arXiv:2303.01375v1 [quant-ph] 2 Mar 2023

全局单极子时空中含 Hulth´en 势的 Schr¨odinger 方程的近似解析解

SauloS.Alves* 和 Edilberto O. Silva†马拉尼昂联邦大学物理系，*Universidade FederaldoMaranh˜ao*，邮编 *65085-580*，*S˜aoLu´ís*，*Maranh˜ao*，巴西

M´arcio M.Cunha‡阿拉戈斯联邦大学佩内多教育单位、阿拉皮拉卡校区，*Av. Beira Rio*，*s/n - Centro Hist´orico*，邮编 *57200-000*，佩内多，阿拉戈斯，巴西

Hassan Hassanabadi§沙赫鲁德理工大学物理学院，沙赫鲁德，伊朗[4] 捷克共和国赫拉德茨-克拉洛韦大学物理系，*Rokitansk´e ho 62*，*500 03 Hradec Kr´alov´e*，捷克共和国（日期：2023年3月3日）

本文研究了含有拓扑缺陷的时空中电子的非相对论量子力学。我们还考虑电子受到 Hulth´én 势的影响。特别地，我们讨论存在全局磁单极子时的 Schr¨odinger 方程。我们得到了该问题的近似解，确定了散射相移和 S-矩阵，并分析了束缚态。

I. 引言

寻找可精确求解模型是理论物理学领域最重要的任务之一。然而，并非所有具有研究意义的情形都能得到精确解。在这种情况下，有必要研究如何对这些模型进行修正，甚至探讨如何求得近似解。在非相对论量子力学框架下，Schr¨odinger 方程精确描述封闭量子系统的动力学，并提供有关系统性质的全部信息 [1]。在这一背景下，存在若干可精确求解模型，例如谐振子 [2], 、具有非中心力的二体问题 [3], 、修正环形振子势 [4], ，以及涉及一类双曲势阱的模型 [5]。鉴于 Schr¨odinger 方程的基本特性，我们可以在各种不同的背景下研究它，例如描述低维电子气 [6], 、各向异性质量问题 [7], ，以及时空中存在曲率和挠率的情形 [8]。关于曲空间中的 Schr¨odinger 方程，一类重要问题是研究拓扑缺陷的存在 [9]。拓扑缺陷可能出现在引力和凝聚态物理领域。在前者中，拓扑缺陷与早期宇宙的演化过程相关，其间发生了对称性破缺相变 [10]。在凝聚态物理中，这些缺陷可能在材料合成过程中出现，且不可避免 [11]。过去几十年来，研究这些缺陷对系统物理性质的影响一直是活跃的研究方向。

在引力研究中，我们可以列举宇宙弦、畴壁和全局磁单极子等拓扑缺陷 [9, 12, 13]。正如 [14], 所指出的，宇宙弦和全局磁单极子是奇异的拓扑缺陷。在宇宙弦周围，时空并非全局平坦，而是局部平坦的。宇宙弦的另一个显著特征是，这类缺陷可以与圆锥几何联系起来。因此，在凝聚态物理中存在与宇宙弦相对应的对象，即向列缺陷 [15, 16]。向列缺陷同样呈现出圆锥几何，并存在于固体和液晶中。宇宙弦的时空对物理系统的行为产生了显著影响，其中会出现引力租赁、自力和引力阿哈罗诺–玻姆效应等现象。文献中已经在宇宙弦时空 [17–33] 和向列缺陷 [34–41], 中求解了不同模型，这表明围绕这些问题开展研究具有广泛的可能性。

全局磁单极子还呈现出显著特征，例如试探粒子的拓扑散射。对于这种缺陷，可以说，其影响体现为一个固体亏角，该角决定了相应时空的拓扑行为和曲率。在凝聚态物理中，拓扑缺陷可能出现在各种情形中。例如，磁性材料中的畴壁 [42], 超导体中的涡旋 [43] 以及聚乙炔中的孤子 [44]。此外，还有一种称为位错的缺陷，会出现在无序固体中 [45, 46]。在本文中，我们关注全局磁单极子产生的时空对非相对论粒子量子力学的影响。对于全局磁单极子，

* marciomc05@gmail.com
† edilberto.silva@ufma.br; edilbertoo@gmail.com
‡ marcio.cunha@penedo.ufal.br; marciomc05@gmail.com§ h.hasanabadi@shahroodut.ac.ir

