arXiv:2303.01366v1 [math.LO] 2 Mar 2023

猜测模型、树与基数算术

CHRIS LAMBIE-HANSON 和 ˇS ´ARKA STEJSKALOV ´A

Abstract. 自 Viale 和 Weiß 于 2009年提出猜测模型性质以来，它已成为适当强迫公理一个尤为重要且强有力的推论。在本文中，我们广泛探讨猜测模型性质的各种变体与基数算术之间的联系。我们改进了 Viale 和 Krueger 的结果，证明猜测模型性质的一个弱化版本蕴含 Shelah 的强假设。我们还证明，尽管已知猜测模型性质无法为连续统的大小设定上界，但它确实蕴含 2^{ω_1} 相对于 2^{ω} 的取值尽可能小。基于 Laver 的工作，我们证明，在任意 PFA 模型经测度代数扩张后，每个高度和大小均为 ω_1 的树都是 B-特殊的（这是 Baumgartner 引入的特殊性的推广，也适用于具有不可数分支的树）。最后，我们考察针对苏斯林树和几乎苏斯林树的强迫公理对猜测模型性质的影响。具体而言，我们证明，若 S 是一棵苏斯林树，则公理 PFA(S) 和 PFA(S)[S] 分别蕴含猜测模型性质和不可摧毁猜测模型性质；若 T^* 是一棵几乎 Suslin 的 Aronszajn 树，则公理 PFA(T*) 蕴含不可摧毁猜测模型性质。这回答了 Cox 和 Krueger 提出的若干问题。

Contents

1. 引言 2 1.1. 符号与术语 4 2. 双基数组合学与猜测模型背景 4 2.1. 双基数组合学 5 2.2. 猜测模型 5 3. 弱 Kurepa 假设与基数算术 6 4. 猜测模型与基数算术 9 4.1. 覆盖矩阵 9 4.2. 猜测模型与相交数 12 4.3. 伪幂 15 5. 特殊树与随机实数 16 6. 关于苏斯林树与几乎苏斯林树的强迫公理 22 6.1. 苏斯林树 23 6.2. 几乎苏斯林树 29 参考文献 31

2010 *Mathematics Subject Classification.* 03E55, 03E35。*Key words and phrases.* 猜测模型、基数算术、弱 Kurepa 假设、交数、奇异基数假设、Shelah 强假设、特殊树、随机实数、PFA(S)[S]，相干苏斯林树。两位作者均获捷克科学院（RVO 67985840）和 GAˇCR 项目 23-04683S 资助。

1. Introduction

集合论中有一条悠久的研究脉络，至少可追溯至20世纪70年代，关注某些大基数的组合性质在较小基数处能够以何种程度一致地成立，以及这些性质所带来的后果与蕴含关系。这类性质的经典例子包括平稳反射原理和树性质；近年来尤为引人注目的是双基数树性质，其最强形式可以很方便地改述为猜测模型原理。

双基数树性质的研究始于 Jech [7] 和 Magi- dor [16], 的工作，他们分别利用这些性质对强紧基数和超紧基数给出了组合刻画。最早由 Weiß [32] 在21世纪初提出了与小基数相容的双基数树性质版本。此后，人们为理解这些原理开展了大量研究。在 [31], Viale 和 Weiß 证明，最强的双基数树性质ISP可以改述为存在猜测模型；事实证明，这种改述对于推导双基数树性质的推论相当有效。Viale 和 Weiß 还证明，在 ω_2成立的猜测模型性质等价于ISP_{ω_2}，通常简称为GMP，可由适当强迫公理（PFA）推出。

在本文中，我们继续研究双基数树性质和猜测模型原理，尤其关注它们与广义理解下的基数算术之间的关系。在这一方向上，人们已经开展了相当多的研究。值得注意的是，Viale [30] 和 Krueger [9] 的结果表明，GMP 蕴含奇异基数假设（SCH）；更一般地，对于任意正则基数$\kappa \geq \omega_2$，ISP_κ 蕴含 κ以上的 SCH。另一方面，Cox 和 Krueger 在 [2] 中证明，与 PFA 不同，GMP 除了蕴含 $2^\omega > \omega_1$之外，不会对连续统的取值施加任何限制。

在本文的第一部分，我们继续沿着这些研究方向展开。具体而言，我们证明，对于一个正则基数 $\kappa \geq \omega_2$，ISP_κ的某种弱化形式蕴含 κ以上的 Shelah 强假设（SSH）。这通过弱化假设并加强结论，改进了 Viale 和 Krueger 的上述结果。（定理 A 陈述中的术语和记号将在后续各节中介绍；现在我们指出，该定理的假设是 ISP_κ的一种弱化形式。）

定理 A. 设 $\kappa \geq \omega_2$ 是一个正则基数，并且对于每个余终性为可数的奇异基数 $\lambda > \kappa$，令

$$\mathcal{Y}_\lambda := \{M \in \mathscr{P}_\kappa H(\lambda^{++}) \mid M \text{ is } (\omega_1, \lambda)\text{-internally unbounded}\}.$$

如果对所有此类 λ，$\mathrm{wAGP}_{\mathcal{Y}_\lambda}(\kappa, \kappa, \lambda^{++})$ 都成立，那么在 κ 之上，SSH 成立。

在证明定理 A 的过程中，我们改进了 Viale [29]关于覆盖性质的一些结果。特别是，在 [29] 和 [30], 中，Viale 证明了 PFA 的若干推论（包括 GMP）蕴含了所有大于 2^ω、余终性为可数的奇异基数处的某些覆盖性质。这里，我们进一步改进这一结果，去除了奇异基数大于连续统这一假设。关于更精确的表述，请参见下文定理 4.12 ；实现这一改进的主要新技术引理是引理 4.6。

根据 Cox 和 Krueger 的工作， [2], GMP 与 $\mathrm{cf}(2^\omega) = \omega_1$ 相容，因此不同于 PFA，甚至不同于 MA_{ω_1}，它并不蕴含 $2^{\omega_1} = 2^\omega$。然而，

作为定理 A 证明的推论，我们能够证明，GMP 的弱化蕴含 2^{ω_1} 相对于 2^{ω} 的值而言尽可能小。此外，我们还证明，弱 Kurepa 假设的否定（¬wKH）是同一 GMP 弱化的一个推论；当 $2^{\omega} < \aleph_{\omega_1}$ 时，它会导出相同的结论，但当 $2^{\omega} \geq \aleph_{\omega_1}$ 时，则可能相容地不导出该结论。

定理 B。 *(1)* 如果 wAGP(ω_2) 成立，并且对所有具有可数余终性的奇异$\lambda < 2^{\omega}$，wAGP$_{\mathcal{Y}_\lambda}(\lambda^{++})$ 成立，其中

$$\mathcal{Y}_\lambda := \{M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\lambda^{++}) \mid M \textit{ is } (\omega_1, \lambda)\textit{-internally unbounded}\},$$

then

$$2^{\omega_1} = \begin{cases} 2^{\omega} & \textit{if } \mathrm{cf}(2^{\omega}) \neq \omega_1 \\ (2^{\omega})^{+} & \textit{if } \mathrm{cf}(2^{\omega}) = \omega_1. \end{cases}$$

(2) 如果 ¬wKH 成立且 $2^{\omega} < \aleph_{\omega_1}$，那么 $2^{\omega_1} = 2^{\omega}$。

(3) 相对于超紧基数存在这一致性，¬wKH 成立、$2^{\omega} = \aleph_{\omega_1}$但 $2^{\omega_1} > \aleph_{\omega_1+1}$是一致的。

在本文的后半部分，我们证明了一些部分上受到不摧毁猜测模型性质（I GMP）启发的结果；该性质由 Cox 和 Krueger 在[3], 中引入，我们也认为这些结果本身具有独立的研究价值。我们首先证明一个关于特殊树的结果。回顾一下，高度为 ω_1 的树若是特殊的，则它是可数个反链的并。因此，特殊树没有不可数分支。在 [1], 中，Baumgartner 引入了特殊性的一个推广，我们在此称之为*B*-特殊性；具有不可数分支的树也可能具有这种性质。根据 Cox 和 Krueger [3]以及 Krueger [10], 的结果，IGMP 由GMP 以及断言所有高度和大小为 ω_1 的树都是 B-特殊的共同推出。Cox 和 Krueger 还证明了 [3] ：IGMP 与连续统的任何可能取值相容，只要其余终性至少为 ω_2。受 IGMP是否与 cf$(2^{\omega}) = \omega_1$相容这一问题的启发，我们证明了 Laver 定理的以下变体： [15], Laver 证明了，在任意满足 Martin 公理的模型上用测度代数进行强迫，会保留这样一个事实：所有高度和大小为 ω_1 且没有不可数分支的树都是特殊的。

定理 C。 如果PFA 成立，且 $\mathbb{B}$ 是一个测度代数，那么在 $V^{\mathbb{B}}$ 中，每个高度和大小为 ω_1 的树都是 B-特殊的。

定理 C 蕴含：对任意满足 PFA 的模型，通过测度代数扩张后，不可破坏版本的 ¬wKH 成立（精确陈述见推论 5.8）。特别是，不可破坏版本的 ¬wKH 与 cf$(2^{\omega}) = \omega_1$相容。

在本文最后一节中，我们考察针对苏斯林树和几乎苏斯林树的强迫公理对猜测模型原理的影响。公理 PFA(S)（由 Todorcevic 在 [25] 中提出，并在第6节中作了更精确的定义）断言 S 是一棵苏斯林树，并且当将 PFA 的结论限制于那些保持 S 是苏斯林树这一事实的适当强迫时，结论仍然成立。[1] PFA(S)[S] 断言，论域是由在一棵苏斯林树 S 上对一个满足 PFA(S) 的模型进行强迫而得到的。公理 PFA(T*)（由 Krueger 在 [11] 中提出，并同样在第6节中作了更精确的定义）断言 T^* 是一棵几乎苏斯林的

[1]大多数其他文献都要求在 PFA(S) 的陈述中，S 是一个 *coherent* 苏斯林树。由于这里不需要相干性，我们以更一般的形式陈述该公理。

Aronszajn 树，并且当将 PFA 的结论限制于保持这一事实的适当强迫时，结论仍然成立。本节的主要定理如下：

定理 D. *(1)* 设 S 表示一棵苏斯林树。那么，PFA(S) 蕴含GMP，而PFA(S)[S] 蕴含IGMP。*(2)* 设 T^* 表示一棵几乎 *Suslin* 的 *Aronszajn* 树。那么，PFA(T*) 蕴含IGMP。

这个定理回答了 Cox 和 Krueger 提出的若干问题；我们在此记录这些问题，并在第6节中作更详细的阐述。

- 在 [3], Cox 和 Krueger 询问，IGMP 是否意味着伪交数 $\mathfrak{p}$ 大于 ω_1。定理 D 给出了否定回答，因为在任何满足 PFA(S)[S], 的模型中，我们都有 $\mathfrak{p} = \omega_1$。
- 在 [3], Cox 和 Krueger 询问，IGMP 是否意味着每一棵高度和大小均为 ω_1 且没有共尾分支的树都是特殊的。定理 D 给出了否定回答，因为在任何满足 PFA(T*) 的模型中，IGMP 都成立，并且 T^* 是一棵非特殊阿罗恩斯赞树。
- 在 [11], Krueger 探讨了 PFA(T*) 是否蕴含 ¬wKH。定理 D 给出了肯定的回答，因为 GMP（因而 IGMP）蕴含 ¬wKH。

本文其余部分的结构如下。在第 2 节，我们回顾一些关于 $\mathscr{P}_\kappa\lambda$ 组合学和猜测模型的背景知识。在第3节，我们考察 ¬wKH 对基数算术的影响，并证明定理 B 的第 (2) 和第 (3) 项。在第4节，我们考察（弱化的）GMP 对基数算术的影响。本节的核心技术结果之一是引理4.6，这是一个关于覆盖矩阵的新引理。随后我们利用它证明定理 A 和定理 B 的第 (1) 项。第5 节给出定理 C 的证明，第6节给出定理 D 的证明。

1.1. **记号与术语**。我们的术语和记号大体上采用标准用法。我们以 [8] 作为集合论的标准参考文献，未定义的概念或记号请读者参阅该书。首先列出几项记号约定。若 $\kappa < \nu$ 是无限基数，且 κ 正则，则 $S^\nu_\kappa := \{\alpha < \nu \mid \mathrm{cf}(\alpha) = \kappa\}$。若 κ 是无限基数，且 X 是满足 $|X| \geq \kappa$ 的集合，则 $\mathscr{P}_\kappa X := \{x \subseteq X \mid |x| < \kappa\}$。若 $\mathbb{P}$ 是具有最大下界的强迫偏序集，且 p，q 是 $\mathbb{P}$ 中相容的条件，则 $p \wedge q$ 表示它们的最大公共下界。

2. Background on two-cardinal combinatorics and guessing models

尽管此前激发本文研究的大部分工作涉及双基数树性质，但本文将专门使用以猜测模型表述这些性质的形式。由于相关的薄列表和 μ-纤细（κ，λ）列表、以及（κ，λ）树和由此产生的树性质 (I)TP(κ，λ) 与 (I)SP(μ，κ，λ) 的定义较为复杂，且本文不会直接使用这些定义，我们请读者参阅配套论文 [13] ，其中给出了它们的精确定义，以及它们与本文所研究并将在下文定义的猜测模型性质之间的联系。不过，在介绍这些猜测模型性质之前，我们需要先了解一些关于双基数组合学的背景知识。

2.1. **双基数组合学**。暂时固定一个正则不可数基数 κ 和一个集合 X，满足 $|X| \geq \kappa$。

定义 2.1。设 $\mathcal{C} \subseteq \mathscr{P}_\kappa X$。

(1) C 是闭合的，当且仅当对于满足 $|D| < \kappa$ 的任意 $D \subseteq C$，若 D 关于 $\subseteq$ 线性有序，则有 $\bigcup D \in C$；(2) 若对于任意 $D \subseteq C$ 和 $|D| < \kappa$，都有 $\bigcup D \in C$，则称 C 为强闭合的；(3) 若对于所有 $x \in \mathscr{P}_\kappa \lambda$，都存在满足 $x \subseteq y$ 的 $y \in C$，则称 C 为共终的；(4) 若 C 闭合且共终，则称其为 $\mathscr{P}_\kappa X$ 中的一个闭无界集；(5) 若 C 强闭合且共终，则称其为 $\mathscr{P}_\kappa X$ 中的一个强俱乐部集。

若集合 $S \subseteq \mathscr{P}_\kappa X$ 对 $\mathscr{P}_\kappa X$ 中的每个（强）俱乐部集 $C \subseteq \mathscr{P}_\kappa X$ 都满足 $S \cap C \neq \emptyset$，则称其在 $\mathscr{P}_\kappa X$ 中是（弱）平稳的。

给定集合 $x \subseteq X$ 和函数 $f : X \to \mathscr{P}_\kappa X$，如果 x 满足对……闭合f，即对所有 $a \in x$都有 $f(a) \subseteq x$，我们就称 x 在对……闭合f 的意义下闭合。类似地，如果 $g : [X]^2 \to \mathscr{P}_\kappa X$，那么当对所有 $a \in [x]^2$都有 $g(a) \subseteq x$ 时，我们称 x 在 g下闭合。以下命题显然成立。

命题 2.2。设 $f : X \to \mathscr{P}_\kappa X$ 是一个函数。那么集合 $\{x \in \mathscr{P}_\kappa X \mid x \text{ 在 } f\text{ 下闭合}\}$，是 $\mathscr{P}_\kappa X$中的一个强俱乐部集。特别地，如果 $\mathcal{Y} \subseteq \mathscr{P}_\kappa X$是弱平稳的，那么存在 $x \in \mathcal{Y}$ 使得 x 在 f下闭合。

关于 $\mathscr{P}_\kappa X$ 上的俱乐部滤子的以下刻画归功于 Menas [19]。

命题 2.3。如果 $g : [X]^2 \to \mathscr{P}_\kappa X$ 是一个函数，那么集合

$$C_g := \{x \in \mathscr{P}_\kappa X \mid x \textit{ is infinite and closed under } g\}$$

是 $\mathscr{P}_\kappa X$ 中的闭无界集。此外，对于 $\mathscr{P}_\kappa X$ 中的任意闭无界集 C，存在 $g : [X]^2 \to \mathscr{P}_\kappa X$，使得 $C_g \subseteq C$。

2.2. **猜测模型**。我们现在回顾猜测模型这一概念，以及随后定义的猜测模型性质，它们为形如 ISP(…) 的双基数树性质提供了另一种表述。

定义 2.4。假设 θ 是正则不可数基数，且 $M \subseteq H(\theta)$。

(1) 给定一个集合 $x \in M$、一个子集 $d \subseteq x$ 和一个基数 μ，我们称 (a) d 是 (μ, M)-逼近的，若对于每个 $z \in M \cap \mathscr{P}_\mu(x)$，都存在 $e \in M$ 使得 $d \cap z = e \cap z$；[2](b) 若存在 $e \in M$ 使得 $d \cap M = e \cap M$，则称 d 被 M 猜测。(2) 若 x 的每个 (μ, M)-逼近子集都被 M 猜测，则称 M 是针对 x 的 μ-猜测模型。(3) 若对于每个 $x \in M$，M 都是针对 x 的 μ-猜测模型，则称 M 是 μ- 猜测模型。(4) 假设 $\mu \leq \kappa \leq \theta$ 是正则不可数基数，且 $\mathcal{Y} \subseteq \mathscr{P}_\kappa H(\theta)$ 是平稳的。那么，GMP$\mathcal{Y}(\mu, \kappa, \theta)$ 断言：满足 M 且是 μ-猜测模型的 $M \in \mathcal{Y}$ 所成的集合在 $\mathscr{P}_\kappa H(\theta)$ 中是平稳的。

注 2.5。为了减少所使用的参数数量，并使我们的结果表述更加简洁明了，我们引入一些约定，这些约定在文献中都很标准。在记号 GMP$\mathcal{Y}(\mu, \kappa, \theta)$ 中，如果省略了 $\mathcal{Y}$，则应将其理解为 $()$。

[2]在其他文献中，该定义的结论通常简单地写作“$d \cap z \in M$”。显然，当 $M \prec H(\theta)$ 时（因而 M 对交运算封闭），这与此处的表述等价。不过，我们希望将此定义应用于更一般的情形，因此就我们的目的而言，这似乎是最恰当的表述。

GMP($\mu, \kappa, \geq\kappa$) 表示断言：对所有正则 $\theta \geq \kappa$，GMP(μ, κ, θ) 都成立。由于 GMP(. . .) 中最常见的前两个参数分别是 ω_1 和 ω_2，如果 $\mathcal{Y} \subseteq \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$，我们令 GMP$\mathcal{Y}$($\theta$) 表示 GMP$\mathcal{Y}$($\omega_1, \omega_2, \theta$)，并令 GMP 表示断言：对所有正则 $\theta \geq \omega_2$，GMP(θ) 都成立。根据命题 3.2 和 3.3], ，对于正则基数 $\kappa \geq \omega_2$，GMP($\omega_1, \kappa, \geq\kappa$) 等价于 ISP($\omega_1, \kappa, \geq\kappa$)，后者在文献中通常简单记作 ISP($\kappa$) 或 ISP$_\kappa$ （本文采用后者）。我们注意到，GMP 由适当强迫公理 [31, 定理 4.8] 推出；此外，当 κ 在基模型中是超紧基数时，GMP 也在 Mitchell 强迫 $\mathbb{M}(\omega, \kappa)$ 所产生的扩张中成立 [32,定理 5.4]。

接下来我们回顾由 [13] 引入的 GMP(. . .) 的弱化形式，它们为形如 SP(. . .) 的双基数树性质提供了另一种表述。

定义 2.6。设 $\mu \leq \kappa \leq \theta$ 是正则不可数基数，$x \in H(\theta)$，$S \subseteq \mathscr{P}_\kappa H(\theta)$，且 $M \subseteq H(\theta)$。若 $x \in M$ 且对于每个 (μ, M)-逼近子集 $d \subseteq x$，都存在 $N \in S$ 使得，我们称 (M, x) 被 S 几乎猜测：

