arXiv:2303.01365v2 [math.AP] 3 Mar 2023

公地悲剧：运用平均场博弈研究行波的逆转

前沿

Ziad Kobeissi*、
Idriss Mazari-Fouquer†、
Domenec Ruiz-Balet‡

2023年3月6日

摘要

本文旨在研究空间分布型捕捞博弈中的一种公地悲剧。我们选择的模型是：鱼类种群受抛物型双稳态方程支配，并由渔民捕捞。我们假设，在没有渔民的情况下，鱼类种群处于入侵状态（从数学上说，存在一个入侵行波前沿）。渔民各自自私行事、追求自身利益时，是否可能导致行波逆转，进而造成整体种群灭绝？为回答这一问题，我们采用平均场博弈方法对个体渔民的行为建模，并证明答案是肯定的。随后我们证明，至少在某些情况下，如果渔民相互协调而非各自自私行事，每个人都能获得更多收益，同时仍能确保种群存续。我们的研究通过若干数值模拟加以说明。

关键词：平均场博弈、最优控制、公地悲剧、行波。

美国数学学会分类（2020年数学主题分类）： 35C07, 35K10, 35K57, 35Q89, 49N80。

致谢：本研究始于 D. Ruiz-Balet 在巴黎多芬大学 PSL 的 CEREMADE 访问期间，D. Ruiz-Balet 衷心感谢国际研究实验室短期交流项目提供的 STEG2201DR 资助，使此次访问得以实现。D. Ruiz-Balet 获得了英国工程与自然科学研究理事会（EPSRC）项目 EP/T024429/1 的资助。I. Mazari-Fouquer 获得了法国国家研究署项目 ANR-18-CE40-0013 - SHAPO（形状优化）的资助。

1 引言

1.1 论文范围

保护生物多样性是当今时代面临的重大科学、政治和经济挑战之一，因为确保种群存续的努力往往与经济

*路易·巴舍利耶研究所，法国国家信息与自动化研究院巴黎中心（ziad.kobeissi@inria.fr）

†CEREMADE，CNRS第7534联合研究组，巴黎-多芬大学、PSL大学，马歇尔·德·拉特尔·德·塔西尼广场，巴黎邮政编码75775 cedex 16，法国（mazari@ceremade.dauphine.fr）

‡数学系，帝国理工学院，南肯辛顿，伦敦，英国（d.ruiz-i-balet@imperial.ac.uk）

目标 [BN12，COH+12，DB12，HB01，Pik12，PJRP11]。渔业管理是这种情况的典型例子 [BN06，BN08，COH+12，WB12，WBB+06]，也是本文的核心主题。如今，过度捕捞在海洋生物多样性衰退中发挥着重要作用，这一点已广为人知，而生物多样性的衰退又会导致严重的生态后果：例如，研究表明，水质和生态系统的恢复潜力与生物多样性密切相关 [WBB+06]。这也是COP15将恢复和保护至少30%的海洋生物多样性列入其目标清单的推动因素之一。

本文的目标是从空间分布型捕捞博弈的角度，运用行波方法，对普遍存在的公地悲剧进行数学分析。为明确本文所用术语，首先回顾一下公地悲剧 [Har09], 这是 W.F. Lloyd 创造的一个术语 [Llo33], 是经济学中的一条普遍原理，其内容如下：

自私的参与者各自采取行动，以最大化自己从共同资源中获得的收益，最终将导致这些资源枯竭。

因此，我们所讨论的情境（精确模型见（1.9））如下：我们考虑一个鱼类种群，它按照标准的双稳态型反应扩散方程演化；同时，还有大量的 $N \gg 1$ 渔民，各自采取行动以最大化自己的捕鱼产量。双稳态方程通常具有一个灭绝态（为简便起见记为 0）、一个入侵态（为方便记号记为 1），以及一个中间的不稳定平衡态。我们的目标是说明，当渔民各自为政、缺乏协调时，他们的行动将导致鱼类种群灭绝。尽管在反应扩散模型中量化物种灭绝或存续的方式有很多 [CC03], 我们采用入侵行波的视角。自 Fisher 的开创性研究 [Fis37] 以及 Kolmogorov、Petrovskii 和 Piskounov 独立开展的研究 [KPP37], 以来，行波已被证明是定性理解种群动力学的极为便利的框架。

粗略地说，如果我们在 IR 中讨论，典型的种群动力学方程形式如下

$$\partial_t u - \partial_{xx}^2 u = f(u) - mu.$$

这里，u 是种群密度，f 是特定的反应项，而 m 是渔民密度。项 $-mu$ 对应于捕捞鱼类。当 $m \equiv 0$ （即 没有渔民时），速度为 $c \in$ IR 的行波前沿 是一个解 u，其表达式为

$$u(t,x) = U(x-ct) \text{ with } \begin{cases} -cU' - U'' = f(U) & \text{in } \mathbb{R}, \\ U(-\infty) = 0\,, U(+\infty) = 1. \end{cases}$$

如果存在一个速度为 负 值的行波（TW） $c < 0$解，就意味着在这种情形下种群通常能够存活（“1 正在入侵 0”），因此我们称之为入侵行波。另一方面，如果存在一个速度为 正 值的行波 $c > 0$解，就意味着种群将会灭绝（“0 正在消灭 1”），我们称之为灭绝行波。行波一直是极其活跃的研究课题，因此试图提供详尽的参考文献目录毫无意义。更多详情请参见第2.4 节。

取决于 f，可能存在无穷多个或唯一一个行波解。由于我们希望举例说明捕捞如何导致灭绝，本文聚焦于双稳态非线性的情形（通常 f： $[0;\ 1] \ni u \mapsto u(u-\eta)(1-u)$）；在这种情况下，众所周知 [FM77] 存在一个唯一的行波，它可以向外扩张，也可以导致灭绝。于是，我们的问题变成：

假设在没有渔民的情况下只存在一个行波，并且该行波还具有入侵性。那么，加入渔民后是否可能产生一个灭绝行波?

这个问题（以及其他相关问题）已在 [BCS22]（参见第2.4节）中得到回答，但对于我们的需求而言并不完全令人满意；事实上，从渔民的角度来看，导致鱼类种群耗竭的策略是否为最优策略并不明确。因此，我们真正的核心问题是

假设在没有渔民的情况下只存在一个行波，并且该行波还是入侵性的。那么，加入以自身利益最大化为目标行事的渔民后，是否可能产生灭绝行波？

我们将在多种情形下对这一问题给出肯定的回答。

考虑到我们使用反应扩散方程和行波来模拟种群动态，因此需要确定一种范式来实现渔民的行为。在本文中，我们选择均值场博弈（MFG）方法；事实证明，这是一种用于对受自身利益驱动的主体进行建模的高效工具。

自 Lasry 和 Lions 引入以来，均值场博弈模型 [LL06a、LL06b、LL07]以及 Huang、Caines 和 Malham 独立引入以来，´e [HCM07、HMC06] 一直处于应用数学多个领域的中心，并成为优化和偏微分方程领域研究的重要主题。尽管我们的论文并不是第一篇研究 MFG 与行波之间相互作用的论文 [BLW17、PRV21、PR22、QC19]，，但我们的问题和方法都与这些研究大不相同；参见第2.4节。特别是，据我们所知，本文首次将行波、均值场博弈与公地悲剧结合起来。

我们的结论说明，当渔民只受自身利益驱使时，他们的累积行动可能导致鱼类种群灭绝。值得强调的是，我们也探讨了该模型的一个有趣方面：当渔民协调行动时，他们的累积行动不仅不会导致鱼类种群灭绝，而且每个人获得的收益实际上都高于彼此竞争时的收益。这进一步印证了我们的观点：我们关于“竞争导致灭绝”的这类结果，可以视为公地悲剧的例证。还要指出的是，尽管本文大多使用与例如 渔民相关的渔业术语，但我们所阐释的范式同样适用于其他多种捕捞情境，例如 伐木和森林砍伐。

最后，我们想强调，尽管我们描述并分析了多种情形，但仍有若干关键问题悬而未决。事实上，我们的结果指出存在 灭绝行波。在空间生态学中，此类前沿波的存在通常还需结合对其稳定性 [FM77]的详细分析。换言之：对于“合理的”初始条件，方程的解在较长时间后是否真的会“呈现为”这一前沿波？回答这一问题将是渔业问题定性分析中的重要一步，但目前尚难以实现。关于一些尚未解决的问题，请参阅结论部分。

1.2 数学设定

双稳态方程：没有渔民时的设定与经典结果 我们从基本定义开始：

定义1.1（双稳态非线性）。 如果函数 f 满足以下条件，则称其为双稳态 函数： :

1. $f \in \mathscr{C}^1([0,1];\ \mathrm{IR})$；*2.* f 在 $[0;\ 1]$ 中恰好有三个根：
0、1 以及某个 $\eta \in (0;\ 1)$；*3.* $f'(0)\ \ f'(1)\ < 0$，
且 $f'(\eta)\ > 0$。

双稳态非线性对于模拟阿利效应尤为重要 [Per07]。此类双稳态非线性的最标准示例如下：固定一个参数 $\eta \in (0; 1)$，并定义

$$f : [0; 1] \ni u \mapsto u(u - \eta)(1 - u).$$

虽然我们将在对 f 的温和假设下开展研究，但仍需牢记后一类非线性的重要性。

考虑双稳态非线性 f，以及与之相关的双稳态方程

$$\partial_t u - \partial_{xx}^2 u = f(u) \text{ in } [0;\infty) \times \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

这里有意省略初始条件。下面给出定义：

定义 1.2（行波解）。 方程 (1.1) 的行波解是一对 (U, c)，其中 $c \in$IR 且 U 满足

$$\begin{cases} -U'' - cU' = f(U) & in\ \mathbb{R}, \\ U(\infty) = 0, U(+\infty) = 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

若 $c > 0$，则该行波称为“灭绝行波”或“灭绝前沿”；若 $c < 0$，则称为“入侵行波”或“入侵前沿”。

如果 (U, c) 满足定义 1.2 中的条件，那么 $u : (t, x) \mapsto U(x - ct)$ 是方程 (1.1) 的一个解。从 [Fis37 开始，KPP37], 行波一直是数学生物学的核心内容。Fife 与 MacLeod [FM77] 的开创性工作回顾了与行波解存在性相关的各种结果，并研究了它们的稳定性。粗略地说，对于具有初始条件 $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$, $u_0(-\infty) < \eta, u_0(\infty) > \eta$ 的方程 (1.1)，当 $t \to \infty$时，其解与行波前沿 [相似1], 参见 FM77，定理 3.One of the foundational results in the field is the following theorem:

定理 A。 *[FM77，定理 3。2]* 设 f 是一个双稳态非线性，如定义*1.1*中所定义，并假设

$$\int_0^1 f(s)ds > 0. \tag{1.3}$$

那么，存在一个（除平移外）唯一的行波解$(U^*, c^*_{TW,\ f})$，满足(1.1)。此外，该解是一个入侵前沿，即 $c^*_{TW,\ f} < 0$。最后，对于任意满足以下条件的初始条件 u_0

$$\lim_{s\to-\infty} u_0 \in [0;\eta), \lim_{s\to+\infty} u_0 \in (\eta; 1],$$

存在 $x_0 \in$IR $w > 0$ 使得

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(t,x) - U^*(x - ct - x_0)| = \underset{t\to\infty}{O}(e^{-wt}).$$

如引言所述，我们的目的是借助行波前沿，并采用均场博弈方法，理解捕捞对种群动态的影响。

均场博弈 我们考虑一个固定的双稳态非线性 f。对于给定的渔民密度$m = m(t,\ x)$，鱼类种群满足

$$\partial_t \theta - \partial_{xx}^2 \theta = f(\theta) - m\theta.$$

为考虑到渔民会采取“最优”策略这一事实，我们遵循开创性的[LL07，Lio06]，并假设密度 $m = m(t,\ x)$是由 $N \gg 1$名渔民组成的种群的极限（关于模型在 [CDLL19] 条件下的收敛性研究，请参阅 $N \to \infty$）。他们每个人都试图通过控制自己的位移来使产出最大化；具体而言，我们用以下常微分方程来描述代表性渔民：常微分方程

$$x' = \alpha$$

其中， x 表示渔民的位置， α 表示控制。由此得到的玩家密度遵循连续性方程

$$\partial_t m + \partial_x(\alpha m) = 0. \tag{1.4}$$

从初始位置 x_0 出发，玩家希望优化其捕鱼产量。该产量取决于：

1. 折扣因子 $\lambda > 0$,
2. 鱼的平均售价，我们将其归一化为 1,
3. 控制成本，该成本通过拉格朗日量 L施加。

总的来说，对于给定的鱼类种群 θ，从位置 x_0 出发的单个渔民需要解决以下优化问题

$$\sup_{\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})} J(x_0, \alpha, \theta) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\theta(t, x_\alpha(t)) - L(\alpha)\right) dt \text{ with } \begin{cases} x'_\alpha(t) = \alpha(t)\,, \\ x_\alpha(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

当 θ 的选择不存在歧义时，我们可以省略对 θ is$J$ 的依赖，直接写作 $J(x_0,\ \alpha)$。

关于拉格朗日量 L 的假设是标准的：

$$\begin{cases} L \text{ is superlinear: } \lim\limits_{|\alpha|\to\infty} \frac{L(\alpha)}{1+|\alpha|} = \infty \\ L \text{ is } \mathscr{C}^1 \text{ in } \alpha, \text{ and strictly convex in } \alpha \in \mathbb{R}, \\ 0 \text{ is the unique global minimum of } L \text{ (up to an additive constant we take } L(0) = 0) \end{cases} \tag{$\mathbf{H}_L$}$$

满足 ($\mathbf{H}_L$) 的一个典型拉格朗日量是 $L(\alpha) = |\alpha|^q$， $q > 1$。值函数 V定义为

$$V : (t_0, x_0) \mapsto \sup_{\alpha \in L^\infty((t_0;\infty))} \left(\int_{t_0}^\infty e^{-\lambda(t-t_0)} \left(\theta(t, x_\alpha(t)) - L(\alpha)\right) dt \right) \text{ with } \begin{cases} x'_\alpha(t) = \alpha(t)\,, \\ x_\alpha(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

在最优控制满足正则性假设的条件下，应用 Bellman 动态规划原理这一标准方法 [BI97，第一章第一节 2] 可证明值函数 V 是哈密顿-雅可比-贝尔曼方程的唯一粘性解

$$\begin{cases} \lambda V - \partial_t V - H(\partial_x V) = \theta \text{ in } (0;\infty) \times \mathbb{R}\,, \\ V(+\infty, \cdot) \equiv 0, \end{cases}$$

其中，哈密顿量 H 定义为 L 的勒让德变换：

$$H(p) := \sup_{\alpha \in \mathbb{R}} \left(p\alpha - L(\alpha)\right).$$

若满足 ($\mathbf{H}_L$)，则 H 具有局部有界导数。在此情形下，存在唯一的最优控制，使得定义 V (式 (1.6)) 中的最大值能够达到；此外，它还具有如下反馈形式

$$\alpha^*(x) = H'(\partial_x V(x)). \tag{1.7}$$

T渔民密度 m 因此是连续性方程的分布解

$$\begin{cases} \partial_t m + \partial_x \left(H'(\partial_x V) m\right) = 0 \text{ in } (0;\infty) \times \mathbb{R}\,, \\ m(0, \cdot) = m_0. \end{cases} \tag{1.8}$$

注 1.3。 在此阶段， m在空间中完全可以是一个测度。然而，我们将证明（引理 *1.5*），对于我们要寻找的行波解，渔民密度 m 不应含有原子。我们的证明将采用构造性方法，而这一事实正是我们构造可能的 m 作为一个 L^1 函数的动机之一。

给定一些初始条件 θ_0 和 m_0，加入终端时间范围 $T > 0$ 和终端成本 V_T：为方便起见，记为 I R → IR，我们得到以下主从博弈系统：

$$\begin{cases} \lambda V - \partial_t V - H(\partial_x V) = \theta & \text{in } (0;T) \times \mathbb{R}, \\ V(T,\cdot) = V_T, \\ \partial_t m + \partial_x \left(H'(\partial_x V) m\right) = 0 & \text{in } (0;T) \times \mathbb{R}, \\ m(0,\cdot) = m_0, \\ \partial_t \theta - \partial^2_{xx} \theta = f(\theta) - m\theta & \text{in } (0;T) \times \mathbb{R}, \\ \theta(0,\cdot) = \theta_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

