2 设 $\alpha = \beta$ 和 $p \notin \{0,1\}$。满足上述条件的耗散泛函 $\mathcal{D}_p$ 可写为

$$\mathcal{D}_p(\rho,\zeta) = \mathcal{I}_{p,\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_p(\mathbf{u} \,|\, \mathbf{U}) - \mathcal{I}_{p,\Lambda}(\rho,\zeta) + \mathrm{e}^\tau \mathcal{D}_{p,\mathrm{react}}(\rho,\zeta),$$

其中 $\mathcal{D}_{p,\ \mathrm{react}}(\rho,\zeta) := \int_{\mathbb{R}} kU^{\alpha}\frac{\alpha}{p-1}(\zeta^{p-1}-\rho^{p-1})(\zeta^{\alpha}-\rho^{\alpha})\,\mathrm{d}y \geq 0$为反应耗散，费舍尔信息的形式为 $\mathcal{I}_{p,\ \mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta) := \int_{\mathbb{R}} d_1 U\rho^{p-2}\rho_y^2 + d_2 V\zeta^{p-2}\zeta_y^2\mathrm{d}y \geq 0$，而混合项表示为

$$\mathcal{I}_{p,\Lambda}(\rho,\zeta) := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}\big(\zeta^p-\rho^p\big)\,\alpha\Lambda\,\mathrm{d}y$$

再次是唯一一个没有确定符号的加项。

证明。按照命题 3.1 的证明步骤，并利用 $\alpha=\beta$，可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_p(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) = -\mathcal{D}_{p,\mathrm{diff}}(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{p,\mathrm{react}}(\rho,\zeta),$$

其中反应耗散的形式为

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{p,\mathrm{react}}(\rho,\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} kU^{\alpha}\alpha\big(F_p'(\zeta)-F_p'(\rho)\big)(\zeta^{\alpha}-\rho^{\alpha})\,\mathrm{d}y\\ &= \int_{\mathbb{R}} kU^{\alpha}\frac{\alpha}{p-1}(\zeta^{p-1}-\rho^{p-1})(\zeta^{\alpha}-\rho^{\alpha})\,\mathrm{d}y \geq 0,\end{aligned}$$

而对于扩散部分，类似的分部积分可得

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{p,\mathrm{diff}}(\rho,\zeta) &= \mathcal{I}_{p,\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_p(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U})\\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \big(F_p'(\rho)\rho - F_p(\rho)\big)\big(d_1U'' + \frac{y}{2}U'\big) + \big(F_p'(\zeta)\zeta - F_p(\zeta)\big)\big(d_2V'' + \frac{y}{2}V'\big)\,\mathrm{d}y\\ &= \mathcal{I}_{p,\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_p(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) - \int_{\mathbb{R}} \Big(\big(F_p'(\zeta)\zeta - F_p(\zeta)\big) - \big(F_p'(\rho)\rho - F_p(\rho)\big)\Big)\alpha\Lambda\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

因为 $\alpha=\beta$。此外，由于 $F_p'(\rho)\rho - F_p(\rho) = \frac{1}{p}(\rho^p-1)$，可得

$$\mathcal{D}_{p,\mathrm{diff}}(\rho,\zeta) = \mathcal{I}_{p,\mathrm{Fisher}}(\rho,\zeta) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_p(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) - \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}(\zeta^p-\rho^p)\alpha\Lambda\,\mathrm{d}y.$$

■

3.3 衰减估计

推导出熵耗散关系 (3.6) 后，下一步需要找到所谓的熵耗散估计，即形如 $\mathcal{D}_{\phi}(\mathbf{u}) \geq \Psi(\mathcal{E}_{\phi}(\mathbf{u}))$ 的估计，其中 Ψ 是非负函数。在对 Ψ 作出适当假设的条件下，这通常可推出收敛到平衡态的指数收敛；对于特定的 Ψ，收敛速率还可以显式估计。例如，如果甚至能得到不等式 $\mathcal{D}_{\phi}(\mathbf{u}) \geq \eta\,\mathcal{E}_{\phi}(\mathbf{u})$，其中 η 是正数，那么利用 Gr¨onwall 不等式很容易看出，η 正是所需的收敛速率。由于命题 3.1 中的耗散泛函 $\mathcal{D}_{\phi}$ 含有混合项，因而没有固定符号，所以对于给定问题，几乎不可能期待得到上述界限。但事实上，要得到收敛，并不需要假设耗散泛函在所有时刻都非负。如果一个没有固定符号的耗散泛函可以估计为

$$\mathcal{D}_{\phi}(\mathbf{u}) \geq \eta\,\mathcal{E}_{\phi}(\mathbf{u}) - K\mathrm{e}^{-\gamma\tau}, \tag{3.11}$$

例如，利用 $\gamma > 0$ 和 $K \geq 0$，那么仍然可以得到收敛，其速率为 η 和 γ 中的较小者（精确表述见下文引理 3.3）。于是，非负函数 $\tau \mapsto K\mathrm{e}^{-\gamma\tau}$ 可解释为相对熵的上界，因为它并非真正的李雅普诺夫函数。由于该函数随时间指数衰减，当时间足够长时，这一误差便会表现良好。我们稍后将看到，在某些情形下，即化学计量系数满足 α、$\beta \geq 2$ 时，不等式 (3.11) 正是我们对命题 3.1 中给定耗散泛函 $\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$ 将要证明的结果。对于另一种情形，即 α、$\beta \in [1, 2)$，我们需要以下更一般的结论。

引理 3.3 设 $E\colon [0,\infty) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ 是一个满足 $E(0) < \infty$ 和常微分不等式的函数

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} E(\tau) \leq -(\eta - \mu \mathrm{e}^{-\tau})\, E(\tau) + K\mathrm{e}^{-\gamma\tau}$$

其中 $\eta, \gamma > 0$ 和 $K, \mu \geq 0$。那么，对于所有 $\tau > 0$，我们有 $E(\tau) < \infty$，并且

$$E(\tau) \leq \mathrm{e}^{-\eta\tau + \mu}\big(E(0) + R(\tau)\big) \qquad with \qquad R(\tau) := K \int_0^\tau \mathrm{e}^{(\eta-\gamma)s}\, \mathrm{d}s.$$

计算函数 R，得到 $E(\tau) \leq \mathrm{e}^{-\text{最小值}\{\eta,\gamma\}\tau + \mu}\big(E(0) + 2K|\eta - \gamma|^{-1}\big)$，若 $\eta \neq \gamma$；而在 $\eta = \gamma$ 的情形下，$E(\tau) \leq \mathrm{e}^{-\eta\tau+\mu}\big(E(0) + K\tau\big)$。

该引理的证明见附录。我们看到，这个较弱版本的熵耗散估计足以得到所需的收敛 (3.5)。在接下来的章节中，我们将推导关于相对熵随时间变化的这一微分不等式。

4 α = β 特例下的收敛

我们先考虑特例 $\alpha = \beta \geq 1$。也就是说，我们研究反应扩散系统的解 $\mathbf{u} = (u, v)^\top$

$$\begin{aligned} u_\tau &= d_1 u_{yy} + \frac{y}{2} u_y + \mathrm{e}^\tau \alpha k (v^\alpha - u^\alpha), \\ v_\tau &= d_2 v_{yy} + \frac{y}{2} v_y - \mathrm{e}^\tau \alpha k (v^\alpha - u^\alpha) \end{aligned} \tag{4.1}$$

以及满足渐近边界条件的连续初始数据 $\mathbf{u}^0 = (u(0)\ v(0))^\top$

$$\mathbf{u}^0(\pm\infty) = (A_\pm^\alpha, A_\pm^\alpha)^\top. \tag{4.2}$$

在这个特例中，式 (3.7) 中的混合项 $\mathcal{I}_\Lambda$ 大幅简化，即

$$\mathcal{I}_\Lambda(\rho, \zeta) = \int_{\mathbb{R}} \big(\zeta - \rho\big)\, \alpha\, \Lambda\, \mathrm{d}y.$$

关键在于， $\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$能够通过项 $\Gamma(\rho^\alpha, \zeta^\alpha)$ 控制 $\zeta - \rho$；这将是第 4.1 节的内容，我们将在该节重点讨论玻尔兹曼熵。之后，在第 4.2 节中，我们将考虑更一般的熵函数，并尝试以类似的方式利用命题 3.2 中的$\mathcal{D}_{p,\ \mathrm{react}}$ 来控制$\mathcal{I}_{p,\ \Lambda}$ 。

另一个重要性低得多的要点是，剖面方程 (3.4) 也大幅简化，因此可以显式求解 U、 V 和 Λ。事实上，代入 $\alpha = \beta$ 后可以看出，剖面 $\mathsf{U} = (U, V)^\top$ 的特征由求解以下线性常微分方程确定

$$\begin{aligned} &\tfrac{d_1+d_2}{2}\, U''(y) + \tfrac{y}{2} U'(y) = 0 \quad \text{with} \;\; U(\pm\infty) = A_\pm^\alpha, \\ &V(y) = U(y) \quad \text{and} \quad \Lambda = \tfrac{d_2-d_1}{2\alpha}\, U''(y). \end{aligned} \tag{4.3}$$