- $x \in N \subseteq M$；
- d 被 N-猜测。

假设 $\mathcal{Y} \subseteq \mathscr{P}_\kappa H(\theta)$。

- AGP$\mathcal{Y}$(μ， κ， θ) 是如下断言：对于每个 $\subseteq$-共终 $S \subseteq \mathscr{P}_\kappa H(\theta)$ 以及每个 $x \in H(\theta)$，使得 $(M,\ x)$ 被 S几乎猜测的 $M \in \mathcal{Y}$ 的集合在 $\mathscr{P}_\kappa H(\theta)$ 中是平稳的。

- wAGP$\mathcal{Y}$(μ， κ， θ) 的定义方式相同，唯一的区别是，结论中的 M 集合只被假定在 $\mathscr{P}_\kappa H(\theta)$ 中是弱 平稳的。

注 2.7。(w)AGP 是“（弱）几乎猜测原理”的缩写。在记号 (w)AGP$\mathcal{Y}$(μ， κ， $H(\theta)$) 中，如果 $\mathcal{Y}$ 等于 $\mathscr{P}_\kappa H(\theta)$，我们同样省略对它的提及。与 GMP 一样，如果 $\mathcal{Y} \subseteq \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$，我们令 (w)AGP$\mathcal{Y}$($\theta$) 表示 (w)AGP$\mathcal{Y}$($\omega_1$， ω_2， θ)。

显然，对于固定的三个正则不可数基数 $\mu \leq \kappa \leq \theta$以及一个平稳 $\mathcal{Y} \subseteq \mathscr{P}_\kappa H(\theta)$，我们有

$$\mathsf{GMP}_{\mathcal{Y}}(\mu, \kappa, \theta) \Rightarrow \mathsf{AGP}_{\mathcal{Y}}(\mu, \kappa, \theta) \Rightarrow \mathsf{wAGP}_{\mathcal{Y}}(\mu, \kappa, \theta).$$

为验证第一个蕴含，关键观察是：对于固定的共尾$S \subseteq \mathscr{P}_\kappa H(\theta)$，集合

$$\{M \in \mathscr{P}_\kappa H(\theta) \mid \forall a \in M \exists N \in S\ [a \in N \subseteq M]\}$$

是 $\mathscr{P}_\kappa H(\theta)$ 中的闭无界集。

3. The weak Kurepa hypothesis and cardinal arithmetic

回忆一下，对于正则不可数基数 μ，弱 μ-Kurepa 树是高度和大小为 μ 、具有多于 μ 个共尾分支的树。我们用 wKH(μ) 表示 μ 上的弱 *Kurepa* 假设，即断言存在一棵弱μ-Kurepa 树。那么， ¬wKH(μ) 断言每棵高度和大小为μ 的树至多有 μ 个共尾分支。注意， ¬wKH 蕴含 $2^{<\mu} > \mu$，因为否则 $^{<\mu}2$ 便是一棵弱 μ-Kurepa 树。我们省略对 μ 的提及，若 $\mu = \omega_1$，则只写 wKH。

在 [13, 定理 9.3], 中，我们证明：如果 μ 是一个正则不可数基数，那么¬wKH(μ)可由 wAGP(μ, μ^+, μ^+)推出。特别地， ¬wKH 可由 GMP 推出（这一结论此前已在 [3, 定理 2.8]中得到证明）。

本节讨论 $\neg\mathsf{wKH}(\mu)$ 对 2^μ取值的影响。特别地，我们将证明 $\neg\mathsf{wKH}(\mu)$ 会迫使 2^μ 相对于 $2^{<\mu}$ 尽可能小，条件是 $2^{<\mu}<\mu^{+\mu}$，但一般而言并不会产生同样的影响。特别是，$\neg\mathsf{wKH}$ 蕴含 $2^{\omega_1}=2^\omega$ 若 $2^\omega<\aleph_{\omega_1}$，但反之未必。这应与（弱化版的）GMP相对照；后者蕴含 $\neg\mathsf{wKH}$，并且正如我们将在第4节看到的那样，无论 2^ω取何值，都会迫使 2^{ω_1} 相对于 2^ω 尽可能小。

这些论证使用了相交数这一概念，该概念也将用于第4节的论证中。

定义 3.1 ([18])。设 $\kappa\le\lambda$ 是无限基数。则相交数 $m(\kappa,\lambda)$ 是满足以下条件的集合 $\mathcal{Y}\subseteq[\lambda]^\kappa$ 的最小基数：对于所有 $x\in[\lambda]^\kappa$，存在 $y\in\mathcal{Y}$ 使得 $|x\cap y|=\kappa$。

注记 3.2。根据标准对角化论证，如果 $\kappa<\lambda$ 且 $\mathrm{cf}(\kappa)=\mathrm{cf}(\lambda)$，那么 $m(\kappa,\lambda)>\lambda$。因此，对于一般的 $\kappa<\lambda$，$m(\kappa,\lambda)$ 所能取的最小值是：当 $\mathrm{cf}(\kappa)\neq\mathrm{cf}(\lambda)$ 时为 λ，当 $\mathrm{cf}(\kappa)=\mathrm{cf}(\lambda)$ 时为 λ^+。正如我们将在第 4 节中看到的，GMP 的弱化迫使 $m(\kappa,\lambda)$ 始终取得这一可能的最小值。

相交数之所以受到关注，一个原因是它们为 Shelah 强假设（SSH）提供了一种简单的等价表述。Shelah 强假设断言，对于每个奇异基数 λ，伪幂 $\mathrm{pp}(\lambda)$ 等于 λ^+。

定理 3.3 (Matet, [17])。以下命题等价：

(1) Shelah 强假设；*(2)* 对每个具有可数余终性的奇异基数 λ，都有 $m(\omega,\lambda)=\lambda^+$；*(3)* 对所有无限基数 $\kappa<\lambda$，都有 $m(\kappa,\lambda)=\lambda^+$，若 $\mathrm{cf}(\kappa)=\mathrm{cf}(\lambda)$；且$m(\kappa,\lambda)=\lambda$，若 $\mathrm{cf}(\kappa)\neq\mathrm{cf}(\lambda)$。

请注意，定理 3.3 立即表明 SSH 确实是 SCH的加强形式，因为如果 是具有可数余终性的奇异基数，那么简单计算可得 $\lambda^\omega=2^\omega\cdot m(\omega,\lambda)$。

下面关于 $m(\kappa,\lambda)$ 的基本事实将会很有用。证明见 [17,推论 2.5]。

命题 3.4。假设 $\kappa<\lambda<\kappa^{+\mathrm{cf}(\kappa)}$。那么 $m(\kappa,\lambda)=\lambda$。

引理 3.5。假设 μ 是一个正则不可数基数，并假设 $\neg\mathsf{wKH}(\mu)$。那么 $2^\mu=m(\mu,2^{<\mu})$。

证明。首先注意到 $m(\mu,2^{<\mu})\le|[2^{<\mu}]^\mu|=2^\mu$。因此，只需证明 $2^\mu\le m(\mu,2^{<\mu})$。

固定 $\mathcal{Y}\subseteq[{}^{<\mu}2]^\mu$ 使得

- $|\mathcal{Y}|=m(\mu,2^{<\mu})$；
- 对于每个 $x\in[{}^{<\mu}2]^\mu$，都存在 $y\in\mathcal{Y}$ 使得 $|x\cap y|=\mu$。

对于每个 $y\in\mathcal{Y}$，令 $T_y:=\{f\in{}^{<\mu}2\mid\exists g\in y\ [f\subseteq g]\}$，即 T_y 是树 ${}^{<\mu}2$中 y 的向下闭包。注意，T_y 是一个基数为 μ 的树，因此根据 $\neg\mathsf{wKH}(\mu)$，T_y 至多有 μ个大小为 μ的分支。我们自然地将经过大小为 μ 的 ${}^{<\mu}2$ 的分支与 ${}^\mu2$的元素相对应。

断言 3.6。对于每个 $h\in{}^\mu2$，存在 $y\in\mathcal{Y}$，使得 h 是经过 T_y 的一个分支。

证明。 固定 $h \in {}^{\mu}2$，令 $x := \{h \restriction \alpha \mid \alpha < \mu\}$ 为 h 的适当初始片段组成的集合。于是 $x \in [{}^{<\mu}2]^{\mu}$，因此我们可以找到 $y \in \mathcal{Y}$，使得 $|x \cap y| = \mu$。于是存在无界多个 $\alpha < \mu$ 满足 $h \restriction \alpha \in y$；由此可知，$h$ 是经过 T_y 的一个分支。□

由于对于每个 $y \in \mathcal{Y}$，T_y 至多有 μ个大小为 μ 的分支，且 ${}^{\mu}2$ 的每个元素都是某个 $y \in \mathcal{Y}$ 对应的、穿过 T_y 的分支，因此 $2^{\mu} \leq \mu \cdot m(\mu, 2^{<\mu})$。由于 ¬wKH 成立，我们有 $2^{<\mu} > \mu$，进而 $m(\mu, 2^{<\mu}) > \mu$。因此，$2^{\mu} = m(\mu, 2^{<\mu})$。□

以下推论将定理 B 的子句 (2) 作为一个特殊情形推出。

推论 3.7。 假设 μ 是一个正则不可数基数，¬wKH(μ) 成立，且 $2^{<\mu} < \mu^{+\mu}$。那么 $2^{\mu} = 2^{<\mu}$。

证明。 由于 ¬wKH(μ) 成立，引理 3.5 推出 $2^{\mu} = m(\mu, 2^{<\mu})$。根据 ¬wKH($\mu$)，我们有 $2^{<\mu} > \mu$，并且根据假设，我们有 $2^{<\mu} < \mu^{+\mu}$。因此，命题3.4 推出 $m(\mu, 2^{<\mu}) = 2^{<\mu}$。综上，这意味着 $2^{\mu} = 2^{<\mu}$。□

现在我们证明定理 B 的子条款（3），说明如果允许 $2^{<\mu} \geq \mu^{+\mu}$，那么 ¬wKH(μ) 就不再迫使2^{μ} 相对于 $2^{<\mu}$ 尽可能小。为明确起见，我们聚焦于 $\mu = \omega_1$ 的情形，并构造一个模型，使得 ¬wKH 成立，$2^{\omega} = \aleph_{\omega_1}$，且 $2^{\omega_1} = \aleph_{\omega_1+2}$；不过，如何修改这一构造以得到其他配置将显而易见。

定理 3.8. 如果超紧基数的存在是一致的，那么以下情形也是一致的：¬wKH 成立，$2^{\omega} = \aleph_{\omega_1}$，且 $2^{\omega_1} > \aleph_{\omega_1+1}$。

证明. 设 λ 是一个超紧基数。通过先进行 Laver 预备，再强迫向 λ 添加 λ^{++} 个 Cohen 子集，我们可以假设$2^{\lambda} = \lambda^{++}$。设 $\kappa < \lambda$ 是弱紧基数。现在，我们可以使用一种带有交错坍缩的 Radin 型强迫 $\mathbb{R}$ 进行强迫，使得：

- 在 $V^{\mathbb{R}}$ 中，我们有 $\lambda = \kappa^{+\omega_1}$，$\lambda$ 是强极限，且 $2^{\lambda} = \lambda^{\omega_1} = \lambda^{++}$；
- $(V_{\kappa+1})^{V^{\mathbb{R}}} = (V_{\kappa+1})^{V}$。

关于如何定义这样的强迫概念的详细信息，请参见例如 [4]。那里定义的强迫会产生一个扩张，在其中$\lambda = \aleph_{\omega_1}$；但通过确保拉丁俱乐部的所有点都选在 κ 之上，并使用形式为 Coll($\kappa^{+3}, < \lambda_0$) 的初始交错莱维坍缩，其中 λ_0 是拉丁俱乐部中的第一个点，我们得到一个具有所需性质的强迫概念。

由于 $(V_{\kappa+1})^{V^{\mathbb{R}}} = (V_{\kappa+1})^{V}$，$\kappa$ 在 $V^{\mathbb{R}}$ 中仍然是弱紧的。令 $\dot{\mathbb{M}}$ 为标准 Mitchell 强迫 $\mathbb{M}(\omega, \kappa)$ 的一个 $\mathbb{R}$-名称。那么，在 $V^{\mathbb{R}*\dot{\mathbb{M}}}$ 中，我们有：

- $\kappa = \omega_2 = 2^{\omega}$；
- $\lambda = \aleph_{\omega_1}$ 是强极限，且 $2^{\lambda} = \lambda^{\omega_1} = \lambda^{++}$；
- ¬wKH（cf. [26]）。

最后，设 $\dot{\mathbb{C}}$ 是为添加 λ 个科恩实数的强迫而取的一个 $\mathbb{R} * \dot{\mathbb{M}}$-名称。那么，在 $V^{\mathbb{R}*\dot{\mathbb{M}}*\dot{\mathbb{C}}}$ 中，我们有 $2^{\omega} = \lambda = \aleph_{\omega_1}$ 和 $2^{\omega_1} = (\aleph_{\omega_1})^{\aleph_1} = \aleph_{\omega_1+2}$。还需验证 wKH 在 $V^{\mathbb{R}*\dot{\mathbb{M}}*\dot{\mathbb{C}}}$ 中成立。

在 [26, §1] 中证明了，在基模型 W 上用 Mitchell 强迫 $\mathbb{M}(\omega, \mu)$ 强迫，其中 μ 是不可达基数之后，wKH ¬在进一步使用长度至多为 ω_2 、其偏序集大小为 ω_1 的可数链条件偏序的有限支撑迭代进行强迫时仍得以保留，前提是每个迭代因子都不会向任何高度为 ω_1的树添加新的不可数分支。在

特别地，由此可知，在 $V^{\mathbb{R}*\dot{\mathbb{M}}}$中，添加至多 ω_2个科恩实数后， ¬wKH 仍得以保留。

在 $V^{\mathbb{R}*\dot{\mathbb{M}}}$ 设 $\dot{T}$ 是一个 $\mathbb{C}$-名称，表示一棵高度和大小均为 ω_1 的树。我们将 $\mathbb{C}$ 中的条件视为从 λ 到 2 的有限偏函数。对每个 $A \subseteq \lambda$，令$\mathbb{C}_A$ 为由 $\mathbb{C}$ 中所有定义域是 A的子集的元素构成的完备子序。由于 $\mathbb{C}$具有可数链条件，我们可以找到 $A \in [\lambda]^{\aleph_1}$，使得存在一个$\mathbb{C}_A$-名称 $\dot{T}'$，满足 $\Vdash_{\mathbb{C}}$“$\dot{T} = \dot{T}'$”。令 T为 $\dot{T}'$在 $V^{\mathbb{R}*\dot{M}*\dot{\mathbb{C}}_A}$中的实现。根据上一段， ¬在该模型中 wKH 成立，因此 T至多有 ω_1多个分支。不过， $V^{\mathbb{R}*\dot{M}*\dot{\mathbb{C}}}$是通过添加$\lambda$多个科恩实数的强迫得到的 $V^{\mathbb{R}*\dot{M}*\dot{\mathbb{C}}_A}$的扩张，而这种强迫无法为高度为$\omega_1$的树添加新的共尾分支。因此， T在 $V^{\mathbb{R}*\dot{M}*\dot{\mathbb{C}}}$中仍至多有 ω_1多个分支，所以 ¬在那里满足 wKH。□

4. Guessing models and cardinal arithmetic

本节分析猜测模型原理对基数算术的影响，重点关注相交数和伪幂。在此过程中，我们将证明，例如，GMP 的一种弱化形式蕴含 2^{ω_1} 相对于 2^{ω}而言尽可能小，并且 GMP(κ、 κ、 $\geq \kappa$) 的一种弱化形式蕴含κ以上的 SSH。

为了得到这些结果，我们需要引入一些工具。首先回顾覆盖矩阵的概念。Viale 在证明 PFA蕴含SCH [28]时引入了这一概念。

4.1. 覆盖矩阵。不同资料中与覆盖矩阵相关的术语略有不一致；我们将沿用 [21] 和 [12] 的术语。

定义 4.1。设 $\theta < \lambda$ 为正则基数。 θ-覆盖矩阵 λ 是一个矩阵 $\mathcal{D} = \langle D(i、\ \beta) \mid i < \theta,\ \ \beta < \lambda\rangle$ 满足：

(1) 对所有 $\beta < \lambda$, $\langle D(i,\beta),\ \mid i < \theta\rangle$ 是一个 $\subseteq$-递增序列，且 $\bigcup_{i<\theta} D(i,\beta) = \beta$；
(2) 对所有 $\beta < \gamma < \lambda$和 $i < \theta$，存在 $j < \theta$，使得 $D(i,\beta) \subseteq D(j,\gamma)$。

对于这样的矩阵 $\mathcal{D}$，令 $\beta_{\mathcal{D}}$ 表示满足以下条件的最小序数 β：对所有 $\gamma < \lambda$ 和 $i < \theta$, otp($D(i,\gamma)$) $< \beta$。

我们将特别关注满足某些附加性质的覆盖矩阵。

定义 4.2。假设 $\theta < \lambda$ 是正则基数，且 $\mathcal{D}$ 是针对 λ的 θ-覆盖矩阵。

(1) $\mathcal{D}$ 是传递的，如果对于所有的 $\beta < \gamma < \lambda$ 和所有的 $i < \theta$，若有 $\beta \in D(i,\gamma)$，则有 $D(i,\beta) \subseteq D(i,\gamma)$。(2) $\mathcal{D}$ 是一致的，如果对于每个极限序数 $\beta < \lambda$，存在 $i < \theta$，使得 $D(i,\beta)$ 在 β 中包含一个闭无界集。(3) $\mathcal{D}$ 是强局部向下相干的，如果对于所有的 $X \in [\lambda]^{\leq\theta}$，存在 $\gamma_X < \lambda$，使得对于所有的 $\beta \in [\gamma_X, \lambda)$，存在 $i < \theta$，使得对于所有的 $j \in [i,\theta)$，$X \cap D(j,\beta) = X \cap D(j,\gamma_X)$。(4) 若存在一个无界的 $A \subseteq \lambda$，使得 $[A]^{\theta}$ 被 $\mathcal{D}$覆盖，即对于所有的 $X \in [A]^{\theta}$，存在 $\beta < \lambda$和 $i < \theta$，使得 $X \subseteq D(i,\beta)$，则 CP($\mathcal{D}$)成立。

Viale 证明 PFA 蕴含 SCH 的关键要素是这样一个事实：对于每个具有可数余终性的奇异基数 μ，PFA 蕴含 CP($\mathcal{D}$)，其中 ω是 μ^+上的强局部向下相干 $\mathcal{D}$ 覆盖矩阵；此外，还有一个引理断言，对于每个具有可数余终性的奇异基数 $\mu > 2^\omega$，存在一个 μ^+ 上的强局部向下相干 ω覆盖矩阵 $\mathcal{D}$，使得 $\beta_{\mathcal{D}} = \mu$。后一个引理的证明基本上可以分为两个步骤。第一步证明，对于每个奇异基数 μ，存在一个 μ^+ 上的传递 cf(μ)覆盖矩阵 $\mathcal{D}$，使得 $\beta_{\mathcal{D}} = \mu$。第二步表明，如果 $\mu > 2^{\mathrm{cf}(\mu)}$，那么每个这样的覆盖矩阵 $\mathcal{D}$ 都是强局部向下相干的。我们将在此说明，在第二步中，如果另外假设我们的覆盖矩阵是一致的，就可以省略 $\mu > 2^{\mathrm{cf}(\mu)}$ 的要求。首先注意到，第一步的证明已经保证了此类覆盖矩阵的存在。事实上，我们能够安排 $\beta_{\mathcal{D}} = \mu$ 的如下加强形式；在本节稍后讨论猜测模型原理对伪幂的影响时，这一加强形式将很有用。