1.3 反向行波：初步讨论

反向 MFG 行波的定义 现在，我们来探讨核心问题，定义方程 (1.9) 的反向行波概念。全文中，我们考虑满足条件 (1.3) 的双稳态非线性 f。

定义 1.4（反向 MFG 行波）。若 $(\lambda, c, \Theta, \mathcal{M}, \mathcal{V})$ 是方程 (1.9) 的反向 MFG 行波解，且 $c > 0$, $\lim_{s\to-\infty} \Theta(s) = 0$，$\lim_{s\to+\infty} \Theta(s) = 1$，$\Theta > 0$ 属于 IR，若 $(\Theta, \mathcal{M})$ 满足

$$-\Theta'' - c\Theta' = f(\Theta) - \mathcal{M}\Theta \ in \ \mathbb{R}$$

且常值控制 $\alpha \equiv c$ 在 (1.6) 中是最优的，其中 $\theta : (t,x) \mapsto \Theta(x - ct)$，对于任意$x_0 \in$supp$(\mathcal{M})$。

特别是，这意味着，定义

$$V : (t,x) \mapsto \mathcal{V}(x - ct)\,, m : (t,x) \mapsto \mathcal{M}(x - ct),$$

三元组（θ， m， V）是（1.9）的一个解，其中 $m_0 = \mathcal{M}$， $\theta_0 = \Theta$， $V_T = \mathcal{V}$。

“反向”这一说法源于 f自于正性条件 $c > 0$，这意味着我们处于存在灭绝前沿的情形；这与定理A中回顾的结果形成对比。如果（c， Θ， $\mathcal{M}$， $\mathcal{V}$）是一个反向 MFG 行波，变量代换 $s = x - ct$ 表明（Θ， $\mathcal{M}$， $\mathcal{V}$）满足稳态系统

$$\begin{cases} \lambda \mathcal{V}(s) + c\mathcal{V}'(s) - H(\mathcal{V}'(s)) = \Theta(s) \text{ on } \mathbb{R}, \\ -\Theta''(s) - c\Theta'(s) = f(\Theta(s)) - \mathcal{M}(s)\Theta(s) \text{ on } \mathbb{R}, . \\ H'(\mathcal{V}'(s)) = c \text{ in supp}(\mathcal{M}), \end{cases} \tag{1.10}$$

变量 s 被称为相似变量。注意，方程（1.9）中的连续性方程已被以下条件所取代：代表性渔民的最优控制（即方程（1.7）的一个解）等于 c，即行波的速度。此外， $\mathcal{V}$ 确实是以相似变量表示的控制问题的值函数：

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}(s_0) = \sup_{\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})} \mathcal{J}(\alpha, s_0, \Theta) \text{ where} \\ &\mathcal{J}(\alpha, s_0, \Theta) = \left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\Theta(s_\alpha(t)) - L(\alpha)\right) dt \right) \text{ with } \begin{cases} s'_\alpha(t) = \alpha(s(t)) - c\,, \\ s_\alpha(t_0) = s_0, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.11}$$

其中，上确界直接取自反馈形式的控制函数（由方程（1.7）可知）。当 Θ的选择不存在歧义时，我们可以省略其对 Θ 的依赖， J 记作 $\mathcal{J}$（x_0， α）。

接下来的段落将给出反向 MFG 行波的一些先验限制；由于本文其余部分采用构造性方法，这有助于我们为接下来给出的构造提供依据。

关于反向MFG行波的初步讨论

引理 1.5. 假设 L 满足 ($\mathbf{H}_L$)。若 $(\lambda, c, \Theta, \mathcal{M}, \mathcal{V})$ 是 (1.10)的一个解， $\mathcal{M}$ 不含原子。

注释1.6 (与 [BCS22]的比较）。这一结果显然表明，此处所考虑的 *MFG* 设定与 *[BCS22],* 中讨论的情形有显著差异；在 *[BCS22]*中，目标是找到一种能够使种群灭绝的捕捞策略；事实上， m 文中表明，狄拉克型渔民密度在某种意义上是（在导致反向行波的控制中）消灭鱼类的最优选择，这与引理*1.5*的结论截然相反。

注释1.7. $\mathcal{M}$ 不含原子并不一定意味着 $\mathcal{M}$ 是一个 L^1 函数；不过，引理*1.5* 有力地促使我们寻求 $\mathcal{M}$ 作为一个 L^1 函数（或在处理周期情形时，寻求 L^1_{loc} ）。

引理 *1.5* 的证明。 反设 $\mathcal{M}$ 在 $s_0 \in \text{IR}$： $\mathcal{M}(\{s_0\}) > 0$处有一个原子。从（1.10）可知， Θ' 在 s_0处发生跳跃：

$$\Theta'(s_0^-) < \Theta'(s_0^+).$$

根据定义，对于任意 $s \in \text{supp}(\mathcal{M})$， $\alpha \equiv c$ 在（1.11）中是最优的。令 $h_+ \equiv 1 \in L^\infty$（IR）和 $\mathcal{J}(\alpha, s_0)[h]$ 为 $\alpha \mapsto \mathcal{J}(\alpha, s_0)$ 在 α 沿方向 h_+的一阶盖托导数。通过直接计算，并利用 α 的最优性，我们得到

$$\dot{\mathcal{J}}(\overline{\alpha}, s_0)[h_+] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(t\Theta'(s_0^+) - L'(c)\right) dt = \lambda^{-2}(\Theta'(s_0^+) - \lambda L'(c)) \leqslant 0.$$

同样地，沿 $h_- \equiv -1$ 方向的扰动给出

$$\dot{\mathcal{J}}(\overline{\alpha}, s_0)[h_-] = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(-t\Theta'(s_0^-) + L'(c))\, dt = -\lambda^{-2}(\Theta'(s_0^-) - \lambda L'(c)) \leqslant 0.$$

将后面两个不等式相加可得

$$\Theta'(s_0^+) - \Theta'(s_0^-) \leqslant 0,$$

矛盾。 □

现在讨论第二点意见，即 $\mathcal{M}$ 的支集与 Θ的（非）单调性之间的联系，以及 Θ 在 $\text{supp}(\mathcal{M})$ 中的行为。事实上，我们的若干定理致力于构造具有单调Θ的行波，而周期性或非单调反向 MFG 行波的情形则在第 2.3.2 节中讨论。现在证明以下引理：

引理 1.8。 假设 $\mathcal{M}$ 是 L^1，且 $(\lambda, c, \Theta, \mathcal{M}, \mathcal{V})$ 是一个反向 *MFG* 行波。 Θ 在 $\mathcal{M}$ 的支集上是线性的，其中 $\Theta' = \lambda L'(c)$。此外，如果 Θ 单调递增，则 $\mathcal{M}$ 必定是紧支撑的。

引理 *1.8* 的证明。 在假设（$\mathbf{H}_L$）下，条件 $H'(\mathcal{V}') \equiv c$ 在 supp($\mathcal{M}$) 中可改写为

$$\mathcal{V}' \equiv L'(c) \text{ in } \operatorname{supp}(\mathcal{M}).$$

将其代入1.10中的 (HJB) 方程，可得 Θ 在 supp($\mathcal{M}$) 中是线性的。特别地，若 Θ 单调，由于 $\Theta(s) \underset{s\to\infty}{\to} 1$， $\mathcal{M}$ 具有紧支撑。 □

对于紧支撑的 $\mathcal{M}$，我们通常假设（经过平移后）$\min(\operatorname{supp}(\mathcal{M})) = 0$，并且在许多情况下，我们甚至会寻找支集连通的 $\mathcal{M}$。

最后，我们给出一个关于允许的最大速度的先验估计。

引理 1.9。若$(\lambda, c, \Theta, \mathcal{M}, \mathcal{V})$ 是一个反向 *MFG* 行波，则 c必须满足

$$\forall s_0 \in \operatorname{supp}(\mathcal{M}), L(c) \leqslant \Theta(0).$$

引理 *1.9* 的证明。由于 $\alpha = c$对于任意 $s_0 \in$supp($\mathcal{M}$)都是最优的，因此我们有，

$$\mathcal{J}(0, s_0) \leqslant \mathcal{J}(\overline{\alpha}, s_0) \text{ for any } s_0 \in \operatorname{supp}(\mathcal{M}).$$

由于 $L(0) = 0$，由此可得

$$0 < \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Theta(s_0 - ct)dt = \mathcal{J}(0, s_0) \leqslant \mathcal{J}(\overline{\alpha}, s_0) = \frac{\Theta(s_0) - L(c)}{\lambda}$$

由此得出结论。 □

这引出了与拉格朗日量 L 相关的最大速度的定义。为定义它，需要了解一些关于双稳态方程相图分析的背景知识。有关细节请参见第3节；这里我们指出，对于任意 $c \geqslant 0$，在 IR 中存在微分方程 $\Gamma_{0,c}$ $-\Gamma''_{0,c} - c\Gamma'_{0,c} = f(\Gamma_{0,c})$ 的一个解，且 $\Gamma_{0,c}(-\infty) = \Gamma'_{0,c}(-\infty) = 0$，其中 $\Gamma_{0,c} > 0$ 在 IR 中（用动力系统术语来说，$\Gamma_{0,c}$ 对应于与平衡点 $(U = 0, U' = 0)$ 相关的不稳定流形）。对于任意满足 $(\mathbf{H}_L)$ 的 L，我们定义

$$c_{\max}(L) := \sup\{c > 0, L(c) < \|\Gamma_{0,c}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\}. \tag{1.12}$$

2 主要结果

我们将本节分为三个主要部分。第一部分，即第2.1节，讨论单调反向平均场博弈行波的存在性。第二部分，即第 2.2节，聚焦于公地悲剧：我们表明，在某些情况下，通过协调，每位渔民实际上都能获得更高的捕捞收益，同时确保鱼类种群得以存续。第三部分，即第 2.3 节，对周期性行波和非单调行波进行了较为简短的讨论。

基本假设 在全文中，f 是一个双稳态函数（符合定义1.1的含义），且满足（1.3）。此外，我们要求：若 $\eta \in (0; 1)$ 是 f的第三个根，则

$$f \text{ has a unique critical point in } [0; \eta]. \tag{2.1}$$

除非另有说明，L 满足（$\mathbf{H}_L$）。

2.1 单调反向 MFG 行波的存在性

这里我们坚持要求 Θ 具有单调性。当 Θ 单调递增时，我们称反向 MFG 行波（c，λ，Θ，$\mathcal{M}$，$\mathcal{V}$）是单调的。

2.1.1 特定四元组 $(\lambda, c, \Theta, \mathcal{M})$ 的存在性

我们单独提出以下构造结果。

命题 2.1。存在一个映射 $c_0 : (0;\infty) \to \mathrm{IR}_+^*$，使得：

i) 对所有 $c \in (0, c_0(\lambda)]$,，都存在唯一一对 $(\Theta, \mathcal{M})$，使得

- $\mathcal{M} \in L^1(\mathrm{IR};\ [0,\infty))$ 且 $\mathrm{supp}(\mathcal{M}) = [0, s_1]$ 对于某个 $s_1 > 0$,
- Θ 是分段的 $\mathscr{C}^2$，并从 $0 = \lim_{s\to-\infty} \Theta(s)$ 递增至 $1 = \lim_{s\to\infty} \Theta(s)$,
- Θ 在 $(\Theta) - \mathcal{M}\Theta$ 上满足条件，定义于IR,
- $\Theta' \equiv \lambda L'(c)$ 在 $\mathrm{supp}(\mathcal{M})$,

ii) 对于 $c > c_0(\lambda)$，不存在这样的配对$(\Theta, \mathcal{M})$，

iii) c_0 连续且递减，且$\lim_{\lambda\to 0^+} c_0(\lambda) = \infty$，$\lim_{\lambda\to\infty} c_0(\lambda) = 0$。

此命题的证明请参见第3 节。映射 c_0 在下文的方程（3.22）中作出刻画。

接下来的定理都依赖于对命题 2.1给出的特定三元组（c，Θ，$\mathcal{M}$）的细致研究，归结为证明在满足关于（c，λ）的某些条件时，$\alpha = c$ 在（1.11）中是最优的。

我们在图1中展示如何构造这个三元组。固定 $c > 0$后，我们在右侧展示常微分方程 $-\Theta'' - c\Theta' = f(\Theta)$的相图。这个思路在某些方面与 [BCS22], 类似：首先沿着绿色曲线前进，该曲线对应于平衡点（$\Theta = 0$，$\Theta' = 0$）的不稳定流形；然后在某个确定时刻开始采取行动，以到达与平衡点（$\Theta = 1$，$\Theta' = 0$）相关联的稳定流形。关于该相图的详细信息，请参见第3 节。

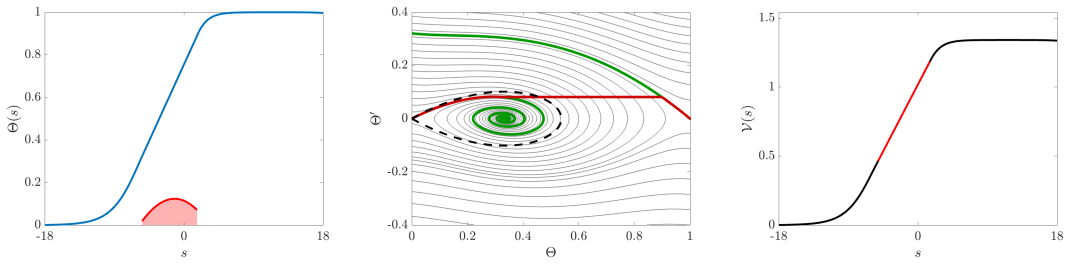

图 1：$0 < c < 2\sqrt{f'(\theta)}$的反向行波。蓝色曲线为行波剖面 Θ，红色曲线为生成该剖面的控制 $\mathcal{M}$（左）；相平面中的反向行波构造；(1，0)的稳定流形和(0，0)的不稳定流形以绿色表示。黑色虚线表示不变量。反向行波轨道以红色表示（中）；值函数 $\lambda = 0.79$，红色线段表示 $\mathcal{M}$ 的支集所在位置（右）。

2.1.2 反向平均场博弈行波的一个初步存在性结果

我们的第一个定理是一个一般性的存在性结果：

定理 2.2。 对于任意 $\lambda > 0$，存在 $\varepsilon_0(\lambda) \in (0, c_0(\lambda))$，使得对于任意 $c \in (0, \varepsilon_0(\lambda))$，都存在一个速度为 c 的单调反向平均场博弈行波，且该行波唯一。

该定理在第 5.1 节中证明。尽管这是一个相当一般的结果，但其主要缺点有两点：首先，映射 ε_0 不易计算；其次，该结论仅给出了一个充分条件。图 1 以图示方式展示了剖面（Θ，$\mathcal{M}$）。

2.1.3 行波速度的精细调节

接下来的两个定理讨论速度 c 的问题。根据定理 2.2 和引理 1.9，我们知道（λ，c）必须满足 $c < \min(c_{\max}, c_0(\lambda))$.