这意味着， U 是误差函数型的，类似于线性扩散方程的剖面 (2.2)，但这里考虑的是扩散系数的平均值 $(d_1+d_2)/2$。不过，接下来的计算并不需要这一结果；因此，我们不排除进一步推广的可能性，因为当 $\alpha \neq \beta$ 时这一结果并不成立。本节有两个目的：在第 4.1 节中，我们证明相对玻尔兹曼熵 $\mathcal{E}_{\mathrm{B}}$ 情形下的指数收敛；在第 4.2 节中，我们证明在这种情况下，采用不同相对熵的估计也是可行的，甚至更有优势。在这两种情况下，结论都是通过证明耗散泛函的一个适当界（如不等式 (3.11)）得到的。

4.1 $\alpha = \beta \geq 1$ 且采用玻尔兹曼熵的情形

这里我们将讨论范围限定为 ϕ 由玻尔兹曼函数 $\lambda_{\mathrm{B}}(z) = z \log z - z + 1$ 给出的情形；该函数与反应扩散系统有内在联系，参见例如 [DeF06、Mie11]，以及 [MPR14、MP*17、Mit18]中通过大偏差原理给出的最新论证。

我们的收敛结果如下。

定理 4.1（ $\alpha = \beta \geq 1$ 具有玻尔兹曼熵时的收敛）考虑唯一相似剖面 U 的相对玻尔兹曼熵 $E(\tau) := \mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathsf{u}(\tau) \,|\, \mathsf{U})$，其中 U 是方程 (4.3) 的解。那么，对于所有满足 $E(0) < \infty$ 的缩放系统 (4.1) 的解 u，以下微分不等式成立：

对于 $\alpha = 1$，有
$$\dot{E}(\tau) \leq -\big(\frac{1}{2} - \mu_0 \mathrm{e}^{-\tau}\big) E(\tau) + K_0\, \mathrm{e}^{-\tau} \quad \textit{for all } \tau > 0, \tag{4.4a}$$

对于 $1 < \alpha < 2$，我们有
$$\dot{E}(\tau) \leq -\big(\frac{1}{2} - \mu_1 \mathrm{e}^{-\tau}\big) E(\tau) + K_1\, \mathrm{e}^{-\tau} \quad \textit{for all } \tau > 0, \tag{4.4b}$$

并且，如果 $\alpha \geq 2$，那么
$$\dot{E}(\tau) \leq -\frac{1}{2} E(\tau) + K_2\, \mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)} \quad \textit{for all } \tau > 0, \tag{4.4c}$$

其中所有常数 μ_0、 μ_1、 K_0、 K_1 和 K_2 仅取决于问题数据，并分别在引理 4.5、4.7 和 4.8 中作出精确定义。

这里我们仅给出相对玻尔兹曼熵 $\mathcal{E}_{\mathrm{B}} = \mathcal{E}_1$ 的估计，关于相对熵 $\mathcal{E}_p(\mathsf{u}|\mathsf{U})$，请参见定理 4.10 和推论 4.11。

请注意，上述所有常数都是显式的，且仅依赖于给定数据，而不依赖于解。该结果的证明依托一系列引理，并将在本节末尾完成。我们将看到，在 $\alpha = \beta$ 的情形下，关键步骤是利用 $\mathcal{I}_\Lambda$ 可表示为 $\rho - \zeta$ 的函数，因此仅凭 $\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$ 就能对其进行控制。这简化了分析，并带来了更好的收敛结果。特别是，我们不需要对相似剖面 U 作额外假设，而这在第 5 节中是必需的。我们先总结上文讨论的混合项相关结果。

L引理 4.2 在 $\alpha=\beta$ 的情形下，命题 3.1 中的混合项化简为

$$\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta)=\int_{\mathbb{R}}\big(\zeta(y)-\rho(y)\big)\,\alpha\,\Lambda(y)\,\mathrm{d}y,\qquad where\qquad \Lambda(y)=\frac{d_2-d_1}{2\,\alpha}\,U''(y).$$

注意到，简化后的混合项 $\mathcal{I}_\Lambda$ 在扩散系数相等时会消失， $d_1=d_2$因为此时 $\Lambda\equiv 0$。这意味着，在除 $\alpha=\beta$ 之外扩散系数也相同的这一极特殊情形下， $\mathcal{E}_{\mathrm{B}}$ 是一个真正的李雅普诺夫函数，并且借助额外因子 $1/2$，我们可以得到明确的衰减率。

推论 4.3 除了定理 4.1 的假设外，再假设 $d_1=d_2$ 和$\alpha=\beta\geq 1$。那么，所有解 $\mathbf{u}$ 都将指数收敛到剖面 $\mathbf{U}$:

$$\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}(\tau)\,|\,\mathbf{U})\leq \mathrm{e}^{-\tau/2}\,\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}(0)\,|\,\mathbf{U})\ \textit{for}\ \tau>0.$$

下面继续考虑通常不相同的两个扩散系数 d_1、 $d_2>0$ 。首先，通过略去费舍尔信息，可以对耗散泛函进行一个朴素的估计

$$\mathcal{D}_{\mathrm{B}}(\rho,\zeta)\geq\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U})-\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta)+\mathrm{e}^{\tau}\,\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta).$$

由于我们具有额外因子，因此为了获得定性收敛结果，并不依赖于利用费舍尔信息。通常，对费舍尔信息进行估计（例如利用对数索伯列夫不等式）会得到这样的事实：耗散泛函可以用相对熵来界定。得益于抛物缩放，相应的项是$\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}$(u|U)，因此我们可以略去费舍尔信息；这不同于 [Gr¨o83、DeF06、Mie17、MiM18], ，后者研究的是有界区域上的未缩放系统 (3.1)。更进一步，正是由于缩放及其产生的额外因子，我们才可以考虑无界区域。尽管如此，如果能够利用费舍尔信息，估计可能会得到改进。但与有界区域相比，在无界区域 $\mathbb{R}$上进行这一步似乎复杂得多。据作者所知，截至目前尚未找到可行的方法。

现在的思路是利用反应耗散及其有用的前因子 e^{τ} 来控制混合项。如前所述，命题 4.2 中混合项的简单结构使得更容易从下方估计耗散泛函。事实上，引理 4.2 表明

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta)-\mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta)&=\int_{\mathbb{R}}(\zeta-\rho)\alpha\Lambda\,\mathrm{d}y-\mathrm{e}^{\tau}\int_{\mathbb{R}}kU^{\alpha}\Gamma(\rho^{\alpha},\zeta^{\alpha})\,\mathrm{d}y\\&=\int_{\mathbb{R}}\rho\Big(\frac{\zeta}{\rho}-1\Big)\alpha\Lambda-\mathrm{e}^{\tau}k(\rho U)^{\alpha}\Big(\frac{\zeta^{\alpha}}{\rho^{\alpha}}-1\Big)\log(\zeta^{\alpha}/\rho^{\alpha})\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

接下来，我们将 $z:=\frac{\zeta}{\rho}-1$ 设为一个新的辅助变量，并针对 $\alpha\geq 1$ 定义以下函数族

$$\Phi_\alpha(z):=\begin{cases}\big((z+1)^{\alpha}-1\big)\log\big((z+1)^{\alpha}\big) & \text{for } z>-1,\\ +\infty & \text{for } z\leq -1.\end{cases}\tag{4.5}$$

注意，对于所有的 $\tau>0$ 和 $y\in\mathbb{R}$，我们都有 $z>-1$。出于技术上的原因，我们只需扩展 Φ_α 。由此得到

$$\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta)-\mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta)=\int_{\mathbb{R}}\alpha\Lambda\rho z-\mathrm{e}^{\tau}k(\rho U)^{\alpha}\Phi_\alpha(z)\,\mathrm{d}y.$$

就辅助变量 z而言，被积函数可以看作线性项与函数 Φ_α之差。请记住，对于一个（不一定是凸的）函数Φ，其勒让德变换 Φ^* 定义为 $\Phi^*(\xi) := \sup_z \{\langle \xi, z\rangle - \Phi(z)\}$。因此，我们得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta) &\le \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\tau}\, k\,(\rho U)^{\alpha}\, \Phi_\alpha^*\Big(\frac{\alpha\Lambda}{kU^{\alpha}}\rho^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\tau}\Big)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\tau}\, k\,(\rho U)^{\alpha}\, \Phi_\alpha^*\Big(\widetilde{\Lambda}\rho^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\tau}\Big)\,\mathrm{d}y \quad \text{with } \widetilde{\Lambda}(y) := \frac{\alpha\Lambda(y)}{kU^{\alpha}(y)} = \frac{(d_2-d_1)}{2k}\frac{U''(y)}{U(y)^{\alpha}}. \qquad (4.6)\end{aligned}$$

遗憾的是，无法显式计算勒让德变换 Φ_α^*，但只需对 Φ_α^* 给出一个合适的上界估计，即可继续推导式 (4.6)。为此，我们有以下辅助结果，其证明见附录 A。

引理 4.4 对于 $\alpha \ge 1$，考虑式 (4.5) 中定义的函数 Φ_α。其勒让德变换Φ_α^*对所有 $\xi \in \mathbb{R}$ 均满足以下估计，其中 $\widetilde{c}_\alpha = \big(\frac{2}{\alpha^2}\big)^{1/(\alpha-1)}\frac{\alpha-1}{\alpha}$：