定义 4.3。设 μ 是一个奇异基数，$\theta = \mathrm{cf}(\mu)$，且 $\vec{\mu} = \langle \mu_i \mid i < \theta \rangle$是一个收敛于 μ的正则基数递增序列。如果 $\mathcal{D} = \langle D(i, \beta) \mid i < \theta, \beta < \mu^+ \rangle$ 是 μ^+的一个 θ-覆盖矩阵，我们称其在$|D(i, \beta)| < \mu_i$ 对所有 $i < \theta$都成立时，$\mathcal{D}$ 尊重 $\vec{\mu}$。

以下引理本质上是 [21, 引理 2。4]；我们的表述比所引引理稍强，但其中的证明很容易推出我们所需的结论。

引理 4.4 ([21, 引理 2。4])。设 μ 是一个奇异基数，$\theta = \mathrm{cf}(\mu)$，且 $\vec{\mu} = \langle \mu_i \mid i < \theta \rangle$ 是一个收敛于 μ的正则基数递增序列。那么存在一个一致、传递的 θ-覆盖矩阵，适用于 μ^+，并尊重 $\vec{\mu}$。

现在我们证明，引理 4.4 中的覆盖矩阵实际上满足强局部向下相干性的一个强化版本。我们的证明改编自 Shelah 在发展 PCF 理论时所用的一个论证。我们先回顾以下俱乐部猜测定理。

定理 4.5 ([22, 第 III 章，§2])。假设 κ 和 ν 是正则基数，且 $\kappa^+ < \nu$。那么存在一个序列 $\langle C_\alpha \mid \alpha \in S^\nu_\kappa \rangle$，使得：

(1) 对所有 $\alpha \in S^\nu_\kappa$，C_α 都是 α 中的闭无界集；*(2)* 对每个 ν 中的闭无界集 C，集合 $\{\alpha \in S^\nu_\kappa \mid C_\alpha \subseteq C\}$ 在 ν 中是平稳的。

引理 4.6. 假设 μ 是奇异基数，$\theta = \mathrm{cf}(\mu)$，且 $\mathcal{D}$ 是一个针对 μ^+ 的一致、传递的 θ-覆盖矩阵。那么，对每个 $X \in [\mu^+]^{<\mu}$，存在 $\gamma_X < \mu^+$，使得对所有 $\beta \in [\gamma_X, \mu^+)$，都存在 $i < \theta$，使得对所有 $j \in [i, \theta)$，$X \cap D(j, \beta) = X \cap D(j, \gamma_X)$。

证明。固定一个集合 $X \in [\mu^+]^{<\mu}$，并反设引理结论中的 γ_X 不存在。由于 $\mathcal{D}$ 是传递的，因此对于所有 $\beta < \gamma < \mu^+$ 和所有 $i < \theta$，若 $\beta \in D(i, \gamma)$，则 $X \cap D(i, \beta) \subseteq X \cap D(i, \gamma)$。因此，根据引理结论中的 γ_X 不存在这一点，对于每个 $\beta < \mu^+$，我们都能找到一个 $\beta' > \beta$ 和一个无界集 $I_\beta \subseteq \theta$，使得对于所有 $j \in I_\beta$，都有 $X \cap D(j, \beta) \subsetneq X \cap D(j, \beta')$。令 E 为 μ^+ 中的一个闭无界集，使得对于所有 $\gamma \in E$ 和所有 $\beta < \gamma$，都有 $\beta' < \gamma$。于是，根据 $\mathcal{D}$ 的传递性，对于所有同属 E 的 $\beta < \gamma$，以及除有界多个 $j \in I_\beta$ 之外的所有 $j \in I_\beta$，都有 $X \cap D(j, \beta) \subsetneq X \cap D(j, \gamma)$。

令 $\kappa := \text{最大}\{|X|^+, \theta^+\}$，并令 $\nu := \kappa^{++}$。固定一个序列 $\langle C_\alpha \mid \alpha \in S^\nu_\kappa\rangle$，使其满足定理 4.5 的结论。不失一般性，假设每个 C_α 只包含极限序数。

现在，我们按如下方式构造一个严格递增且连续的 $\langle \beta_\xi \mid \xi < \nu\rangle$ 元素 E 序列。首先令 $\beta_0 := \min(E)$。若 $\xi < \nu$ 是一个极限序数，且我们已经定义了 $\langle \beta_\eta \mid \eta < \xi\rangle$，那么就必须令 $\beta_\xi := \sup\{\beta_\eta \mid \eta < \xi\}$。最后，假设 $\xi < \nu$，且我们已经定义了 $\langle \beta_\eta \mid \eta \le \xi\rangle$。令 B_ξ 为满足以下条件的 $\alpha \in S^\nu_\kappa$ 的集合：存在 $\beta < \mu^+$，使得对于某个 $i < \theta$，$\{\beta_\eta \mid \eta \in C_\alpha \cap (\xi+1)\} \subseteq D(i, \beta)$。对于每个 $\alpha \in B_\xi$，选择一个 $\beta_{\xi,\alpha}$ 作为见证。最后，选择足够大的 $\beta_{\xi+1} \in E \setminus (\beta_\xi + 1)$，使得对于所有 $\alpha \in B_\xi$，都有 $\beta_{\xi+1} > \beta_{\xi,\alpha}$。至此，$\langle \beta_\xi \mid \xi < \nu\rangle$的构造完成。我们先指出以下简单的断言。

断言 4.7。对于所有 $\xi < \nu$ 和所有 $\alpha \in B_\xi$，存在 $j < \theta$ 使得 $\{\beta_\eta \mid \eta \in C_\alpha \cap (\xi+1)\} \subseteq D(j, \beta_{\xi+1})$。

证明。固定 $\xi < \nu$ 和 $\alpha \in B_\xi$。根据构造，我们可以固定一个 $i < \theta$，使得 $\{\beta_\eta \mid \eta \in C_\alpha \cap (\xi+1)\} \subseteq D(i, \beta_{\xi,\alpha})$。由于 $\beta_{\alpha,\xi} < \beta_{\xi+1}$，我们可以固定 $j \in [i, \theta)$ 使得 $\beta_{\alpha,\xi} \in D(j, \beta_{\xi+1})$。根据覆盖矩阵的定义以及 $\mathcal{D}$ 的传递性，我们有

$$D(i, \beta_{\xi,\alpha}) \subseteq D(j, \beta_{\xi,\alpha}) \subseteq D(j, \beta_{\xi+1}),$$

因此 $\{\beta_\eta \mid \eta \in C_\alpha \cap (\xi+1)\} \subseteq D(j, \beta_{\xi+1})$，如所要求。 □

令 $\gamma := \sup\{\beta_\xi \mid \xi < \nu\}$。由于 $\mathcal{D}$ 是一致的，存在一个闭无界集 $C \subseteq \gamma$ 以及一个 $i^* < \theta$，使得 $C \subseteq D(i^*, \gamma)$。令 $C := \{\xi < \nu \mid \beta_\xi \in C\}$。由于 $\langle \beta_\xi \mid \xi < \nu\rangle$ 枚举了 γ 中的一个闭无界集，因此 C 是 ν 中的一个闭无界集。因此，我们可以固定 $\alpha \in S^\nu_\kappa$ 使得 $C_\alpha \subseteq C$。

注意，对所有 $\xi < \nu$，我们都有 $\alpha \in B_\xi$，因为

$$\{\beta_\eta \mid \eta \in C_\alpha \cap (\xi+1)\} \subseteq C \subseteq D(i^*, \gamma).$$

因此，对每个 $\xi \in C_\alpha$，我们都可以固定一个 $i_\xi < \theta$，使得 $\{\beta_\eta \mid \eta \in C_\alpha \cap (\xi+1)\} \subseteq D(i_\xi, \beta_{\xi+1})$。此外，对每个 $\xi \in C_\alpha$，令 $\xi^\dagger$ 表示 $\min(C_\alpha \setminus (\xi+1))$，并固定一个 $j_\xi < \theta$，使得 $\beta_{\xi+1} \in D(j_\xi, \beta_{\xi^\dagger})$。令 $k_\xi := \max\{i_\xi, j_\xi\}$。由于 κ 是正则基数且 $\kappa > \theta$，我们可以找到一个固定的 $k < \theta$ 以及一个无界集 $A \subseteq C_\alpha$，使得对所有 $\xi \in A$ 都有 $k_\xi = k$。

命题 4.8。假设 $j \in [k, \theta)$ 且 $\eta < \xi$ 都属于 A。那么 $D(j, \beta_{\eta^\dagger}) \subseteq D(j, \beta_{\xi^\dagger})$。

证明。根据 i_ξ 和 j_ξ 的选择，我们有 $\beta_{\eta^\dagger} \in D(i_\xi, \beta_{\xi+1})$ 和 $\beta_{\xi+1} \in D(j_\xi, \beta_{\xi^\dagger})$。由于 $j \ge k = \max\{i_\xi, j_\xi\}$，$\mathcal{D}$ 的传递性意味着 $\beta_{\eta^\dagger} \in D(j, \beta_{\xi^\dagger})$，进而再次应用后可得 $D(j, \beta_{\eta^\dagger}) \subseteq D(j, \beta_{\xi^\dagger})$，如所需。□

为简化记号，令 $A^\dagger$ 表示 $\{\eta^\dagger \mid \eta \in A\}$。注意，$A^\dagger$ 是 C_α 的无界子集。因此，前面的断言可改述为：对于所有同属 $A^\dagger$ 的 $\eta < \xi$，以及所有 $j \in [k, \theta)$，都有 $D(j, \beta_\eta) \subseteq D(j, \beta_\xi)$。对每个 $\eta \in A^\dagger$，令 $\hat{\eta} = \min(A^\dagger \setminus (\eta+1))$。由于 β_η 和 $\beta_{\hat{\eta}}$ 都属于 E，我们可以找到 $\ell_\eta \in [k, \theta)$，使得 $X \cap D(\ell_\eta, \beta_\eta) \subsetneq X \cap D(\ell_\eta, \beta_{\hat{\eta}})$。同样，由于 κ 是一个大于 θ 的正则基数，我们可以找到一个固定的 ℓ 和一个无界的 $A^* \subseteq A^\dagger$，使得对所有 $\eta \in A^*$，都有 $\ell_\eta = \ell$。现在，对于所有同属 A^* 的 $\eta < \xi$，我们有

$$X \cap D(\ell, \beta_\eta) \subsetneq X \cap D(\ell, \beta_{\hat{\eta}}) \subseteq X \cap D(\ell, \beta_\xi),$$

因此 $\langle X \cap D(\ell, \beta_\eta) \mid \eta \in A^* \rangle$ 是 X的子集构成的严格 $\subsetneq$-递增序列，这与 $\mathrm{otp}(A^*) = \kappa$ 和 $\kappa > |X|$这一事实矛盾。□

4.2. 猜测模型与相交数。 接下来我们证明，只要 $\lambda > \kappa$ 是具有可数余终性的奇异基数，且 $\mathcal{D}$ 是 λ^+上的一致、传递的 ω-覆盖矩阵，GMP($\kappa, \kappa, {\geq}\kappa$)就蕴含CP($\mathcal{D}$)成立。事实上，我们将证明一个稍强一些的结论；为准确陈述该结果，我们需要以下概念。

定义4.9。 给定一个集合 M，若子集 $x \subseteq M$ 在 M 中有界，则称其为有界。给定不可数基数 $\nu \leq \mu$，其中 ν 为正则基数，若对于所有满足 x 在 M中有界的 $x \in \mathscr{P}_\nu M$，都存在 $y \in M$ 使得 $|y| < \mu$ 且 $x \subseteq y$，则称 M 为内部(ν, μ)-无界的。

注4.10。 请注意，对于固定的 μ，当 ν 增大时，具有内部 (ν，μ)-无界性质会变得更强；而对于固定的 ν，当 μ 增大时，该性质会变得更弱。在现有文献中，内部无界通常指 (ω_1，ω_1)-无界。此外，对于集合 M 和满足 ν 正则的不可数基数 $\nu \leq \mu$，容易看出，以下这种较弱形式的内部可达性蕴含 M 是 (ν，μ)-无界的：$M = \bigcup_{\alpha<\nu} M_\alpha$ 对某个 $\subseteq$-递增序列 $\langle M_\alpha \mid \alpha < \nu \rangle$，使得 $M_\alpha \in M$，并且对所有 $\alpha < \nu$ 都有 $|M_\alpha| < \mu$。由此立即可得，对所有正则不可数基数 $\nu < \kappa \leq \theta$，集合

$$\{M \in \mathscr{P}_\kappa H(\theta) \mid M \text{ is } (\nu, \kappa)\text{-internally unbounded}\}$$

在 $\mathscr{P}_\kappa H(\theta)$中是平稳的。

命题 4.11。 假设 $\nu < \mu$ 是无限基数，θ 是一个充分大的正则基数，且 $M \prec H(\theta)$ 是一个 μ-猜测模型，并且 ${}^{<\nu}M \subseteq M$ 和 $\nu \in M$。那么 M 是内部 (ν^+，μ)-无界的。特别地，每个 μ-猜测模型都是内部 (ω_1，μ)-无界的。

证明。该证明与 [10, 定理 1.4]的证明相当类似。反设 M 不是内部（ν^+, μ）无界的，并固定一个集合 $z \in M$ 和一个 $x \in \mathscr{P}_{\nu^+}(z \cap M)$，使得不存在 $y \in M$满足 $|y| < \mu$和 $x \subseteq y$。由于${}^{<\nu}M \subseteq M$，我们知道 $|x| = \nu$；将其枚举为 $\langle a_\beta \mid \beta < \nu \rangle$。对于每个 $\gamma < \nu$，令$b_\gamma := \{a_\beta \mid \beta < \gamma\}$。由 M的闭包可知，$b_\gamma \in M$。令 $B := \{b_\gamma \mid \gamma < \nu\}$，并注意到 $B \subseteq \mathscr{P}_\nu z \in M$ 和 $B \subseteq M$。

我们声称 B是（μ，M）逼近的。为此，固定任意一个 $w \in M \cap \mathscr{P}_\mu(\mathscr{P}_\nu z)$，并注意到 $\bigcup w \in \mathscr{P}_\mu z \cap M$。如果 $w \cap B$的基数为 ν，那么对于无界多个 $\gamma < \nu$，我们就会有 $b_\gamma \in w$，这将意味着$x \subseteq \bigcup w$，与我们对 x的选择矛盾。因此，$w \cap B$ 的基数小于ν，所以由 M的闭包可知，$w \cap B \in M$。

由于 w 是任意的，因此可知 B 是（μ，M）-逼近的。因此，B 是 M-猜测的，所以我们可以固定 $d \in M$ 使得 $d \cap M = B$。由初等性可得 $d \subseteq \mathscr{P}_\nu z$。此外，由于 $|B| = \nu$ 和 $\nu + 1 \subseteq M$，再次由初等性可知 $|d| = \nu$，从而可知 $d = B$。但此时 $\bigcup d \in M$ 且$\bigcup d = \bigcup B = x$，这再次与我们对 x 的选择相矛盾。□

根据命题 4.11 和注记 2.7，下述定理中的 wAGP$_\mathcal{Y}(\kappa, \kappa, \lambda^{++})$ 假设可直接由 GMP($\kappa, \kappa, \lambda^{++}$) 推出，因此也可由更强的 GMP($\omega_1, \kappa, {\geq}\kappa$) 推出，而后者等价于 ISP$_\kappa$ (参见注记 2.5)。

定理 4.12. 设 $\kappa < \lambda$ 是不可数基数，其中 κ 是正则基数，λ 是具有可数余终性的奇异基数。令

$$\mathcal{Y} := \{M \in \mathscr{P}_\kappa H(\lambda^{++}) \mid M \text{ is } (\omega_1, \lambda)\text{-internally unbounded}\},$$

并假设wAGP$_\mathcal{Y}(\kappa, \kappa, \lambda^{++})$ 成立。那么对每个一致、传递的 ω-覆盖矩阵 $\mathcal{D}$ （针对 λ^+），CP($\mathcal{D}$) 都成立。此外，若对所有 $\mu < \lambda$都有 $m(\omega, \mu) \leq \lambda^+$，那么 $m(\omega, \lambda) = \lambda^+$。

证明。固定一个针对 λ^+ 的一致、传递的 ω-覆盖矩阵 $\mathcal{D}$。对所有 $\alpha < \beta < \lambda^+$，令 $j_{\alpha\beta}$ 为满足 $\alpha \in D(j, \beta)$ 的最小 $j < \omega$。对每个 $\beta < \lambda^+$ 和每个 $i < \omega$，定义函数 $g_{\beta,i} : \beta \to \omega$，令 $g_{\beta,i}(\alpha) := \max\{j_{\alpha\beta}, i\}$，对所有 $\alpha < \beta$均如此。

由引理 4.6，对每个 $X \in [\lambda^+]^{<\lambda}$，我们可以固定 $\gamma_X < \lambda^+$，使得对所有 $\beta \in [\gamma_X, \lambda^+)$，存在 $i < \omega$，使得对所有 $j \in [i, \theta)$，都有 $X \cap D(j, \beta) = X \cap D(j, \gamma_X)$。对每个 $X \in [\lambda^+]^{<\lambda}$ 和每个 $i < \omega$，定义函数 $h_{X,i} : X \to \omega$，令 $h_{X,i} := g_{\gamma_X,i} \restriction X$。此外，令 $\pi_0 : \lambda^+ \times \omega \to \lambda^+$ 和 $\pi_1 : \lambda^+ \times \omega \to \omega$ 为投影映射。我们以自然的方式将形如 $g_{\beta,i}$ 和 $h_{X,i}$ 的函数视为$\lambda^+ \times \omega$ 的子集。

设 $S := \{N \in \mathscr{P}_\kappa H(\lambda^{++}) \mid N \prec H(\lambda^{++})$ 且 $\mathrm{cf}(\sup(N \cap \lambda^+)) > \omega\}$。由于 wAGP$_\mathcal{Y}(\kappa, \kappa, \lambda^{++})$ 成立，我们可以找到 $M \in \mathcal{Y}$使得

- $\lambda^+ \times \omega \in M$;
- 对所有 $y \in M$，我们有 $y \cap (\lambda^+ \times \omega)$，$\sup(y \cap \lambda^+) \in M$;
- 对所有 $y \in M \cap \mathscr{P}_\lambda(\lambda^+ \times \omega)$ 以及每个 $i < \omega$，我们有 $\gamma_{\pi_0[y]}$，$h_{\pi_0[y],\, i} \in M$，并且若 $|y| < \kappa$，则 $y \subseteq M$;
- $(M, \lambda^+ \times \omega)$ 几乎被 S κ-猜测。

设 $\delta := \sup(M \cap \lambda^+)$。

命题 4.13。 存在 $i < \omega$ 使得 $g_{\delta,\, i}$ 是(κ, M)-逼近的。

证明。反设不然。那么，对于每个 $i < \omega$，我们都可以固定 $y_i \in M \cap \mathscr{P}_\kappa(\lambda^+ \times \omega)$，使得不存在满足 $g_{\delta,i} \cap y_i = z \cap y_i$ 的 $z \in M$。令 $y := \bigcup_{i<\omega} y_i$。由于 $M \in \mathcal{Y}$，我们可以找到 $w \in M$，使得 $y \subseteq w$ 且 $|w| < \lambda$。根据我们对 M 的选择，不妨设 $w \subseteq \lambda^+ \times \omega$。令 $X := \pi_0[w]$。同样根据我们对 M 的选择，对于所有 $i < \omega$，都有 $\gamma_X \in M$ 且 $h_{X,i} \in M$。特别地，$\gamma_X < \delta$。因此我们可以找到$i < \omega$，使得对于所有 $j \in [i, \omega)$，都有 $X \cap D(j, \delta) = X \cap D(j, \gamma_X)$。展开定义可知，这意味着 $g_{\delta,i} \restriction X = h_{X,i}$。然而，$g_{\delta,i} \cap y_i = h_{X,i} \cap y_i$，且我们有 $h_{X,i} \in M$，这与我们对 y_i 的选择矛盾。□