下面，我们给出另外两个存在性结果，证明这些必要条件在某些区域内是尖锐的。

定理 2.3。 对于任意 $c \in (0, c_{\max})$，存在 λ 足够小，使得存在一个单调反向平均场博弈行波（按定义 *1.4*的意义），其速度为 c，折扣因子为 λ。

关于该定理的证明，请参见第 5.2 节。定理2.3 表明，必要条件 $c < c_{\max}$ 在渐近区域 $\lambda \to 0$ 中几乎是尖锐的。需要注意的是，尽管乍看之下，这似乎是定理2.2一个无关紧要的推论，但主要难点在于，定理 2.2并未给出 $\varepsilon_0(\lambda)$ 在 $\lambda \to 0$时的渐近行为。

下面的定理聚焦于强凸拉格朗日函数的情形。在这种情况下，当折扣因子 λ 足够大时，我们证明必要条件 $c \leqslant c_0(\lambda)$ 是尖锐的。换言之，在这一参数区域内，反向行波实际上是反向 MFG 行波。

定理 2.4。 假设 L 是 $\mathscr{C}^2$ 且 $L'' \geqslant D$，其中某个正常数为 D。存在$\lambda_0(D) > 0$，使得对于任意满足以下条件的(c, λ)

$$\lambda \geqslant \lambda_0(D) \qquad and \qquad 0 < c \leqslant c_0(\lambda),$$

存在一个唯一的单调反向平均场博弈行波，其速度为 c，折扣因子为 λ。

证明见第 4 节，与前述定理的证明大不相同。

2.2 协调与公地悲剧

我们选择术语 协调，以呼应不协调 一词，该词出现在 W.F. Loyd 的引文中[Llo33]。此外，我们也可以采用术语合作，在均值场优化文献中，这个术语常用于指所有主体累计利润的最大化（垄断情形下通常如此）。此处使用协调一词，强调每个主体的收益在个体层面上得到提升，这也符合我们的定性目标。更多详情请参见评注 2.6 。

我们希望证明，当（λ、c和拉格朗日量 L 以某种方式选取，使得一个反向单调的 MFG 行波（$\mathcal{V}$、Θ、$\mathcal{M}$）（由定理 2.3给出）存在时，有时可以找到一个协调策略 $\alpha_{\text{co}} \in L^\infty$（IR），使其满足：

1. 每位渔民实际获得的捕捞量都高于竞争情形下的捕捞量，

2. 鱼类种群不会灭绝，甚至还在不断扩张。

在下一个结果中，我们将证明，只要 L 经过谨慎选择，这便是可能的。一般性问题（也就是说，只要存在反向 MFG 行波，是否总能找到一种共同策略，使其优于恒定策略 $\alpha \equiv c$? ）目前仍悬而未决。我们猜想，对于任何满足（ L H_L）且 λ 足够小的，答案都是肯定的。

定理 2.5。存在拉格朗日量 L、折扣因子 λ 和 $c > 0$，使得：

1. 存在一个反向 *MFG* 行波 $(c, \lambda, \mathcal{M}, \Theta, \mathcal{V})$，

2. 存在一个显式策略 $\alpha_{\mathrm{co}} \in L^\infty(\mathrm{IR})$，满足：

$$\mathcal{V}(x_0) < J(x_0, \alpha_{\mathrm{co}}, \theta_{\alpha_{\mathrm{co}}}) \quad where \quad \begin{cases} \partial_t \theta_{\alpha_{\mathrm{co}}} - \partial^2_{xx} \theta_{\alpha_{\mathrm{co}}} = f(\theta_{\alpha_{\mathrm{co}}}) - m_{\alpha_{\mathrm{co}}} \theta_{\alpha_{\mathrm{co}}}, \ \theta_{\alpha_{\mathrm{co}}}(0) = \theta_0, \\ \partial_t m_{\alpha_{\mathrm{co}}} + \partial_x(\alpha_{\mathrm{co}} m_{\alpha_{\mathrm{co}}}) = 0, \ m_{\alpha_{\mathrm{co}}}(0) = m_0. \end{cases}$$

注 2.6。尽管均场博弈通常指主体彼此竞争的情形，但其合作形式称为均场控制（*MFC*），见 *[BFY13]*。其目标是最大化以下累积收益

$$\sup_{\alpha \in L^\infty(\mathbb{R})} \int_{\mathbb{R}} J(x_0, \alpha, \theta_\alpha) m_0(x_0) dx_0 \quad where \quad \begin{cases} \partial_t m_\alpha + \partial_x(\alpha m_\alpha) = 0, \\ \partial_t \theta_\alpha - \partial^2_{xx} \theta_\alpha = f(\theta_\alpha) - m_\alpha \theta_\alpha. \end{cases}$$

该设定与 *MFG* 设定之间的主要区别在于，（1.5）中 θ 是固定的。在合作情境下，均场控制系统可写为（1.5）。

$$\begin{cases} \lambda V + \partial_t V - H(\partial_x V) = \theta(1-\eta), & V(\infty, \cdot) \equiv 0, \\ \partial_t m + \partial_x \left(H'(\partial_x V) m \right) = 0, & m(0, \cdot) = m_0, \\ \partial_t \theta - \Delta \theta - f(\theta) + m\theta = 0, & \theta(0, \cdot) = \theta_0, \\ -\partial_t \eta - \Delta \eta - \eta(f'(\theta) - m) = m, & \eta(T, \cdot) = 0. \end{cases} \tag{2.2}$$

在与定理2.5类似的假设下，我们预计均场控制系统的解也会使鱼类种群发生入侵，但严格的证明超出了本文的范围。有关系统（2.2）的推导细节，以及在单稳态非线性情形下的一些理论结果，请参阅我们的另一项工作 *[KMFRB23]*，，其中还讨论了可能的政府监管。

2.3 推广：非单调反向平均场博弈行波

本段研究非单调反向平均场博弈行波，并强调这种“非单调性”也可能意味着“周期性”；我们据此分别给出结果；

2.3.1 以区间为渔民密度支集的非单调解

本节首先给出命题2.1的对应结果；也就是说，我们证明了具有任意数量局部极大值的反向行波的存在性：

命题 2.7。对于任意正整数 k，存在一个映射 $c_k : (0; \infty) \ni \mapsto c_k(\lambda)$ 使得 *at*

i) 对于任意 $c \in (0, c_k(\lambda))$，存在唯一一对 $(\Theta, \mathcal{M})$ 使得

- $\mathcal{M} \in L^1(\mathrm{IR};\ [0,\infty))$ 且 $\mathrm{supp}(\mathcal{M}) = [0, s_1]$ 对于某个 $s_1 > 0$,
- Θ 是分段的 $\mathscr{C}^2$，恰有 k 个波峰，并且从 $0 = \lim_{s\to-\infty} \Theta(s)$ 趋于 $1 = \lim_{s\to\infty} \Theta(s)$,

- Θ 在IR上满足 $-c\Theta' - \mu\Theta'' = f(\Theta) - \mathcal{M}\Theta$,
- $\Theta' \equiv \lambda L'(c)$ 位于$\mathrm{supp}(\mathcal{M})$中,

ii) c_k 连续递减，且$\lim_{\lambda\to 0+} c_k(\lambda) = \max(c_{\max}, 2\sqrt{f'(\eta)})$，并且$\lim_{\lambda\to\infty} c_k(\lambda) = 0$。

本节的主要结果如下:

定理 2.8。 设 $k \in \mathrm{IN}^*$。存在一个映射 $\lambda \mapsto \varepsilon_k(\lambda) > 0$，使得对于任意 $\lambda > 0$ 以及任意$c \in (0,\ \varepsilon_k(\lambda))$，都存在唯一的反向 *MFG* 行波，其恰有 k 个局部极大值，且$\mathrm{supp}(\mathcal{M})$ 是一个区间。

We r参见图 2 查看非单调 MFG 行波的图示 e.

与单调反向行波的情形一样，我们可以考察 c_k作为反向 MFG 行波存在性上界的锐性。与定理2.4类似，我们得到

定理 2.9。 假设 L 是 $\mathscr{C}^2$ 且 $L'' \geqslant D$，其中某个正常数为 D。存在$\lambda_k(D) > 0$，使得对于任意满足条件的(c, λ)

$$\lambda \geqslant \lambda_k(D) \qquad and \qquad 0 < c \leqslant c_k(\lambda),$$

存在唯一的非单调反向 *MFG* 行波，其波峰数恰为 k，速度为 c，折扣因子为 λ，且 $\mathrm{supp}(\mathcal{M})$ 是一个区间。

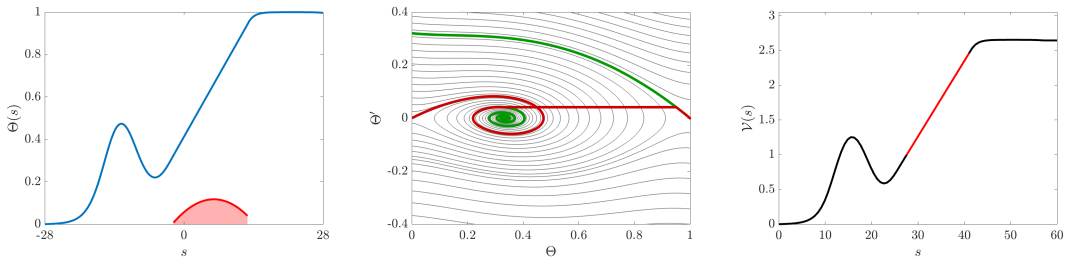

图 2：非单调反向 MFG 行波的表示：蓝色表示 Θ，红色表示 $\mathcal{M}$ （左）；相图中的构造（中）；值函数的表示（右），红色线段表示 $\mathcal{M}$ 的支集所在位置， $\lambda = 0.39$。

2.3.2 周期解

在本节 中，我们关注周期解，因此不再假设 Θ 具有
极限 0 和 1（当 $s = \pm\infty$ 时）。

正如在构造非单调解时将会明了的那样，构造周期性反向均值场博弈行波的基本思路，是“复制并粘贴”非单调解中的部分内容，图3以图示方式呈现了这一思路。由此得到以下定理，其证明只需对定理2.8进行直接改编。

定理 2.10。 对于任意 $\lambda > 0$，对于任意 $c \in (0,\ \varepsilon_1(\lambda))$（其中 ε_1 在定理 *2.8*中定义）存在一个周期性 *MFG* 行波（即 Θ 和 $\mathcal{M}$ 在空间上是周期性的）。

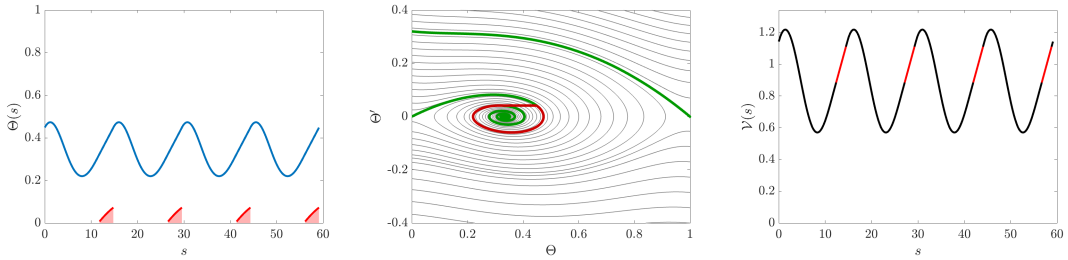

图 3：周期性反向均值场博弈行波的表示： Θ 为蓝色， $\mathcal{M}$ 为红色（左）；相图中的构造；值函数（右），红色线段表示 $\mathcal{M}$ 的支集所在位置， $\lambda = 0.39$。

2.4 参考文献

本文同时涉及三个主要的数学研究领域。第一个自然是通过研究行波的性质来探讨空间生态学。试图穷尽列出这一主题的参考文献毫无意义，但我们想强调，本文聚焦于基础理论，正如 Fife 的经典专著 [Fif79]所阐述的那样；例如，关于行波动力学的最新详细研究，可参见 [GGHR12]。第二个领域是均值场博弈理论 [HMC06、HCM07、LL06a、LL06b、LL07], ，在过去二十年里，它已成为应用偏微分方程的主要研究领域之一。本文与通常研究 MFG 的文献相比，主要区别当然在于多了一个与鱼类种群相对应的方程。正如前文所述，本文并非首篇探讨 MFG 系统与行波之间可能联系的研究：目前已有越来越多的文献研究源自经济学领域、关于知识增长的玻尔兹曼型均值场博弈模型中的行波 [BLW17、PRV21、PR22、QC19]。然而，我们的模型及其应用都与之大不相同。据我们所知，反应扩散方程与平均场博弈相耦合的其他唯一实例见 [MHGW18]；不过，根据我们从幻灯片 [MHGW18] 中了解到的内容，我们的研究视角与之颇为不同。

第三个领域是种群动力学中的最优控制问题。这一领域发展迅速，近期已有多项研究专门考察了最优捕捞问题的一些定性性质。通常，在 [BCS13、CG17], 中，研究者采用测度解范式，详细分析了若干由椭圆方程描述的种群捕捞最优控制问题。最近，人们开始关注无界区域中抛物方程的最优控制与其底层行波动力学之间的相互作用。特别是，Bressan、Chiri 和 Salehi [BCS22] 运用与本文方法相似的相图方法，对如何逆转单稳态或双稳态方程的行波进行了深入描述和解释。在近期的研究 [ALNP22],中，Almeida、L´eculier、Nadin 和 Privat 也探讨了这样一个问题：能否通过施加一个作为捕捞项的控制来阻止害虫入侵。这些文章虽然涉及最优性概念（尤其是最小化控制的某种范数），但并未对本文所关注的问题给出确切答案，因为它们没有考虑

收获者视角下的最优性。据我们所知，我们此前的论文 [MRB22] 首次系统地从有限参与者的纳什均衡角度分析了此类最优分布式捕捞问题，不过研究对象是有界区域内的椭圆单稳态方程。虽然我们也在 [MRB22], 中探讨了公地悲剧的某些方面，但本文所呈现的方法和结果的定性特征与 [MRB22]截然不同。

3 可能的$(\lambda,\ c,\ \Theta,\ \mathcal{M})$的构造

本节致力于构造可能的候选对象（$\lambda,\ c,\ \Theta,\ \mathcal{M}$），它们有望产生反向 MFG 行波。具体而言，我们证明命题 2.1 及其在非单调情形下的推广——命题 2.7。回顾一下，对于固定的 $c>0$，我们的目标是找到一对（$\Theta,\ \mathcal{M}$），其中 $\mathcal{M}\in L^1$（$\mathbb{R}$）为紧支撑，并且满足动力系统

$$\begin{cases} \frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\Theta\\ \Theta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Theta'\\ -f(\Theta)-c\Theta'+\mathcal{M}\Theta\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}\Theta(-\infty)=0\\ \Theta'(-\infty)=0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}\Theta(+\infty)=1\\ \Theta'(+\infty)=0\end{pmatrix}, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $s=x-ct$ 是相似变量。

我们使用的主要工具是在$\mathcal{M}\equiv 0$时对相应动力系统进行相平面分析；控制量 $\mathcal{M}$ 将作为控制，用于将该相图中的某些部分“拼接”起来。我们可以采用双稳态方程相平面分析中的标准工具（参见例如[FM77]），但为尽可能做到自包含，我们仍给出证明。

3.1 当 $\mathcal{M}\equiv 0$ 时的相图分析

本节目标 我们考虑一个固定的 $c>0$；我们的目标是证明存在两条轨道 $\Gamma_{0,\ c}$，$\Gamma_{1,\ c}$，它们满足以下微分方程：

$$\begin{cases} -\Gamma''_{0,c}-c\Gamma'_{0,c}=f(\Gamma_{0,c}) & \text{in } \mathbb{R}, \\ 0<\Gamma_{0,c}<1, & \\ \Gamma_{0,c}(-\infty)=0, \Gamma'_{0,c}(-\infty)=0 & \end{cases} \tag{3.2}$$

and

$$\begin{cases} -\Gamma''_{1,c}-c\Gamma'_{1,c}=f(\Gamma_{1,c}) & \text{in } \mathbb{R}, \\ 0<\Gamma_{1,c}<1, & \\ \Gamma_{1,c}(+\infty)=1, \Gamma'_{1,c}(+\infty)=0. & \end{cases} \tag{3.3}$$

一旦证明这两个解存在，构造控制 $\mathcal{M}$ 的策略就很清楚了：首先，从 $s=-\infty$ 出发，我们只需沿着轨道 $\Gamma_{0,\ c}$ (即 设定 $\mathcal{M}=0$)；其次，选择一个特定的 s_0（经过平移后，假设其等于 0），并构造$\mathcal{M}$，使其将 $\Gamma_{0,\ c}$ 连接到$\Gamma_{1,\ c}$。

为了证明 $\Gamma_{0,\ c}$，$\Gamma_{1,\ c}$ 的存在性，方便起见，将相应的微分系统引入为如下的一阶常微分方程：

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}U\\ U'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}U'\\ f(U)-cU'\end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

该系统恰有三个平衡点：

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\eta\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

从这一角度来看，将构造函数 $\Gamma_{0,c}$,$\Gamma_{1,c}$，使其成为与这些平衡点相关的（不）稳定流形。更准确地说，$\Gamma_{0,c}$ 将对应于与平衡点 $(0,0)^\top$ 相关的不稳定流形，而 $\Gamma_{1,c}$ 将对应于与平衡点 $(1,0)^\top$相关的稳定流形。

平衡点及其（不）稳定流形 (3.4) 在给出关于平衡点（不）稳定性的主要结果之前，我们先引入能量泛函

$$E(u,p):=\frac{p^2}{2}+F(u)\text{ where }F:x\mapsto\int_0^x f. \tag{3.6}$$

对于任意轨道 $(U(t)\ U'(t))^\top$，满足 (3.4)，令

$$e(t):=E(U(t),U'(t))$$

我们得到

$$e'(t)=-c(U')^2(t)\leqslant 0. \tag{3.7}$$

最后一个等 式来自条件 $c>0$。由此考虑不变区域

$$X:=\{(u,p),E(u,p)\leqslant 0\}, \tag{3.8}$$

其在相平面中的边界由以下内容给出

$$\partial X=\{(u,p),0\leqslant u\leqslant 1,F(u)\leqslant 0,p=\pm\sqrt{-2F(u)}\}.$$

下面的引理描述了（3.5）中给出的平衡点的稳定性。每个平衡点均为（u^*，0）$^\top$，因此（3.4）在（u^*，0）$^\top$处的线性化是如下动力系统

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}V\\cV'\end{pmatrix}=A_{u^*}\begin{pmatrix}V\\cV'\end{pmatrix} \tag{3.9}$$

其中矩阵 A_{u^*} 定义为

$$A_{u^*}=\begin{pmatrix}0&1\\-f'(u^*)&-c\end{pmatrix}.$$

容易验证，当 $u^*=0$或 1 时，由于 $f'(0)\ \ f'(1)<0$，矩阵 A_{u^*}有两个实特征值（$\lambda_{+,\ u^*}$，$\lambda_{-,\ u^*}$），对应两个特征向量（$v_{+,\ u^*}$，$v_{-,\ u^*}$），其表达式明确给出如下

$$\lambda_{\pm,u^*}=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4f'(u^*)}}{2},v_{\pm,u^*}=\begin{pmatrix}1\\\lambda_{\pm,u^*}\end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