1. 对于 $\alpha = 1$，有 $\Phi_1^*(\xi) \le \mathrm{e}^{\xi} - \xi - 1$；2. 对于 $\alpha \in (1,2]$，有 $\Phi_\alpha^*(\xi) \le \max\big\{\widetilde{c}_\alpha\,|\xi|^{\alpha/(\alpha-1)},\, \frac{1}{2\alpha}\xi^2\big\}$；3. 若 $\alpha \ge 2$，则 $\Phi_\alpha^*(\xi) \le \widetilde{c}_\alpha\,|\xi|^{\alpha/(\alpha-1)}$。

此外，对所有 $\alpha \ge 1$，我们有 $\Phi_\alpha^*(\xi) \le \frac{1}{2\alpha}\xi^2$，其中 $|\xi| \le \alpha$。

勒让德变换 Φ_α^* 的界将帮助我们求得耗散泛函的一个界。我们先考虑在数学上较简单的情形 $\alpha = \beta \ge 2$。在此情形下，耗散泛函满足估计 (3.11)，即引理 3.3 中取 $\mu = 0$ 时的不等式。另一种情形 $\alpha \in [1,2)$ 将在后文讨论。

引理 4.5 设 $\alpha = \beta \ge 2$。命题 3.1 中的耗散泛函 $\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$ 可以从下方估计为

$$\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta) \le K_2\,\mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)} \quad \textit{for } K_2 := \frac{\widetilde{c}_\alpha}{k^{1/(\alpha-1)}}\int_{\mathbb{R}}\Big|\frac{\alpha\Lambda(y)}{U(y)}\Big|^{\alpha/(\alpha-1)}\mathrm{d}y < \infty$$

其中 $\widetilde{c}_\alpha$ 来自引理 4.4。

证明。我们从估计 (4.6) 出发，并代入引理 4.4（情形 $\alpha \ge 2$）给出的 Φ_α^* 的上界，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta) &\le \mathrm{e}^{\tau}k\int_\Omega (\rho U)^{\alpha}\,\widetilde{c}_\alpha\Big|\widetilde{\Lambda}\,\rho^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\tau}\Big|^{\alpha/(\alpha-1)}\mathrm{d}y \\ &= \mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)}\frac{\widetilde{c}_\alpha}{k^{1/(\alpha-1)}}\int\Big|\frac{\alpha\Lambda(y)}{U(y)}\Big|^{\alpha/(\alpha-1)}\mathrm{d}y \;=\; K_2\,\mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)}.\end{aligned}$$

对 ρ 的依赖恰好被消除，因此该断言得以证明。 ∎

尽管在估计函数 Φ_α^* 时，我们确实牺牲了一些最优性，但可以看到，我们得到了一个有用的界。使用指数为 $\alpha/(\alpha-1)$ 的函数进行估计，是对所有解都能得到一致界的唯一选择，因为只有这样 ρ 才会抵消。然而，我们得到的衰减率仅为 $\mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)}$，就 $\tau \to \infty$ 的衰减而言，这并不是真正最优的，正如下面的注中所示。不过，它的优点是全局有效，即对所有解都成立。

注 4.6（改进的衰减率）利用 $u=\rho U$ 到 U 的指数收敛（采用上文较小的衰减率）以及抛物正则性理论（涉及此前略去的项 $\mathcal{I}_{\mathrm{Fisher}}$），可以证明，对所有 $y\in\mathbb{R}$ 和 $\tau\geq\tau_1$，都有 $\rho(\tau,y)\in[\underline{c},\overline{c}]$，其中 $0<\underline{c}<1<\overline{c}<\infty$ 和 τ_1 可能依赖于 $\rho_\circ$ 因此，对于 $|\xi|\leq\alpha$，我们可以对 $\Phi_\alpha^*(\xi)$ 使用更好的二次估计 $\frac{1}{2\alpha}\xi^2$，见引理 4.4 末尾。令 $\tau_2=\log\left(\|\widetilde{\Lambda}\|_\infty/(\alpha\underline{c}^{\alpha-1})\right)$，则对于 $\tau\geq\max\{\tau_1,\tau_2\}$，可得到更好的衰减估计

$$\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta)-\mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta)\leq\mathrm{e}^{\tau}k\int_\Omega\frac{(\rho U)^\alpha}{2\alpha}\Big|\frac{\widetilde{\Lambda}\,\mathrm{e}^{-\tau}}{\rho^{\alpha-1}}\Big|^2\,\mathrm{d}y\leq\mathrm{e}^{-\tau}\,\frac{\alpha}{2\,k}\,\frac{\overline{c}^\alpha}{\underline{c}^{\alpha_1}}\int\Lambda(y)^2U(y)^{\alpha-2}\,\mathrm{d}y.$$

在推论 4.11 中给出了另一种推导最优衰减率（如 $\mathrm{e}^{-\tau/2}$）的方法，其中用高阶熵 $\mathcal{E}_p$（$p=\alpha-1$）替代了 $\mathcal{E}_{\mathrm{B}}=\mathcal{E}_1$，见估计式 (4.10a)。

利用引理 3.3，我们确定了耗散泛函的一个下界，尽管其符号并非在所有时刻都必然非负，但仍能导出所需的收敛。在前面的证明中，我们得到了带有 $\mu_j=0$ 的估计式 (4.4)。接下来，我们研究情形 $\alpha=\beta\in(1,2)$ 和 $\alpha=\beta=1$，并将看到此时会出现附加项 $\mu_j\mathrm{e}^{-\tau}$。这是因为其中会有一些含有 ρ 的项无法进行一致估计，因此需要用相对熵来估计。

引理 4.7 设 $\alpha=\beta\in(1,2)$。那么对所有时刻 $\tau>0$，耗散泛函 $\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$ 可由下式从下方估计：

$$\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta)-\mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta)\leq\mu_1\,\mathrm{e}^{-\tau}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U})+K_1\,\mathrm{e}^{-\tau},$$

其中常数 μ_1 和 K_1 由下式给出

$$\mu_1=\frac{1}{k}\left\|\frac{\alpha^2\Lambda^2}{U^{3-\alpha}}\right\|_{\mathrm{L}^\infty}\quad and\quad K_1=\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{\alpha^2\Lambda^2}{kU^{2-\alpha}}+\frac{\widetilde{c}_\alpha}{k^{1/(\alpha-1)}}\Big|\frac{\alpha\Lambda}{U}\Big|^{\alpha/(\alpha-1)}\Big)\,\mathrm{d}y.$$

证明。我们再次从估计 (4.6) 开始，并代入引理 4.4 中推导出的 Φ_α^* 的上界，在此我们估计 $\max\{a,b\}\leq a+b$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta)-\mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta)&\leq\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\tau}kU^\alpha\rho^\alpha\Phi_\alpha^*\Big(\widetilde{\Lambda}\,\rho^{1-\alpha}\,\mathrm{e}^{-\tau}\Big)\,\mathrm{d}y\\&\leq\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{\tau}\,k\,(\rho U)^\alpha\Big(\frac{1}{2\alpha}\widetilde{\Lambda}^2\rho^{2-2\alpha}\mathrm{e}^{-\tau}+\widetilde{c}_\alpha\big|\widetilde{\Lambda}\big|^{\alpha/(\alpha-1)}\rho^{-\alpha}\,\mathrm{e}^{-\tau\alpha/(\alpha-1)}\Big)\,\mathrm{d}y\\&\leq\mathrm{e}^{-\tau}\int_{\mathbb{R}}\frac{\alpha^2\Lambda^2}{k\,U^{2-\alpha}}\,\frac{\rho^{2-\alpha}}{2\alpha}\,\mathrm{d}y\;+\;\mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)}\int_{\mathbb{R}}\frac{\widetilde{c}_\alpha}{k^{1/(\alpha-1)}}\Big|\frac{\alpha\Lambda}{U}\Big|^{\alpha/(\alpha-1)}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

对于第二项，由于 $\alpha\in(1,2)$，我们可以估计 $\mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)}\leq\mathrm{e}^{-\tau}$。对于第一项，我们仍需估计 $\rho^{2-\alpha}$，其指数小于 1。为此，我们对 $\rho\geq0$ 和 $\alpha\in[1,2]$ 使用 $\rho^{2-\alpha}/(2\alpha)\leq\lambda_{\mathrm{B}}(\rho)+1$，得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta)-\mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta)&\leq\mathrm{e}^{-\tau}\int_{\mathbb{R}}\Big(\frac{\alpha^2\Lambda^2}{kU^{2-\alpha}}\big(\lambda_{\mathrm{B}}(\rho)+1\big)+\frac{\widetilde{c}_\alpha}{k^{1/(\alpha-1)}}\Big|\frac{\alpha\Lambda}{U}\Big|^{\alpha/(\alpha-1)}\Big)\,\mathrm{d}y\\&\leq\mathrm{e}^{-\tau}\,\frac{1}{k}\,\|\alpha^2\Lambda^2/U^{3-\alpha}\|_\infty\int_{\mathbb{R}}\lambda_{\mathrm{B}}(\rho)\,U\,\mathrm{d}y+\mathrm{e}^{-\tau}\,K_1,\end{aligned}$$

如断言所述。所需结果由 $\int_{\mathbb{R}}\lambda_{\mathrm{B}}(\rho)\;U\,\mathrm{d}y\leq\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathrm{u}\,|\,\mathrm{U})$ 得出。

其中 K_1 为 a ∎

剩下的情形 $\alpha=\beta=1$ 很重要，因为这个线性情形与马尔可夫半群的情形有关。我们按照上述方法继续处理，但得到的界相当大，因为 Φ_1^* 呈指数增长。第 4.2 节给出了该情形下更好的界。