由于 $(M, \lambda^+ \times \omega)$ 几乎被 S κ-猜测，我们可以找到 $N \in S$ 使得 $\lambda^+ \times \omega \in N \subseteq M$，并找到一个 $e \in N$ 使得 $e \cap N = g_{\delta,i} \cap N$。根据初等性，$e$ 是一个从 λ^+ 到 ω 的函数。令 $\gamma := \sup(N \cap \lambda^+)$。由于 $\mathrm{cf}(\gamma) > \omega$，我们可以找到 $j \geq i$ 使得$\{\alpha \in N \cap \lambda^+ \mid e(\alpha) = j\}$ 在 γ 中无界。令 $H := \{\alpha < \lambda^+ \mid e(\alpha) = j\}$。根据初等性，$H$ 在 λ^+ 中无界。此外，对每个 $x \in [H]^{\aleph_0} \cap N$，都有$x \subseteq D(j, \delta)$，因此，根据初等性，

$$N \models \exists \beta < \lambda^+ \ (x \subseteq D(j, \beta))$$

但接着，再次应用初等性可得

$$H(\lambda^{++}) \models \forall x \in [H]^{\aleph_0} \ \exists \beta < \lambda^+ \ (x \subseteq D(j, \beta)).$$

特别地，H 是 CP($\mathcal{D}$) 的见证。

对于“此外”这一子句，假设对所有 $\mu < \lambda$，都有 $m(\omega, \mu) \leq \lambda^+$。我们将证明 $m(\omega, \lambda^+) = \lambda^+$。固定一个一致、传递的 ω-覆盖矩阵 $\mathcal{D}$，其定义在 λ^+ 上

使得 $\beta_{\mathcal{D}} = \lambda$。根据假设，对所有 $i < \omega$ 和 $\beta < \lambda^+$，我们可以固定一个集合 $\mathcal{Y}(i, \beta) \subseteq [D(i, \beta)]^\omega$，使得 $|\mathcal{Y}(i, \beta)| \leq \lambda^+$，并且对所有 $x \in [D(i, \beta)]^\omega$，存在 $y \in \mathcal{Y}(i, \beta)$ 使得 $|x \cap y| = \omega$。令 $H \in [\lambda^+]^{\lambda^+}$ 为 CP($\mathcal{D}$) 的见证，令 $\pi\colon H \to \lambda^+$ 为唯一的保序双射，并令

$$\mathcal{Y} := \{\pi[x \cap H] \mid i < \omega,\ \beta < \lambda^+,\ x \in \mathcal{Y}(i, \beta)\}.$$

显然，我们有 $\mathcal{Y} \subseteq [\lambda^+]^\omega$ 和 $|\mathcal{Y}| = \lambda^+$。为证明 $\mathcal{Y}$ 见证了 $m(\omega, \lambda^+) = \lambda^+$，任取一个 $x \in [\lambda^+]^\omega$。设 $\bar{x} = \pi^{-1}[x]$。那么 $\bar{x} \in [H]^\omega$，因此我们可以取 $i < \omega$ 和 $\beta < \lambda^+$，使得 $\bar{x} \subseteq D(i, \beta)$。根据我们对 $\mathcal{Y}(i, \beta)$ 的选择，存在 $\bar{y} \in \mathcal{Y}(i, \beta)$，使得 $|\bar{x} \cap \bar{y}| = \omega$。那么 $y := \pi[\bar{y} \cap H]$ 属于 $\mathcal{Y}$ 和 $|x \cap y| = \omega$，正如所需。□

在 [2], 中，Cox 和 Krueger 证明了GMP 与连续统取任意大的值相容。特别是，他们的方法可以构造出一个模型，使得GMP 成立，且连续统是余终性为ω_1的奇异基数。在这样的模型中，我们必然有 $2^\omega < 2^{\omega_1}$，所以GMP与例如马丁公理$_{\omega_1}$不同，它并不蕴含 $2^{\omega_1} = 2^\omega$。不过，正如我们现在将要证明的，事实证明GMP 确实会对 2^{ω_1}产生显著影响，实际上会迫使其相对于 2^ω的取值尽可能小。

下面的推论与随后的注记共同给出了定理 B 的条款 (1)。在适当假设 $\nu \leq \mu$ 时 $m(\nu, \mu^+)$ 的取值的条件下，也可以很容易地得到类似的推论，说明形如 wAGP$_{\mathcal{Y}_\lambda}(\mu, \mu^+, \lambda^{++})$ 的原理对 2^μ 与 $2^{<\mu}$ 之间关系的影响，其中 μ 是任意的正则不可数基数。

推论 4.14. 假设对于所有可数余终性的奇异基数 λ，wAGP$_{\mathcal{Y}_\lambda}(\lambda^{++})$ 都成立，其中

$$\mathcal{Y}_\lambda := \{M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\lambda^{++}) \mid M \text{ is } (\omega_1, \lambda)\text{-internally unbounded}\}.$$

那么，对于每个不可数基数 μ，都有

$$m(\omega, \mu) = \begin{cases} \mu & \text{if } \mathrm{cf}(\mu) \neq \omega \\ \mu^+ & \text{if } \mathrm{cf}(\mu) = \omega. \end{cases}$$

特别地，

$$2^{\omega_1} = \begin{cases} 2^\omega & \text{if } \mathrm{cf}(2^\omega) \neq \omega_1 \\ (2^\omega)^+ & \text{if } \mathrm{cf}(2^\omega) = \omega_1. \end{cases}$$

证明。对 μ 使用归纳法。$\mu = \omega_1$ 的基步显然。假设 $\mu = \nu^+$，并且已知 $m(\omega, \nu) \leq \mu$。那么，根据 [17, 命题 2.4(v)]，有 $m(\omega, \mu) = \max\{\mu, m(\omega, \nu)\} = \mu$。接下来假设 μ 是一个具有不可数共尾性的极限基数，并且对所有 $\nu < \mu$，都有 $m(\omega, \nu) < \mu$。那么，[17, 命题 2.4(vi)] 蕴含 $m(\omega, \mu) = \sup\{m(\omega, \nu) \mid \nu < \mu\} = \mu$。最后，假设 μ 是一个可数余终性的奇异基数，并且对所有 $\nu < \mu$，都有 $m(\omega, \nu) < \mu$。那么，定理 4.12 的“此外”条款蕴含 $m(\omega, \mu) = \mu^+$。

现在，[17, 定理 1.1] 表明，对于所有无限基数 $\sigma < \mu$，我们有

$$m(\sigma, \mu) = \begin{cases} \mu & \text{if } \mathrm{cf}(\mu) \neq \mathrm{cf}(\sigma) \\ \mu^+ & \text{if } \mathrm{cf}(\mu) = \mathrm{cf}(\sigma), \end{cases}$$

如所期望的那样。

要看出“特别是”这一条，首先注意到，正如 [13, 定理 9.3],中所证明的，wAGP(ω_2) 蕴含 ¬wKH，因此，更何况，推论的假设也蕴含

¬wKH。根据引理 3.5，因此我们有 $2^{\omega_1} = m(\omega_1, 2^\omega)$，结论由此得出。□

注 4.15。正如推论4.14 的证明所表明的，要得到“特别是”这一条款，我们只需要 ¬wKH 以及将推论应用于 $m(\omega_1, 2^\omega)$所得的结论。因此，只需假设 wAGP(ω_2)以及 wAGP$_{\aleph_\lambda}(\lambda^{++})$对所有具有可数余终性的奇异 $\lambda < 2^\omega$ 均成立，正如定理 B 的陈述所反映的那样。

4.3. **伪幂**。本节最后，我们考察猜测模型原理对伪幂的影响，从而为定理 A 的证明做铺垫。我们首先回顾一些必要的定义；为求简洁，我们选择在实际需要的具体情境中给出这些定义，而不作一般性的阐述。

定义 4.16。假设 θ 是一个无限正则基数，且 $\vec{\mu} = \langle \mu_i \mid i < \theta \rangle$是一个正则基数序列。令 $\prod \vec{\mu}$ 表示 $\prod_{i<\theta} \mu_i$。如果 $f, g \in \prod \vec{\mu}$，那么我们写作 $f <^* g$，表示 $|\{i < \theta \mid g(i) \leq f(i)\}| < \theta$。

回想一下，如果 μ 是一个奇异基数，那么 pp(μ) 表示 μ的伪幂。由于这里用不到，我们不提供 pp(μ)的精确定义；所有必要定义请参阅 [17]，更全面的论述请参阅 [22]。这里我们只指出，pp(μ) 总是有 $\geq \mu^+$，并且 pp(μ) $> \mu^+$ 的以下推论可由 [17, 观察 4.4] 立即得出。

引理 4.17. 设 μ 是一个奇异基数，且 $\mathrm{pp}(\mu) > \mu^+$。那么存在一个正则基数递增序列 $\vec{\mu} = \langle \mu_i \mid i < \mathrm{cf}(\mu) \rangle$，收敛于 μ，使得 $\mathrm{cf}(\prod \vec{\mu}, <^*) = \mu^{++}$。

我们还回顾一下，Shelah 强假设（SSH）断言，对于每个奇异基数 μ，pp(μ) $= \mu^+$。给定一个基数 κ，如果对于每个奇异基数 $\mu > \kappa$，pp(μ) $= \mu^+$，我们就说 SSH 在 κ 以上成立。还要回顾一下，奇异基数假设（SCH）断言，对于每个奇异强极限基数 μ，都有 $2^\mu = \mu^+$。与 SSH 类似，如果对于每个奇异强极限基数 $\mu > \kappa$，都有 $2^\mu = \mu^+$，我们就说 SCH 在某个基数 κ 以上成立。正如定理 3.3 之后所述，通过相交数刻画 SSH，显然可知 SSH 蕴含 SCH。对于任意基数 κ，SSH 在 κ 以上成立会蕴含 SCH 在 κ以上成立，这一点并非显而易见，因为通过相交数刻画 SSH 在 κ 以上成立的方式，不如定理 3.3 的刻画那么简洁。尽管如此，这一结论确实成立，并可由 [17] 和 [22]中的相关结果推出：

命题 4.18。设 κ 是一个无限基数，且SSH 在 κ 以上成立。那么SCH 在 κ以上成立。

证明。反设不然，并令 $\mu > \kappa$ 为 SCH 在κ以上不成立的最小见证。特别地，μ 是强极限，$2^\mu = \mu^{\mathrm{cf}(\mu)} > \mu^+$，并且由 Silver 定理可知[24], 我们必有 cf(μ) $= \omega$。根据上文定理 3.3 之后的讨论，有$\mu^\omega = 2^\omega \cdot m(\omega, \mu) = m(\omega, \mu)$，因此有 $m(\omega, \mu) > \mu^+$。

回顾一下，cov(μ, μ, ω_1, 2) 是满足以下条件的集合 $\mathcal{X} \subseteq \mathscr{P}_\mu \mu$ 的最小基数：对于每个 $a \in \mathscr{P}_{\omega_1} \mu$，都存在 $b \in \mathcal{X}$ 使得 $a \subseteq b$。通过直接论证（参见 [17, 命题 2.4(viii){v15)}），我们有

$$m(\omega, \mu) \leq \max\{\mathrm{cov}(\mu, \mu, \omega_1, 2), \sup\{m(\omega, \chi) \mid \chi < \mu\}\}.$$

由于 μ 是强极限，我们对所有 $\chi < \mu$ 都有 $m(\omega, \chi) < \mu$，因此 $m(\omega, \mu) \leq \mathrm{cov}(\mu, \mu, \omega_1, 2)$。现在注意到

- $\mathrm{pp}(\chi) < \mu$ 对每个奇异 $\chi < \mu$（因为 μ 是强极限且对所有 μ都有 $\mathrm{pp}(\mu) \leq 2^\mu$）；并且
- 对所有 $\chi \in (\kappa, \mu)$，若 χ 是余终性为 ω_1的奇异基数，则 $\mathrm{pp}(\chi) = \chi^+$（因为 SSH 在 κ以上成立）。

因此，[22, §IX, 结论 1。8] 意味着 $\mathrm{pp}(\mu) = \mathrm{cov}(\mu, \mu, \omega_1, 2)$。由于 $\mathrm{cov}(\mu, \mu, \omega_1, 2) \geq m(\omega, \mu) > \mu^+$，这与SSH 在 κ以上成立的假设矛盾。□

现在我们证明本小节的主要结果，说明 CP($\mathcal{D}$) 的实例对形如 $\mathrm{cf}(\prod \vec{\mu}, <^*)$ 的值所产生的影响。

定理 4.19. 设 μ 是一个奇异基数，$\theta = \mathrm{cf}(\mu)$，且 $\vec{\mu} = \langle \mu_i \mid i < \theta \rangle$ 是一个收敛到 μ 的正则基数递增序列。此外，假设存在一个针对 μ^+、$\mathcal{D} = \langle D(i, \beta) \mid i < \theta, \beta < \mu^+ \rangle$的 θ-覆盖矩阵，且$\mathcal{D}$ 尊重 $\vec{\mu}$，并且 CP($\mathcal{D}$) 成立。那么 $\mathrm{cf}(\prod \vec{\mu}, <^*) = \mu^+$。

证明. 设 $\mathcal{D}$ 如命题陈述所述，并令 $A \subseteq \mu^+$ 为 CP($\mathcal{D}$)的见证。令 $\langle \gamma_\eta \mid \eta < \mu \rangle$ 按递增顺序枚举 A 的前 μ个元素；对于每个 $i < \theta$，令 $\delta_i := \sup\{\gamma_\eta \mid \eta < \mu_i\}$。注意，$\mathrm{cf}(\delta_i) = \mu_i$。对于每个 $\beta < \mu^+$，定义函数 $g_\beta \in \prod \vec{\mu}$ 如下：对于每个 $i < \theta$，令 $g_\beta(i)$ 为满足 $\sup(D(i, \beta) \cap \delta_i) < \gamma_\eta$的最小 $\eta < \mu_i$。此定义良好，因为 $\mathcal{D}$ 尊重$\vec{\mu}$，因此 $|D(i, \beta)| < \mu_i = \mathrm{cf}(\delta_i)$。

我们声称，$\{g_\beta \mid \beta < \mu^+\}$ 在 $(\prod \vec{\mu}, <^*)$ 中共终。为此，固定 $f \in \prod \vec{\mu}$。令 $x = \{\gamma_{f(i)} \mid i < \theta\}$。由于 $x \in [A]^{\leq \theta}$ 和 A 是 CP($\mathcal{D}$) 的见证，我们可以固定 $i < \theta$和 $\beta < \mu^+$，使得 $x \subseteq D(i, \beta)$，因此对所有 $j \in [i, \theta$都有 $x \subseteq D(j, \beta)$。特别地，对每个 $j \in [i, \theta)$，都有 $\gamma_{f(j)} \in D(j, \beta) \cap \delta_j$，从而 $f(j) < g_\beta(j)$。因此，$f <^* g_\beta$，如所需。□

由此可得定理 A 作为推论。

定理 A 的证明。假设对于所有可数余终性的奇异 $\lambda > \kappa$，wAGP$_{\mathcal{Y}_\lambda}(\kappa, \kappa, \lambda^{++})$ 成立。根据 §2 中的 [22, ，若 4], 为具有不可数基数的奇异基数，且满足 $\mathrm{pp}(\nu) = \nu^+$ 的奇异基数集合 $\nu < \mu$ 在 μ 中平稳，则 $\mathrm{pp}(\mu) = \mu^+$。因此，要证明 κ 以上的 SSH，只需证明对于所有可数余终性的奇异 $\mu > \kappa$，$\mathrm{pp}(\mu) = \mu^+$。

固定这样一个 μ。根据引理 4.17，只需证明对于每个收敛到 μ的正则基数递增序列 $\vec{\mu} = \langle \mu_i \mid i < \omega \rangle$，都有 $\mathrm{cf}(\prod \vec{\mu}, <^*) = \mu^+$。固定这样一个序列 $\vec{\mu}$。根据引理 4.4，我们可以固定一个一致、传递的 ω-覆盖矩阵 $\mathcal{D}$，用于 μ^+ 且尊重 $\vec{\mu}$。根据定理 4.12，CP($\mathcal{D}$) 成立；进而，根据定理 4.19，我们有 $\mathrm{cf}(\prod \vec{\mu}, <^*) = \mu^+$，证毕。□

5. 特殊树与随机实数

本节中，我们稍作迂回，证明拉弗关于强迫公理模型的随机扩张中特殊树的一个定理的变体[15] 。本节末尾，我们将把这一结果与 Cox 和 Krueger 的不可摧毁猜测模型原理 [3], 联系起来，从而回到我们的主线；该原理是GMP 的强化版本，也将为第6节的结果提供部分动机。

回忆一下，若存在一个函数 $f: T \to \omega$，使得对所有 $s,\ t \in T$，只要 $s <_T t$，就有 $f(s) \neq f(t)$，则高度为 ω_1 的树 T 称为特殊树。显然，特殊树不可能有不可数分支。Baumgartner 引入了这种特殊性概念的一种推广；高度为 ω_1 且有不可数分支的树也可以满足这一推广概念。该概念被用于证明 PFA 蕴含 ¬wKH。为避免与更常见的特殊性概念混淆，我们将 Baumgartner 的推广称为 B-特殊性。

定义 5.1（[1, §7]）。设 T 是一棵高度为 ω_1 的树。若存在一个函数 f: $T \to \omega$，使得对于所有的 s、t、$u \in T$，若 $f(s) = f(t) = f(u)$ 且 $s <_T t$、u，则 t 和 u 可由 $<_T$ 比较，我们就称 T 是 B-特殊的。

这确实可以看作是特殊性的概念的一种推广，因为如果 T 是一棵高度为 ω_1 且没有不可数分支的树，那么 T 是特殊的，当且仅当 T 是 B-特殊的。众所周知，马丁公理$_{\omega_1}$ 蕴含：每一棵高度和大小均为 ω_1 且没有不可数分支的树都是特殊的。对这一论证的进一步阐述同样出自 Baumgartner [1, 定理 7.10]，它表明 PFA 蕴含：每一棵高度和大小为 ω_1 的树都是 B-特殊的。

在 [15], Laver 证明，若对任意满足马丁公理$_{\omega_1}$的模型施加测度代数强迫，那么在所得的强迫扩张中，任何高度和大小为 ω_1 且没有不可数分支的树仍然是特殊的。特别是，这肯定地解决了苏斯林假设是否与 $\mathrm{cf}(2^\omega) = \omega_1$相容的问题。本节中，我们修改 Laver 的论证，证明一个类似结果：若对任意满足 PFA 的模型施加测度代数强迫，那么在所得的强迫扩张中，每棵高度和大小为 ω_1 的树都是 B-特殊的。

下面的命题将会用到。

命题 5.2 ([3, 命题 4.3])。设 T 是一棵高度为ω_1的 B-特殊树，并设 W 是 V 的一个外模型，满足 $(\omega_1)^W = (\omega_1)^V$。那么，任何属于 W 的 T 的不可数分支也属于 V。

我们还需要以下定义和引理。

定义 5.3. 设 T 是一棵树， B 是 T的共尾分支集合。若函数 $g: B \to T$ 满足 g 为单射，且

(1) 对所有 $b \in B$，都有 $g(b) \in b$；(2) 对所有 b，$b' \in B$，若 $g(b) < g(b')$，则 $g(b') \notin b$。

如果 B 很小，那么总存在一个定义域为 B 的 Baumgartner 函数：

引理 5.4 ([1, 引理 7。6]). 设 κ 是一个正则基数， T 是一棵高度为 κ的树， B 是 T 的共尾分支集合，并且 $|B| \leq \kappa$。那么存在一个 *Baumgartner* 函数 $g: B \to T$。

定理 5.5. 设 PFA成立， κ 是一个无限基数，且 $\mathbb{B}$ 是 2^κ上的测度代数，其关联测度为 μ。那么在 $V^{\mathbb{B}}$中，每棵高度和大小为 ω_1 的树都是 B-特殊的。