由于 $\lambda_{+,\ u^*}>0$，$\lambda_{-,\ u^*}<0$当 $u^*=0$，1 时，我们推得 (0，0) 和 (1，0) 是鞍点，并且与它们相关联的各有一个不稳定流形和一个稳定流形，具体如下：

引理 3.1. 对于任意 $c>0$，以下结论成立：

1. 存在一条曲线 $S_0 := (\Gamma_{0,c}, \Gamma'_{0,c})^\top$，称为“不稳定流形”，满足 (3.2)。此外，它包含于不变区域：$S_0 \subset X$ 其中 X 定义见 (3.8)。最后，我们有

$$\lim_{s\to+\infty} \begin{pmatrix} \Gamma_{0,c}(s) \\ \Gamma'_{0,c}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. 存在一条曲线 $S_1 := (\Gamma_{1,c}, \Gamma'_{1,c})^\top$，称为“稳定流形”，满足 (3.3)。此外，它包含于 X^c，并且在 IR 中满足 $\Gamma'_{1,c} > 0$。最后，存在 $s_\eta > 0$，使得 $\Gamma_{1,c}(s_\eta) = \eta$。

引理的证明 *3.1*。1. 为验证 $S_0 \subset X$，只需注意到当 $\varepsilon > 0$ 足够小时，$S_0 \cap \{u \leqslant \varepsilon\} \subset X$。然而，我们已经观察到 $\partial X = \{(u, p) \quad p = \pm\sqrt{-2F(u)}\}$。考虑相平面中的函数 $\Phi = u \mapsto \sqrt{-2F(u)}$。那么，对于任意满足 $F(u) < 0$，$\Phi'(u) = -\frac{F'(u)}{\sqrt{-2F(u)}} \underset{u\to 0}{\to} \sqrt{-f'}(0)$。由 $v_{-,0}$ 的显式表达式可知，只需验证

$$-c - \frac{\sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2} \leqslant \sqrt{-f'(0)},$$

这对任意 $c > 0$显然成立。要验证轨道收敛到 $(\eta, 0)^\top$，只需注意到 E 是 (3.4) 的严格李雅普诺夫泛函，并且在 $(\eta, 0)^\top$处有唯一的全局（严格）极小值。证明至此完成。

2. 由于 $E(1, 0) = F(1) = \int_0^1 f > 0$，且根据能量沿轨道单调变化的性质 (3.7)，可知 $E(\Gamma_{1,c}, \Gamma'_{1,c}) > 0$。我们还注意到，同一性质结合 F 在 1 处达到最大值这一事实，意味着对于任意 $s \in \mathbb{R}$，$\Gamma'_{1,c}(s) > 0$。此外，存在 s_η 使得 $\Gamma_{1,c}(s_\eta) = \eta$。事实上，若非如此，则有

$$\Gamma_{1,c} > \eta \text{ in } \mathbb{R}.$$

由于如前所见，$\Gamma'_{1,c} > 0$ 属于 IR，这将意味着

$$\Gamma''_{1,c} = -c\Gamma'_{1,c} - f(\Gamma_{1,c}) < 0.$$

因此，$\Gamma_{1,c}$ 将是凹函数，在 $+\infty$ 处严格递增，并且在 $-\infty$处有下界 η。这显然荒谬，因此我们得出结论：这样的 s_η 存在。

□

第三个平衡点 $(\eta, 0)^\top$的动力学行为较为复杂，下一条引理将对此进行描述（该引理由对 (3.10) 的研究得出）：

引理 3.2. *1.* 若 $0 < c < 2\sqrt{f'(\eta)}$，则平衡点 $(\eta, 0)^\top$ 是一个螺旋汇：线性化系统具有两个实部为负的共轭复特征值。

2. 若 $2\sqrt{f'(\eta)} < c$，则平衡点 $(\eta, 0)^\top$ 局部稳定：线性化系统具有两个负实特征值。

3.2 命题2.1的证明：构造单调反向行波

现在我们继续证明命题 2.1。我们引入以下定义：

定义 3.3。 对于任意 $c>0$，若$(\Theta,\mathcal{M})$ 是速度为 c 的单调反向行波，且满足 $\mathcal{M}\in L^1(\mathrm{IR})$ $\mathcal{M}\geqslant 0$，并且$(\Theta,\mathcal{M})$ 是下列方程的解

$$\begin{cases}\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\Theta\\ \Theta'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Theta'\\ -f(\Theta)-\mathcal{M}\Theta+c\Theta'\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\Theta(-\infty)\\ \Theta'(-\infty)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\Theta(+\infty)\\ \Theta'(+\infty)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\end{cases}\tag{3.11}$$

其中 $\Theta'>0$ 属于 IR。

预备讨论 构造这类反向行波有多种方法，它们都遵循一个简单的策略：沿着与平衡点 (0，0) 相关的 S_0 不稳定流形前进，然后构造一个紧支撑的 $\mathcal{M}$ ，使其从 S_0 到达与 (1，0) 相关的稳定流形 S_1。到达 S_1 后，停止作用，只需沿着 $(\Gamma_{1,\ c},\ \Gamma'_{1,\ c})$ 前进。

然而，正如引理 1.8所指出的，如果我们希望反向行波有望成为平均场博弈问题（1.9）的一个解，就不能随意选择反向行波。我们确实必须确保 $\mathcal{M}$ 具有紧支撑，并且

$$\mathcal{V}'=L'(c)$$

位于 m 的支集中，这反过来意味着 Θ' 必须在 $\mathcal{M}$ 的支集中为常数。更准确地说，我们必须满足以下关系

$$L'(c)=\lambda\Theta'\text{ in }\mathrm{supp}(\mathcal{M}).$$

这对 $(c,\ \lambda)$ 的取值范围施加了第一个约束。

构造 c_0 现在我们定义映射 c_0，用于命题 2.1。对于任意固定的 $c>0$，我们定义以下量

$$\Gamma_{0,\max}(c):=\|\Gamma_{0,c}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\tag{3.12}$$

and

$$\Gamma'_{0,\max}(c):=\max_{\mathbb{R}}\Gamma'_{0,c}.\tag{3.13}$$

事实上，我们只需要 $\Gamma'_{0,\ \max}$ 就能定义 c_0；不过，由于 $\Gamma_{0,\ \max}$ 会在后续构造中用到，为便于后续参考，在此定义它。

下面的引理是关键：

引理 3.4。 映射 $\Gamma'_{0,\ \max}$ 在(0；$+\infty$)上递减。此外，

$$\lim_{c\to 0^+}\Gamma'_{0,\max}(c)>0\,,\ \lim_{c\to\infty}\Gamma'_{0,\max}(c)=0.$$

引理 *3.4* 的证明。 我们先证明 $\Gamma'_{0,\ \max}$的严格单调性。设 c_1，$c_2>0$ 满足 $c_1<c_2$。对于 $i=1$，2，我们定义

$$s_i:=\sup\left\{s\in\mathbb{R}:\forall s'\leqslant s\,,\Gamma_{0,c_i}(s')\leqslant\eta\right\}.$$

注意，虽然 $s_i>-\infty$，但我们可能有 $s_i=\infty$ （例如，当 $\Gamma_{0,\ c_i}$ 是单调的情况下）。无论如何，首先注意到

$$\Gamma'_{0,c_i}>0\text{ in }(-\infty,s_i).\tag{3.14}$$

要证明（3.14），注意较弱的条件

$$\Gamma'_{0,c_i} \geqslant 0 \text{ in } (-\infty, s_i). \tag{3.15}$$

成立。事实上，如果（3.15）不成立，则取 $s^* < s_1$ 使得

$$\Gamma'_{0,c_i}(s^*) = \min_{s \leqslant s_i} \Gamma'_{0,c_i}(s) < 0.$$

由（3.2）可推得

$$0 < -c\Gamma'_{0,c_i}(s^*) = f\left(\Gamma_{0,c_i}(s^*)\right).$$

因此，$\Gamma_{0,\ c_i}(s^*) > \eta$，这与 s_i的定义相矛盾。因此，（3.15）成立。为证明（3.14），再次通过反证法，假设存在 $s^* < s_i$ 使得$\Gamma'_{0,\ c_i}(s^*) = 0$。系统（3.2）表明，要么$\Gamma_{0,\ c_i}(s^*) = 0$，要么$\Gamma_{0,\ c_i}(s^*) = \eta$；第一种可能性因$\Gamma_{0,\ c_i} > 0$ 在（$-\infty$； $+\infty$）中而被排除，而第二种可能性与 s_i的定义相矛盾。

第二个观察是

$$\max_{\mathbb{R}} \Gamma'_{0,c_i} = \max_{(-\infty; s_i)} \Gamma'_{0,c_i}. \tag{3.16}$$

事实上，定义

$$s_{i,\max} := \operatorname{argmin} \left\{ s \in \mathbb{R} : \Gamma'_{0,c_i}(s_{\max}) = \max_{\mathbb{R}} \Gamma'_{0,c_i}. \right\}$$

由（3.2）可知

$$0 > -c_i\Gamma'_{0,c_i}(s_{i,\max}) = f\left(\Gamma_{0,c_i}(s_{i,\max})\right).$$

因此，我们得到 $\Gamma_{0,\ c_i}(s_{i,\ \max}) < \eta$。我们断言

$$\Gamma'_{0,c_i} \geqslant 0 \text{ in } (-\infty; s_{i,\max}]. \tag{3.17}$$

事实上，若非如此，我们令 $s^* < s_{i,\ \max}$ 使得 $\Gamma'_{0,\ c_i}(s^*) = \text{最小}_{(-\infty; s_{i,\max})} \Gamma'_{0,\ c_i} < 0$。方程 (3.2) 进而意味着

$$\Gamma_{0,c_i} > \eta.$$

由于 $\Gamma_{0,\ c_i}(s_{i,\ \max}) < \eta$，存在 $s^{**} < s^*$ 使得 $\Gamma_{0,\ c_i}(s^{**}) = \Gamma_{0,\ c_i}(s_{i,\ \max})$ 且$\Gamma'_{0,\ c_i}(s^{**}) > 0$。然而，根据 (3.6)，定义

$$e_i : s \mapsto \frac{\Gamma'_{0,c_i}(s)^2}{2} + F(\Gamma_{0,c_i}(s)).$$

显然，

$$e_i'(s) = -c\left(\Gamma'_{0,c_i}(s)\right)^2,$$

由此

$$0 > e_i(s_{i,\max}) - e_i(s^{**}) = \frac{(\Gamma'_{0,c_i}(s_{i,\max}))^2 - (\Gamma'_{0,c_i}(s^{**}))^2}{2},$$

这与 $s_{\max}$的定义矛盾。

由（3.14）可知，$\Gamma_{0,\ c_i}$是从（$-\infty$； s_i）到（0； η）的微分同胚。现在我们将 $\tilde{\gamma}_i'$定义为

$$\tilde{\gamma}_i' : (0; \eta) \ni \xi \mapsto \Gamma'_{0,c_i}\left(\Gamma^{-1}_{0,c_i}(\xi)\right). \tag{3.18}$$

由（3.16），只需证明

$$\tilde{\gamma}_2' < \tilde{\gamma}_1' \tag{3.19}$$

从而得出 $\Gamma'_{0,\max}$ 是递减的。根据（3.10），

$$\tilde{\gamma}_i'(0) = \frac{-c_i + \sqrt{c_i^2 - 4f'(0)}}{2}.$$

然而，很容易验证，$c \mapsto \frac{-c+\sqrt{c^2-4f'(0)}}{2}$ 关于 c 是递减的。因此

$$\tilde{\gamma}_2'(0) < \tilde{\gamma}_1'(0). \tag{3.20}$$

现在，为了证明 (3.19)，通过反证法进行论证。利用 (3.20)，这意味着存在 $\xi^* \in (0;\eta)$ 使得

$$\tilde{\gamma}_1'(\xi^*) = \tilde{\gamma}_2'(\xi^*) \text{ with } \tilde{\gamma}_2' < \tilde{\gamma}_1' \text{ in } [0;\xi^*),$$

这进而导致存在 $\xi^{**} \in (0;\xi^*)$，使得

$$\frac{d\tilde{\gamma}_2'}{d\xi}(\xi^{**}) > \frac{d\tilde{\gamma}_1'}{d\xi}(\xi^{**}), \tilde{\gamma}_2'(\xi^{**}) < \tilde{\gamma}_1'(\xi^{**}).$$

回到 $\tilde{\gamma}_i$ 的定义（式 (3.18)）并利用 (3.2)，可得如下比较关系

$$\frac{-c_2\tilde{\gamma}_2'(\xi^{**}) - f(\xi^{**})}{\tilde{\gamma}_2'(\xi^{**})} = \frac{d\tilde{\gamma}_2'}{d\xi}(\xi^{**}) > \frac{d\tilde{\gamma}_1'}{d\xi}(\xi^{**}) = \frac{-c_1\tilde{\gamma}_1'(\xi^{**}) - f(\xi^{**})}{\tilde{\gamma}_1'(\xi^{**})}$$

或者，等价地，

$$-c_2\tilde{\gamma}_1'(\xi^{**}) > -c_1\tilde{\gamma}_2'(\xi^{**}),$$

矛盾。至此，$\Gamma'_{0,\max}$的单调性证明完毕。

现在我们研究$\Gamma'_{0,\max}$ 的渐近行为，更确切地说，我们证明

$$\lim_{c\to\infty} \Gamma'_{0,\max}(c) = 0 \tag{3.21}$$

因为单调性又意味着 $\lim_{c\to 0^+} \Gamma'_{0,\max}(c) > 0$。建立（3.21）只需对（3.2）作简单分析：不妨经过平移，假设对任意 $c > 0$，都有

$$\Gamma'_{0,c}(0) = \Gamma'_{0,\max}(c).$$

由于$\Gamma_{0,c}$ 满足

$$-\frac{d}{ds}\left(e^{cs}\Gamma'_{0,c}\right) = e^{cs} f\left(\Gamma_{0,c}(s)\right)$$

又由于 $0 \leqslant \Gamma_{0,c} \leqslant 1$，在 $-\infty$ 与 0 之间积分可得上界

$$\Gamma'_{0,c}(0) \leqslant \frac{\|f\|_{L^\infty(0;1)}}{c}.$$

结论由此得出。

□

根据假设（$\mathbf{H}_L$），L' 是一个非递减函数，由此引理 3.4 推出，映射 $c \mapsto \Gamma'_{0,\max}(c)\, L'(c)$ 是连续递减的。~~因此，~~它存在一个左逆，我们将其记为 c_0:

$$c_0 : (0;\infty) \ni \lambda \mapsto \left(\frac{\Gamma'_{0,\max}}{L'}\right)^{-1}(\lambda) = \sup\left\{c > 0\,, \Gamma'_{0,\max}(c) \geqslant \lambda L'(c)\right\}. \tag{3.22}$$

3.3 单调反向行波的构造（命题2.1）

现在我们可以证明命题 2.1。

命题*2.1*的证明。回想一下，我们必须满足 $\mathcal{M}$ 紧支撑，且 Θ 必须满足

$$\Theta' = \lambda L'(c) \text{ in } \operatorname{supp}(\mathcal{M}).$$

取 λ， $c > 0$ 使得 $0 < c < c_0(\lambda)$，其中 c_0 定义于（3.22）中。令 s^* 满足 $\Gamma'_{0,\, c}(s^*) = \Gamma'_{0,\, \max}(c)$。我们将 s_0 定义为

$$s_0 := \min\left\{ s \geqslant s^*, \Gamma'_{0,c}(s_0) = \lambda L'(c) \right\}. \tag{3.23}$$

首先，我们将 Θ 定义在 $(-\infty; s_0)$ 上：

$$\Theta : (-\infty; s_0) \ni s \mapsto \Gamma_{0,c}(s).$$

现在，我们将 $\mathcal{M}$ 构造为一个支集位于 $[s_0 : s_1]$ 的密度，其中 s_1 需要确定。由于我们知道 Θ' 在 $\operatorname{supp}(\mathcal{M})$ 上必须为常数，因此自然的做法是在 $\mathcal{M}$ 的支集上构造（$\mathcal{M}$, Θ）：

$$\Theta : [s_0; s_1] = \operatorname{supp}(\mathcal{M}) \ni s \mapsto \Gamma_{0,c}(s_0) + s\Gamma'_{0,c}(s_0) \text{ and } \mathcal{M} := \frac{f(\Theta) + c\Theta'}{\Theta}. \tag{3.24}$$