引理 4.8 对于 $\alpha = \beta = 1$，耗散泛函 $\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$ 可以从下方估计 b y

$$\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta) \le \mu_0\, \mathrm{e}^{-\tau}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) + K_0\, \mathrm{e}^{-\tau},$$

其中常数 μ_0 和 K_0 可由 $\lambda^* := \big\|\Lambda/U\big\|_{\mathrm{L}^\infty}$ 表示为

$$\mu_0 = \frac{(\lambda^*)^2\, \mathrm{e}^{\lambda^*/k}}{2k} \quad \textit{and} \quad K_0 = \frac{\mathrm{e}^{\lambda^*/k}}{k}\int_{\mathbb{R}} \frac{\alpha^2\Lambda^2}{U}\,\mathrm{d}y.$$

~证明。和之前一样，我们从 (4.6) 出发，现在需要估计 $\Phi_1^*(\Lambda\,\rho^0\,\mathsf{e}^{-\tau})$。关键优势在于，$\rho^0 = 1$ 自动给出了一个与 ρ 无关的界，而且指数增长的影响并不太大。

显然，我们有 $|\xi| \le \lambda^*/k$ 对所有 $\tau \ge 0$ 和 $y \in \mathbb{R}$均成立。利用 $(\Phi_1^*)''(\xi) = \mathsf{e}^{\xi}$，我们得到二次上界

$$\Phi_1^*(\xi) \le \frac{\mathrm{e}^{\lambda^*/k}}{2}\,\xi^2 \quad \text{for } |\xi| \le \lambda^*/k.$$

先将其代入 (4.6)，再利用 $\rho \le \lambda_{\mathrm{B}}(\rho)+2$，可得

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta) &\le \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\tau} k(\rho U)\,\frac{\mathrm{e}^{\lambda^*/k}}{2}\,\widetilde{\Lambda}^2\,\mathrm{e}^{-2\tau}\,\mathrm{d}y \\ &\le \mathrm{e}^{-\tau}\,\frac{\mathrm{e}^{\lambda^*/k}}{2k}\int_{\mathbb{R}} \big(\lambda_{\mathrm{B}}(\rho)+2\big)U\,\frac{\alpha^2\Lambda^2}{U^2}\,\mathrm{d}y \;\le\; \mathrm{e}^{-\tau}\,\mu_0\,\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) + K_0\mathrm{e}^{-\tau},\end{aligned}$$

这就是所需的结果。 ∎

引理4.8中的估计由于项 $\mathsf{e}^{\lambda^*/k}$而具有相当大的常数。由于线性情形有许多应用，尤其是作为马尔可夫过程的柯尔莫哥洛夫前向方程，我们在推论 4.11中给出一个更好的界。在那里，我们用相对熵 $\mathcal{E}_p$ 替代玻尔兹曼熵 $\mathcal{E}_{\mathrm{B}} = \mathcal{E}_1$，其中 $p = 1/2$，这恰好给出了海灵格距离，见式 (3.10)。

现在我们已经涵盖了所有情形 $\alpha = \beta \ge 1$，可以总结了，由此完成主要结果的证明。

定理 4.1 的证明。将相对玻尔兹曼熵简记为 $E(\tau) := \mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathsf{u}(\tau)\,|\,\mathsf{U})$。首先，由命题 3.1 和费舍尔信息的非负性可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}E = -\mathcal{D}_{\mathrm{B}} \quad \text{with } \mathcal{D}_{\mathrm{B}} \ge \frac{1}{2}E + \mathrm{e}^{\tau}\,\mathcal{D}_{\mathrm{react}} - \mathcal{I}_\Lambda.$$

由于 $\alpha{=}\beta$，混合项化简为 $\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \big(\zeta{-}\rho\big)\alpha\Lambda\,\mathsf{d}y$。对于 α的三种情形，我们都已证明 $\mathcal{I}_\Lambda - \mathsf{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}} \le \mu_j\mathsf{e}^{-\tau}E(\tau) + K_j\mathsf{e}^{-\sigma_j\tau}$，其中 $\mu_2 = 0$。代入后便恰好得到式 (4.4)，从而证明了我们的结果。 ∎

4.2 一般熵下的 $\alpha = \beta$ 情形

对于 $\alpha \ne \beta$ 的情形，采用玻尔兹曼熵确实是必要的；而当 $\alpha = \beta$ 时，我们在选择熵函数时有更大的灵活性。本节中，我们选择一般的熵，以改进结果，尤其是对于 $\alpha = \beta = 1$ 的情形。

回顾式 (3.8) 中引入的熵函数族 F_p，并考虑 $p \notin \{0,1\}$，以确保所有公式都有定义。当然，也可以通过取极限来考虑 $p=0$ 和 $p=1$ 的情形，并利用 $\lim_{p\to 0} \frac{1}{p}(\zeta^p-1) = \log(\zeta)$。

我们可以定义与函数 F_p 相关的相对熵为

$$\mathcal{E}_p(\mathbf{u}(\tau)\,|\,\mathbf{U}) := \int_{\mathbb{R}} U(y)F_p(\rho(y)) + V(y)F_p(\zeta(y))\,\mathrm{d}y \quad \text{with } \rho := u/U \text{ and } \zeta := v/V.$$

由命题 3.2 可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\mathcal{E}_p(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) = -\mathcal{D}_p(\rho,\zeta) \le -\frac{1}{2}\mathcal{E}_p(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) - \mathrm{e}^\tau \mathcal{D}_{p,\mathrm{react}}(\rho,\zeta) + \mathcal{I}_{p,\Lambda}(\rho,\zeta).$$

因此，与上一节一样，我们的策略是估计差值 $\mathcal{I}_{p,\,\Lambda} - \mathrm{e}^\tau \mathcal{D}_{p,\,\mathrm{react}}$。我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{p,\Lambda}(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^\tau \mathcal{D}_{p,\mathrm{react}}(\rho,\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}\big(\zeta^p - \rho^p\big)\,\alpha\Lambda - \mathrm{e}^\tau k U^\alpha \frac{\alpha}{p-1}(\zeta^{p-1}-\rho^{p-1})(\zeta^\alpha - \rho^\alpha)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}\rho^p\Big(\frac{\zeta^p}{\rho^p}-1\Big)\,\alpha\Lambda - \mathrm{e}^\tau k U^\alpha \frac{\alpha}{p-1}\rho^{\alpha+p-1}\Big(\frac{\zeta^{p-1}}{\rho^{p-1}}-1\Big)\Big(\frac{\zeta^\alpha}{\rho^\alpha}-1\Big)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

将 $z := \frac{\zeta^p}{\rho^p} - 1 > -1$ 定义为辅助变量，并考虑以下二参数函数族

$$\Phi_{p,\alpha}(z) := \begin{cases} \frac{\alpha}{p-1}\,\big((z+1)^{\frac{p-1}{p}}-1\big)\big((z+1)^{\frac{\alpha}{p}}-1\big) & \text{for } z > -1, \\ +\infty & \text{for } z \le -1. \end{cases} \tag{4.7}$$

将其作为 (4.5) 的推广，可得

$$\begin{aligned}&\mathcal{I}_{p,\Lambda}(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^\tau \mathcal{D}_{p,\mathrm{react}}(\rho,\zeta) \le \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{p}\rho^p\,\alpha\Lambda z - \mathrm{e}^\tau k U^\alpha \rho^{\alpha+p-1}\,\Phi_{p,\alpha}(z)\,\mathrm{d}y \\ &\le \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^\tau k U^\alpha \rho^{\alpha+p-1}\,\Phi^*_{p,\alpha}\big(\tfrac{1}{p}\widetilde{\Lambda}\rho^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\tau}\big)\,\mathrm{d}y \;\text{ with } \widetilde{\Lambda}(y) := \frac{\alpha\Lambda(y)}{kU^\alpha(y)} = \frac{(d_2-d_1)}{2k}\frac{U''(y)}{U(y)^\alpha}.\end{aligned} \tag{4.8}$$

根据上述理论，我们知道，最好从下方用 z^2 的某个倍数来估计 $\Phi_{p,\,\alpha}$，因为这样 $\Phi^*_{p,\,\alpha}$ 就有一个二次上界。因此，我们先给出以下结果。

引理 4.9（$\Phi^*_{p,\,\alpha}$ 的二次上界）对于 $\alpha > 0$ 和 $p \in \big(0,\ \max\{\alpha/2, \alpha-1\}\big]$，有

$$\widehat{M}_{p,\alpha} := \sup\left\{ \frac{\alpha^2}{4p^2}\frac{z^2}{\Phi_{p,\alpha}(z)} \;\middle|\; z \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\} < \infty$$

并且二次上界 $\Phi^*_{p,\,\alpha}(\zeta) \le \widehat{M}_{p,\,\alpha}\big(\frac{p}{\alpha}\zeta\big)^2$ 对所有 $\zeta \in \mathbb{R}$ 均成立。

在给定范围内，我们总有 $\widehat{M}_{p,\,\alpha} \ge 1/4$。对于 $p = 1/2$ 和 $\alpha \ge 1$，有 $\widehat{M}_{1/2,\,\alpha} \le \alpha/2$ 以及 $\widehat{M}_{1/2,\,1} = 1/2$。对于 $p > 0$ 和 $\alpha = p+1$，有 $\widehat{M}_{p,\,p+1} = 1/4$。