证明。为简化记号，假设 $\kappa \geq \omega_2$；若$\kappa \in \{\omega, \omega_1\}$，同样的思路也适用。固定一个 $\mathbb{B}$-名称 T，它表示一棵高度和大小均为 ω_1 的树。注意，由于$\Vdash_{\mathbb{B}}$ “$2^\omega = 2^{\omega_1} = \kappa$”，我们有 $\Vdash_{\mathbb{B}}$ “T 至多有 κ 个不可数分支”。令 $\mathbb{C} = \mathrm{Coll}(\omega_1, \kappa)$（定义见 V）。由于 $\mathbb{B}$ 满足可数链条件，且 $\mathbb{C}$ 是 ω_1-闭合的， [27, 引理 6] 蕴含， $\mathbb{B} \times \mathbb{C}$ 扩张中的 T 的每个不可数分支都已存在于 $\mathbb{B}$扩张中。特别地，在 $V^{\mathbb{C}}$中，我们有

$\Vdash_{\mathbb{B}}$“$\dot{T}$至多有 ω_1 个不可数分支”。因此，在 $V^{\mathbb{C}}$ 中，并令 B 为一个 $\mathbb{B}$-名称，表示经过 T 的所有不可数分支组成的集合，5.4 引理蕴含，我们可以找到一个 $\mathbb{B}$-名称 $\dot{g}\colon B\to T$ 它被迫是一个 Baumgartner 函数。

仍在 $V^{\mathbb{C}}$ 中工作，令 $\dot{T}_0$ 为集合的一个 $\mathbb{B}$-名称

$$\{t\in\dot{T}\mid\exists b\in\dot{B}\ \dot{g}(b)<_{\dot{T}}t\in\dot{b}\},$$

并令 T_1 为 $T\setminus T_0$ 的一个 $\mathbb{B}$-名称。那么，T_1 被迫成为 T 的一棵子树（带有诱导序），并且由于 B 的每个元素的某个尾段都被迫属于 T_0，我们有 $\Vdash_{\mathbb{B}}$“T_1 没有不可数分支”。

在 V 中，$\mathbb{C}$ 是 ω_1-闭合的，因此不会为 2^κ 的博雷尔子集添加任何新编码。因此，在 $V^{\mathbb{C}}$ 中，2^κ 上的测度代数同构于 $\mathbb{B}$，所以在 $V^{\mathbb{C}}$ 中工作时，我们仍可将 $\mathbb{B}$ 视为 2^κ 上的测度代数。因此，[15] 的主要结果的证明意味着，在 $V^{\mathbb{C}}$ 中，存在一个可数链条件强迫偏序集 $\mathbb{P}$，它会添加一个为 T_1 的特化函数的 $\mathbb{B}$-名称。我们来回顾一下这个偏序集的定义。

在 $V^{\mathbb{C}}$ 中工作。不失一般性，我们可以假设 T 的底集被强制为 ω_1，因此 T_0 和 T_1 的底集被强制为 ω_1 的子集。我们还可以假设 $\Vdash_{\mathbb{B}}$“$\forall\alpha,\ \beta<\omega_1(\alpha<_{\dot{T}}\beta\Rightarrow\alpha<\beta)$”。

对于所有 $\alpha<\omega_1$，令 $A_\alpha\subseteq\mathbb{B}$ 为一族条件的极大反链，它们决定陈述“$\alpha\in T_1$”的真值。对于所有 $\alpha<\beta<\omega_1$，令 $A'_{\alpha\beta}$ 为一族条件的极大反链 $b\in\mathbb{B}$，使得下列条件之一成立：

- b 强制 α 和 β 中至少一个属于 T_0；或
- b 强制 α 和 β 均属于 T_1，并且 b 决定陈述“$\alpha<_{\dot{T}_1}\beta$”的真值。

对于所有 $\gamma<\omega_1$，令 $\mathbb{B}_\gamma$ 为由 $\bigcup_{\alpha\leq\gamma}A_\alpha\cup\bigcup_{\alpha<\beta\leq\gamma}A'_{\alpha\beta}$ 生成的 $\mathbb{B}$ 的完备子代数。由于 $\mathbb{B}$ 满足可数链条件，每个 $\mathbb{B}_\gamma$ 都是可数生成的，因此同构于 2^ω 上的测度代数。因此，我们可以固定一个可数子集 $\mathbb{B}^*_\gamma\subseteq\mathbb{B}_\gamma$，使得对于所有 $b\in\mathbb{B}_\gamma$ 和所有 $\varepsilon>0$，都存在 $b^*\in\mathbb{B}^*_\gamma$，使得 $\mu(b^*-b)<\varepsilon\cdot\mu(b^*)$。

现在定义我们的偏序集 $\mathbb{P}$。$\mathbb{P}$ 中的条件都是函数 p，其定义域形如 $E_p\times W_p$，其中 $E_p\in[\omega_1]^{<\omega}$ 且 $W_p\in[\omega]^{<\omega}$，并满足

- 对所有 $(\alpha,n)\in E_p\times W_p$，或者 $p(\alpha,n)=0$，或者 $p(\alpha,n)\in\mathbb{B}_\alpha$ 且 $\mu(p(\alpha,n))>r_2$；
- 对于所有 $\alpha<\beta$ 属于 E_p 以及所有 $n\in W_p$，要么 $p(\alpha,n)\wedge p(\beta,n)=0$，要么 $p(\alpha,n)\wedge p(\beta,n)\Vdash_{\mathbb{B}}$“$\alpha\not<_{\dot{T}_1}\beta$”。

注意，对于条件 $b\in\mathbb{B}$ 和序数 $\alpha<\beta<\omega_1$，如果我们写作 $b\Vdash_{\mathbb{B}}$“$\alpha<_{\dot{T}_1}\beta$”，那么这一断言隐含着这样一个事实：b 迫使 α 和 β 都属于 T_1。因此，在上面项目符号中，我们可以得到 $p(\alpha,n)\wedge p(\beta,n)\Vdash_{\mathbb{B}}$“$\alpha\not<_{\dot{T}_1}\beta$”的一种方式，是让 $p(\alpha,n)\wedge p(\beta,n)$ 迫使 α 或 β 属于 T_0。

若 $p,q\in\mathbb{P}$，则我们规定：当且仅当对于所有 $(\alpha,n)\in E_p\times W_p$，均有 $E_q\supseteq E_p$，$W_q\supseteq W_p$，$q(\alpha,n)\leq_{\mathbb{B}}p(\alpha,n)$，$q\leq_{\mathbb{P}}p$；并且对于所有这样的 (α,n)，若 $p(\alpha,n)>0$，则 $q(\alpha,n)>0$。

根据 [15, 引理 3]，$\mathbb{P}$ 在 $V^{\mathbb{C}}$ 中满足可数链条件。（我们的偏序集 $\mathbb{P}$ 与 [15] 中考察的偏序集有一些细微的表面差异，这是因为我们添加的是一个名称，用于某个 T 的子树的特化函数，而非整棵树；不过，[15] 中的所有论证都可直接用于我们的情形。）在 V 中，令 $\dot{\mathbb{P}}$ 为 $\mathbb{P}$ 的一个 $\mathbb{C}$-名称。那么 $\mathbb{C}*\dot{\mathbb{P}}$ 是适当的。注意，在 $V^{\mathbb{C}}$ 中，每个条件

$\mathbb{P}$ 实际上属于 V，因为它是从有限个序数对构成的集合到$\mathbb{B}$的函数。因此，在 V中，满足以下条件的条件$(c,\ \dot{p})$构成的集合是稠密的：存在函数 $p \in V$，使得 $c \Vdash_{\mathbb{C}}$ “$\dot{p} = p$”在 $\mathbb{C} * \mathbb{P}$中成立。因此我们将假设只考虑这类条件，并用$(c,\ p)$代替$(c,\ \dot{p})$。

现在我们抽取出一个由 ω_1个稠密子集组成的集合 $\mathbb{C} * \mathbb{P}$，并将对其应用 PFA。首先注意，在 $V^{\mathbb{C}\times\mathbb{B}}$中，对于所有 $\alpha \in T_0$，g 是 Baumgartner 函数这一事实意味着，存在唯一的不可数分支 b，使得 T满足 $g(b) <_T \alpha \in b$。将此唯一分支 b 上的值 $g(b)$记为 η_α，并注意到 $\eta_\alpha \in T_1$。如果 $\alpha \in T_1$，则令 $\eta_\alpha = 0$。在 V中，令 $\dot{\eta}_\alpha$ 为 η_α的一个 $\mathbb{C}\times\mathbb{B}$-名称。

对于每个 $\alpha < \omega_1$，令 D_α 为满足下述条件的 $c \in \mathbb{C}$ 的集合：存在 $\mathbb{B}$ 的一个极大反链 $A(c,\ \alpha)$，使得对于每个 $b \in A(c,\ \alpha)$，$(c,\ b) \in \mathbb{C}\times\mathbb{B}$ 决定陈述“$\alpha \in T_1$”的真值，并决定 $\dot{\eta}_\alpha$的值。由于 $\mathbb{C}$是ω_1-闭合的，且 $\mathbb{B}$ 具有可数链条件，D_α 在 $\mathbb{C}$中稠密。令 D^*_α 为满足 $c \in D_\alpha$的$(c,\ p) \in \mathbb{C} * \mathbb{P}$的集合。则 D^*_α 在 $\mathbb{C} * \mathbb{P}$中稠密。

回想一下，在 $V^{\mathbb{C}}$ 中，对于每个 $\gamma < \omega_1$，我们构造了 $\mathbb{B}_\gamma$，使其成为 $\mathbb{B}$ 的可数生成完备子代数，并且还指定了一个可数子集 $\mathbb{B}^*_\gamma \subseteq \mathbb{B}_\gamma$，使得对于所有 $b \in \mathbb{B}_\gamma$ 和每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $b^* \in \mathbb{B}^*_\gamma$，满足 $\mu(b^* - b) < \varepsilon \cdot \mu(b^*)$。在 V 中，令 h_γ 为一个 $\mathbb{C}$-名称，表示从 ω 到 $\mathbb{B}^*_\gamma$ 的双射；令 $\mathbb{A}_\gamma$ 为一个 $\mathbb{C}$-名称，表示 $\mathbb{B}_\gamma$ 的一个可数生成集。由于 $\mathbb{C}$ 是 ω_1-闭合的，h_γ 和 $\mathbb{A}_\gamma$ 被迫属于基模型。对于所有 $\gamma < \omega_1$ 和 $k < \omega$，令 $E^*_{\gamma,\ k}$ 为满足以下条件的 $(c,\ p) \in \mathbb{C} * \mathbb{P}$ 的集合

- c 决定 h_γ 的值，例如由某个函数 $h_\gamma : \omega \to \mathbb{B}$ 给出；
- c 决定 $\mathbb{A}_\gamma$ 的值；
- 存在一个 $n < \omega$，使得 $(\gamma, n) \in \mathrm{dom}(p)$，$\mu(p(\gamma, n)) > \frac{1}{2}$，并且 $\mu(p(\gamma, n) - h_\gamma(k)) < \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\mu(h_\gamma(k))$。

我们声称 $E^*_{\gamma,k}$ 在 $\mathbb{C} * \mathbb{P}$ 中稠密。为此，任取一个 $(c_0, p_0) \in \mathbb{C} * \mathbb{P}$。首先找出一个条件 $c_1 \leq_{\mathbb{C}} c_0$、一个函数 $h_\gamma : \omega \to \mathbb{B}$ 以及一个集合 $\mathbb{A}_\gamma$，使得 $c_1 \Vdash_{\mathbb{C}}$ “$h_\gamma = h_\gamma$ 且 $\mathbb{A}_\gamma = \mathbb{A}_\gamma$”。然后，固定一个 $n \in \omega \setminus W_{p_0}$。令 $\dot{p}_1$ 为一个 $\mathbb{C}$-名称，表示 $\mathbb{P}$ 中的一个条件，且 c_1 强迫它具有以下性质：

- $E_{\dot{p}_1} = E_{p_0} \cup \{\gamma\}$；
- $W_{\dot{p}_1} = W_{p_0} \cup \{n\}$；
- 对所有 $(\alpha,\ m) \in E_{p_0} \times W_{p_0}$，$\dot{p}_1(\alpha,\ m) = p_0(\alpha,\ m)$；
- 对所有 $(\alpha,\ m) \in (E_{\dot{p}_1} \times W_{\dot{p}_1}) \setminus (E_{p_0} \times W_{p_0})$，若 $(\alpha,\ m) \neq (\gamma,\ n)$，则 $\dot{p}_1(\alpha,\ m) = 0$；
- $\dot{p}_1(\gamma,\ n)$ 是 $\mathbb{B}_\gamma$ 的一个元素，满足
  - $h_\gamma(k) \leq b$；
  - $\frac{1}{2} < \mu(b) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mu(h_\gamma(k))$】【。

由于 $\mathbb{B}_\gamma$ 必然是无原子的，因此可以满足上述最后一项要求。最后，找到 $c_2 \leq_{\mathbb{C}} c_1$，将 $\dot{p}_1$ 的值判定为某个函数$p_1 \in V$。于是（c_2，p_1）$\in E^*_{\gamma,\ k}$，并且（c_2，p_1）$\leq_{\mathbb{C}*\dot{\mathbb{P}}}$（$c_0$，$p_0$）。

现在在 V中应用PFA，寻找一个滤子 $G \subseteq \mathbb{C} * \mathbb{P}$，使其对所有 $\alpha < \omega_1$和$E^*_{\gamma,\ k}$ 都与 D^*_α 相交；对所有 $\gamma < \omega_1$ 和 $k < \omega$也同样如此。此外，令 $H \subseteq \mathbb{B}$ 为一个 V-泛滤子。在 $V[H]$中进行时，令 T表示 T的实现。我们将使用 G 和 H 来构造一个函数 $f : T \to \omega$，证明 T 是 B-特殊的。

我们首先如下定义子树 T^*_0，$T^*_1 \subseteq T$。对于每个 $\alpha < \omega_1$，找一个条件 $(c^*_\alpha,\ p^*_\alpha) \in G \cap D^*_\alpha$。于是，在 V 中，$A(c^*_\alpha,\ \alpha)$ 是 $\mathbb{B}$ 中的一个极大反链，因此

存在唯一的 $b^*_\alpha \in H \cap A(c^*_\alpha,\ \alpha)$。此外，我们知道 $(c^*_\alpha,\ b^*_\alpha)$ 判定陈述“$\alpha \in T_1$”的真值。如果 $(c^*_\alpha,\ b^*_\alpha)$ 强制 α 属于 T_1，则将 α 放入T^*_1；否则，将 α 放入 T^*_0。另外，$(c^*_\alpha,\ b^*_\alpha)$ 判定 $\dot\eta_\alpha$ 的值；令 η^*_α 为该值。在 V 中，令 T^*_0 和 T^*_1 分别为 T^*_0 和 T^*_1 的 $\mathbb{B}$-名称。

断言 5.6. 对所有 $\alpha < \beta \in T^*_0$，若 $\alpha \not<_T \beta$，则要么 $\eta^*_\beta \not<_T \alpha$，要么 $\eta^*_\alpha \not<_T \beta$。

证明. 固定 $\alpha < \beta \in T^*_0$，并为导出矛盾，假设 $\alpha \not<_T \beta$，但 $\eta^*_\beta <_T \alpha$ 且 $\eta^*_\alpha <_T \beta$。令 c^* 为 $\mathbb{C}$ 中 c^*_α 和 c^*_β 的最大下界，并令 $b^* \leq b^*_\alpha \wedge b^*_\beta$ 为 H 中一个强迫 $\alpha \not<_T \beta$、$\eta^*_\beta <_T \alpha$ 和 $\eta^*_\alpha <_T \beta$ 的条件。则在 V 中，$(c^*, b^*) \Vdash_{\mathbb{C}\times\mathbb{B}}$“$\dot\eta_\alpha = \eta^*_\alpha$ 且 $\dot\eta_\beta = \eta^*_\alpha$。特别地，存在 $\mathbb{B}$-名称 d_α, d_β，它们是穿过 T 的不可数分支，使得

$$(c^*, b^*) \Vdash_{\mathbb{C}\times\mathbb{B}} \text{“}\alpha \in \dot d_\alpha,\ \beta \in \dot d_\beta,\ \dot g(\dot d_\alpha) = \eta^*_\alpha,\ \dot g(\dot d_\beta) = \eta^*_\beta\text{”}.$$

既然 b^* 强迫 $\alpha \not<_T \beta$，那么 $(c^*,\ b^*)$ 必定强迫 d_α 和 d_β 是 T的不同分支，因此 $\eta^*_\alpha \neq \eta^*_\beta$。既然 $(c^*,\ b^*)$ 强迫 $\eta^*_\alpha,\ \eta^*_\beta <_T \alpha$，它就强迫 η^*_α 和 η^*_β 是 $<_T$-可比较的。假设 $\eta^*_\alpha < \eta^*_\beta$，此时 $(c^*,\ b^*) \Vdash_{\mathbb{C}\times\mathbb{B}}$“$\eta^*_\alpha <_T \eta^*_\beta$”。由于 $\dot g$ 被强迫为一个 Baumgartner 函数，因此 $(c^*,\ b^*)$ 必须 $\Vdash_{\mathbb{C}\times\mathbb{B}}$“$\eta^*_\beta \notin d_\alpha$”。然而，$(c^*,\ b^*) \Vdash_{\mathbb{C}\times\mathbb{B}}$“$\eta^*_\beta <_{\dot T} \alpha \in d_\alpha$”，这就产生了矛盾。对称的论证表明，若 $\eta^*_\beta < \eta^*_\alpha$，也会产生矛盾，从而完成了该断言的证明。□

对于每个 $\gamma < \omega_1$，由于 $G \cap E^*_{\gamma,\ 0} \neq \emptyset$，我们可以找到一个条件 $(c,\ p) \in G$，使其判定 h_γ 和 $\mathbb{A}_\gamma$ 的值，分别为 h_γ 和 $\mathbb{A}_\gamma$。令 $\mathbb{B}^*_\gamma$ 为由 $\mathbb{A}_\gamma$ 在 V 中生成的 $\mathbb{B}$ 的子代数。

对于每个 $\alpha \in T^*_1$ 和每个 $n < \omega$，令

$$b_{\alpha,n} = \bigwedge\{p(\alpha, n) \mid (\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p) \text{ and } \exists c \in \mathbb{C}\ (c, p) \in G\}.$$

注意，$b_{\alpha,\ n}$ 属于 $\mathbb{B}^*_\alpha$（可能等于 $\mathbf{0}$）；并且，如果 $b_{\alpha,\ n} > 0$，则 $\mu\ (b_{\alpha,\ n}) \geq \frac{1}{2}$。在 V 中，令 H 为泛滤子的典范 $\mathbb{B}$-名称。

断言 5.7。 对于每个 $\alpha \in T^*_1$，存在 $n < \omega$，使得 $b_{\alpha,\ n} > 0$ 且 $b_{\alpha,\ n} \in H$。

证明。 固定 $\alpha \in T^*_1$，并假设存在 $b \in H$，从而引出矛盾；亦即，在 V 中，我们有

- $b \Vdash_{\mathbb{B}}$“$\alpha \in \dot T^*_1$”；
- $b \Vdash_{\mathbb{B}}$“不存在这样的 $n < \omega$，使得 $b_{\alpha,\ n} > 0$ 且 $b_{\alpha,\ n} \in H$”。