标量物质场起到序参量的作用；在单极子之外，核心获得非零值。在这一背景下，Barriola 和 Vilenkin [47] 给出了爱因斯坦方程的一个近似解 [48–50]描述由全局 $O(3)$ 对称性破缺所产生的单极子外部度规。他们指出，单极子几乎不会对非相对论物质施加引力。此外，其周围空间存在立体角亏损，且同一角度与冲击参数无关，会使所有光线发生偏折。在这项研究之后，沿这一方向开展了多项研究，包括对偏振和真空涨落的研究 [51–53], 量子振子的相对论运动 [54–56], 黑洞的辐射、吸收和散射 [57–59],等。

正如我们所提到的，研究薛定谔方程没有精确解的量子力学问题，由于其基础性而备受关注。要处理这类问题，通常需要采用近似方法。在这一背景下的研究实例包括：求解含有 Eckart 势与反平方 Yukawa 势的薛定谔方程 [60], Hua，以及含有离心项的修正 Eckart 势 [61],Manning-Rosen 势与 Hellmann 势及其热力学性质 [62], ，还有平移 Deng–Fan 势模型 [63]。因此，研究粒子在 Hulthén 势和全局磁单极子共同作用下的非相对论量子运动，是一个值得探讨的问题。

考虑到上述内容，本文旨在求得全局磁单极子时空中存在 Hulthén 势时薛定谔方程的近似解。该类势有广泛的应用范围，例如核物理、化学物理和凝聚态物质系统 [64]。关于存在 Hulthén 势时近似解的研究，我们可以举出文献中的一些例子，这些研究分别基于薛定谔方程 [65], 、克莱因-戈尔登方程 [66],和狄拉克方程 [67, 68]。

本文的组织结构如下。在第II节，我们写出全局磁单极子时空中带电粒子的薛定谔方程，其中包含 Hulth¨én 势。在求解径向方程之前，我们先研究粒子所受的有效势。我们证明，当 $\alpha < 1$ 和 $\alpha > 1$满足相应条件且其他参数固定时，束缚态是允许的。为求解任意状态下的径向运动方程，我们对 Hulth´én 势采用标准近似。我们证明，径向微分方程属于超几何型，其解可用超几何函数 ${}_2F_1\left(a,b;\ c;\ z\right)$表示。在第 III节，我们求解散射态的径向方程，并求得波函数的相移。第 IV 节专门考察束缚态解。为此，我们首先确定 S-矩阵，然后分析其极点，据此可得束缚态能量的表达式。本节最后给出能级示意图，并与文献中的其他结果进行比较。最后，我们在第 V节作总结。

II. 全局单极子时空中的非相对论量子力学

在本节中，我们写出带有矢量耦合的 Schr¨odinger 方程，用于描述电子与全局单极子时空中的 Hulth´en 势相互作用时的运动。该流形的度规由线元 [47]表示

$$ds^2 = -dt^2 + \alpha^{-2}dr^2 + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right), \tag{1}$$

其中 $\alpha^2 = 1 - 8\pi G\eta^2$ 小于 1，表示该流形的亏缺立体角。参数 η 对应于规范对称性破缺的尺度 [69]。对于该时空，已知单位半径球面的面积并非 $4\pi r^2$，而是 $4\pi\alpha^2 r^2$。此外，具有 $\theta = \pi/2$ 的曲面呈现出圆锥（规范宇宙弦）的几何形状，其亏缺角为$\tilde{\Delta} = 8\pi^2\eta^2$。已知时空中有质量粒子或带电粒子的运动（1）会涉及模型描述中的自相互作用势效应。在这种情况下，相关方程是采用矢量耦合的球极坐标 Schr¨odinger 方程。Schr¨odinger 方程的形式为

$$H\psi = E\psi, \tag{2}$$

其中， H 为相应的哈密顿算符，表示为

$$H = \frac{1}{2M}\mathbf{p}^2 + V_{eff}\left(r\right). \tag{3}$$

这里，$\mathbf{p}$ 表示动量算符， M 为粒子的质量，且

$$V_{eff}\left(r\right) = V_H\left(r\right) + V_{SI}\left(r\right) \tag{4}$$

是有效势，其中包含 Hulth´en 势 $V_H(r)$ 和静电自相互作用势 $V_{SI}(r)$。自相互作用势 $V_{SI}(r)$ 属于库仑型，表示为 [70]