证明。我们固定给定范围内的一对 (α, p)，并令 $f(z) = z^2/\Phi_{p,\,\alpha}(z)$，其中 $z \in (-1, 0) \cup (0, \infty)$。

我们首先注意到 $z \mapsto \Phi_{p,\alpha}(z)$ 在 $z \approx 0$ 时的表现类似于 z^2。因此，f 在 $z = 0$ 附近有界。此外，当 δ 足够小时，$\Phi_{p,\alpha}$ 在区间 $(-1, -1+\delta)$ 上有下界。由于

$\Phi_{p,\alpha}$ 在 $(-1,0)$ 和 $(0,\infty)$ 上是解析的，f 也如此。因此，对于所有 $R>0$，f 在区间 $(-1,R)$ 上有界。要证明 f 有界，只需考察其多项式增长。事实上，我们有 $f(z)\sim z^{\gamma}$，其中 $\gamma=2-\max\{0,(p-1)/p\}-\alpha/p$。然而，$(\alpha,p)$ 的取值范围恰好选取得使得 $\gamma\le 0$，因此 $M_{p,\alpha}$ 有限。

由 $\Phi_{p,\alpha}(z)\ge\left(\frac{\alpha}{p}z\right)^2/(4\widehat{M}_{p,\alpha})$，根据芬切尔-勒让德变换的性质可得 $\Phi^*_{p,\alpha}(\zeta)\le\widehat{M}_{p,\alpha}\left(\frac{p}{\alpha}\zeta\right)^2$。结合 $\Phi_{p,\alpha}(z)=\frac{\alpha^2}{p^2}z^2+$高阶项，我们得到 $\widehat{M}_{p,\alpha}\ge 1/4$。

对于这两个显式估计，我们如下论证。对于 $p=1/2$ 和 $\alpha\ge 1$，对所有 $z>-1$，有如下估计

$$\Phi_{1/2,\alpha}(z)=2\alpha\frac{z}{z+1}\big((z+1)^{2\alpha}-1\big)\ge 2\alpha\frac{z}{z+1}\big((z+1)^{2}-1\big)=\frac{2\alpha z^2(z+2)}{z+1}\ge 2\alpha z^2,\qquad(4.9)$$

其中，对于 $z>0$，我们使用 $(z+1)^{2\alpha}\ge(z+1)^2$；对于 $z<0$，使用 $(z+1)^{2\alpha}\le(z+1)^2$。因此，我们有 $\widehat{M}_{1/2,\alpha}\le\alpha/2$。利用 $\Phi_{1/2,\alpha}(z)=4\alpha^2z^2+$高阶项，可得 $\widehat{M}_{1/2,\alpha}\ge 1/4$。对于情形 $\alpha=1$，我们注意到 (4.9) 中第一个“$\ge$”是等式，因此 $\Phi_{1/2,1}(z)\ge 2z^2$ 是最优的，并且可得 $M_{1/2,1}=1/2$。

对于情形 $\alpha=p+1>1$，我们设 $\lambda=1/p>0$ 和 $w=z+1$。对于 $w>0$，我们有

$$\begin{aligned}\Phi_{p,p+1}(z)&=\tfrac{p+1}{p-1}\big(w^{(p-1)/p}-1\big)\big(w^{(p+1)/p}-1\big)\\&=\tfrac{(p+1)^2}{p^2}\,G_\lambda(w)\ \text{with}\ G_\lambda(w)=\tfrac{1}{1-\lambda^2}\big(w^2-w^{1-\lambda}-w^{1+\lambda}+1\big).\end{aligned}$$

计算 G_λ 的前三阶导数，可得 $G'''_\lambda(w)=\lambda(w^{\lambda-2}-w^{-\lambda-2})$，从而得到 $G''_\lambda(w)\ge G''_\lambda(1)=2$。这意味着 $G_\lambda(w)\ge(w-1)^2$，因此 $\Phi_{p,p+1}(z)\ge(p+1)^2z^2$。由此可得 $\widehat{M}_{p,\frac{1}{p+1}}=1/4$，因为取 $z\to 0$ 即可得到最优性。∎

利用这个估计，我们现在可以用 F_p 代替 λ_{B} 来估计相对熵，所用技巧与上文完全相同。

定理 4.10（$\mathcal{E}_p(\mathsf{u}(\tau))$ 的指数衰减）对于 $\alpha\ge 1$，任取满足 $\alpha-1\le p\le$ 的 $p>0$，其中 $\max\{\alpha/2,\alpha-1\}$，并定义相对熵 $E_p(\tau):=\mathcal{E}_p(\mathsf{u}(\tau)\,|\,\mathsf{U})$，其中 U 为满足 (4.3) 的相似剖面 $\mathsf{U}=(U,V)^\top$。那么，缩放系统 (4.1) 的所有解 $\mathsf{u}=(u,v)^\top$，只要满足 $E_p(0)<\infty$，就满足如下估计

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}E_p(\tau)\le-\Big(\frac{1}{2}-\widetilde{\mu}_{p,\alpha}\mathrm{e}^{-\tau}\Big)E_p(\tau)+\widetilde{K}_{p,\alpha}\mathrm{e}^{-\tau},$$

其中常数 $\widetilde{\mu}_{p,\alpha}$ 和 $K_{p,\alpha}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}&\textit{for } 2\le\alpha=p+1:\quad \widetilde{\mu}_{\alpha-1,\alpha}=0\ \textit{and}\ \widetilde{K}_{\alpha-1,\alpha}=\frac{1}{4\,k}\int_{\mathbb{R}}\frac{\Lambda^2}{U^\alpha}\,\mathrm{d}y,\\&\textit{for } 1\le\alpha<2:\quad \widetilde{\mu}_{p,\alpha}=\frac{\kappa}{k}\,\widehat{M}_{p,\alpha}\Big\|\frac{\Lambda^2}{U^{\alpha+1}}\Big\|_{\mathrm{L}^\infty}\ \textit{and}\ \widetilde{K}_{p,\alpha}=\frac{1}{k}\,\widehat{M}_{p,\alpha}\big(\kappa F^*_p(\kappa)+1\big)\int_{\mathbb{R}}\frac{\Lambda^2}{U^\alpha}\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $\kappa=\sqrt{1+p-\alpha}$。

证明。我们继续使用估计 (4.8)，得到

$$\mathcal{I}_{p,\Lambda}(\rho,\zeta)-\mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{p,\mathrm{react}}(\rho,\zeta)\le\mathrm{e}^{-\tau}\,\widehat{M}_{p,\alpha}\int_{\mathbb{R}}\rho^{1+p-\alpha}\,\frac{\Lambda^2}{k\,U^\alpha}\,\mathrm{d}y.$$

对于 $\alpha \geq 2$，我们有 $p=\alpha-1$，且被积函数与 ρ 无关。因此，这种情况下结论显然成立。

对于 $\alpha \in [1,2)$，我们观察到 $\kappa = \sqrt{1+p-\alpha} \in (0,1]$，并作如下估计：

$$\rho^{1+p-\alpha} = \rho^{\kappa^2} \leq \kappa^2\rho + (1-\kappa^2) \leq \kappa\left(\kappa\,\rho\right) + 1 \leq \kappa\left(F_p(\rho) + F_p^*(\kappa)\right) + 1.$$

由此可得

$$\mathcal{I}_{p,\Lambda}(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{p,\mathrm{react}}(\rho,\zeta) \leq \mathrm{e}^{-\tau}\,\frac{\widehat{M}_{p,\alpha}}{k}\left(\kappa\big\|\frac{\Lambda^2}{U^{\alpha+1}}\big\|_{\mathrm{L}^\infty}\mathcal{E}_p(\mathbf{u}) + \big(\kappa F_p^*(\kappa)+1\big)\int_{\mathbb{R}}\frac{\Lambda^2}{U^\alpha}\,\mathrm{d}y\right),$$

这就得到了 $\alpha \in [1,2)$ 所需的结果。 ∎

下面的推论给出了上述结果的一些自然推论。首先，我们证明，对于 $\alpha \geq 3$，若使用相对熵 $\mathcal{E}_{\alpha-1}(\mathbf{u}|\mathbf{U})$，则仍有类似 $\mathrm{e}^{-\tau/2}$ 的指数衰减。这改进了定理 4.1 的结果，其中 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{\mathrm{B}}$ 仅以 $\mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)}$ 的速度衰减。其次，我们证明，对于满足 $\alpha = 1$ 的线性情形，通过使用 $\mathcal{E}_{1/2}$ 而非 $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_{\mathrm{B}}$，可以显著改进引理4.8中的常数 μ_0 和 K_0。

推论 4.11（$\alpha = \beta$ 下 $\mathcal{E}_p$ 的衰减）我们有以下估计：

$$\textit{For } \alpha \geq 2: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathcal{E}_{\alpha-1}(\mathbf{u}|\mathbf{U}) \leq -\frac{1}{2}\,\mathcal{E}_{\alpha-1}(\mathbf{u}|\mathbf{U}) + \mathrm{e}^{-\tau}\int_{\mathbb{R}}\frac{\Lambda^2}{4k\,U^\alpha}\,\mathrm{d}y, \tag{4.10a}$$

$$\textit{for } \alpha = 1: \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\,\mathcal{E}_{1/2}(\mathbf{u}|\mathbf{U}) \leq -\big(\frac{1}{2} - \widetilde{\mu}_*\big)\,\mathcal{E}_{1/2}(\mathbf{u}|\mathbf{U}) + \mathrm{e}^{-\tau}\int_{\mathbb{R}}\frac{11+\sqrt{2}}{14\,k}\,\frac{\Lambda^2}{U}\,\mathrm{d}y, \tag{4.10b}$$