特别是，对于每个满足 b_α 的 $n < \omega$，$n > 0$，必定有 $b_{\alpha,\ n}$ 和 b 不相容。由于每个 $b_{\alpha,\ n}$ 都属于 $\mathbb{B}^*_\alpha$，我们可以假设 b 也属于$\mathbb{B}^*_\alpha$。因此，我们可以找到 $k < \omega$，使得 $\mu(h_\alpha(k) - b) < \frac{1}{4}\mu(h_\alpha(k))$，从而 $\mu(h_\alpha(k) \wedge b) > \frac{3}{4}\mu(h_\alpha(k))$。现在找出 $(c, p) \in G \cap E^*_{\alpha,k}$ 于是我们可以找到 $n < \omega$，使得 $(\alpha, n) \in \mathrm{dom}(p)$，$\mu(p(\alpha, n)) > \frac{1}{2}$，并且 $\mu(p(\alpha, n) - h_\alpha(k)) < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mu(h_\alpha(k))$。特别是，由于 $b_{\alpha,\ n} \leq p(\alpha, n)$ 和 $\mu(b_{\alpha,n}) \geq \frac{1}{2}$，我们必有 $\mu(b_{\alpha,n} \wedge h_\alpha(k)) > \frac{1}{2}\mu(h_\alpha(k))$。综上，这意味着 $b_{\alpha,\ n}$ 和 b 在 $\mathbb{B}$ 中相容，这与我们对 b的选择矛盾。□

对于每个 $\alpha \in T^*_1$，令 $f(\alpha)$ 为满足 $b_{\alpha,\ n} > 0$且 $b_{\alpha,\ n} \in H$ 的最小 n。对于每个 $\alpha \in T^*_0$，回忆一下我们定义了一个序数 η^*_α，使得 $\eta^*_\alpha <_T \alpha$且 $\eta^*_\alpha \in T^*_1$。对于这样的 α，令 $f(\alpha) = f(\eta^*_\alpha)$。

还需证明 f 能见证 T 是 B-特殊的。我们首先声称，$f \restriction T_1^*$ 能见证 T_1^* 是特殊的。为此，固定 $\alpha,\ \beta \in T_1^*$并假设 $f(\alpha) = f(\beta) = n$。于是我们有 $b_{\alpha,\ n} \wedge b_{\beta,\ n} \in H$。找出 $(c,\ p) \in G$，使得 $(\alpha,\ n)$ 和 $(\beta,\ n)$ 都属于 $\mathrm{dom}(p)$。那么，根据 $V^{\mathbb{C}}$ 中 $\mathbb{P}$ 的定义，我们必有

$$c \Vdash_{\mathbb{C}} \text{“}p(\alpha, n) \wedge p(\beta, n) \Vdash_{\mathbb{B}} \text{“}\alpha \not<_{\dot{T}_1} \beta\text{””}.$$

由于 $\alpha, \beta \in T_1^*$，我们可以找到 c 的一个扩张 c^*，使得 $(c^*, p) \in G$，并且 $(c^*, b_\alpha^* \wedge b_\beta^*) \Vdash$ “$\alpha, \beta \in T_1$”。然后，$p(\alpha, n) \wedge p(\beta, n) \wedge b_\alpha^* \wedge b_\beta^*$ 属于 H，并且强迫 $\alpha \not<_{\dot{T}} \beta$。因此，$\alpha$ 和 β 在 T 中不可比较，所以 $f \restriction T_1^*$ 确实见证了 T_1^* 是特殊的。

现在假设 $\alpha < \beta < \gamma < \omega_1$, $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = n$，且 $\alpha <_T \beta, \gamma$。先假设 $\beta \in T_1^*$。由于 $f \restriction T_1^*$ 见证了 T_1^* 是特殊的，我们必有$\alpha \in T_0^*$。但这样一来，我们就有 $\eta_\alpha^* <_T \alpha <_T \beta$, $\eta_\alpha^* \in T_1^*$，以及 $f(\eta_\alpha^*) = f(\alpha) = f(\beta)$，这又导致了矛盾。因此，我们必有 $\beta \in T_0^*$；同理，我们也有$\gamma \in T_0^*$。

若 $\alpha <_T \eta_\beta^*$，那么我们恰如前一段那样得到矛盾，因为 $f(\alpha) = f(\beta) = f(\eta_\beta^*)$，且 $\eta_\beta^* \in T_1^*$。因此，必有 $\eta_\beta^* \leq_T \alpha$。类似地，$\eta_\gamma^* \leq_T \alpha$。但这样一来，$\eta_\beta^* <_T \gamma$ 且 $\eta_\gamma^* <_T \beta$，所以根据断言5.6，必有 $\beta <_T \gamma$。因此，f 证明了 T 是 B-特殊的。□

作为推论，我们可以证明，弱 Kurepa 假设否定命题的一个“不可摧毁”版本与连续统的任何可能取值都相容，但 ω_1除外。更准确地说：

推论 5.8。假设PFA 成立，$\kappa \geq \omega_2$ 是一个具有不可数共尾性的基数，且 $\mathbb{B}$ 是 2^κ上的测度代数。那么，在 $V^{\mathbb{B}}$中，$2^\omega = \kappa$，并且对于每个大小和高度均为 ω_1 的树T，以及 $V^{\mathbb{B}}$ 的每个外模型 W，若$(\omega_1)^W = (\omega_1)^{V^{\mathbb{B}}}$，则$T$ 在 W中至多有 ω_1个不可数分支。

证明。$2^\omega = \kappa$ 属于 $V^{\mathbb{B}}$ 是关于随机强迫的一个标准事实。设$T \in V^{\mathbb{B}}$ 是一个大小和高度为 ω_1的树，并设 W 是 $V^{\mathbb{B}}$ 的一个外模型，满足 $(\omega_1)^W = (\omega_1)^{V^{\mathbb{B}}}$。根据定理 5.5，$T$在 $V^{\mathbb{B}}$中是 B-特殊的。根据定理 7.4], , 可知 T 在 $V^{\mathbb{B}}$中至多有 ω_1个不可数分支。根据命题 5.2，T 在 W 中的每个不可数分支都已经属于 V。因此，T 在 W中至多有ω_1个不可数分支。□

现在我们将本节的结果与本文的主要议题联系起来。在 [3], 中，Cox 和 Krueger 引入了不可摧毁猜测模型性质：

定义 5.9 ([3])。设 $\theta \geq \omega_2$ 是一个正则基数。若 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$是一个不可摧毁的 ω_1-猜测模型，则称其为 ω_1-猜测模型，且在任何保留 ω_1的强迫扩张中仍为 ω_1-猜测模型。IGMP(θ)表示在 $\mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$中存在平稳多个不可摧毁的 ω_1-猜测模型。IGMP表示对所有正则 $\theta \geq \omega_2$，IGMP(θ)都成立。

在 [3], Cox 和 Krueger 的论文中，他们证明 IGMP 可由以下两个陈述的合取推出：

- 对于所有正则 $\theta \geq \omega_2$，在 $\mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$中都有平稳多个内部无界$\omega_1$-猜测模型；
- 每棵大小和高度为 ω_1 且没有共尾分支的树都是特殊的。

在 [10], Krueger 证明，若 $\theta \geq \omega_2$ 是一个正则基数，且 $N \prec H(\theta)$ 是一个ω_1-猜测模型，且 $\omega_1 \subseteq N$，那么 N 是内部无界的。因此，IGMP可由以下两者的合取推出：GMP ，以及断言所有大小和高度为 ω_1 且没有共尾分支的树都是特殊的；特别地，它可由 PFA推出。

IGMP 有一些 GMP 所不具备的推论。例如，它蕴含不存在苏斯林树，而 Cox 和 Krueger 的另一项工作 [2] 表明，GMP 与苏斯林树的存在相容（我们将在下一节通过证明 GMP 可由强迫公理 PFA(S) 推出，给出这一合取的另一个模型）。

根据 [3, 定理 2。8], 显然，IGMP(ω_2) 蕴含了 ¬wKH 在推论 5.8 中讨论的不可破坏版本， W 是 V的一个强迫扩张。推论 5.8中，我们看到，这一 ¬wKH 的不可破坏版本与连续统的任意可能取值相容，包括余终性为 ω_1的取值。在 [3], 中，Cox 和 Krueger 证明了IGMP 与余终性至少为 ω_2的连续统任意可能取值都相容。这两个结果结合起来，自然引出了以下问题：

问题 5.10. IGMP 是否与$\mathrm{cf}(2^\omega) = \omega_1$相容？那么仅IGMP($\omega_2$)呢？

6. Forcing axioms for Suslin and almost Suslin trees

本节继续探讨由 IGMP 研究所引发的问题，将其与 Todorcevic[25] 和 Krueger [11], 分别提出的强迫公理 PFA(S) 和 PFA(T*) 联系起来。在此过程中，我们回答 Cox 和 Krueger [3] 以及 Krueger [11]提出的问题。我们先回顾相关定义。

定义 6.1. 假设 T 是一个 ω_1-树，即高度为 ω_1、每一层都可数的树。

(1) T 是一个*Aronszajn*树，如果它没有共尾分支。(2) T 是一个苏斯林树，如果它是 Aronszajn树且没有不可数反链。(3) T 是一个几乎苏斯林树，如果它没有驻定反链，即不存在反链 $A \subseteq T$ 使得集合 $\{\mathrm{ht}(s) \mid s \in A\}$ 在 ω_1中是平稳的，其中 ht(s)表示 s 在 T中的层级。

我们注意到，几乎苏斯林树未必是 Aronszajn 树，不过本文只关注作为 Aronszajn 树的几乎苏斯林树。本节中，我们遵循既定记法，始终用 S 表示苏斯林树，用 T^* 表示几乎 Suslin 的 Aronszajn 树。按照这一约定，下面对记法稍作滥用也不会造成混淆。

定义 6.2. 设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念。

(1) 对于苏斯林树 S，若 $\mathbb{P}$ 是 S-保持的，即 $\Vdash_{\mathbb{P}}$“S 是一棵苏斯林树”，则称之为如此。(2) 对于几乎 Suslin 的 Aronszajn 树 T^*，若 $\mathbb{P}$ 是 T^*-保持的，即$\Vdash_{\mathbb{P}}$“T^* 是一棵几乎 Suslin 的 Aronszajn 树”，则称之为如此。

现在我们来介绍构成本节主题的强迫公理。值得注意的是，在大多数其他著作中，强迫公理 MA$_{\omega_1}$(S) 和 PFA(S) 要求S 是一个相干的Suslin 树。由于我们的论证都不需要相干性，因此我们选择以更一般的形式陈述这些公理，而不要求

相干性。值得注意的是，当我们将 Suslin 树解释为强迫概念时，强迫序被理解为树序的逆序。

定义 6.3. 若 $\mathcal{C}$ 是一个强迫偏序集类，则 FA($\mathcal{C}$) 表示如下断言：对于每个 $\mathbb{P} \in \mathcal{C}$ 以及 $\mathcal{D} = \{D_\alpha \mid \alpha < \omega_1\}$ 个 ω_1-多稠密子集 $\mathbb{P}$，都存在一个滤子 $G \subseteq \mathbb{P}$，使得对所有 $\alpha < \omega_1$，$G \cap D_\alpha \neq \emptyset$ 成立。

(1) MA$_{\omega_1}$(S) 表示如下断言： S 是一个苏斯林树，且 FA($\mathcal{C}$) 成立，其中 $\mathcal{C}$是保持可数链条件 S的偏序集类。(2) PFA(S) 表示如下断言： S 是一个苏斯林树，且 FA($\mathcal{C}$) 成立，其中 $\mathcal{C}$ 是保持 S 的适当偏序集类。(3) 如果我们从一个满足 PFA(S) 的模型出发，然后用苏斯林树 S 进行强迫，那么我们称所得的强迫扩张满足 PFA(S)[S]。断言 PFA(S)[S] 蕴含一个命题 φ，应理解为断言：在任何满足 ZFC 且对某个相干苏斯林树 S 满足 PFA(S) 的模型中，都有 $\Vdash_S \varphi$。MA$_{\omega_1}$(S)[S] 的定义类似，只需用 MA$_{\omega_1}$(S) 替换 PFA(S)。(4) PFA(T*) 表示如下断言： T^* 是一个几乎 Suslin 的 Aronszajn 树，且 FA($\mathcal{C}$) 成立，其中 $\mathcal{C}$ 是保持 T^* 的适当偏序集类。

注记 6.4。 以下命题的一致性： PFA(S)（从而 PFA(S)[S]) 以及 PFA(T*) 的一致性，均可由存在超紧基数的一致性，以几乎相同于由同一假设推出 PFA 一致性的方式得到。证明概要见 [25, 定理 4。1] 以及 [11, 定理 2。6]。

下面的引理归功于伍丁（参见 [33, 定理 2 的证明。53]），将会很有用。回忆一下，若 $\mathbb{P}$ 是一个强迫偏序集，且对于某个正则不可数基数 θ 有 $\mathbb{P} \in M \prec H(\theta)$，那么我们称滤子 $G \subseteq \mathbb{P}$ 对于 $\mathbb{P}$ 中的所有稠密子集 D 都是 M-泛型的，其中这些稠密子集是 M的元素。

引理 6.5。 设 $\mathcal{C}$ 是强迫偏序集的一个类，且 FA($\mathcal{C}$) 成立。那么，对于每个偏序集 $\mathbb{P} \in \mathcal{C}$ 以及所有充分大的正则基数 θ，集合

$$\{M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta) \mid |M| = \omega_1 \subseteq M \wedge \exists G \subseteq \mathbb{P}\ [G \textit{ is an } M\textit{-generic filter}]\}$$

在 $\mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$ 中是平稳的。

6.1. **苏斯林树**。 在 [3], Cox 和 Krueger 提出，IGMP 是否蕴含 $\mathfrak{p} > \omega_1$。本节中，我们证明公理 PFA(S)[S] 蕴含 IGMP。由于 $\mathfrak{p} = \omega_1$ 在由苏斯林树强迫得到的任何强迫扩张中都成立（参见 [5, 引理 2]），因此在任何 PFA(S)[S], 模型中也成立，这就对 Cox 和 Krueger 的问题给出了否定答案。我们还证明 PFA(S) 蕴含 GMP。因此，PFA(S) 的模型提供了这样的模型实例：GMP 成立且存在一棵苏斯林树，因而 IGMP 不成立；但用一棵特定的苏斯林树进行强迫，却会得到一个满足 IGMP 的模型。

给定一棵高度为 ω_1 的树 T 和一个集合 $C \subseteq \omega_1$，令 T_C 表示满足 ht(s) $\in C$ 的 $s \in T$ 的集合，其序关系取自 T 的继承序。注意，若 S 是一棵苏斯林树且 $C \subseteq \omega_1$ 无界，则 S_C 本身也是一棵苏斯林树。

以下定理归功于 Raghavan 和 Yorioka [20]，但需额外假设 S 是相干的；不过，他们指出，在 T 是一棵 Aronszajn树的名称时，这一结果早已为人所知。由于我们去掉了 S 必须相干这一要求，而且我们认为自己的证明比 [20], 中给出的证明更简单，因此在此给出证明。

定理 6.6. 假设 S 是一棵苏斯林树，且 T 是一个 S 名称，指称一棵高度为、大小为 ω_1 且没有共尾分支的树。那么存在一个强迫概念 $\mathbb{P}(T)$，使得 $\mathbb{P}(T) \times S$ 满足可数链条件，且 $\Vdash_{\mathbb{P}(\dot{T})\times S}$“$T$ 是特殊的”。

证明。我们可以假设 S 强制断言：

- T 的底集是 ω_1；
- 对于所有 α，$\beta < \omega_1$，如果 $\alpha <_{\dot{T}} \beta$，那么 $\alpha < \beta$。

因此，我们可以将 $\dot{T}$ 视为一个子集 $\dot{X} \subseteq [\omega_1]^2$的名称，其中，对于所有$\alpha < \beta < \omega_1$，我们有

$$\Vdash_S \text{“}\alpha <_{\dot{T}} \beta \Leftrightarrow \{\alpha, \beta\} \in \dot{X}\text{”}.$$

根据 [14], 定理 4.2 的陈述之后紧接着的论证，我们可以找到一个无界的 $C \subseteq \omega_1$ 和一个子集 $K \subseteq [S_C]^2$，使得对于所有 $t \in S_C$ 以及所有$\alpha < \beta < \mathrm{ht}_{S_C}(t)$，都有 $t \Vdash_S$“$\{\alpha, \beta\} \in X$” 当且仅当 $\{s, r\} \in K$，其中 s和r 分别是 S_C 中 t 在层级 α 和 β 上的前驱。由于用S_C 进行强迫等价于用 S进行强迫，为了方便记号，我们假设 $C = \omega_1$，并用 S 代替 S_C。此外，由于前面的句子只提到了满足 $s <_S r$ 或 $r <_S s$的点对$\{s, r\} \in K$，我们可以假设 K 只由通过 $<_S$可比较的点对组成。

令 $\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}$ 为这样一个强迫概念，其条件是所有有限偏函数 $p : S \to \omega$，且满足：对于所有 s，$t \in \mathrm{dom}(p)$，如果 $p(s) = p(t)$，那么$\{s, t\} \notin K$。按反向包含关系排列 $\mathbb{P}$。我们可以把 $\mathbb{P}$ 看作自然的强迫，用于添加一个为 T 的特化函数的 S-名称。

断言 6.7. $\mathbb{P} \times S$ 具有可数链条件。

证明。令 $\langle (p_\eta, s_\eta) \mid \eta < \omega_1 \rangle$ 为 $\mathbb{P} \times S$中的条件序列。我们将证明存在 $\eta_0 < \eta_1$，使得 (p_{η_0}, s_{η_0}) 和 (p_{η_1}, s_{η_1}) 相容。由于S 是 Suslin，因此具有可数链条件，故存在 $s^* \in S$，使得 $s^* \Vdash_S$“$\{\eta < \omega_1 \mid s_\eta \in \dot{G}\}$ 是不可数的，”其中 G 是 S-泛滤子的规范名称。令$G \subseteq S$ 为满足 $s^* \in G$的一个 V-泛滤子，并转到 $V[G]$。令 $A := \{\eta < \omega_1 \mid s_\eta \in G\}$。根据我们对 G的选择，A 是不可数的。利用 Δ-系引理，找出一个无界的 $A' \subseteq A$，使得 $\{\mathrm{dom}(p_\eta) \mid \eta \in A'\}$ 构成一个 Δ-系，其根为R。由于 S 的每一层都是可数的，且每个 p_η 的陪域都是 ω，必要时进一步对 A' 取子集，我们还可以假设以下条件成立。

- 存在 $n < \omega$，使得对于所有 $\eta \in A'$，$R_\eta := \mathrm{dom}(p_\eta) \setminus R$ 的大小为 n。将每个 R_η 枚举为 $\{r^\eta_m \mid m < n\}$。
- 对于所有 η_0，$\eta_1 \in A'$，都有 $p_{\eta_0} \restriction R = p_{\eta_1} \restriction R$。
- 对于所有 $\eta_0 < \eta_1$（它们都属于 A'），对于所有 m_0，$m_1 < n$，以及所有 $r \in R$，都有 $\mathrm{ht}(r) < \mathrm{ht}(r^{\eta_0}_{m_0}) < \mathrm{ht}(r^{\eta_1}_{m_1})$。

对于 A' 中的所有 $\eta_0 < \eta_1$，我们知道 s_{η_0} 和 s_{η_1} 都属于 G，因此彼此相容。因此，若能找到这样的 η_0 和 η_1，使得 p_{η_0} 和 p_{η_1} 相容，我们就完成了。假设情况并非如此。我们按照 Baumgartner 的经典证明继续，该证明表明，将一个没有共尾分支的 ω_1-树特殊化的强迫满足可数链条件。具体而言，对于来自 A' 的每一对 $\eta < \xi$，由我们对 A' 的统一化可知，阻碍 p_η 和 p_ξ 相容的唯一因素，是存在 $m_{\eta,\xi,0}, m_{\eta,\xi,1} < n$，使得 $p_\eta(r^\eta_{m_{\eta,\xi,0}}) = p_\xi(r^\xi_{m_{\eta,\xi,0}})$ 且$\{r^\eta_{m_{\eta,\xi,0}}, r^\xi_{m_{\eta,\xi,1}}\} \in K$。根据我们对 K 的假设可得 $r^\eta_{m_{\eta,\xi,0}} <_S r^\xi_{m_{\eta,\xi,1}}$。