需要验证两个条件： $\mathcal{M}$ 的非负性和可积性。关于非负性，我们使用（2.1）：令 $\eta \in (0; \eta)$ 为 f 在（0; η）上的唯一局部最小值。由于 $-c\Gamma'_{0,\, c}(s^*) = f(\Gamma_{0,\, c}(s^*))$，我们推得

$$\Gamma_{0,c}(s^*) \geqslant \underline{\eta}. \tag{3.25}$$

由于 f 在 $(0; \eta)$ 中有唯一的临界点 $\top$（尤其是在 $(\eta; \eta)$ 中没有临界点），因此我们推得，对于任意满足 $\Gamma_{0,\, c}(s_0) + s\Gamma'_{0,\, c}(s_0) \leqslant 1$ 的 $s \geqslant s_0$，有

$$c\Gamma'_{0,c}(s_0) \geqslant -f\left(\Gamma_{0,c}(s_0) + s\Gamma'_{0,c}(s_0)\right).$$

因此，函数 $\mathcal{M}$ 在（3.24）中定义，并满足

$$\mathcal{M} \geqslant 0.$$

我们令 $\gamma_1 = \Gamma_{1,\, c}(r_1)$ 为满足条件 $(\gamma_1,\ \Gamma'_{0,\, c}(s_0)) \in S_1 = \{(\Gamma_{1,\, c}(s), \Gamma'_{1,\, c}(s)) \ \ s \in \mathbb{R}\}$ 的唯一点，其中某个 r_1 存在。我们定义 $s_1 > s_0$ 使得 $\Gamma_{0,\, c}(s_0) + s_1\Gamma'_{0,\, c}(s_0) = \gamma_1$，并对 $s \geqslant s_1$ 定义，

$$\Theta(s) = \Gamma_1(r_1 - s_1 + s), \mathcal{M} = 0.$$

根据构造， $\mathcal{M}$ 是紧支撑的。显然（因为 $\Theta' \equiv \Gamma'_{0,\, c}(s_0)$ 属于 $\operatorname{supp}(\mathcal{M})$），$\mathcal{M} \in L^1(\mathbb{R})$。最后，根据构造， Θ 满足

$$\begin{cases} -\Theta'' - c\Theta' = f(\Theta) - \mathcal{M}\Theta, \\ \Theta(-\infty) = \Theta'(-\infty) = \Theta'(+\infty) = 0, \\ \Theta(+\infty) = 1, \end{cases}$$

and

$$\Theta' \equiv \lambda L'(c) \text{ in } \operatorname{supp}(\mathcal{M}).$$

□

3.4 非单调反向行波的构造（命题 2.7）

命题 2.7 的证明。该证明是对命题 2.1 证明的改编。具体而言，我们考虑满足 $c < 2\sqrt{f'(\eta)}$ 的速度 c，使得 (3.1) 的平衡点 $(\eta, 0)^\top$ 是一个螺旋汇（见引理 3.2）。特别地，存在一个序列 $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$，使得 $\Gamma'_{0,c}$ 在 $s = s_k$ 处有一个正的局部最大值，并且在 s_k 与 s_{k+1} 之间恰好有一个局部最小值（该最小值为负）。为了构造一个恰好具有 k 个波峰的反向行波，只需在命题 2.1 的证明中将 s^* 替换为 s_k，并将 c_0 的定义替换为

$$c_k : (0; +\infty) \ni \lambda \mapsto \sup\left\{c > 0\,, \Gamma'_{0,c}(s_k) \geqslant \lambda L'(c)\right\}.$$

证明的其余部分完全相同。 □

在证明主要结果的过程中，下面的引理也很重要；它是构造 $(\Theta, \mathcal{M})$ 的一个简单推论。

引理 3.5. 设 $c\,, \lambda > 0$ 是两个正实数，$k \in \mathbb{N}$ 满足 $c < c_k(\lambda)$，令 $(\Theta\,, \mathcal{M})$ 为命题 2.7 给出的反向行波，并回忆一下，经过平移后 $\inf(\mathrm{supp}(\mathcal{M})) = 0$。则 $\Theta''(0^-) < 0$。

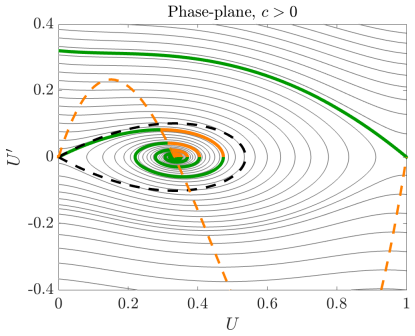

图 4：示意图：当虚线橙色曲线 Ξ 位于（绿色）不稳定流形 S_0 的左侧时，我们开始行动。实线橙色线表示我们可能从中“跳跃”的 S_0 上的点。

4 强凸情形（定理2.4和2.9的证明）

在本节中，我们证明定理 2.9 （因为只需在定理 $k = 0$ 中取 2.9，即可得到定理 2.4）。

定理 2.9 的证明。在整个证明过程中，我们固定 $k \in \mathbb{N}$，并考虑满足 $c \in (0; c_k(\lambda))$ 的一对 (c, λ)，其中 c_k 由命题 2.7 给出。我们令 $(\Theta_{\lambda, c}, \mathcal{M}_{\lambda, c})$ 为后一个命题所提供的反向行波，其波峰数恰为 k。

要证明该定理，只需证明对于任意代表性参与者，恒定速度策略 $\alpha \equiv c$ 在优化问题（1.5）中是最优的；后一个优化问题 ¯

此处改写为：玩家在时刻 $t=0$ 处于位置 $x(0)=x_0\in \mathrm{supp}(\mathcal{M})$,

$$\sup_{\alpha\in L^\infty(\mathbb{R})} J(x_0,\alpha):=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\Theta_c(x_\alpha(t)-ct)-L(\alpha(t))\right)dt \text{ subject to } \begin{cases}\frac{dx_\alpha}{dt}=\alpha\,,\\ x_\alpha(0)=x_0.\end{cases} \tag{4.1}$$

为此，我们采用凹性方法，首先证明对于任意 c， λ 满足 $0<c<c_k(\lambda)$， $\alpha\equiv c$ 是[1]的一个临界点 $J_{\lambda,c}$（引理 4.1），然后证明对于 $\lambda>0$ 足够小， $J_{\lambda,c}$ 在 α 上严格凹（引理 4.2）。在全文中，我们令 α 为常值控制：

$$\overline{\alpha}\equiv c.$$

引理 4.1。对于任意满足 $0<c<c_k(\lambda)$ 的 (c,λ)， α 是 J_c的临界点，λ。

引理 *4.1*的证明。注意，当 $\alpha=\alpha$ 时，我们有 $\Theta_{\lambda,c}(x_\alpha(t)-ct)=\Theta(x_0)$。 $\alpha\mapsto J(x_0,\alpha)$ 的盖托可微性是显然的，并且对于任意 α， $h\in L^\infty$， $J(x_0,\cdot)$ 在 α 沿 h 方向的盖托导数为

$$\dot{J}(x_0,\alpha)[h]=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\Theta'_{\lambda,c}(x_\alpha(t)-ct)\left(\int_0^t h\right)-L'(\alpha)h\right)dt$$

我们引入伴随状态 $p_{\lambda,c,\alpha}$，它是下列方程的唯一解

$$\begin{cases}-p'_{\lambda,c,\alpha}=e^{-\lambda t}\Theta'_{\lambda,c}(x_\alpha(t)-ct)\,,\\ p_{\lambda,c,\alpha}(+\infty)=0.\end{cases}$$

因此 $J(x_0,\alpha)[h]$ 可改写为

$$\dot{J}(x_0,\alpha)[h]=\int_0^\infty\left(p_{\lambda,c,\alpha}-L'(\alpha)e^{-\lambda t}\right)h.$$

于是，一阶最优性条件为：

$$p_{\lambda,c,\alpha}=L'(\alpha).$$

让我们检查该条件是否对 $\alpha=\alpha$ 成立。

若 $\alpha=\alpha$，则 $\Theta_\lambda(x_\alpha(t)-ct)=\Theta_\lambda(x_0)$，由此我们推得

$$p_{\lambda,c,\alpha}(t)=\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Theta'_{\lambda,c}(x_0).$$

因此，我们只需验证

$$\Theta'_{\lambda,c}(x_0)=\lambda L'(c),$$

这由我们对行波的选取可知。 □

引理 4.2。对于任意 $k\in\mathrm{IN}$，存在一个常数 $\lambda_k(D)$，使得对于任意满足以下条件的 $\lambda>0$

$$\tilde{M}<\lambda$$

映射 $J_{\lambda,c}$ 关于 α 严格凹。

[1]临界性应理解为：对于任意扰动 $h\in L^\infty$， $J_{\lambda,c}$ 在 α 处沿方向 h 的盖托导数为零。

引理的证明 4.2。 与引理 4.1的证明类似，注意到 $J_{\lambda,c}$ 在任意 α 沿方向 h 的二阶盖托导数为

$$\ddot{J}(x_0,\alpha)[h,h]=\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\Theta''_{\lambda,c}(x_\alpha(t)-ct)\left(\int_0^t h\right)^2-L''(\alpha)h^2\right)dt.$$

由 Θ 所满足的方程以及 $c_k\leqslant 2\sqrt{f'(\eta)}$ 的事实可知，$\Theta''_{\lambda,c}$ 一致有界，因此存在常数 $\overline{M_k}>0$ 使得

$$\forall\lambda\in(0;\infty),\forall c\in(0;c_k(\lambda)),\|\Theta''_{c,\lambda}\|_{L^\infty}\leqslant M_k.$$

因此，对于任意 $\lambda>0$、任意 $c\in(0;c_k(\lambda))$、任意 α 及任意 h，我们有关于 $J_{\lambda,c}$ 的二阶导数的如下上界：

$$\ddot{J}(x_0,\alpha)[h,h]\leqslant M_k\int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\int_0^t h\right)^2dt-\underline{D}\int_0^\infty e^{-\lambda t}h^2(t)dt.$$

对于任意 $h\in L^\infty$，定义

$$v_h:t\mapsto\int_0^t h$$

从而前述不等式可改写为

$$\ddot{J}(x_0,\alpha)[h,h]\leqslant M_k\int_0^\infty e^{-\lambda t}v_h^2(t)dt-\underline{D}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(v_h')^2(t)dt.$$

然而，注意到，对于任意满足 $v(0)=0$ 的 $v\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$，我们有

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda t}v^2(t)dt&=\frac{2}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda t}v(t)v'(t)dt\\&\leqslant\frac{2}{\lambda}\sqrt{\int_0^\infty e^{-\lambda t}v^2(t)dt}\sqrt{\int_0^\infty e^{-\lambda t}(v')^2(t)dt}\end{aligned}$$

由此

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}v^2(t)dt\leqslant\frac{4}{\lambda^2}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(v')^2(t)dt.$$

由此我们得出

$$\ddot{J}(x_0,\alpha)[h,h]\leqslant\left(\frac{4M_k}{\lambda^2}-\underline{D}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t}(v')^2(t)dt.$$

因此，若选择 $\lambda>0$ 使得

$$4M_k<\underline{D}\lambda^2$$

且 M_k，D 不依赖于 λ，我们推得 $J_{\lambda,c}$ 在 α上为凹函数。因此，任何临界点都是最优点，由此可知 α 是（4.1）的最优解。 □

□

5 一般情形（定理2.2-2.3的证明）

根据引理1.8，我们知道，为使任意反向行波（Θ，$\mathcal{M}$）成为反向 MFG 行波，Θ 必须在 $\mathcal{M}$的支集上是仿射的。定理2.2-2.3 的证明都依赖于同一个核心思想，即将命题

$\tilde{\Theta}$ $\tilde{\mathcal{M}}$ 2 1，所给出的行波（$\tilde{\Theta}$ $\tilde{\mathcal{M}}$ 2 1，）与线性函数 Θ进行比较。这可以看作是对最优控制问题的某种线性化。

5.1 定理 2.2的证明

预备结果因此，设 $\lambda > 0$ 和 $0 < c < c_0(\lambda)$，并考虑命题2.1所给出的反向行波 $(\Theta, \mathcal{M})$。我们将 Θ 在线性延拓至 supp($\mathcal{M}$)之外定义为

$$\widetilde{\Theta} : s \mapsto (\lambda L'(c))s + \Theta(0), \tag{5.1}$$

我们引入辅助最优控制问题

$\sim$ $\sim\mathcal{V}(s_0) =$
上确界 $\mathcal{J}_0(s_0, \alpha)_{\alpha \in L^\infty(\mathrm{IR},\ \mathrm{IR})}$

$$\text{where for any } t_0 \geqslant 0 \quad \widetilde{\mathcal{J}}_{t_0}(s_0, \alpha) = \left(\int_{t_0}^{\infty} e^{-\lambda t} \left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(t)) - L(\alpha) \right) dt \right) \text{ with } \begin{cases} s'_\alpha(t) = \alpha(s_\alpha(t)) - c, \\ s_\alpha(t_0) = s_0, \end{cases}$$

引理 5.1. 假设 L 是凸的，且 $\mathscr{C}^1$。常值控制函数 $\alpha \equiv c$ 在 $\widetilde{}$ 中是最优的，这是 $\mathcal{V}$ 的定义。此外，对于任意 $s_0 \in \mathrm{IR}$,

$$\widetilde{\mathcal{V}}(s_0) = \frac{\widetilde{\Theta}(s_0) - L(c)}{\lambda}, \qquad whereby \qquad \widetilde{\mathcal{V}}' \equiv L'(c).$$

$\widetilde{}$证明。 注意到 $s \mapsto \Theta(s)$ 和 $\alpha \mapsto s_\alpha$ 是线性的，因此映射

$$\alpha \mapsto \int_0^{\infty} e^{-\lambda \xi} \tilde{\Theta}(s_\alpha(\xi)) d\xi$$

$\widetilde{}$也是线性的。由于 L 关于 α 凸， J 关于 α 凹。因此，要证明 c 是最优的 $\widetilde{}$控制，只需证明它是 $J(s_0, \cdot)$ 的临界点，这可由与引理 4.1完全相同的论证得出。 □

定理 2.2 的证明基于以下比较引理:

$\widetilde{}$**引理 5.2**。 设 $\lambda > 0$， $c \in (0; c_0(\lambda))$ 以及 $(\Theta, \mathcal{M})$ 由命题 2.1给出。设 Θ 由 (5.1)定义。对于任意 $s_0 \in \mathrm{IR}$、 $T > 0$ 以及任意 $\alpha \in L^\infty(\mathrm{IR})$，有

$$\widetilde{\mathcal{V}}(s_0) - \mathcal{J}_0(s_0, \alpha) \geqslant e^{-\lambda T} \left(\widetilde{\mathcal{V}}(s_\alpha(T)) - \mathcal{J}_T(s_\alpha(T), \alpha) \right) + \int_0^T e^{-\lambda t} \left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(t)) - \Theta(s_\alpha(t)) \right) dt,$$

其中 $\frac{d}{dt} s_\alpha(t) = \alpha(s_\alpha(t)) - c$ 且 $s_\alpha(0) = s_0$。

引理 5.2的证明。 利用常值控制 c 导出常值轨迹这一事实，以及 J的定义，我们得到

$$\widetilde{\mathcal{V}}(s_0) - \mathcal{J}_0(s_0, \alpha) = e^{-\lambda T} \left(\widetilde{\mathcal{V}}(s_0) - \mathcal{J}_T(s_\alpha(T), \alpha) \right) + \int_0^T e^{-\lambda t} \left(\widetilde{\Theta}(s_0) - L(c) - \Theta(s_\alpha(t)) + L(\alpha(s_\alpha(t))) \right) dt.$$

$\widetilde{}$ $\widetilde{}$回想一下， $\Theta(s_0) = \Theta(s) - \lambda L'(c)(s - s_0)$，我们得到

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\lambda t} \widetilde{\Theta}(s_0)\, dt &= \int_0^T e^{-\lambda t} \left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(t)) - \lambda L'(c)(s_\alpha(t) - s_0) \right) \Theta(s_0)\, dt \\ &= \int_0^T e^{-\lambda t} \widetilde{\Theta}(s_\alpha(t))\, dt + \left[e^{-\lambda t} L'(c)(s_\alpha(t) - s_0) \right]_0^T - \int_0^T e^{-\lambda t} L'(c)(\alpha(s_\alpha(t)) - c)\, dt \\ &= \int_0^T e^{-\lambda t} \widetilde{\Theta}(s_\alpha(t))\, dt + e^{-\lambda T} L'(c)(s_\alpha(T) - s_0) - \int_0^T e^{-\lambda t} L'(c)(\alpha(s_\alpha(t)) - c)\, dt. \end{aligned}$$

~ ~回想一下， $\mathcal{V}(s) = \mathcal{V}(s_0) + L'(c)(s - s_0)$，我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{V}}(s_0) - \mathcal{J}_0(s_0, \alpha) &= e^{-\lambda T}\left(\widetilde{\mathcal{V}}(s_\alpha(T)) - \mathcal{J}_T(s_\alpha(T))\right) + \int_0^T e^{-\lambda t}\left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(t)) - \Theta(s_\alpha(t))\right) dt \\ &\quad + \int_0^T e^{-\lambda t}\Big(L(\alpha(s_\alpha(t))) - L(c) - (\alpha(s_\alpha(t)) - c)L'(c)\Big)\, dt \\ &\geqslant e^{-\lambda T}\left(\widetilde{\mathcal{V}}(s_\alpha(T)) - \mathcal{J}_T(s_\alpha(T), \alpha)\right) + \int_0^T e^{-\lambda t}\left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(t)) - \Theta(s_\alpha(t))\right) dt,\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式是利用 L的凸性得到的。 □