其中 $\widetilde{\mu}_* = \big\|\Lambda/U\big\|^2{}_{\mathrm{L}^\infty}\big/(k\sqrt{8})$。

证明。(4.10a) 中的估计只是对定理 4.10 中相应情形的简单改写。(4.10b) 中的第二个估计可类似地由情形 $\alpha = 1$ 和 $p = 1/2$推出，只需注意到 $\kappa = \sqrt{1+p-\alpha} = 1/\sqrt{2}$和 $F_{1/2}^*(\zeta) = 2\zeta/(2-\zeta)$。 ∎

5 α > β ⩾ 1 情形下的收敛

本节中，我们考虑情形 $\alpha \neq \beta$。不失一般性，假设$\alpha > \beta$。我们旨在证明，柯西问题 (3.2),(3.3) 的解收敛到由方程 (3.4) 刻画的相似剖面 $\mathbf{U} = (U,V)^\top$；但与特殊情形 $\alpha = \beta$ 不同，无法以有意义的方式简化混合项$\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) = \int_{\mathbb{R}}\big((\zeta-1)\beta-(\rho-1)\alpha\big)\Lambda\,\mathrm{d}y$。回顾一下，在这一一般情形下，$\Lambda$由下式给出

$$\Lambda = \frac{1}{\beta}(d_2V'' + \frac{y}{2}V') = -\frac{1}{\alpha}(d_1U'' + \frac{y}{2}U'),$$

其中，最后一个等式由 (3.4) 得出。与第 4.1 节中一样，为了估计命题 3.1 中的耗散泛函 $\mathcal{D}_{\mathrm{B}}$，我们需要控制混合项 $\mathcal{I}_\Lambda$。与情形 $\alpha = \beta$ 的区别在于，混合项 $\mathcal{I}_\Lambda$ 不能仅用反应耗散项 $-\mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$ 来估计，而是需要借用额外因子$1/2$中的一部分。更确切地说，我们进行如下处理

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_\Lambda(\rho,\zeta) &= \int_{\mathbb{R}}\big((\zeta-1)\beta-(\rho-1)\alpha\big)\Lambda\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}}\big(\Psi(\zeta^\beta)-\Psi(\rho^\alpha)\big)\Lambda\,\mathrm{d}y + \int_{\mathbb{R}}\Big(\big(\zeta-1-\frac{1}{\beta}\Psi(\zeta^\beta)\big)\beta - \big(\rho-1-\frac{1}{\alpha}\Psi(\rho^\alpha)\big)\alpha\Big)\Lambda\,\mathrm{d}y \\
&=: \mathcal{I}_{\Lambda,1}(\rho,\zeta) + \mathcal{I}_{\Lambda,2}(\rho,\zeta)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

其中， Ψ 是一个将在下文选取的适当函数。也就是说，我们将混合项拆分为两项 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,1}$ 和 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,2}$，并采取如下策略分别估计它们:

1. 我们旨在以与第4节中类似的方式控制积分项 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,1}$，其中 $-\mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$。

2. 积分项 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,2}$将通过利用 $-\frac{1}{2}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}$来估计。为此，我们需要选择函数 Ψ，使得我们能够对其进行整体估计

$$\alpha\left|\rho-1-\frac{1}{\alpha}\Psi(\rho^{\alpha})\right|\le C_{\alpha}\lambda_{\mathrm{B}}(\rho)\quad\text{ and }\quad\beta\left|\zeta-1-\frac{1}{\beta}\Psi(\zeta^{\beta})\right|\le C_{\beta}\lambda_{\mathrm{B}}(\zeta),\tag{5.2}$$

其中 C_{α}、$C_{\beta}\ge 0$为常数。此外，剖面函数 U 和 V 必须满足$\Lambda/U\in L^{\infty}(\mathbb{R})$ 和 $\Lambda/V\in L^{\infty}(\mathbb{R})$。更进一步，我们还需要

$$\max\left\{C_{\alpha}\|\Lambda/U\|_{\infty},C_{\beta}\|\Lambda/V\|_{\infty}\right\}<1/2,$$

其中 $1/2$是额外因子。如果 A_{-} 和 A_{+} 彼此足够接近，使得剖面足够平坦，进而 $\|\Lambda\|_{\infty}$ 足够小，就可以实现这一点；参见 MiS23a，第 5.1] 条注释。

上述考量导出了函数

$$\Psi(r):=\max\{\alpha,\beta\}(r^{1/\max\{\alpha,\beta\}}-1)=\alpha(r^{1/\alpha}-1).$$

首先，对于所有 α，它满足 $\Psi(1)=0$ 和 $\Psi'(1)=1$，这是不等式（5.2）的必要条件。其次，它使我们能够使用相同的勒让德变换技巧，通过 $\Gamma(\rho^{\alpha},\zeta^{\beta})$ 来控制 $\Psi(\zeta^{\beta})-\Psi(\rho^{\alpha})$，稍后我们将看到这一点。我们先来考虑第2点。将 Ψ的设定代入后，得到

$$\alpha\left|\rho-1-\frac{1}{\alpha}\Psi(\rho^{\alpha})\right|\equiv 0\quad\text{ and }\beta\left|\zeta-1-\frac{1}{\beta}\Psi(\zeta^{\beta})\right|=\Big(\beta-\frac{\beta^{2}}{\alpha}\Big)F_{\beta/\alpha}(\zeta)\le(\alpha-\beta)\lambda_{\mathrm{B}}(\zeta),$$

其中，$F_{\beta/\alpha}$ 表示在（3.8）中为 $p=\beta/\alpha$ 定义的熵函数，因此我们可以利用性质 $F_{p}(z)\le\frac{1}{p}F_{1}(z)=\frac{1}{p}\lambda_{\mathrm{B}}(z)$，见（3.9a）。由此可得以下引理。

引理5.1 对所有 $\alpha>\beta\ge 1$，混合项 $\mathcal{I}_{\Lambda}$ 的第二项$\mathcal{I}_{\Lambda,\,2}$ 可估计为

$$\mathcal{I}_{\Lambda,2}(\rho,\zeta)\le\theta\,\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}),\qquad with\qquad\theta=(\alpha-\beta)\,\|\Lambda/V\|_{\infty}.$$

经过初步讨论，我们可以陈述本节的主要定理。

定理5.2（ $\alpha>\beta\ge 1$的收敛）考虑相对玻尔兹曼熵$E(\tau):=\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}(\tau)\,|\,\mathbf{U})$，其中U是唯一的相似剖面 $=(U,V)^{\top}$，由（3.4）刻画。进一步假设 $|A_{-}-A_{+}|$ 足够小，使得

$$\theta:=(\alpha-\beta)\,\|\Lambda/V\|_{\infty}<1/2.$$

那么，对于柯西问题（3.2）、（3.3）的所有解$\mathbf{u}=(u,v)^{\top}$，若初始熵 $E(0)<\infty$有限，则以下微分不等式成立:

$$For\ \alpha\in(1,2),\ it\ holds\quad\dot{E}(\tau)\le-\big(\frac{1}{2}-\theta-\mu_{1}\mathrm{e}^{-\tau}\big)E(\tau)+K_{1}\,\mathrm{e}^{-\tau}\qquad for\ all\ \tau>0,\tag{5.3a}$$

且若 $\alpha\ge 2$，则 $$\dot{E}(\tau)\le-\big(\frac{1}{2}-\theta\big)E(\tau)+K_{2}\,\mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)}\quad\text{对所有 }\tau>0,\tag{5.3b}$$

其中 μ_{1}、K_{1} 和 K_{2} 已分别在第 4.1 节、引理 4.5 和 4.7 中定义。

证明可在本节末尾找到。注意，由于 $\alpha > \beta \geq 1$，不会出现 $\alpha = 1$ 的情形。此外，我们看到，这里得到的常数 μ_1、K_1 和 K_2 与特殊情形 $\alpha = \beta$ 中的相同。但需要注意，只有当 Λ 以其一般形式给出时，这些常数才相同，即 $\Lambda = \frac{1}{\beta}(d_2 V'' + \frac{y}{2}V') = -\frac{1}{\alpha}(d_1 U'' + \frac{y}{2}U')$；而在第4节中，由于 $\alpha = \beta$ 和 $U = V$，可以对 Λ 进行简化。

它们相同这一事实（除非对 Λ 进行可能的简化）已经表明，我们可以将证明的一部分追溯到第4节中已经完成的工作。接下来，我们将具体了解其运作方式。

因此，我们将注意力转向策略的第1点。幸运的是，我们将看到，函数 $\Psi(r) = \alpha\left(r^{1/\alpha} - 1\right)$ 也是一个适用于估计 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,1}$ 的良好函数。我们的目标是以恰当的方式估计差值 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,1} - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}$。有