$$V_{SI}(r) = \frac{\mathcal{K}\left(\alpha\right)}{r}, \tag{5}$$

其中， r 是电子到单极子的距离， $\mathcal{K}(\alpha)$ 是耦合常数。一般而言，根据 $\mathcal{K}(\alpha)$ 的符号，势 $V_{SI}(r)$ 既可以是吸引性的，也可以是排斥性的。对于静电情形，已知 $\mathcal{K}(\alpha)$ 为[70]

$$\mathcal{K}(\alpha)=\frac{e^2S(\alpha)}{2}>0, \tag{6}$$

其中 e 是电子电荷。函数 $S(\alpha)$ 表示为

$$S(\alpha)=\sum_{l=0}^{\infty}\left[\frac{2l+1}{\sqrt{4l(l+1)+\alpha^2}}-1\right], \tag{7}$$

其中 l 表示角动量量子数。注意，对于 $\alpha<1$， $S(\alpha)$ 是一个有限的正数；对于$\alpha>1$，它则为负数。我们的方法考虑了 α的这两种可能性，并讨论在后文给出的近似形式中，将 $V_{SI}(r)$加入 Hulth´en 势后所产生的物理影响。尽管 $\alpha>1$ 的情形不符合物理实际，但我们认为这一情形很重要，因为从数理物理的角度来看，它使我们的研究更加完整。Hulth´en 势表示为 [71, 72]

$$V_H(r)=-\frac{Ze^2\xi e^{-\xi r}}{1-e^{-\xi r}}, \tag{8}$$

其中 Z 是一个正常数，而 ξ 是屏蔽参数，决定了 Hulth´en 势的作用范围。当势$V_H(r)$ 用于原子现象时，常数 Z 被认定为原子序数。一些作者选择定义一个新参数，即 $V_0=Ze^2\xi$，并指出 V_0 与原子序数 Z 和屏蔽参数 ξ [73]有关。在此，我们倾向于像参考文献 [74]那样，在计算中明确使用这些参数。加入有效势（4）后，方程（2）可明确写为

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[\frac{\alpha^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{\mathbf{L}^2}{r^2}\right]\psi(\mathbf{r})+\frac{\mathcal{K}(\alpha)}{r}\psi(\mathbf{r})-\frac{Ze^2\xi e^{-\xi r}}{1-e^{-\xi r}}\psi=E\psi(\mathbf{r}), \tag{9}$$

其中 $\mathbf{L}$ 是球极坐标中通常的轨道角动量算符。在此需要注意的是$[H,\mathbf{L}]=\left[H,\mathbf{L}^2\right]=0$。由这些对易关系以及方程（2），我们可以写出以下涉及角动量算符及其对应量子数的方程：[75]：

$$\mathbf{L}^2\psi(\mathbf{r})=l(l+1)\hbar^2\psi(\mathbf{r}), \tag{10}$$
$$L_z\psi(\mathbf{r})=m\hbar\psi(\mathbf{r}). \tag{11}$$

这样，我们将寻找具有以下形式的能量本征态

$$\psi(\mathbf{r})=R_n(r)Y_l^m(\theta,\varphi), \tag{12}$$

其中 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ 表示球谐函数。将此解代入方程（9），并进行标准变量代换 $R(r)=r^{-1}u(r)$，可得径向方程

$$-\frac{\hbar^2\alpha^2}{2M}\frac{d^2u(r)}{dr^2}+V_{eff}u(r)=Eu(r). \tag{13}$$

其中

$$V_{eff}(r)=\frac{\hbar^2}{2M}\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{\mathcal{K}(\alpha)}{r}-\frac{Ze^2\xi e^{-\xi r}}{(1-e^{-\xi r})}. \tag{14}$$