现在我们可以证明定理 2.2。

定理 *2.2* 的证明。 对于固定的折扣因子 $\lambda > 0$，证明的关键在于证明：只要 c 足够小，常值控制函数 $\alpha \equiv c$ 就是（1.5）中的最优控制。更准确地说，我们将证明，对于足够小的 c，任意 $s_0 \in \text{supp}(\mathcal{M})$,

$$\widetilde{J}_0(s_0, c) - \sup_{\alpha \in L^\infty} J_0(s_0, \alpha) \geqslant 0. \tag{5.2}$$

~这一事实的证明依赖于与由 $\mathcal{V}$ 定义的辅助问题进行比较。引理 5.2是接下来分析中的一个重要论据。

令 $\lambda > 0$ 和 $c \in (0; c_0(\lambda))$，并考虑命题 ~ ~2.1 所给出的二元组（Θ， $\mathcal{M}$）。经过平移后，我们假设 $\inf(\text{supp}(\mathcal{M})) = 0$。定义 $\tilde{\Theta}$，使其满足（5.1），其中 $\tilde{\Theta}(0) = \Theta(0)$。

~ **$\tilde{\Theta}$ 与 Θ 之间的交集**定义

$$s_-(\lambda, c) := \sup\{s \leqslant 0\,, \tilde{\Theta}(s) < \Theta(s)\}.$$

根据构造， $\Theta''(0) < 0$，因此我们有

$$s_-(\lambda, c) < 0.$$

此外，根据构造可知

$$\widetilde{\Theta}(s) < \Theta(s) \text{ for } s < s_-(\lambda, c) \quad \text{and} \quad \widetilde{\Theta}(s) \geqslant \Theta(s) \text{ for } s \geqslant s_-(\lambda, c). \tag{5.3}$$

另外，为便于后文引用，我们指出 s_-具有以下两个显而易见的性质：

$$s_-(\lambda, c) \underset{c \to 0}{\to} -\infty\,, \Theta(s_-(\lambda, c)) \underset{c \to 0}{\to} 0. \tag{5.4}$$

这仅仅是（Θ， $\mathcal{M}$）的构造所导致的结果。事实上，由于 $c \to 0$， $\Theta'(c) = \lambda L'(c) \underset{c \to 0}{\to} 0$同样成立，且 $\inf(\text{supp}(\mathcal{M})) = s_{00}$ 其中 s_{00} 是曲线 Γ_0的唯一局部极大点，0是（$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 在（3.1）中的不稳定流形，当 $c = 0$。

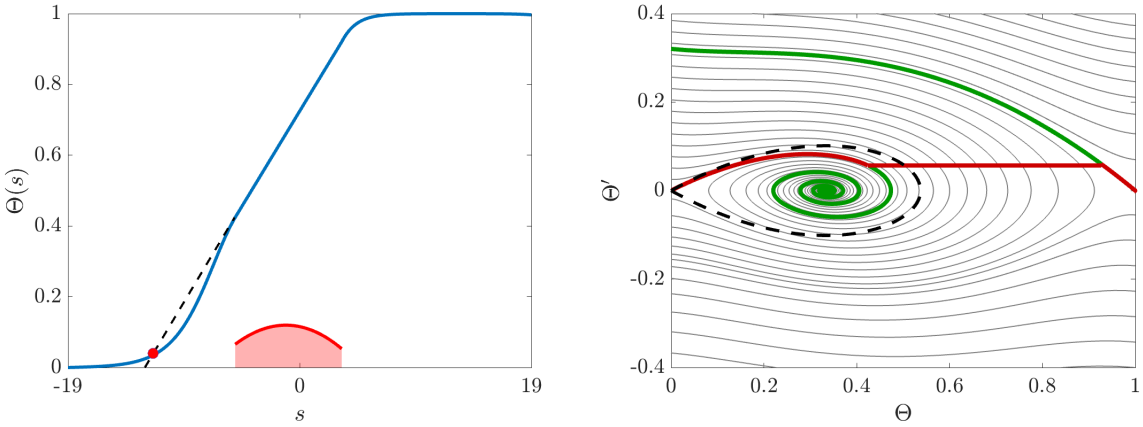

图5：（左）反向行波 Θ（蓝色）和 $\mathcal{M}$ （红色子图）；黑色虚线的斜率与 Θ 在 $\mathcal{M}$ 的支集中的斜率相同，红点表示 $s_-(\lambda, c)$；（右）左图所示行波对应的相平面表示。

容许控制类的限制 我们的目标是证明，对于任意 $s_0 \in \text{supp}(\mathcal{M})$，我们可以只研究满足以下条件的控制 α

$$\alpha \geqslant 0 \text{ a.e.}, \tag{5.5}$$

并且满足

$$\exists T_1 = T_1(\alpha), s_\alpha(T_1) = s_-(\lambda, c). \tag{5.6}$$

首先，Θ 是递增函数，且 0 是拉格朗日量 L 的最小值，因此，对于任意 α,

$$\forall s_0 \in \text{supp}(\mathcal{M}) \quad \mathcal{J}_0(s_0, \alpha_+) \geqslant \mathcal{J}_0(0, \alpha).$$

特别地，我们可以假设（5.5）成立。其次，假设最优控制 α 不满足（5.6）。在这种情况下，整个轨道 s_α 满足 $s_\alpha > s_-(\lambda, c)$，因此

$$\mathcal{J}_0(s_0, \alpha) \leqslant \widetilde{\mathcal{J}}_0(s_0, \alpha) \leqslant \widetilde{\mathcal{J}}_0(s_0, c) = \mathcal{J}_0(s_0, c),$$

由此我们得出 $\alpha \equiv c$ 在（1.5）中是最优的。因此，剩下要处理的唯一情况是满足（5.6）的控制 α。由（5.6），我们进一步推得可以将讨论范围限制在满足以下条件的控制 α

$$0 \leqslant \alpha < c \text{ in } (s_-(\lambda, c); s_0). \tag{5.7}$$

最后，这意味着，只需将 α 替换为 $\min(\alpha, c)$，我们就可以选择 α，使得

$$0 \leqslant \alpha < c \text{ in } \mathbb{R}. \tag{5.8}$$

因此，只需证明当上确界取遍控制函数α（其取值在 $[0, c]$内）时的 $T_1(\alpha) > 0$，并且存在 $s_\alpha(T_1(\alpha)) = s_-(\lambda, c)$，使得 $T_1(\alpha)$ 取为该方程的第一个根）。

在这种情况下，由于 s_α 关于 $[0$ 单调递减；$T_1(\alpha))$，我们可以将 $T_{1_2}(\alpha) \in (0; T_1(\alpha))$ 定义为方程 $s_\alpha(T_{1_2}(\alpha)) = s_-(\lambda,c)\,2$ 的唯一根。回想一下，由于 $s_0 \in \text{supp}(\mathcal{M})$，$J(s_0, c) = \widetilde{\mathcal{V}}(s_0)$。

~利用引理 5.2 及 $T = T_{\frac{1}{2}}(\alpha)$，并利用不等式 $\Theta(s_\alpha(t)) \geqslant \Theta(s_\alpha(t))$（对 $t \leqslant T_1(\alpha)$），可得

$$\mathcal{J}_0(s_0,c) - \mathcal{J}_0(s_0,\alpha) = \widetilde{\mathcal{V}}(s_0) - J_0(s_0,\alpha) \geqslant e^{-\lambda T_{\frac{1}{2}}(\alpha)} \left(\widetilde{\mathcal{V}}\left(s_\alpha\left(T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right)\right) - J_{T_{\frac{1}{2}}(\alpha)}\left(s_\alpha\left(T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right),\alpha\right)\right).$$

再次使用引理 5.2，s_0 替换为 $s_\alpha\left(T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right)$ 并将 T 替换为 $T_1(\alpha) - T_{\frac{1}{2}}(\alpha)$，我们得到 (5.9)

$$\widetilde{\mathcal{V}}\left(s_\alpha\left(T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right)\right) - \mathcal{J}_{T_{\frac{1}{2}}(\alpha)}\left(s_\alpha\left(T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right),\alpha\right) \geqslant e^{-\lambda\left(T_1(\alpha)-T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right)}\left(\widetilde{\mathcal{V}}(s_\alpha(T_1(\alpha))) - \mathcal{J}_{T_1(\alpha)}(s_\alpha(T_1(\alpha)),\alpha)\right)$$
$$+ \int_{T_{\frac{1}{2}}(\alpha)}^{T_1(\alpha)} e^{-\lambda\left(t-T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right)}\left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(t)) - \Theta(s_\alpha(t))\right) dt. \quad (5.10)$$

利用 $\alpha < c$，可以直接验证

$$\widetilde{\mathcal{V}}(s_\alpha(T_1(\alpha))) - \mathcal{J}_{T_1(\alpha)}(s_\alpha(T_1(\alpha)),\alpha) \geqslant -\lambda^{-1}L(c). \quad (5.11)$$

事实上，

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{V}}(s_\alpha(T_1(\alpha))) - \mathcal{J}_{T_1(\alpha)}(s_\alpha(T_1(\alpha)),\alpha) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(T_1(\alpha))) - \Theta(s_\alpha(T_1(\alpha)+t))\right) dt \\ &+ \int_0^\infty e^{-\lambda t}\left(-L(c) + L(\alpha(s_\alpha(T_1(\alpha))+t)\right) dt \\ &- \int_0^\infty e^{-\lambda t} L(c) dt = -\lambda^{-1}L(c).\end{aligned}$$

我们用到了以下事实：Θ 是递增的，$L \geqslant 0$，并且 $\alpha < c$。

结合式（5.9）-（5.10）-（5.11），我们得到

$$e^{\lambda T_{\frac{1}{2}}(\alpha)}(\mathcal{J}_0(s_0,c) - \mathcal{J}_0(s_0,\alpha)) \geqslant -\lambda^{-1}L(c)e^{-\lambda\left(T_1(\alpha)-T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right)} + \int_{T_{\frac{1}{2}}(\alpha)}^{T_1(\alpha)} e^{-\lambda\left(t-T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right)}\left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(t)) - \Theta(s_\alpha(t))\right) dt. \quad (5.12)$$

现在给出一个与 α无关的下界，该下界作用于（5.12）的右侧，其中 c 足够小。我们首先对指数 $\lambda\left(T_1(\alpha) - T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right)$进行下界估计。不等式 $\alpha \geqslant 0$意味着

$$\frac{s_-(\lambda,c)}{2} = s_\alpha(T_1(\alpha)) - s_\alpha(T_{\frac{1}{2}}(\alpha)) \geqslant -c\left(T_1(\alpha) - T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right)$$

由此可得

$$\begin{aligned}\frac{\Theta(0) - \Theta(s_-(\lambda,c))}{2} = \widetilde{\Theta}(s(T_{\frac{1}{2}}(\alpha))) - \widetilde{\Theta}(s(T_1(\alpha))) &= \lambda L'(c)\left(s(T_{\frac{1}{2}}(\alpha)) - s(T_1(\alpha))\right) \\ &\leqslant \lambda c L'(c)\left(T_1(\alpha) - T_{\frac{1}{2}}(\alpha)\right),\end{aligned}$$

因此

$$\lambda(T_1(\alpha) - T_{\frac{1}{2}}(\alpha)) \geqslant \frac{\Theta(0) - \Theta(s_-(\lambda,c))}{2cL'(c)}.$$

可以注意到，后一不等式的右侧与 α无关，但取决于 λ和 c。此外，回想一下，由（5.4） $s_-(\lambda, c) \underset{c\to 0}{\to} -\infty$， $\Theta(s_-(\lambda, c)) \underset{c\to 0}{\to} 0$. 另一方面，我们有

$$\lambda^{-1}L(c)e^{-\lambda(T_1(\alpha)-T_{\frac{1}{2}}(\alpha))} \leqslant \lambda^{-1}L(c)e^{-\frac{\Theta(0)-\Theta(s_-(\lambda,c))}{2cL'(c)}},$$

其中右侧与 α 无关，并且当 $c \to 0$ 时趋于 0。

另一方面，当 c 足够小时，我们有 $T_1(\alpha) - T_{\frac{1}{2}}(\alpha) \geqslant 1$。由于 s_α 递减，而 $\widetilde{\Theta}$ 和 Θ 递增，不等式 $e^{-x}(1+x) \leqslant 1 (\text{for } x \geqslant 0)$ 蕴含

$$\begin{aligned}\int_{T_{\frac{1}{2}}(\alpha)}^{T_1(\alpha)} e^{-\lambda(t-T_{\frac{1}{2}}(\alpha))}\left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(t)) - \Theta(s_\alpha(t))\right) dt &\geqslant \int_{T_{\frac{1}{2}}(\alpha)}^{T_{\frac{1}{2}}(\alpha)+1} e^{-\lambda(t-T_{\frac{1}{2}}(\alpha))}\left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(t)) - \Theta(s_\alpha(t))\right) dt \\ &\geqslant e^{-\lambda}\left(\widetilde{\Theta}(s_\alpha(T_{\frac{1}{2}}+1)) - \Theta(s_\alpha(T_{\frac{1}{2}}))\right) \\ &\geqslant e^{-\lambda}\left(\widetilde{\Theta}\left(\frac{s_-(\lambda,c)}{2}\right) - c\lambda L'(c) - \Theta\left(\frac{s_-(\lambda,c)}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

注意，最后一个不等式的右侧与 α 无关，并且当 $c \to 0$ 时收敛到 $e^{-\lambda}\frac{\Theta(0)}{2} > 0$。

结合后面的不等式与（5.12），我们得到

$$\begin{aligned}e^{\lambda T_{\frac{1}{2}}(\alpha)}(\mathcal{J}_0(s_0,c) - \mathcal{J}_0(s_0,\alpha)) &\geqslant -\lambda^{-1}L(c)e^{-\frac{\Theta(0)-\Theta(s_-(\lambda,c))}{2cL'(c)}} + e^{-\lambda}\left(\widetilde{\Theta}\left(\frac{s_-(\lambda,c)}{2}\right) - c\lambda L'(c) - \Theta\left(\frac{s_-(\lambda,c)}{2}\right)\right) \\ &> 0,\end{aligned}$$

当 c 足够小时，即对于某个 $c_1(\lambda) > 0$，有 $c \leqslant c_1(\lambda)$。这意味着 $\mathcal{J}_0(s_0,c) \geqslant V(s_0)$，从而得到 $\mathcal{J}_0(s_0,c) = V(s_0)$，且常值控制 c 是最优的。因此，$\widetilde{\ }(c, V, \mathcal{M}, \Theta)$ 确实是一个符合定义 1.4 的单调反向平均场博弈行波。

□

5.2 最大速度下的解（定理 2.3 的证明）

证明定理 2.3 的核心思路与处理定理2.2时所用的思路相似。回想一下，（5.4）是一个重要步骤；而在这里，我们将改用 $c \in (0; c_{\max})$，并令 $\lambda \to 0$。我们将看到，仍然有 $s_-(\lambda, c) \to -\infty$ 当 $\lambda \to 0$时成立，但在处理所需的各种估计时，我们需要格外谨慎。

定理 2.3 的证明。这里，我们考虑一个固定的 $c \in (0, c_{\max})$；首先选取足够小的折扣因子 λ，以确保 $c_0(\lambda) \geqslant c_{\max}$，并在证明过程中对其进行调整。经过平移后，我们仍设 $0 = \inf(\text{supp}(\mathcal{M}))$。回想一下，$c < c_{\max}$ 意味着 $\|\Gamma_{0,c}\|_{L^\infty} > L(c)$，$\widetilde{\ }$，因此存在 $r \in (0,1)$，使得 $(1-3r)\|\Gamma_{0,c}\|_{L^\infty} > L(c)$。还要回想一下，$\Theta_c(s_-(\lambda,c)) = \Theta_c(0) + s_-(\lambda,c)\lambda L'(c)$，并且 $\lambda \mapsto \Theta_c(0)$ 是一个递减函数，当 λ趋于零时，它收敛到 $\|\Gamma_{0,c}\|_{L^\infty}$。

这意味着

$$-\lambda s_-(\lambda,c) \underset{\lambda\to 0}{\to} \frac{\|\Gamma_{0,c}\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}{L'(c)}.$$

因此存在 $\lambda_r(c) > 0$，使得对于所有 $\lambda < \lambda_r(c)$，都有

$$\Theta_c(0) \geqslant (1-r)\|\Gamma_{0,c}\|_{L^\infty} \quad \text{and} \quad -\lambda s_-(\lambda,c) \leqslant 2\frac{\|\Gamma_{0,c}\|_{L^\infty}}{L'(c)}. \tag{5.13}$$