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\Lambda,1}(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} \big(\Psi(\zeta^{\beta}) - \Psi(\rho^{\alpha})\big)\Lambda - \mathrm{e}^{\tau} k U^{\alpha}\Gamma(\rho^{\alpha},\zeta^{\beta})\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}} \alpha\rho\Big(\frac{\zeta^{\beta/\alpha}}{\rho} - 1\Big)\Lambda - \mathrm{e}^{\tau} k U^{\alpha}\rho^{\alpha}\Big(\frac{\zeta^{\beta}}{\rho^{\alpha}} - 1\Big)\log(\zeta^{\beta}/\rho^{\alpha})\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

接下来，我们采用在 (4.5) 中定义的同一个函数 Φ_α。不过，在这个一般情形下，我们必须定义 $z := \frac{\zeta^{\beta/\alpha}}{\rho} - 1$，以确保一切衔接妥当。由此得到

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\Lambda,1}(\rho,\zeta) - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}}(\rho,\zeta) &= \int_{\mathbb{R}} \alpha\rho\Lambda z - \mathrm{e}^{\tau}\, k(U\rho)^{\alpha}\,\Phi_\alpha(z)\,\mathrm{d}y \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\tau}\, k(U\rho)^{\alpha}\,\Phi_\alpha^{*}\Big(\widetilde{\Lambda}\rho^{1-\alpha}\mathrm{e}^{-\tau}\Big)\,\mathrm{d}y, \quad \text{with} \quad \widetilde{\Lambda} := \frac{\alpha\Lambda}{kU^{\alpha}} = -\frac{d_1 U'' + \frac{y}{2}U'}{kU^{\alpha}}. \qquad (5.4)\end{aligned}$$

将上面的估计与第4节中的估计进行比较后，我们发现最终得到的正是 (4.6) 中的同一个不等式，唯一的区别在于 Λ 处于一般情形。这样，我们只需重复引理4.7和4.8中的步骤，就能轻松证明以下结论。

引理5.3 在定理5.2的假设下，对于不等式 (5.4)，对所有 $\tau > 0$，以下下界均成立：

$$\begin{aligned}&\textit{For } \alpha \in (1,2),\ \textit{we have} && \mathcal{I}_{\Lambda,1} - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}} \leq \mu_1 \mathrm{e}^{-\tau}\mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathbf{u}\,|\,\mathbf{U}) + K_1\,\mathrm{e}^{-\tau} && \text{(5.5a)}\\ &\textit{and for } \alpha \geq 2,\ \textit{it holds} && \mathcal{I}_{\Lambda,1} - \mathrm{e}^{\tau}\mathcal{D}_{\mathrm{react}} \leq K_2\,\mathrm{e}^{-\tau/(\alpha-1)}, && \text{(5.5b)}\end{aligned}$$

其中 μ_1、K_1 和 K_2 已在引理4.7和4.8中分别精确定义。

现在我们可以证明本节的主要定理了。

定理5.2的证明。将相对玻尔兹曼熵记为 $E(\tau) := \mathcal{E}_{\mathrm{B}}(\mathrm{u}(\tau)\,|\,\mathrm{U})$，并利用命题 3.1以及费舍尔信息的非负性，得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}E = -\mathcal{D}_{\mathrm{B}} \quad \text{with } \mathcal{D}_{\mathrm{B}} \geq \frac{1}{2}E + \mathrm{e}^{\tau}\,\mathcal{D}_{\mathrm{react}} - \mathcal{I}_{\Lambda}.$$

在这一一般情形下，混合项由 $\mathcal{I}_{\Lambda}(\rho,\zeta) = \int_{\mathbb{R}} \big((\zeta-1)^{\beta} - (\rho-1)^{\alpha}\big)\Lambda\,\mathrm{d}y$ 给出。因此，在 (5.1) 中，我们将 $\mathcal{I}_{\Lambda}$ 拆分为 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,1}$ 和 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,2}$，并分别估计了这两个加项。首先，利用引理5.1可得，对于所有 $\alpha > \beta \geq 1$，有 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,2} \leq \theta\, E(\tau)$。其次，在两种情形 $\alpha \in (1,2)$ 和 $\alpha \geq 2$ 下，引理5.3给出 $\mathcal{I}_{\Lambda,\,1} - \mathrm{e}^{\tau}\,\mathcal{D}_{\mathrm{react}} \leq \mu_j \mathrm{e}^{-\tau} E(\tau) + K_j \mathrm{e}^{-\sigma_j \tau}$，其中 $j = 1, 2$，且 $\mu_2 = 0$。代入所有估计，即得所声称的 (5.3)。 ∎

该证明结束了本节，也因此完成了我们能够就向相似剖面收敛所表述的新结果。由此，它在考虑全空间，即无界区域，以及无限质量这一困难条件下，对给定反应扩散系统的解的长时间行为给出了一个定性结论。本文采用了新的方法，使得能够处理这些困难。特别地，这意味着将系统变换到抛物标度变量中，从而产生额外因子 $d/2$，并因此使得在有界区域上已得到充分研究的（玻尔兹曼型）能量耗散估计能够应用于全空间。在 $\alpha \neq \beta$ 的情形下，我们已经看到，相似剖面必须满足额外限制，即 $|A_- - A_+|$ 足够小。对于具有任意边界值的解，收敛是否成立的问题仍然是开放的。此外，所考虑的系统，尤其是反应 $\alpha X_1 \rightleftharpoons \beta X_2$，仍然非常简单。或许，上述方法可为具有一族稳态的更复杂系统提供一个起点。

我们基于能量耗散估计的方法似乎足够灵活，能够处理更复杂的反应扩散系统，其中可以包含更多物种和更多反应。关于一般设定，请参阅 [MiS23a]，其中证明了这些一般情形下相似剖面的存在性结果。主要任务是控制混合项 $\mathcal{I}_\Lambda$，它现在可能涉及多个拉格朗日乘子。

A 附录

在本附录中，我们将给出本文中省略的辅助结果证明。

引理 3.3 的证明。给定的微分不等式具有如下形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} E(\tau) \leq -a(\tau)\, E(\tau) + b(\tau) \quad \text{for } a(\tau) := \eta - \mu\, \mathrm{e}^{-\tau} \text{ and } b(\tau) := K\, \mathrm{e}^{-\gamma\tau}.$$

直接应用 Gr¨onwall 引理的微分形式可得

$$E(\tau) \leq E(0)\, \mathrm{e}^{-\int_0^\tau a(r)\,\mathrm{d}r} + \int_0^\tau b(s)\, \mathrm{e}^{-\int_s^\tau a(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}s. \tag{A.1}$$

首先，我们对积分 $\int_s^\tau a(r)\mathrm{d}r$ 作粗略但足够的估计，后文将会看到。我们有

$$-\int_s^\tau a(r)\,\mathrm{d}r = \int_s^\tau \mu\, \mathrm{e}^{-r} - \eta\,\mathrm{d}r = \mu(\mathrm{e}^{-s} - \mathrm{e}^{-\tau}) - \eta(\tau - s) \leq \mu - \eta(\tau - s)$$

由于 $s \geq 0$。将其代入（A.1），并利用指数函数的单调性可得

$$\begin{aligned} E(\tau) &\leq E(0)\, \mathrm{e}^{\mu-\eta\tau} + K\, \mathrm{e}^{\mu-\eta\tau} \int_0^\tau \mathrm{e}^{(\eta-\gamma)s}\,\mathrm{d}s = \mathrm{e}^{\mu}\Big(E(0)\, \mathrm{e}^{-\eta\tau} + \frac{K}{\eta-\gamma}\left(\mathrm{e}^{-\gamma\tau} - \mathrm{e}^{-\eta\tau}\right)\Big) \\ &\leq \mathrm{e}^{-\min\{\eta,\gamma\}\tau+\mu}\Big(E(0) + \frac{2K}{|\eta-\gamma|}\Big) \quad \text{if } \eta \neq \gamma. \end{aligned}$$

在 $\eta = \gamma$ 的情况下，上述被积函数恒等于 1，从而得到所需结果。 ∎

现在我们给出引理 4.4 的证明，该引理为函数 Φ_α 提供了必要的上界估计。

引理 4.4 的证明。下文中我们使用 $\alpha \geq 1$，并将 $\Phi_\alpha = g_\alpha h_\alpha$ 写作

$$g_\alpha(z) = \begin{cases} \left|\log(z{+}1)^\alpha\right| & \text{for } z > -1, \\ \infty & \text{for } z \leq -1, \end{cases} \quad \text{and} \quad h_\alpha(z) = \begin{cases} \left|(z{+}1)^\alpha - 1\right| & \text{for } z \geq -1, \\ \infty & \text{for } z < -1. \end{cases}$$

为获得 Φ_α^* 的上界，我们推导 Φ_α 的下界。我们分别对 $z \geq 0$ 和 $z \leq 0$ 进行估计。

对于 $z \leq 0$，只需考虑 $z \in (-1, 0)$。首先注意到，由凸性可得 $g_\alpha(z) \geq -\alpha z$。接下来，我们有 $h_\alpha(z) = 1 - (z{+}1)^\alpha$，由于 $\alpha \geq 1$，其为凹函数。因此，$h_\alpha(0) = 0$ 和 $h_\alpha(1) = 1$ 意味着当 $z \in [-1, 0]$ 时，$h_\alpha(z) \geq -z$。综上，我们得到

$$\Phi_\alpha(z) \geq \alpha z^2 \quad \text{for } z \in [-1, 0], \qquad \Phi_\alpha(z) = \infty \quad \text{for } z < -1.$$