并且 $\mathcal{K}(\alpha)$ 由方程 (6) 给出。方程 (13) 是存在 Hulth´en 势时全局单极子时空中的 Schr¨odinger 方程。此时，若去掉 Hulth´en 势，就得到全局单极子背景中的 Schr¨odinger 方程。有效势 (14) 使我们能够研究束缚态和散射态。通过调节参数 $\mathcal{K}(\alpha)$ 和 ξ，即可实现这一点；我们可以观察不同 $\alpha<1$ 数值下势能极小值所在的区域（图 1）。特别是，当 $\xi=0.1$ 和 $l=1$ 时，对于所考虑的所有 α 数值，系统都存在束缚态（图 1(a)）。在 l 固定时，随着参数 ξ 增大，存在束缚态的曲线数量减少（图 1(b)）。另一方面，增大 l 后，系统仅存在散射态（图 1(c)-(d)）。这是由于自相互作用势与 Hulth´en 势之间发生抵消，而此处采用了相应的近似。一个有趣的特点是，采用图 1 中相同的参数，但现在取 $\alpha>1$ 时，所有势能极小值

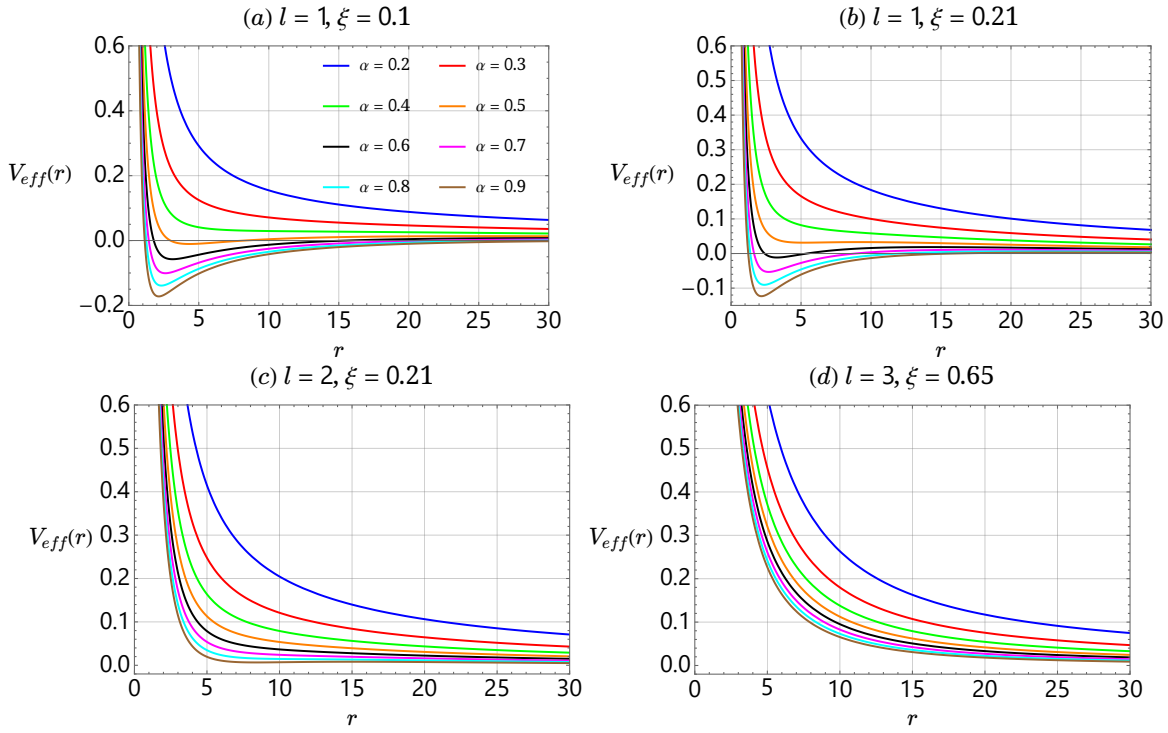


图1. 有效势（方程（14））随 r 变化，不同的 $\alpha < 1$取值对应不同情况。考虑以下四种涉及 ξ 和 l 的情形：(a) $\xi = 0.1$ 和 $l = 1$，(b) $\xi = 0.65$ 和 $l = 1$，(c) $\xi = 0.21$ 和 $l = 2$，以及 (d) $\xi = 0.65$ 和 $l = 3$。