下文中，我们始终假设 $\lambda < \lambda_r(c)$。

定理的证明中类似的论证2.2 第 5.1 表明，只需证明（5.2），其中上确界取遍控制函数 α 满足 $0 \leqslant \alpha < c$ 且使得$s_-(\lambda, c)$在某个时刻 $T_1(\alpha) > 0$处达到，其中 $s_-(\lambda, c)$由（5.3）定义。令

$T_r(\alpha) > 0$ 使得 $s_\alpha(T_r(\alpha)) = rs_-(\lambda, c)$。利用 $s_0 \in \text{supp}(\mathcal{M})$ 中的引理 5.2，其中 $T = T_r(\alpha)$，$\widetilde{}$等式 $\mathcal{J}_0(s_0, c) = \mathcal{V}(s_0)$，以及对于 $t \leqslant T_r(\alpha)$，$\Theta(s_\alpha(t)) \geqslant \Theta(s_\alpha(t))$ 这一事实，可得

$$\mathcal{J}_0(s_0, c) - \mathcal{J}_0(s_0, \alpha) \geqslant e^{-\lambda T_r(\alpha)} \left(\widetilde{\mathcal{V}}(s_\alpha(T_r(\alpha)) - J_{T_r(\alpha)}(s_\alpha(T_r(\alpha)), \alpha) \right).$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
\lambda \widetilde{\mathcal{V}}(s_\alpha(T_r(\alpha))) &= \widetilde{\Theta}(s_\alpha(T_r(\alpha))) - L(c) \\
&= \Theta(0) + s_\alpha(T_r(\alpha))\lambda L'(c) - L(c) \\
&= \Theta(0) + rs_-(\lambda, c)\lambda L'(c) - L(c) \\
&\geqslant (1-r)\Theta_{0,\max}(c) + 2r\Theta_{0,\max}(c) - L(c) > 0,
\end{aligned}$$

$\widetilde{}$其中，第一行由引理 $\mathcal{V}$ 中的5.1的刻画得到，第二行来自 $\widetilde{}$的线性 Θ，第三行来自 $T_r(\alpha)$ 的定义，最后一行来自 r 和 (5.13) 的定义。

另一方面，利用 $\mathcal{J}$ 和 $T_r(\alpha)$ 的定义，以及 L 非负、 $\Theta \circ s_\alpha$ 递减这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}
\lambda \mathcal{J}_{T_r(\alpha)}(s_\alpha(T_r(\alpha)), \alpha) &= \lambda \int_{T_r(\alpha)}^{T_1(\alpha)} e^{-\lambda(t - T_r(\alpha))} \left(\Theta(s_\alpha(t)) - L(\alpha(s_\alpha(t)))\right) dt \\
&\qquad + \lambda \int_{T_1(\alpha)}^{\infty} e^{-\lambda(t - T_r(\alpha))} \left(\Theta(s_\alpha(t)) - L(\alpha(s_\alpha(t)))\right) dt \\
&\leqslant \lambda \int_{T_r(\alpha)}^{T_1(\alpha)} e^{-\lambda(t - T_r(\alpha))} \left(\Theta(s_\alpha(T_r(\alpha)))\right) dt + \lambda \int_{T_1(\alpha)}^{\infty} e^{-\lambda(t - T_r(\alpha))} \Theta(s_\alpha(T_1(\alpha))) \, dt \\
&\leqslant (1 - e^{-\lambda(T_1(\alpha) - T_r(\alpha))}) \Theta(s_\alpha(T_r(\alpha))) + e^{-\lambda(T_1(\alpha) - T_r(\alpha))} \Theta(s_\alpha(T_1(\alpha))) \\
&\leqslant \Theta(s_-(\lambda, c)) + \Theta(rs_-(\lambda, c)),
\end{aligned}$$

其中，最后一个右侧与 α 无关，并且当 λ 趋于 0 时收敛到 0。结合上述不等式，我们最终得到，

$$\lambda e^{-\lambda T_r(\alpha)} (\mathcal{J}_0(s_0, c) - \mathcal{J}_0(s_0, \alpha)) \geqslant (1 - 3r)\Theta_{0,\max}(c) - L(c) - \Theta(s_-(\lambda, c)) - \Theta(rs_-(\lambda, c)), \tag{5.14}$$

当 λ 足够小时，该式为正，且关于 α一致。这意味着 $J(s_0, c) \geqslant V(s_0)$，从而得到 $J(s_0, c) = V(s_0)$，并且常值控制 c 是最优的。因此，$\widetilde{}(\lambda, c, V, \mathcal{M}, \Theta)$ 确实是一个符合定义 1.4 意义下的单调反向平均场博弈行波。

□

备注 5.3。 定理 *2.5* 的证明中的一个关键点是，定理*2.3* 在某种意义上是“关于 L一致的”：具体来说，考虑 c 固定的情形，并使用记号 $s_-(L, \lambda)$ 而非 $s_-(\lambda, c)$，以强调 s_- 对 L的依赖。设两个拉格朗日量 L_1 和 L_2 以及两个折扣因子 λ_1， $\lambda_2 > 0$ 满足

$$L_1(c) = L_2(c) \text{ and } \lambda_1 L_1'(c) = \lambda_2 L_2'(c).$$

$\widetilde{}$显然，$\Theta_{c,\lambda_1,L_1} = \Theta_{c,\lambda_2,L_2}$ 且 $\Theta_{c,\lambda_1,L_1} = \Theta_{c,\lambda_2,L_2}$，因此 $s_-(L_1, \lambda_1) = s_-(L_2, \lambda_2)$。特别地，若选择 (r, λ_1) 使其满足 *(5.13)*，并且 *(5.14)* 右端对 $L = L_1$ 为正，则 (r, λ_2) 和 L_2 也满足相同的条件。特别地，三元组 (c, λ_1, L_1) 中 $\alpha \equiv c$ 的最优性意味着 (c, λ_2, L_2) 中 $\alpha \equiv c$ 的最优性。

6 定理 证明 2.5

定理 2.5的证明。第一步：定义 α_{co}。 我们首先需要引入拉格朗日量

$$L_1 : \alpha \mapsto \frac{\eta}{2}|\alpha|^2,$$

其中， η是 [0中的 f的唯一临界点； η]。 由于 $L_1(1) = \frac{\eta}{2}$， (3.25)保证 $c_{\max}(L_2) > 1$。 固定 $c = 1$， 根据定理 2.3， 存在 $\lambda_0 > 0$ ， 使得存在一个单调反向平均场博弈行波（$c, \lambda_0, \Theta, \mathcal{M}, \mathcal{V}$） ， 满足 supp $\mathcal{M} = [0, s_1]$。 现在我们可以将 α_{co} 定义为

$$\alpha_{\mathrm{co}} : (t, x) \mapsto \frac{x}{2s_1 + t}.$$

这意味着， 从 x_0 出发的 $\dot{x}_t = \alpha_{\mathrm{co}}(t, \ x_t)$的解是仿射的， 且可表示为

$$x_t = x_0 + \frac{x_0}{2s_1} t.$$

第二步：证明鱼类以 α_{co}入侵。我们将（m, θ）定义为下列方程的解

$$\begin{cases} \partial_t m + \partial_x(\alpha_{\mathrm{co}} m) = 0 \\ m(0, \cdot) = \mathcal{M}, \\ \partial_t \theta - \partial^2_{xx}\theta = f(\theta) - m\theta, \\ \theta(0, \cdot) = \Theta. \end{cases}$$

注意到

$$m(t, x) = \frac{2s_1}{2s_1 + t} \mathcal{M}\left(\frac{2s_1 + t}{2s_1} x\right).$$

对于任意 $\varepsilon > 0$ 和任意 $t \geqslant T_1(\varepsilon)$: $= \frac{2s_1}{(\|\mathcal{M}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} - \varepsilon)\ \varepsilon}$ ， 我们有

$$\|m(t, \cdot)\|_{L^\infty(R)} \leqslant \varepsilon.$$

这意味着在 $[T_1(\varepsilon) \ \infty)$ 上， θ 满足

$$\partial_t \theta - \partial^2_{xx}\theta \geqslant f(\theta) - \varepsilon\theta, \ \text{ with } \lim_{x \to -\infty} \theta(T_1(\varepsilon), x) = 0 \ \text{ and } \lim_{x \to \infty} \theta(T_1(\varepsilon), x) = 1$$

考虑非线性 f_ε： $[0, 1] \ni u \mapsto f$（u） $- \varepsilon u$。 当 $\varepsilon > 0$ 足够小时， f_ε 是一个双稳态非线性函数， 且 $\int_0^1 \tilde{f}_\varepsilon > 0$； 我们称 $(1 - \delta_\varepsilon)$ 为 f_ε 在 (0; 1) 中的最大根， 当 ε 趋于 0 时， 它趋于 1。利用最大值原理、 θ（T_1（ε） 的渐近行为以及定理 A， 我们推得当 $\varepsilon > 0$ 足够小时

$$\inf_{x \in \mathbb{R}_+} \lim_{t \to \infty} \theta(t, x) \geqslant r_\varepsilon,$$

其中 $r_\varepsilon \to 1$ 当 $\varepsilon \to 0$时。于是， 存在 $T_2(\varepsilon) > 0$ ， 使得对于任意 $t \geqslant T_2(\varepsilon)$,

$$\theta(t, \cdot) \geqslant 1 - 2\delta_\varepsilon \text{ in } \operatorname{supp}(m(t)) = [0, s_1 + \tfrac{t}{2}], \tag{6.1}$$

对于某个 δ ， 其取值将在后文确定。

第三步：令 $\lambda \to 0$ 并采用适当的拉格朗日量。 我们刚刚构造了 α_{co} ， 它会产生θ_{co} ， 使得鱼类在经过一段时间后开始入侵 $T_2(\varepsilon, \ \delta)$， 而这段时间可能很长。由于我们关注的是长时间尺度下的情形， 因此令 λ 趋于 0， 同时固定 $c = 1$ 和 θ 。回顾一下

$\theta'(0) = \lambda_0 L_1'(1)$，在不改变 θ 的情况下，降低 λ 的唯一方法是将拉格朗日量改为L_q ，其定义如下

$$L_q : \alpha \mapsto \frac{\eta}{2}|\alpha|^{2q} \quad \text{with} \quad q = \frac{\lambda_0}{\lambda},$$

对于任意 $\lambda \in (0; \lambda_0)$，我们有

$$L_{\frac{\lambda_0}{\lambda}}(1) = L_1(1)\,, \lambda L'_{\frac{\lambda_0}{\lambda}}(1) = \lambda_0 L_1'(1).$$

我们推得 $\Theta_{c=1,\lambda,L_{\frac{\lambda_0}{\lambda}}} = \Theta_{c=1,\lambda_0,L_1}$ 对任意 $\lambda \in (0; \lambda_0)$。因此，我们省略下标（$c, \lambda, L$）。注 5.3 意味着（$c = 1, \lambda, \Theta, \mathcal{M}$）是拉格朗日量$L_{\frac{\lambda_0}{\lambda}}$对应的反向 MFG 行波，对任意 $\lambda \in (0; \lambda_0)$ 。

按（1.11）定义 $\mathcal{V}_\lambda$，我们推得（$1, \lambda, \mathcal{V}_\lambda, \mathcal{M}, \Theta$）同样是反向 MFG 行波。另一方面，回顾一下，对于 $x \in [0, s_1] = \text{supp}(\mathcal{M})$，利用 $L_q(1) = \frac{\eta}{2}$，我们有

$$\mathcal{V}_\lambda(x) = \lambda^{-1}(\Theta(x) - \tfrac{\eta}{2}) \leqslant \lambda^{-1}(\Theta(s_1) - \tfrac{\eta}{2}).$$

另一方面，令 λ 趋于零，我们有

$$J(\alpha_{\text{co}}, x, \theta) \geqslant \lambda^{-1}(1 - 2\delta) + \psi_\lambda, \quad \text{with} \quad \psi_\lambda = o(\lambda^{-1}).$$

因此，综上所述，只需取 ε 足够小，使得（$1 - 2\delta_\varepsilon$） $> \Theta$（s_1），并取 λ 足够小，使得 $\lambda\psi_\lambda < 1 - 2\delta_\varepsilon - \Theta$（$s_1$） $+ \frac{\eta}{2}$。 □

7 定理的证明 2.8

正如我们在引言中概述的，定理 2.8 的证明与定理2.2的证明非常相似，因此我们只需强调主要区别；这些区别都源于剖面的非单调性 Θ。

在本节余下部分中，我们固定一个整数 $k \in \mathbb{N}^*$ 以及由命题 $\Theta, \mathcal{M}$)2.7给出的一对 Θ ，使得 k 有 $\mathcal{M}$ 个局部极大值，且 $\mathcal{M}$的支集是一个区间。经过平移后，supp($= [0)\ s_1]$；我们先给出两个预备结果。

值函数 Lipschitz 常数的控制 我们首先估计值函数 $\mathcal{V}$ （回顾一下，它是用相似变量表示的值函数）的 Lipschitz 常数。

引理 7.1。 对于任意 $\lambda > 0$和 $c \in (0; c_k(\lambda))$，令 $(\Theta, \mathcal{M})$ 为命题 2.7所给出。令$\mathcal{V}$ 为相应的值函数。那么， $\mathcal{V}$ 是 *Lipschitz* 连续的，其 *Lipschitz* 常数不超过 $\lambda^{-1}\|\Theta'\|_\infty$。

证明。 对于任意 ε_1， $\varepsilon_2 > 0$，定义 H_{ε_2} 为

$$H_{\varepsilon_2}(p) = \rho_{\varepsilon_2} \star H,$$

其中 $\rho_{\varepsilon_2}(p) = \varepsilon_2^{-1}\rho(\frac{p}{\varepsilon_2})$， ρ 是一个支集包含于 $[-1, 1]$ 中的光滑偶函数，并令 $\mathcal{V}_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$ 为下式的唯一解

$$\lambda\mathcal{V}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} - \varepsilon_1\mathcal{V}''_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} + c\mathcal{V}'_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} - H_{\varepsilon_2}(\mathcal{V}'_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}) = \Theta. \tag{7.1}$$

注意，由于 H 是 Lipschitz 连续的， H_{ε_2} 也是 Lipschitz 连续的，且其 Lipschitz 常数关于 $\varepsilon_2 \to 0$一致。

1. L^∞关于$\mathcal{V}_{\varepsilon_1}$的有界性，$\varepsilon_2$。将（7.1）改写为

$$\lambda\mathcal{V}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}-\varepsilon_1\mathcal{V}''_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}+\left(c-\int_0^1 H'_{\varepsilon_2}(s\mathcal{V}'_{\varepsilon_1,\varepsilon_2})ds\right)\mathcal{V}'_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=\Theta+H_{\varepsilon_2}(0).$$

由于 H 非负， H_{ε_2}也非负。此外，回想一下 $H(0)=0$，因此对任意足够小的 ε_2， $H_{\varepsilon_2}(0)\leqslant 1$。最后，回想一下 $0\leqslant\Theta\leqslant 1$。最大值原理推出

$$0\leqslant\mathcal{V}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\leqslant 2\lambda^{-1}.$$

2. L^∞-界于 $\mathcal{V}'_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$ 对（7.1）求导，得到

$$\lambda\mathcal{V}'_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}-\varepsilon_1\mathcal{V}'''_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}+(c-H'_{\varepsilon_2}(\mathcal{V}'_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}))\mathcal{V}''_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}=\Theta'.$$

由于 H'_{ε_2} 和 Θ' 是 H¨older 连续的，标准椭圆估计推出 $\mathcal{V}_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}$ 是 C^3。最大值原理给出

$$\|\mathcal{V}'_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}\|_\infty\leqslant\lambda^{-1}\|\Theta'\|_\infty. \tag{7.2}$$

3. 取极限 $\varepsilon_2\to 0$， $\varepsilon_1\to 0$。回想一下 H 是 Lipschitz 连续的，因此 H_{ε_2} 关于 ε_2具有一致的 Lipschitz 常数。由椭圆正则性，对任意 ε_1， $\varepsilon_2>0$， $\mathcal{V}_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2}\in C^{2+\beta}$，存在某个 $\beta>0$，且关于 ε_2一致。因此，我们可以提取一个$\mathscr{C}^2_{\text{loc}}$-收敛子列，当 $\varepsilon_2\to 0$时。将极限代入（7.1），可见极限$\mathcal{V}_{\varepsilon_1}$是下列方程的解

$$\lambda\mathcal{V}_{\varepsilon_1}-\varepsilon_1\mathcal{V}''_{\varepsilon_1}+c\mathcal{V}'_{\varepsilon_1}-H(\mathcal{V}'_{\varepsilon_1})=\Theta.$$