对于 $z \geq 0$，我们使用 $\log\, 2 > 1/2$，这意味着当 $y \geq 1$ 时，$\log\, y \geq \min\{(y{-}1)/2, 1/2\}$。~~我们~~得到

$$g_\alpha(z) = \alpha \log(z{+}1) \geq \alpha \min\{z/2, 1/2\}.$$

对于 h_α，我们得到 $h_\alpha(z) = (z{+}1)^\alpha - 1 \geq z^\alpha$，这可通过注意到两边的导数满足相同的不等式，再进行积分而得到。此外，由凸性可得 $h_\alpha(z) \geq \alpha z$。因此，$h_\alpha(z) \geq \max\{\alpha z, z^\alpha\}$，从而得到

$$\Phi_\alpha(z) \geq \frac{\alpha}{2} \max\{\alpha|z|, |z|^\alpha\} \min\{|z|, 1\} \quad \text{for } z \geq 0.$$

对于 $\alpha = 1$，上述估计过于粗略。为了得到更好的估计，我们注意到 $F_0(\rho) = \rho - \log \rho - \rho \geq 0$，见（3.8）。因此，令 $z = \rho - 1$，可得

$$\Phi_1(z) = (\rho{-}1)\log\rho = \lambda_{\mathrm{B}}(\rho) + F_0(\rho) \geq \lambda_{\mathrm{B}}(\rho) = \lambda_{\mathrm{B}}(z{+}1) \quad \text{for } z \geq -1.$$

为了得到 Φ_α^* 的上界估计，我们再次利用勒让德变换具有序反转性质这一点，以及对于函数族 $(f_i)_{i \in I}$，等式 $\left(\inf_i (f_i)\right)^* = \sup_i (f_i^*)$ 成立这一事实；这直接由定义得出（见 [Pey15，命题 3.50]）。

对于 $\alpha = 1$，这给出

$$\Phi_1^*(\xi) \leq \sup\left(\xi z - \lambda_{\mathrm{B}}(z{+}1)\right) = -\xi + \lambda_{\mathrm{B}}^*(\xi) = \mathrm{e}^\xi - \xi - 1 \quad \text{for all } \xi \in \mathbb{R}.$$

对于 $\alpha \in [1, 2]$，上述估计给出 $\Phi_\alpha(z) \geq \min\left\{\frac{\alpha}{2}|z|^\alpha, \frac{\alpha}{2} z^2\right\}$，从而得到

$$\Phi_\alpha^*(\xi) \leq \max\left\{\widetilde{c}_\alpha |\xi|^{\alpha/(\alpha-1)}, \frac{1}{2\alpha}\xi^2\right\}.$$

在 $\alpha \geq 2$ 的情况下，对于 $|z| \leq 1$，我们有 $|z|^\alpha \leq |z|^2$，并得到 $\Phi_\alpha(z) \geq \frac{\alpha}{2}|z|^\alpha$，从而得到所需结果。

最后，我们注意到，对于所有 $\alpha \geq 1$，当 $|z| \leq 1$ 时都有 $\Phi_\alpha(z) \geq \frac{\alpha}{2} z^2$，这意味着当 $|\xi| \leq \alpha$ 时有 $\Phi_\alpha^*(\xi) \leq \frac{1}{2\alpha}\xi^2$。 ∎

致谢。此项研究部分由德国研究联合会（DFG）通过协作研究中心 SFB910“自组织非线性系统的控制”（项目编号 163436311）及其子项目 A5“耦合抛物型系统中的模式形成”资助。

参考文献

[Ali79] N. D. Alikakos：不变性原理在反应扩散方程中的应用。《微分方程杂志》33:2（1979）201–225。[Ber82] M. Bertsch：非线性扩散方程解的渐近行为。SIAM 应用数学杂志 42:1（1982）66–76。[BJ*14] T. Bodineau、L. Joel、C. Mouhot 和 C. Villani：边界驱动的非线性漂移扩散方程的李雅普诺夫泛函。《非线性》27:9（2014）2111–2132。[BrK92] J. Bricmont 和 A. Kupiainen：重整化群与金兹堡-朗道方程。《数学物理通讯》150:1（1992）193–208。[CaT00] J. A. Carrillo 和 G. Toscani：多孔介质方程解向自相似性的渐近 L^1衰减。《印第安纳大学数学杂志》49:1（2000）113–142。[CoE92] P. Collet 和 J.-P. Eckmann：无相位滑移的金兹堡-朗道方程解。《数学物理通讯》145:2（1992）345–356。[DeF06] L. Desvillettes 和 K. Fellner：通过熵方法证明反应扩散方程向平衡态的指数衰减。《数学分析及其应用杂志》319:1（2006）157–176。[DeF07] ———, 反应扩散系统的熵方法，《离散与连续动力系统》（增刊）。《动力系统与微分方程》。第六届 AIMS 国际会议论文集，2007 年，第 304–312 页。[FeT17] K. Fellner 和 B. Q. Tang：具有细致平衡条件的非线性反应扩散系统向平衡态的显式指数收敛。《非线性分析》159:C（2017）145–180。[GaM98] T. Gallay 和 A. Mielke：金兹堡-朗道方程中稳定态的扩散混合。《数学物理通讯》199:1（1998）71–97。[GaS22] T. Gallay 和 S. Slijepčević：实数轴上扩展反应扩散系统向平衡态的扩散弛豫。《演化方程杂志》22:47（2022）1–33。[GGH96] A. Glitzky、K. Gr¨oger 和 R. H¨unlich：带电物种反应扩散过程的自由能与耗散率。《应用分析》60:3-4（1996）201–217。[Gr¨o83] K. Gr¨oger：一类扩散反应方程解的渐近行为。《数学消息》112（1983）19–33。[Gr¨o92] ———, 反应扩散过程的自由能估计与渐近行为，WIAS 预印本 20，1992。[HH*18] J. Haskovec、S. Hittmeir、P. A. Markowich 和 A. Mielke：能量-反应扩散系统向平衡态的衰减。SIAM 数学分析杂志 50:1（2018）1037–1075。[J¨un16] A. J¨ungel，《扩散型偏微分方程的熵方法》，施普林格，柏林、海德堡，2016。[MaP01] P. Marcati 和 R. Pan：多孔介质中可压缩绝热流系统的扩散剖面。SIAM 数学分析杂志 33:4（2001）790–826。[MHM15] A. Mielke、J. Haskovec 和 P. A. Markowich：反应扩散系统中熵的一致衰减。《动力学与微分方程杂志》27:3-4（2015）897–928。[Mie11] A. Mielke：反应扩散系统与能量-漂移扩散系统的梯度结构。《非线性》24（2011）1329–1346。[Mie17] ———,具有复平衡质量作用动力学的反应扩散系统的一致指数衰减，见《动力学模式》（P. Gurevich、J. Hell、B. Sandstede 和 A. Scheel 编），《施普林格数学与统计学论文集》第 205 卷，施普林格，2017 年，第 149–171 页。[MiM18] A. Mielke 和 M. Mittnenzweig：利用向量值泛函不等式证明能量-反应扩散系统收敛至平衡态。《非线性科学杂志》28:2（2018）765–806。[MiS23a] A. Mielke 和 S. Schindler：扩散方程组相似剖面的存在性。预印本 arXiv2301.10360（2023）。[MiS23b] ：耦合抛物型系统中的自相似模式作为非平衡稳态。《混沌》（2023），已投稿，WIAS 预印本 2992，arXiv2302.00393。

[Mit18] M. R. Mittnenzweig，量子与经典演化方程的熵方法，博士论文，柏林洪堡大学数学与自然科学学院，2018 年。[MP*17] A. Mielke、R. I. A. Patterson、M. A. Peletier 和 D. R. M. Renger：质量作用动力学下化学反应的非平衡热力学原理。《SIAM 应用数学杂志》77:4 (2017) 1562–1585。[MPR14] A. Mielke、M. A. Peletier 和 D. R. M. Renger：梯度流与大偏差原理之间的关系，并及其在马尔可夫链和扩散中的应用。Potential Analysis 41:4 (2014) 1293–1327。[MSU01] A. Mielke、G. Schneider 和 H. Uecker，扩展区域上的稳定性与扩散动力学，《遍历理论、分析与动力系统的高效模拟》（B. Fiedler 编），施普林格，2001 年，第 563–583 页。[Pel71] L. A. Peletier：多孔介质方程解的渐近行为。《SIAM 应用数学杂志》21 (1971) 542–551。[Pey15] J. Peypouquet，《赋范空间中的凸优化：理论、方法与实例》，Springer 优化简明丛书，施普林格，2015 年。[PSZ17]M. Pierre、T. Suzuki 和 R. Zou：化学反应扩散系统解的渐近行为。《数学分析及其应用杂志》450 (2017) 152–168。[Smo94] J. Smoller，《激波与反应扩散方程》，施普林格，1994 年。[vaP77] C. J. van Duyn 和 L. A. Peletier：非线性扩散方程解的渐近行为。Arch. Rational Mech. Anal. 65 (1977) 363–377。[V´az07] J. L. V´azquez，《多孔介质方程：数学理论》，牛津：克拉伦登出版社，2007 年。[Vol14] V. Volpert，《椭圆型偏微分方程》第 2 卷：反应扩散方程，《数学专著》，施普林格巴塞尔，2014 年。[VVV94] A. Volpert、V. Volpert 和 V. Volpert，《抛物型系统的行波解》，美国数学会，1994 年。