设 U 是 A' 上的一致超滤子。对于每个 $\eta \in A'$，我们可以固定一个集合 $Y_\eta \in U$ 和一些数 $m_{\eta,0}$，$m_{\eta,1} < n$，使得对于所有 $\xi \in Y_\eta$，都有 $\eta < \xi$、$m_{\eta,\xi,0} = m_{\eta,0}$，

并且 $m_{\eta,\,\xi,\,1} = m_{\eta,\,1}$。现在找一个无界的 $A'' \subseteq A'$ 和一些数 $m_0,\ m_1 < n$，使得 $m_{\eta,\,0} = m_0$ 且对于所有 $\eta \in A''$，都有 $m_{\eta,\,1} = m_1$。给定 $\eta_0 < \eta_1$，它们都属于 A''，求 $\xi \in Y_{\eta_0} \cap Y_{\eta_1}$。于是对每个 $i < 2$，都有 $r^{\eta_i}_{m_0} <_S r^{\xi}_{m_1}$，因此我们有 $r^{\eta_0}_{m_0} <_S r^{\eta_1}_{m_0}$。此外，对每个 $i < 2$，都有 $\{r^{\eta_i}_{m_0}, r^{\xi}_{m_1}\} \in K$，所以根据我们对 $\dot{T}$ 的假设，我们也必有 $\{r^{\eta_0}_{m_0}, r^{\eta_1}_{m_0}\} \in K$。

由前一段可知，$\{r^{\eta}_{m_0} \mid \eta \in A''\}$ 的向下闭包是穿过 S的一条共尾分支；令 b' 表示这条共尾分支。由于 S 在 V中是 Suslin 的，b'在 S上生成一个 V-泛滤子 G'。令 T' 为使用 G'对 T的解释。对于 A''中的所有 $\eta_0 < \eta_1$，我们都有 $\{r^{\eta_0}_{m_0}, r^{\eta_1}_{m_0}\} \in K$，因此，$<_{T'}$-向下闭包of$\{\mathrm{ht}(r^{\eta}_{m_0}) \mid \eta \in A''\}$ 在 T'中生成一条共尾分支，这与以下事实矛盾：在V中，我们有 $\Vdash_S$ “T 没有共尾分支”。□

对每个 $s \in S$，令 $D_s := \{p \in \mathbb{P} \mid s \in \mathrm{dom}(p)\}$，并注意到 D_s 是 $\mathbb{P}$的一个稠密开子集。因此，$\mathbb{P}$ 的泛型对象可视为一个从S 到 ω的函数。令 $\dot{g}$ 为该函数的一个规范 $\mathbb{P}$-名称，并令 $\dot{c}$ 为一个从 ω_1 到 ω 的函数的 $\mathbb{P} \times S$-名称，使得对所有 $\alpha < \omega$ 以及所有满足 $\mathrm{ht}(t) > \alpha$ 的 $t \in S$，我们有

$$(\emptyset, t) \Vdash_{\mathbb{P}\times S} \text{“}\dot{c}(\alpha) = \dot{g}(s)\text{”},$$

其中，s 是 t 在 S的第 α 层上的前驱。

如果我们证明 $\dot{c}$ 被迫是 T的一个特化函数，证明就完成了。为导出矛盾，假设存在 $(p,\ t) \in \mathbb{P} \times S$ 和 $\alpha < \beta < \omega_1$，使得 $(p,\ t) \Vdash_{\mathbb{P}\times S}$ “$\alpha <_{\dot{T}} \beta$ 且 $\dot{c}(\alpha) = \dot{c}(\beta)$”。我们可以假设 $\mathrm{ht}(t) > \beta$。令 s 和 r 分别为 t 在 S的第 α 层和第 β 层上的前驱。我们还可以假设 $\{s, r\} \subseteq \mathrm{dom}(p)$。于是有 $\{s, r\} \in K$和 $p(s) = p(r)$，这与 p 是 $\mathbb{P}$中的一个条件这一事实相矛盾。□

推论 6.8。马丁公理ω_1（S）[S] 意味着，每个高度和大小为 ω_1 且没有共尾分支的树都是特殊的。

现在我们证明，PFA（S）[S] 意味着 GMP。由于 PFA（S）[S] 还意味着所有高度和大小为 ω_1 且没有共尾分支的树都是特殊的，因此由第 5 节末尾的讨论可知，PFA（S）[S] 意味着 IGMP。我们的证明是对 [31] 证明 PFA 意味着 GMP这一事实的证明进行修改。

我们首先回顾由 Hamkins 引入的覆盖和逼近性质（参见 [6]）。

定义 6.9。设 $V \subseteq W$ 是 ZFC 的传递模型，且 μ 是一个正则不可数基数。

(1) $(V,\ W)$ 满足 μ-覆盖性质，如果对于每个 $x \in W$，满足 $x \subseteq V$和 $|x|^W < \mu$，都存在 $y \in V$，满足 $|y|^V < \mu$ 和 $x \subseteq y$。(2) $(V,\ W)$ 满足 μ-逼近性质，如果对于所有 $x \in W$，满足$x \subseteq V$，并且对于所有满足 $|z| < \mu$的 $z \in V$都有 $x \cap z \in V$，实际上都有 $x \in V$。

偏序集 $\mathbb{P}$ 具有 μ-覆盖性质（分别地，具有 μ-逼近性质），如果对于每个V-泛滤子 $G \subseteq \mathbb{P}$，二元组（$V,\ V[G]$）具有 μ-覆盖性质（分别地，具有 μ-逼近性质）。

在本小节余下部分中，令 S 表示一棵苏斯林树。如果 T 是一个 S-名，表示一棵高度为且大小为 ω_1 且没有共尾分支的树，那么 $\mathbb{P}(T)$ 表示定理6.6 中的强迫，它会添加一个 S-名，表示 T 的特化函数。如果 $\mathbb{P}$ 是一个 S-保强迫概念，并且 T是一个 $\mathbb{P} \times S$-名，表示一棵高度为且大小为

. . ω_1 且没有共尾分支，那么我们通常令 $\mathbb{P}(T)$ 为一个 $\mathbb{P}$-名，表示 $\mathbb{P}(T)$（其中，在 $V^{\mathbb{P}}$中， $\dot{T}$ 被重新解释为一个 S-名）。以下内容与引理 [31, 46]类似，其证明大体上也遵循该引理的证明。

引理 6.10。 设 $\lambda \geq 2^{\omega}$ 是一个无限基数，并令 θ 为充分大的正则基数。假设 $\mathbb{P}$ 保持 S不变，将 2^{λ} 坍缩为基数为ω_1，满足 ω_1-覆盖性质和 ω_1-逼近性质，并且在 V^S中继续满足 ω_1-逼近性质。那么存在一个 $\mathbb{P} \times S$-名称 $\dot{T}_1$，它表示一个高度和大小均为 ω_1 、没有共尾分支的树，以及一个 $w \in H(\theta)$ ，使得对于 每个满足 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$ 的 $\omega_1 \cup \{w\} \subseteq M \prec H(\theta)$ ，如果存在一个 M-通用的 $G \subseteq \mathbb{P} * \mathbb{P}(T_1)$ ，那么在 V^S中， M^S是一个关于 λ的 ω_1-猜测模型。

证明。在 V 中暂且如此处理，并令 $\dot{B}$ 为 $(\lambda 2)^{V^S}$ 的一个 S-名称。利用 $\mathbb{P}$ 将 2^{λ} 压缩至基数为 ω_1 ，且满足 ω_1 覆盖性质这一事实，令 $\dot{c}$ 为一个 $\mathbb{P}$-名称，表示从 ω_1 到 $(\mathscr{P}_{\omega_1}\lambda)^{V^{\mathbb{P}}}$ 的递增、连续且共终函数。由于 $\mathbb{P}$ 满足 ω_1 覆盖性质，我们可以假设，对所有 $\alpha < \omega_1$，都有 $\Vdash_{\mathbb{P}}$“$\dot{c}(\alpha+1) \in V$”。令 ℓ 为从 ω_1 到 B 的一个双射的 $\mathbb{P} \times S$-名称，并令 T 为 $\{\ell(\eta) \restriction \dot{c}(\alpha) \mid \eta, \alpha < \omega_1\}$ 的一个 $\mathbb{P} \times S$-名称。注意， T 被强制为一个高度和大小均为 ω_1 的树。此外，由于 $\mathbb{P}$ 在 V^S 中具有 ω_1 逼近性质， $\dot{B}$ 被强制恰好是经过 $\dot{T}$ 的共尾分支集合。由于在 $V^{\mathbb{P}\times S}$ 中， $\dot{B}$ 被强制具有基数 ω_1 ，我们可以应用引理 5.4，找到一个 $\mathbb{P} \times S$-名称 $\dot{g}$，表示从 B 到 T 的 Baumgartner 函数。

Let $\dot{T}_0$ 是集合 $\{t \in$ 的 $\mathbb{P} \times S$-名称 $\dot{T} \mid \exists b \in \dot{B}\ \dot{g}(b) <_{\dot{T}} t \in b\}$，并令 T_1 是 $T \setminus T_0$ 的 $\mathbb{P} \times S$-名称。由于 T_0 被迫包含每个 $b \in B$ 的一个尾段，因此 $\dot{T}_1$ 被迫在 $V^{\mathbb{P}\times S}$ 中没有不可数分支。因此，我们可以令 $\mathbb{Q}$ 为 $\mathbb{P}(T_1)$ 的一个 $\mathbb{P}$- 名称，其中 T_1 在 $V^{\mathbb{P}}$ 中被重新解释为一个 S- 名称。由于 $\dot{\mathbb{Q}}$ 被迫添加一个 $\dot{T}_1$ 的特化函数的 S-名称，我们可以固定一个从 T_1 到 ω 的特化函数的 $(\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}) \times S$-名称 f。

我们声称 T_1 正是所需的。令 w 为一个包含所有相关信息的集合, 包括 S，$\dot{c}$、 T、 T_0、 T_1、 f、 $\dot{g}$ 和 ℓ。现在固定 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$，使得 $\omega_1 \cup \{w\} \subseteq M \prec H(\theta)$，并假设 $G = G_0 * G_1 \subseteq (\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}) \cap M$ 是 M-泛型的。我们将证明，在 V^S 中， M^S 是 λ的一个 ω_1-猜测模型。

令 H 为 V 上的 S-泛滤子，并转到 $V[H]$。令 $c := \dot{c}^{G_0} : \omega_1 \to \mathscr{P}_{\omega_1}(\lambda \cap M)$，注意到 c是 $\subseteq$-递增且连续的，并且对所有 $\alpha < \omega_1$都有 $c(\alpha+1) \in M$。此外， c 在 $(\mathscr{P}_{\omega_1}\lambda)^M$中共终，并且由于 S 是 ω_1-分配的，它在 $(\mathscr{P}_{\omega_1}\lambda)^{M[H]}$中也共终。令 $g := \dot{g}^{G_0\times H}$, $T := \dot{T}^{G_0\times H}$（对 T_0和T_1也类似）， $f := \dot{f}^{(G_0*G_1)\times H}$, $B = \dot{B}^H$，以及 $\ell := \dot{\ell}^{G_0\times H}$。令 $B \restriction M[H] := \{b \restriction M[H] \mid b \in B \cap M[H]\}$。

由初等性以及 $G_0 * G_1$ 是 M-泛型这一事实，我们得到以下结论：

- $\ell :\ \omega_1 \to B \cap M[H]$ 是一个双射。
- $T = \{b \restriction c(\alpha) \mid b \in B \cap M[H],\ \alpha < \omega_1\}$。
- $B \restriction M[H]$ 是穿过 T 的不可数分支集合。
- $\mathrm{dom}(g) = B \cap M[H]$; 我们将稍微滥用记号，把 $\mathrm{dom}(g)$ 与 $B \restriction M[H]$ 等同起来。

- $g :\ B \restriction M[H] \to T$ 是一个 Baumgartner 函数。
- $T = T_0 \cup T_1$。
- $f : T_1 \to \omega$ 是一个特化函数。

断言 6.11。 $B \restriction M[H]$ 是穿过 T的不可数分支集合。

证明。我们已经看到， $B \restriction M[H]$ 中的每个元素都是穿过 T的不可数分支。对于反向包含，假设 h 是穿过 T的一个不可数分支。我们将穿过 T 的分支与它们的并集等同，也就是说，我们认为 h 具有 h 的形式： $M[H] \cap \lambda \to 2$。由于 T_1 是特殊的，因此不可能有不可数分支，所以 h 的一个尾段必须包含在 T_0中；也就是说，我们可以找到$\alpha_0 < \omega_1$ ，使得对所有 $\alpha \in [\alpha_0, \omega_1)$，都有 $h \restriction c(\alpha) \in T_0$。对于所有这样的 α，存在唯一的 $b_\alpha \in B \restriction M[H]$ ，使得 $g(b_\alpha) \subsetneq h \restriction c(\alpha) \subsetneq b_\alpha$。根据 Fodor 引理，存在一个固定的 $t \in T$ 和一个平稳的 $R \subseteq \omega_1$ ，使得对所有 $\alpha \in R$，都有 $g(b_\alpha) = t$ 。由于 g 是单射，存在 $b \in B \restriction M[H]$ ，使得对所有 $\alpha \in R$，都有 $b_\alpha = b$ 。于是对所有 $\alpha \in R$，都有$h \restriction c(\alpha) \subseteq b$ ；又由于 R 在 ω_1中共终，这意味着 $h = b$。□

现在我们准备好证明， $M[H]$ 是 $V[H]$中的 λ 的 ω_1-猜测模型。在 $V[H]$中进行，并设 $d \subseteq \lambda$是 $M[H]$-逼近的。令 $h\colon \lambda \cap M[H] \to 2$为 $d \cap M[H]$的特征函数。那么，对所有 $\alpha < \omega_1$，我们有 $d \cap c(\alpha+1) \in M[H]$，因此 $h \restriction c(\alpha+1) \in M[H]$。由此可得 $h \restriction c(\alpha+1) \in T$，因此$h$是穿过 T的不可数分支。根据断言 6.11，我们有 $h \in B \restriction M[H]$，所以存在 $b \in B \cap M[H]$使得 $b \restriction M[H] = h$。令 $e := \{\eta < \lambda \mid b(\eta) = 1\}$。那么 $e \in M[H]$且 $e \cap M[H] = d \cap M[H]$。因此， d被 $M[H]$猜测，证毕。□

定理 6.12. PFA(S)[S] 蕴含GMP。

证明。 假设 V 满足 PFA(S)。我们将证明 GMP 在 V^S中成立。给定一个基数 $\lambda \geq \omega_2$，令 GMP$^\lambda$ 表示如下断言：对于所有充分大的正则 θ，存在平稳多个 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$，它们是关于 λ的 ω_1-猜测模型。根据 [31, 命题 3.2], ，对于每个充分大的正则 θ，如果 GMP$^{|H(\theta)|}$成立，那么存在平稳多个 ω_1-猜测模型 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$。因此，只需证明 GMP$^\lambda$ 对所有 $\lambda \geq 2^\omega$都成立。

在 V中工作。固定 $\lambda \geq 2^\omega$ 和一个充分大的正则基数 θ，并令$\mathbb{P} := \mathrm{Add}(\omega, 1) * \mathrm{Coll}(\omega_1, 2^\lambda)$。于是 $\mathbb{P}$将 2^λ压缩至基数为 ω_1，并且由于 $\mathrm{Add}(\omega, 1)$ 是 ω_1-Knaster 的，且$\mathrm{Coll}(\omega_1, 2^\lambda)$被强迫为可数闭，故 $\mathbb{P}$是适当的，并保持 S 为一棵苏斯林树这一事实。文献 [9] 中证明了 $\mathbb{P}$ 具有 ω_1-覆盖性质和 ω_1-逼近性质。由于 S 是 ω_1-分配的， $\mathbb{P}$ 的定义在 V与 V^S中相同；特别地，可以在 V^S 中进行 [9] 中的证明，从而表明 $\mathbb{P}$ 在该模型中也具有 ω_1-逼近性质。因此，我们可以应用引理 6.10，找到一个 $\mathbb{P} \times S$-名称 T，它表示一棵高度和大小均为 ω_1 且没有共尾分支的树，以及一个 $w \in H(\theta)$，使得对于每个 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$，若 $\omega_1 \cup \{w\} \subseteq M \prec H(\theta)$，且存在一个$M$-泛型的 $G \subseteq \mathbb{P} * \mathbb{P}(T)$，则 M^S是 V^S中关于 λ的一个 ω_1-猜测模型。

在 $V^{\mathbb{P}\times S}$ 中，根据引理 6.5，$\mathbb{P}$ 满足可数链条件。特别地，由此可知，在 V 中，$\mathbb{P} * \mathbb{P}(T)$ 是适当的，并且保全 S。因此，根据 PFA(S) 和引理 6.5，满足 $|M| = \omega_1 \subseteq M$ 且存在一个 M-泛型 $G \subseteq \mathbb{P} * \mathbb{P}(T)$ 的 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$ 集合在 $\mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$ 中是平稳的。令 $\dot{C}$ 为一个 S-名称，表示 $(\mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta))^{V^S}$ 中的一个闭无界集；再利用命题 2.3，令 $\dot{f}$ 为一个 S-名称，表示从 $[H(\theta)]^2 \to \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$ 到 $C_{\dot{f}} := \{X \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta) \mid \forall z \in \mathscr{P}_\omega X \ f(z) \subseteq X\}$ 的函数，且它被迫为 $\dot{C}$ 的子集。于是，我们可以找到 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$，使得 $\omega_1 \cup \{w, f\} \subseteq M \prec H(\theta)$，并且满足：存在一个 M-泛型 $G \subseteq \mathbb{P} * \mathbb{P}(T)$。

由此可知，M^S 是 V^S 中针对 λ 的一个 ω_1-猜测模型。现在我们证明 $M^S \in \dot{C}$；由于 $\dot{C}$ 是 $\mathscr{P}_{\omega_2}H(\theta)$ 中一个闭无界集的任意名称，这将推出 GMP$^\lambda$ 在 V^S 中成立。为证明 $M^S \in \dot{C}$，回想一下 $\dot{f} \in M$，因此，对于每个表示 $\mathscr{P}_\omega H(\theta)$ 中一个元素的 S-名称 $\dot{z} \in M$，都存在一个 S-名称表示 $f(\dot{z})$，且该名称属于 M。由此可知 $M^S \in \dot{C}_{\dot{f}} \subseteq \dot{C}$。□

推论 6.13. PFA(S)[S] 蕴含IGMP。

我们以将前面的结果从 V^S 推广到 V 来结束本小节，从而表明 PFA(S) 也蕴含 GMP。

命题 6.14. 假设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念，且 $|\mathbb{P}| \leq \omega_1$ 和 $\mathbb{P}$ 具有 ω_1-覆盖性质；再假设 θ 是一个足够大的正则基数，并且 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2}H(\theta)$ 满足 $M \prec H(\theta)$ 以及 $\mathbb{P} \cup \{\mathbb{P}\} \subseteq M$。如果 $M^\mathbb{P}$ 是 $V^\mathbb{P}$ 中的一个 ω_1-猜测模型，那么 M 就是 V 中的一个 ω_1-猜测模型。

证明。假设 $M^\mathbb{P}$ 是 $V^\mathbb{P}$ 中的一个 ω_1-猜测模型，但 M 不是 V 中的一个 ω_1-猜测模型。因此，我们可以取一个基数 $\lambda \in M$ 和一个集合 $d \subseteq \lambda$，使得 d 是 (ω_1, M)-逼近的，但不是 M-猜测的。