根据粘性解理论中的标准结果， $\mathcal{V}_{\varepsilon_1}$ 以 $\mathscr{C}^0_{\text{loc}}$收敛于 $\mathcal{V}$，其中$\mathcal{V}$ 是以下方程的唯一粘性解

$$\lambda\mathcal{V}+c\mathcal{V}'-H(\mathcal{V}')=\Theta.$$

对任意 s， $r\in$ IR，令 $\varepsilon_2\to 0$ 在（7.2）中趋于极限，最终得到

$$\mathcal{V}_{\varepsilon_1}(s)-\mathcal{V}_{\varepsilon_1}(r)-\lambda^{-1}\|\Theta'\|_\infty|s-r|\leqslant 0.$$

取极限 $\varepsilon_1\to 0$ 即可完成证明。

□

当 $c\to 0$ 时的收敛结果：我们现在研究$\Gamma_{0,\ c}$ 在c较小时的渐近行为。

引理 7.2. 取 $k\in$ IN* 和 $c>0$。不妨设经过平移后，$\Gamma_{0,\ c}(0)$ 是$\Gamma_{0,\ c}$的 k^{th} 局部最大值。当 $c\to 0$ 时， $\Gamma_{0,\ c}$ $\mathscr{C}^1_{\text{loc}}$收敛于$\Gamma_{0,\ 0}$；其中经过平移后，$\Gamma_{0,\ 0}$ 在 $s=0$处取得其全局最大值。

引理 7.2 的证明。 根据常微分方程的解关于其参数的连续性，只需证明（回顾（3.12））

$$\Gamma_{0,\max}(c)\underset{c\to 0}{\to}\Gamma_{0,\max}(0). \tag{7.3}$$

然而，借鉴引理3.4 的论证，我们看到$c\mapsto\Gamma_{0,c}(0)$ 单调不减。特别地，我们推得 $\Gamma_{0,c}(0)\to\ell_0$ 当 $c\to 0$时，其中 $\ell_0>0$。根据 Schauder 估计，$\Gamma_{0,c}$在 $\mathscr{C}^1{}_{\text{loc}}$(IR) 中收敛到同一方程的一个解 γ_0，该方程与 $\Gamma_{0,0}$ 满足的方程相同，且 $\gamma_0'(0)=0,\gamma_0(0)>0$。由此可得 $\gamma_0=\Gamma_{0,0}$，并且 $\ell_0=\Gamma_{0,\max}(0)$。

□

现在我们可以证明定理 2.8。

定理的证明 *2.8*。本证明中的大部分论证将重复定理 2.2的证明。因此，我们只需着重指出其中的主要差异。

令 $\lambda > 0$ 和 $c \in (0, c_k(\lambda))$，并考虑命题2.7所给出的二元组 $(\Theta, \mathcal{M})$。不失一般性，经过平移后，我们假设 $\inf(\text{supp}(\mathcal{M})) = 0$。根据引理 7.1，存在 $c < 0$，使得最优控制 α^* 满足先验估计 $\alpha^* \geqslant c$。利用定理 2.2 中证明过程中所用的类似论证

$$\underline{c} \leqslant \alpha < c, \tag{7.4}$$

且满足 $T_1(\alpha) < \infty$，其中 $T_1(\alpha)$、$s_-(\lambda, c)$ 和 Θ 的定义与定理2.2的证明中相同。定义 $T(\alpha)$ 如下：

$$\overline{T}(\alpha) = \inf\left\{t \geqslant 0, \Theta(s_\alpha(t)) = \frac{\Gamma_{0,\max}(0)}{2}\right\}.$$

我们像定理 2.2 中那样得到，

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathcal{V}}(s^\alpha(\overline{T}(\alpha))) - J(s^\alpha(\overline{T}(\alpha)), \alpha) \geqslant e^{-\lambda(T_1(\alpha)-\overline{T}(\alpha))}\Big(\widetilde{\mathcal{V}}(s^\alpha(T_1(\alpha))) - J(s^\alpha(T_1(\alpha)), \alpha)\Big) \\ + \int_{\overline{T}(\alpha)}^{T_1(\alpha)} e^{-\lambda(t-\overline{T}(\alpha))}\Big(\widetilde{\Theta}(s^\alpha(t)) - \Theta(s^\alpha(t))\Big)\, dt.\end{aligned}$$

然后，注意到

$$\widetilde{\mathcal{V}}(s_\alpha(T_1)) \geqslant -\lambda^{-1}L(c) \text{ and } J(s_\alpha(T_1)) \leqslant \lambda^{-1}.$$

这意味着

$$e^{\lambda\overline{T}(\alpha)}(J(s_0, c) - J(s_0, \alpha)) \geqslant -\lambda^{-1}(1+L(c))e^{-\lambda(T_1-\overline{T})} + \int_{\overline{T}(\alpha)}^{T_1(\alpha)} e^{-\lambda(t-\overline{T}(\alpha))}\Big(\widetilde{\Theta}(s^\alpha(t)) - \Theta(s^\alpha(t))\Big)\, dt.$$

注意到

$$T_1 - \overline{T} \geqslant \frac{\Gamma_{0,\max}(0) - 2s_-(\lambda, c)}{2(c - \underline{c})},$$

其中 $\lim_{c\to 0} s_-(\lambda, c) = -\infty$ 利用引理 7.2。这意味着

$$\begin{aligned}e^{\lambda\overline{T}}(J(s_0, c) - J(s_0, \alpha)) &\geqslant -\lambda^{-1}(1 + L(c))e^{-\lambda(T_1-\overline{T})} + \int_{\overline{T}}^{\overline{T}+1} e^{-\lambda(t-\overline{T}(\alpha))}\Big(\widetilde{\Theta}(s^\alpha(t)) - \Theta(s^\alpha(t))\Big)\, dt \\ &\geqslant -\lambda^{-1}(1 + L(c))e^{-\lambda(T_1-\overline{T})} + e^{-\lambda}\frac{\Gamma_{0,\max}(0)}{4},\end{aligned}$$

其中最后一行是在 c 足够小时得到的。接下来即可轻松得出结论。

□

8 结论与开放问题

在这项工作中，我们提出了一种关于公地悲剧的 MFG-TW 方法。在转向开放性问题和进一步讨论之前，我们想先评论一个方面：贯穿全文，我们考虑了双稳态非线性，用于建模（强）阿利效应。空间生态学中的其他非线性同样至关重要，其中最值得注意的是单稳态非线性。我们想讨论的第一个问题是，是否可能

将我们的结果推广到这一情形（或探讨实现这一推广的障碍）。如果我们考虑单稳态非线性 f: $[0;\ 1] \to \mathrm{IR}$，且满足 $f(0) = f(1) = 0$，$f > 0$ 在 $(0;\ 1)$ 内，并且满足 $f'(0) > 0$，则无法构造反向行波，这一点从相应的相图中可以轻易推断出来。然而，如果 $f'(0) = 0$（这种情形通常称为 退化单稳态，用于建模弱阿利效应），对相图进行细致研究表明，可以构造反向行波，并且可以得到与定理2.4类似的结论。总体而言，因此至少在范式层面上，正是阿利效应与捕捞博弈结构的结合驱使种群走向灭绝。

同样需要注意的是，定理2.4的结论与非线性的精确形状无关，只要能够构造出具有有界二阶导数的反向行波即可（当然，正如上文所解释的，对于非退化单稳态非线性而言，情况并非如此）。

一些从应用角度来看与其重要、从数学角度来看似乎越是难以解决的问题仍然悬而未决。其中最主要的三个问题如下：

1. 第一个问题是我们得到的反向 MFG 行波的稳定性。关于双稳态传播前沿的行波稳定性，大多数证明都依赖于偏微分方程的某种特定结构（通常是变分结构，见 [GR07，Ris08] 中的一般方法。另请参见 [VVV94，第 5]章）。在这里，应当采取何种方法尚不清楚，但确定反向 MFG 行波是否具有（局部或全局）稳定性是一个相当重要的问题。

2. 让我们强调一个与公地悲剧相关的观点：我们展示了一种特定的协调策略，它在整体上优于 MFG 的最优策略，同时确保鱼类种群得以存续。然而，这一结论是在拉格朗日量取特定形式时证明的。一个自然的问题是：对于固定的拉格朗日量 L，当折扣因子 $\lambda > 0$ 足够小时，是否总存在一种协调策略，既不会导致鱼类种群灭绝，又能保证每位玩家实际捕获的鱼都多于其在竞争环境中所能捕获的数量？我们相信答案是肯定的，但目前还无法给出证明。

3. 最后，我们来谈谈政府对捕捞的法规。政府通常会对捕获量施加限制，以避免过度捕捞，也可以禁止在某些保护区内捕捞。这引出了两个在性质上很重要的问题：首先，政府应当实施哪些法规，才能排除这些反向 MFG 行波？其次，在构造反向 MFG 行波时，每位渔民都在 0 与 1 之间的过渡区域捕捞；如果他们在前沿后方（$\Theta \approx 1$）捕捞，就能捕获同样多的鱼，同时又不会导致鱼类灭绝。那么，在设计“禁捕区”方面，哪些策略最为有效？

参考文献

[ALNP22] Luis Almeida、Alexis L´eculier、Gr´egoire Nadin 和 Yannick Privat。双稳态行波的最优控制：寻找杀灭作用的空间分布以阻止害虫入侵。工作论文或预印本，2022年10月。[BCS13] Alberto Bressan、Giuseppe Maria Coclite 和 Wen Shen。具有测度值解的多维最优收获问题。*SIAM* 控制与优化杂志，51(2):1186–1202，2013年1月。

[BCS22] Alberto Bressan、Maria Teresa Chiri 和 Najmeh Salehi。关于传播前沿的最优控制。《应用科学中的数学模型与方法》，32(06):1109–1140，2022年6月。[BFY13] Alain Bensoussan、Jens Frehse 和 Phillip Yam。《平均场博弈与平均场型控制理论》。Springer New York，2013年。[BI97] M Bardi 和 Capuzzo Dolcetta I。《Hamilton-Jacobi-Bellman 方程的最优控制与粘性解》。Modern Birkhäuser Classics。Birkhauser Boston，美国新泽西州锡考克斯，1990年版，1997年12月。[BLW17] Martin Burger、Alexander Lorz 和 Marie-Therese Wolfram。知识增长玻尔兹曼平均场博弈模型的平衡增长路径解。Kinetic & Related Models，10(1):117–140，2017年。[BN06] BBC新闻。“海洋鱼类只剩50年”。http://news.bbc.co.uk/2/hi/science/nature/6108414.stm，2006年。[BN08] BBC新闻。“渔业浪费造成数十亿损失”。http://news.bbc.co.uk/1/hi/sci/tech/7660011.stm，2008年。[BN12] BBC新闻。全球鱼类资源遭到如此严重的开发或耗竭，如果不采取紧急措施，我们可能会成为最后一代能够从海洋捕捞食物的人。https: // www.bbc.com/future/article/20120920-are-we-running-out-of-fish，2012年。[CC03] R. S. Cantrell 和 C. Cosner。《反应扩散方程与空间生态学》。John Wiley & Sons，2003年。[CDLL19] Pierre Cardaliaguet、Fran¸cois Delarue、Jean-Michel Lasry 和 Pierre-Louis Lions。《平均场博弈中的主方程与收敛问题》。Princeton University Press，2019年8月。[CG17] G. M. Coclite 和 M. Garavello。具有测度值解的含时最优捕捞问题。SIAM 控制与优化杂志，55(2):913–935，2017年1月。[COH+12] Christopher Costello、Daniel Ovando、Ray Hilborn、Steven D Gaines、Olivier Desch- enes 和 Sarah E Lester。全球未评估渔业的现状与解决方案。《科学》，338(6106):517–520，2012年。[DB12] Trevor D Davies 和 Julia K Baum。灭绝风险与过度捕捞：协调海洋鱼类现状的保护与渔业视角。《科学报告》，2(1):1–9，2012年。[Fif79] Paul C Fife。《反应扩散系统的数学方面》。生物数学讲义。Springer，德国柏林，1979年3月。[Fis37] R. A. Fisher。有利基因的扩散波。《优生学年鉴》，7(4):355–369，1937年。[FM77] Paul C. Fife 和 J. B. McLeod。非线性扩散方程的解趋近于行波前沿解。《理性力学与分析档案》，65(4):335–361，1977年12月。

[GGHR12] Jimmy Garnier、Thomas Giletti、Fran¸cois Hamel 和 Lionel Roques。拉开型与推动型前沿的内部动力学。《纯粹与应用数学杂志》，98(4):428–449，2012年10月。[GR07] Thierry Gallay 和 Emmanuel Risler。双稳态行波全局稳定性的一个变分证明。《微分与积分方程》，20(8)，2007年1月。[Har09] Garrett Hardin。公地悲剧。《自然资源政策研究杂志》，1(3):243–253，2009年。[HB01] Lawrence C Hamilton 和 Melissa J Butler。外港地区的适应：纽芬兰鳕鱼危机中的社会指标。《人类生态学评论》，第1–11页，2001年。[HCM07] Minyi Huang、Peter E. Caines 和 Roland P. Malham´e。具有非均质主体的大规模群体成本耦合LQG问题：个体质量行为与去中心化 ϵ-纳什均衡。IEEE自动控制汇刊，52(9):1560–1571，2007年。[HMC06] Minyi Huang、Roland P. Malham´e 和 Peter E. Caines。大规模随机动态博弈：闭环McKean-Vlasov系统与纳什确定性等价原理。《通信、信息与系统》，6(3):221–251，2006年。[KMFRB23] Z. Kobeissi、I. Mazari-Fouquer 和 D. Ruiz-Balet。渔业管理中的均值场博弈问题。准备中，2023年。[KPP37] A. Kolmogorov、I. Pretrovski 和 N. Piskounov。´关于´带有物质量增长的扩散´方程的研究及其在一个`生物学问题中的应用`。莫斯科大学数学通报，1:1–25，1937年。[Lio06] Pierre-Louis Lions。´平均场博弈`理论。法国学院视频讲座系列，2006年。https://www.college-de-france.fr/site/pierre-louis-lions/index.htm。[LL06a] Jean-Michel Lasry 和 Pierre-Louis Lions。平均场博弈`I. 平稳情形。《巴黎科学院数学报告》，343(9):619–625，2006年。[LL06b] Jean-Michel Lasry 和 Pierre-Louis Lions。平均场博弈`II. 有限时域与最优控制。《巴黎科学院数学报告》，343(10):679–684，2006年。[LL07] Jean-Michel Lasry 和 Pierre-Louis Lions。平均场博弈。《日本数学杂志》，2(1):229–260，2007年。[Llo33] William Forster Lloyd。关于人口制约因素的两次讲座。1833年。[MHGW18] Ruaraidh McPike、Mike Heath、Michael Grinfeld 和 Marie-Therese Wolfram。鱼类资源开发的一个均场博弈表述。在葡萄牙数学学会全国会议，ENSPM 2018；会议日期：2018年7月9日至2018年7月11日，2018年7月。[MRB22] Idriss Mazari 和 Dom`enec Ruiz-Balet。空间生态学、最优控制与博弈论渔业问题。《数学生物学杂志》，85(5)，2022年10月。[Per07] Beno$\hat{}$ıt Perthame。《生物学中的输运方程》。Birkh¨auser Basel，2007年。[Pik12] Ellen K Pikitch。过度捕捞的风险。《科学》，338(6106):474–475，2012年。

[PJRP11] Malin L Pinsky、Olaf P Jensen、Daniel Ricard 和 Stephen R Palumbi。世界海洋中渔业崩溃的意外模式。美国国家科学院院刊，108(20):8317–8322，2011年。[PR22] Alessio Porretta 和 Luca Rossi。非局部KPP方程与知识扩散均值场博弈模型的行波。《《亨利·庞加莱研究所 ′C，非线性分析 ′》，2022年3月。[PRV21] George Papanicolaou、Lenya Ryzhik 和 Katerina Velcheva。均值场学习模型中的行波。非线性，34(10):6799–6842，2021年8月。[QC19] Cong Qin 和 Xinfu Chen。知识扩散与增长模型的平衡增长路径解。*SIAM*金融数学杂志，10(1):130–155，2019年1月。[Ris08] Emmanuel Risler。具有梯度结构的非线性抛物型系统中向行波前沿的全局收敛。《《亨利·庞加莱研究所 ′C，非线性分析 ′》，25(2):381–424，2008年4月。[VVV94] Aizik Volpert、Vitaly Volpert 和 Vladimir Volpert。抛物型系统的行波解。美国数学学会，1994年10月。[WB12] Boris Worm 和 Trevor A Branch。鱼类的未来。生态学与进化趋势，27(11):594–599，2012年。[WBB+06] Boris Worm、Edward B. Barbier、Nicola Beaumont、J. Emmett Duffy、Carl Folke、Benjamin S. Halpern、Jeremy B. C. Jackson、Heike K. Lotze、Fiorenza Micheli、Stephen R. Palumbi、Enric Sala、Kimberley A. Selkoe、John J. Stachowicz 和 Reg Watson。生物多样性丧失对海洋生态系统服务的影响。《科学》，314(5800):787–790，2006年11月。