断言 6.15. 在 $V^\mathbb{P}$ 中，d 是 $(\omega_1,\ M^\mathbb{P})$-逼近的。

证明。固定一个条件 $p \in \mathbb{P}$，以及一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{y} \in M$，它表示 $\mathscr{P}_{\omega_1}\lambda$ 的一个元素。由于 $\mathbb{P}$ 具有 ω_1- 覆盖性质，并且由初等性可知，我们可以找到 $q \leq_\mathbb{P} p$ 和 $z \in \mathscr{P}_{\omega_1}\lambda \cap M$，使得 $q \Vdash_\mathbb{P}$“$\dot{y} \subseteq z$”。于是 $d \cap z \in M$，因此 $q \Vdash_\mathbb{P}$“$d \cap \dot{y} = (d \cap z) \cap \dot{y} \in M^\mathbb{P}$”。由泛性质可得结论。□

因此，由于 $M^\mathbb{P}$ 是 $V^\mathbb{P}$ 中的一个 ω_1-猜测模型，我们可以找到一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{e} \in M$，它表示 λ 的一个子集，以及一个条件 $p \in \mathbb{P}$，使得 $p \Vdash_\mathbb{P}$“$d \cap M^\mathbb{P} = \dot{e} \cap M^\mathbb{P}$”。注意，由于 $\mathbb{P} \subseteq M$，我们有 $M^\mathbb{P} \cap \lambda = M \cap \lambda$。

命题 6.16. 存在条件 q_0、$q_1 \leq_\mathbb{P} p$ 以及一个序数 $\alpha < \lambda$，使得$q_0 \Vdash_\mathbb{P}$ “$\alpha \in \dot{e}$” 且 $q_1 \Vdash_\mathbb{P}$ “$\alpha \notin \dot{e}$”。

证明。否则，令 $e^* := \{\alpha < \lambda \mid \exists q \leq_\mathbb{P} p\ [q \Vdash_\mathbb{P}$ “$\alpha \in \dot{e}$”$]\}$，则有$e^* \in M$且 $p \Vdash_\mathbb{P}$“$\dot{e} = e^*$”。但这样我们就会得到 $e^* \cap M = d \cap M$，这与假设 d 不是 M-猜测的相矛盾。□

由初等性，我们可以找到 $q_0, q_1 \leq_\mathbb{P} p$ 以及一个序数 $\alpha \in \lambda \cap M$，使得$q_0 \Vdash_\mathbb{P}$ “$\alpha \in \dot{e}$”且 $q_1 \Vdash_\mathbb{P}$ “$\alpha \notin \dot{e}$”。如果 $\alpha \in d$，则令 $q^* = q_1$；如果 $\alpha \notin d$，则令$q^* = q_0$。无论哪种情况，我们都有 $q^* \leq_\mathbb{P} p$且 $q^* \Vdash_\mathbb{P}$“$\dot{e} \cap M \neq d \cap M$”，这就产生了矛盾。□

推论 6.17. PFA(S) 蕴含GMP。

证明。假设 PFA(S) 在 V 中成立。固定一个正则的 $\theta \geq \omega_2$。根据定理 6.12 的证明，存在平稳多个 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2}H(\theta)$，使得 M^S 是 V^S 中的一个 ω_1-猜测模型。根据命题 6.14，对于每个满足 $M \prec H(\theta)$ 和 $S \cup \{S\} \subseteq M$ 的此类 M，我们知道 M 是 V 中的一个猜测模型。因此，GMP 在 V 中成立。□

6.2. 几乎苏斯林树。正如第 5 节末尾所提到的，Cox 和 Krueger 的工作表明，IGMP 可由 GMP 与如下断言共同推出：所有大小和高度为 ω_1 、且没有共尾分支的树都是特殊树；此外，IGMP 意味着不存在苏斯林树。综合这些结果，自然会引出一个问题：早在 [3], 中就有人提出，IGMP 是否意味着所有高度和大小为 ω_1 、且没有共尾分支的树都是特殊树。本节证明 PFA(T*) 蕴含 IGMP。由于每棵特殊树都包含一个驻定反链，这就对该问题给出了否定回答。此外，这也肯定地回答了 Krueger 在 [11] 提出的一个问题：PFA(T*) 是否蕴含 ¬wKH；因为正如第 3 节所述，GMP 蕴含¬wKH。

以下命题是对 [3, 命题 4.4 和推论 4.5] 的略微改进。为简化表述，我们称高度为 ω_1 的树**持续无分支**，如果它没有共尾分支，并且在任何保留 ω_1 的强迫扩张中仍然没有共尾分支。注意，每棵特殊树T 都是持续无分支的；事实上，只需 T_C 在某个共终集 $C \subseteq \omega_1$ 上是特殊的即可。

命题 6.18. 假设GMP 成立，并且每棵大小和高度分别为ω_1 、且没有共尾分支的树 T 都是持续无分支的。那么IGMP 成立。

证明。 固定一个正则基数 $\theta \geq \omega_2$。只需证明，每个满足 $\omega_1 \subseteq N$ 的 ω_1-猜测模型 $N \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$ 都是不可毁的 ω_1-猜测模型。为此，固定这样一个 N，并固定一个基数 $\lambda \in N$。只需证明，在任何保留 ω_1 的 V 的强迫扩张中， N 仍然是关于 λ 的 ω_1-猜测模型。

由于 N 是一个具有 $\omega_1 \subseteq N$的 ω_1猜测模型， [10, 定理 1.4] 表明 N是内部无界的。因此，我们可以固定一个 $\subseteq$递增序列 $\langle X_i \mid i < \omega_1 \rangle$，使得每个 X_i 都是 $N \cap \mathscr{P}_{\omega_1} \lambda$ 和 $\bigcup_{i<\omega_1} X_i = N \cap \lambda$的一个元素。现在，我们按照 [3, 命题 4.4]的证明来定义一棵树 T。 T 的底集是所有满足 $i < \omega_1$ 和 $x \subseteq X_i$的有序对 $(i,\ x)$。我们规定 $(i,\ x) <_T (j,\ y)$ 当且仅当$i < j$ 且 $y \cap X_i = x$。

与 [3], T 恰好一样，是一棵大小和高度均为 ω_1 的树，至多有 ω_1个共尾分支。令 B 为穿过 T的所有共尾分支构成的集合，并利用引理5.4，找出一个 Baumgartner 函数 $g:\ B \to T$。

现在，与引理 6.10 的证明中一样，令 $T_0 := \{t \in T \mid \exists b \in B\ g(b) <_T t \in b\}$，并令 $T_1 := T \setminus T_0$。由于 T_0 包含每个 $b \in B$ 的一个尾段，因此 T_1 没有共尾分支，所以根据假设，它持续无分支。

现在令 W 为 V 的任意一个强迫扩张，其中 ω_1 得到保留；并令 $d \in \mathscr{P}^W \lambda$ 在 W 中被 (ω_1, N)-逼近。那么，对每个 $i < \omega_1$，都有 $(i, d \cap X_i) \in T$，且集合 $c = \{(i, d \cap X_i) \mid i < \omega_1\}$ 是穿过 T 的一条共尾分支。由于 T_1 在 V 中持续无分支，因此 c 的一条尾段必定包含在 T_0中。然后，恰如断言 6.11 的证明中的论证，我们事实上必有 $c \in B$，也就是说， c 已经在 V中。于是 $d \cap N = \bigcup_{i<\omega_1} d \cap X_i$ 也在 V中，并且显然在其中是 (ω_1, N)-逼近的，因为 d在 W中是 (ω_1, N)-逼近的。因此，由于 N是 V中的一个猜测模型， $d \cap N$是被 N-猜测的；也就是说，存在 $e \in N$使得$e \cap N = d \cap N$。显然，集合 e见证了 d在 W中是被 N-猜测的。因此，N 是 W中的一个 ω_1-猜测模型；由于 W 是任意的， N 是 V中的一个不可毁坏的ω_1-猜测模型。□

在本小节余下部分，令 T^* 表示一棵几乎 Suslin 的 Aronszajn 树。在 [11, 定义 1。7], Krueger 引入了强迫偏序集 $\mathbb{P}$ 是T^*-适当的概念。尽管是 T^*-适当是适当性与 T^*-保留性的合取的弱化，Krueger 证明 PFA(T*等价于 FA($\mathcal{C}$)，其中 $\mathcal{C}$ 是由 T^*-适当强迫偏序集组成的类。 [11, 命题 2。5]此处我们不需要 T^*-适当性的定义，但请注意以下事实：

事实 6.19。 *(1)* [11, 定理 2。2] T^*-适当性在可数支撑迭代下得以保留。*(2)* [11, 命题 3。1] 每个强适当强迫偏序集都是 T^*-适当的。特别地，科恩强迫是 T^*-适当的。*(3)* [11, 命题 1。11] 每个 ω_1-闭合强迫偏序集都是 T^*-适当的。*(4)* [23, §IX，引理 4。6] 对于每棵大小和高度为 ω_1 且没有共尾分支的树 T，存在一个 T^*-适当强迫 $\mathbb{Q}(T)$，它会添加一个无界子集$A \subseteq \omega_1$ 以及一个特化函数 $f : T_A \to \omega$。

正如 [11], 事实 6.19(4) 末尾所指出的，这表明 PFA(T*) 意味着，对于每棵大小和高度为 T ω_1 且没有共尾分支的树，都存在一个无界的$A \subseteq \omega_1$，使得 T_A 是特殊的；特别是， T 是持续无分支的。因此，根据命题 6.18，要证明 PFA(T*) 蕴含 IGMP，只需证明 PFA(T*) 蕴含 GMP。

定理 6.20. PFA(T*) 蕴含IGMP。

证明。 假设PFA(T*成立。正如在定理陈述之前紧接着指出的，只需证明 GMP 成立即可。由于本文第6.1 小节和第 4 节 [31], 中的论证已清楚地展现了本证明的全部思路，我们这里只给出概要。

断言 *6.21.* 假设 λ 是一个不可数基数，且 θ 是一个足够大的正则基数。设 $\mathbb{P}$ 满足 ω_1- 覆盖性质和 ω_1- 逼近性质，并将 2^λ 压缩至大小为 ω_1。那么存在一个 $\mathbb{P}$- 名称 $\dot{T}_1$，它表示一棵高度和大小均为 ω_1 、没有共尾分支的树，以及一个 $w \in H(\theta)$；令. $\mathbb{Q}(T_1)$为事实 *6.19(4)*中偏序集的名称，则有如下结论：对于每个满足 $\omega_1 \cup \{w\} \subseteq M \prec H(\theta)$ 的. $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$，若存在一个$M$-泛的 $G \subseteq \mathbb{P} * \mathbb{Q}(T_1)$，则 M 是 λ的猜测模型。

证明。 证明与 [31, 引理 4。6], 的证明完全相同，其中的所有思路也都出现在上文的 6.10 的证明中，因此我们略去证明。此断言的证明与 [31, 引理 4。6] 的证明之间唯一的区别是，在那篇论文中，强迫 $\mathbb{Q}(T_1)$ 被替换为可数链条件强迫，以完全特殊化 T_1。然而，从该证明显然可见，添加这个完全的特殊化函数并非必要；只需在某个共尾层集上特殊化 T_1，而这正是 $\mathbb{Q}(T_1)$ 所做的。 □

如同 6.12 的证明，只需证明对于所有不可数基数 λ，GMP$^\lambda$ 成立。因此，固定这样一个 λ。令 $\mathbb{P} := \mathrm{Add}(\omega, 1) * \dot{\mathrm{Coll}}(\omega_1, 2^\lambda)$。再次如同 6.12 的证明， $\mathbb{P}$ 具有 ω_1-覆盖和 ω_1-逼近性质，并将 2^λ 坍缩为大小为 ω_1的集合。因此，我们可以应用断言 6.21，找到一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{T}$，它表示一棵高度和大小均为 ω_1 、没有共尾分支的树，以及一个 $w \in H(\theta)$，使得，对于每个 $M \in \mathscr{P}_{\omega_2} H(\theta)$，只要 $\omega_1 \cup \{w\} \subseteq M \prec H(\theta)$，如果存在一个 M-泛型的 $G \subseteq \mathbb{P} * \mathbb{Q}(T)$，那么 M 就是 λ的猜测模型。

由于 $\mathbb{P}$ 是一个两步迭代，其中第一个迭代因子是强适当的，且第二个被迫为 ω_1-闭合的，事实 6.19 蕴含 $\mathbb{P}$ 是 T^*-适当的。同样根据事实 6.19，$\mathbb{Q}(T)$被 $\mathbb{P}$强制为 T^*-适当的，因此 $\mathbb{P}*\mathbb{Q}(T)$是 T^*-适当的。因此，根据 PFA(T*)和引理 6.5，满足 $\omega_1\cup\{w\}\subseteq M\prec H(\theta)$ 且存在一个 M-泛型 $G\subseteq\mathbb{P}*\mathbb{Q}(T)$的 $M\in\mathscr{P}_{\omega_2}H(\theta)$ 的集合在 $\mathscr{P}_{\omega_2}H(\theta)$中是平稳的。但由上一段可知，这个平稳集中的每个元素都是 λ的猜测模型，因此 GMP$^\lambda$ 成立；又由于 λ 是任意的，GMP 成立，正如所需。□

我们的结果表明，IGMP 并不意味着所有大小和高度为 ω_1 且没有共尾分支的树都是特殊的。不过，IGMP 意味着每棵这样的树在某个稠密子集上都是特殊的。

命题 6.22. 假设 IGMP。令 T 为一棵大小和高度均为 ω_1 的树。那么存在 T 的一个稠密子集 S，使得 S 是特殊的。

证明。假设 IGMP。令 T为一棵大小和高度均为 ω_1 的树。注意，命题 6.18 的逆命题也成立：IGMP 意味着每棵大小和高度为ω_1 且没有共尾分支的树，根据 [3, 定理 3。6]，都是持续无分支的。因此T 是持续无分支的，所以 T 不是 ω_1-分配的。

令 $\dot{g}$ 为一个 T-名称，表示从 ω 到序数的新函数。利用名称$\dot{g}$，我们可以定义 T 的一个稠密子集，其中包含 T 的所有节点：这些节点决定了某个 $n\in\omega$ 处 $\dot{g}(n)$ 的值，且在此意义下是极小的；形式化地说，$S=\{t\in T\mid\exists n\in\omega((t\parallel\dot{g}(n))\text{ and }\forall s<t(s\nparallel\dot{g}(n)))\}$。注意，$S$ 是稠密的，因为 $\dot{g}$ 是一个新函数的名称。很容易定义一个从 S 到ω 的特殊化函数 f：对于 $s\in S$，令 $f(s)=n$，其中 n 是使得 s 决定 $\dot{g}(n)$ 的值且没有 $t<s$ 决定 $\dot{g}(n)$ 的值的最小 $n\in\omega$。容易验证，f 是 S 的一个特殊化函数。□

References

[1] James E. Baumgartner。《适当强迫公理的应用》。载于 *Handbook of set-theoretic topology* 913 959 1984，第 – 页。North-Holland，阿姆斯特丹，。[2] Sean Cox 和 John Krueger。强适当强迫的商与猜测模型。*J.*，（）：–。[3] *Symb. Log.* 81 1 264 283, 2016
Sean Cox 和 John Krueger。不可摧毁的猜测模型与连续统。*Fund. Math.*，239 3 221（）：–258，2017。[4] Jacob Davis。在 $\aleph_{\omega_1+1}$上的通用图。*Ann. Pure Appl. Logic*，168(10):1878–1901，2017。[5] Ilijas Farah。$\mathcal{P}\ \mathbb{N}$ / 37 4 861 866，（）fin 中的开覆盖公理与塔。*Comment. Math. Univ. Carolin.*，（）：–。[6] Joel David Hamkins。具有逼近性质和覆盖性质的扩张不会产生新的大基数。*Fund. Math.*，180(3):257–277，2003。[7] Thomas Jech。关于不可数基数的一些组合问题。*Ann. Math.*，：– 1996
Logic 5 165 198, 1972 73
/。[8] Thomas Jech。*Set theory*。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2003。第三千年版，修订扩充版。[9] John Krueger。一般的米切尔式迭代。*MLQ Math. Log. Q.*，54(6):641–651，2008。[10] John Krueger。猜测模型蕴含奇异基数假设。*Proc. Amer. Math.*，（）：–。*Soc.* 147 12 5427 5434, 2019
[11] John Krueger。关于非特殊阿伦森树的强迫公理。*Ann. Pure Appl. Logic*，171 8（）:102820，23，2020。[12] Chris Lambie-Hanson。覆盖性质与平方原理。*Israel J. Math.*，220(2):617– 648，2017。[13] Chris Lambie-Hanson 和 ˇS´arka Stejskalov´a。强树性质、库雷帕树与猜测模型。2022。已投稿。

[14] Paul Larson 和 Stevo Todorcevic。Katˇetov 的问题。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，354 5 1783 1791，2002（）：–。[15] Richard Laver。随机实数与 Souslin 树。 *Proc. Amer. Math. Soc.*，100 534，1987 3 531（）：–。[16] Menachem Magidor。超紧基数的组合刻画。

Proc. Amer. ，：–。 *Math. Soc.* 42 279 285, 1974

[17] Pierre Matet。相交数与伪幂。 *MLQ Math. Log. Q.*，67(1):59–76，2021。[18] Pierre Matet。塔与闭无界集。 *Arch. Math. Logic*，60(6):683–719，2021。[19] Telis K. Menas。关于强紧致性与超紧致性。 *Ann. Math. Logic*，7 359，1974 327 75：–/。[20] Dilip Raghavan 和 Teruyuki Yorioka。相干苏斯林树扩张中的一些结果。 *Aspects of Descriptive Set Theory (Kyoto 2011)*，*Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*，（1790）:72–82，2012。[21] Assaf Sharon 和 Matteo Viale。反射对可接近性理想的一些推论。*Trans. Amer. Math. Soc.*，362(8):4201–4212，2010。[22] Saharon Shelah。 *Cardinal arithmetic*，第 *Oxford Logic Guides* 卷第 29 卷。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1994。牛津科学出版物。[23] Saharon Shelah。 *Proper and improper forcing*。数学逻辑展望。施普林格出版社，柏林，第二版，1998。[24] Jack Silver。关于奇异基数问题。载于 *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974) Vol. 1* 265 268, 1975 ，第 – 页。[25] Stevo Todorcevic。用相干 Souslin 树进行强迫。2011。未发表的札记，见 http://www.math.toronto.edu/~stevo/todorcevic_chain_cond.pdf。[26] Stevo B. Todorˇcevi ´ + ¬ 12 2 187 202, c。1981 马丁公理与 wKH 的一些推论。 *Topology Appl.*，（）：–。[27] Spencer Unger。树性质的脆弱性与不可摧毁性。 *Arch. Math. Logic*，51(5- 6):635–645，2012。[28] Matteo Viale。适当强迫公理与奇异基数假设。

J. Symbolic ，*Logic* 71 2 473 479, 2006

（）：–。[29] Matteo Viale。一族覆盖性质。 *Math. Res. Lett.*，15(2):221–238，2008。[30] Matteo Viale。猜测模型与广义拉弗菱形。 *Ann. Pure Appl. Logic*，163 11 1660（）：–1678，2012。[31] Matteo Viale 和 Christoph Weiß。关于适当强迫公理的相容性强度。*Adv. Math.*，228(5):2672–2687，2011。[32] Christoph Weiß。超紧致性的组合本质。 *Ann. Pure Appl. Logic*，163 11 1710 1717，2012（）：–。[33] W. Hugh Woodin。 *The axiom of determinacy, forcing axioms, and the nonstationary ideal*，第 *De Gruyter Series in Logic and its Applications* 卷第 1 卷。Walter de Gruyter & Co.，柏林，1999。

（Lambie-Hanson） Institute of Mathematics, Czech Academy of Sciences, Žitná 25,Prague 1, 115 67, Czech Republic*Email address*: lambiehanson@math.cas.cz *URL*: https://users.math.cas.cz/~lambiehanson/(Stejskalov ´a) Charles University, Department of Logic, Celetná 20, Prague 1, 116 42, Czech Republic*Email address*: sarka.stejskalova@ff.cuni.cz*URL*: logika.ff.cuni.cz/sarka