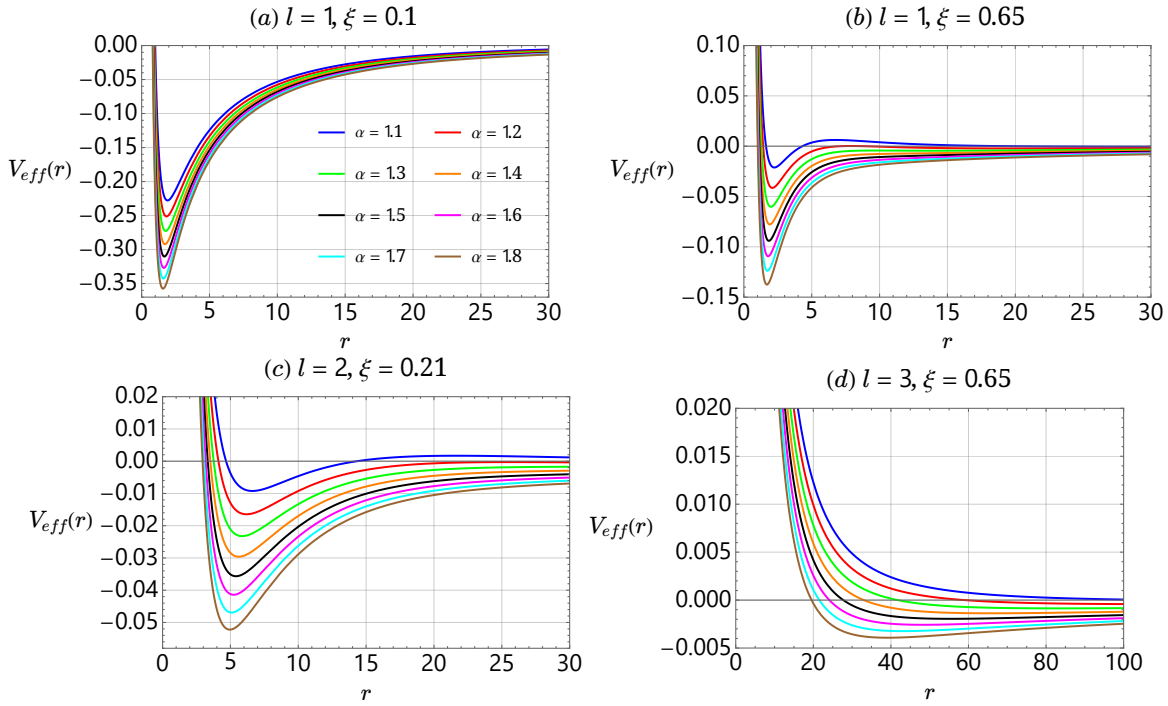


图2. 有效势（方程（14））随 r 变化，不同的 $\alpha > 1$取值对应不同情况。考虑以下四种涉及 ξ 和 l 的情形：(a) $\xi = 0.1$ 和 $l = 1$，(b) $\xi = 0.65$ 和 $l = 1$，(c) $\xi = 0.21$ 和 $l = 2$，以及 (d) $\xi = 0.65$ 和 $l = 3$。

都出现在有效势的负值范围内，且允许存在束缚态（图 2）。在 l 固定且 ξ 数值减小时，势阱会变深（图 2(a)-(b)）。

求解方程（13）以求得　　散射态（$E > 0$），分析其在两种情况下的渐近行为较为方便

即大 r和小 r的情况。通过这一分析，我们得到极限形式 [73, 76, 77]

$$u(r) \to r^{\frac{1}{2}+\ell}, \quad r \to 0; \tag{15}$$

$$u(r) \to \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\theta\right), \quad r \to \infty, \tag{16}$$

其中 $\ell = \sqrt{4l^2+4l+\alpha^2/2\alpha}$， $k^2 = 2ME/\alpha^2\hbar^2$。注意，若 $\alpha = 1$，则有 $\ell \to l + 1/2$，而极限形式（15）和（16）会还原为通常的形式 [78]。方程（13）无法对 $l \neq 0$进行解析求解，即使在 s 波情形下也是如此。因此，我们必须使方程（13）对任意 l均可求解。同时，我们希望考虑自相互作用势（5），它是一种库仑型势。因此，我们遵循已有文献，采用以下近似 [74, 79–82]:

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\xi^2 e^{-\xi r}}{\left(1-e^{-\xi r}\right)^2}, \quad \frac{1}{r} \approx \frac{\xi e^{-\xi r}}{1-e^{-\xi r}}, \tag{17}$$

这些近似仅在参数 ξ 取值较小时才有效。通过定义新变量 $y = 1 - e^{-\xi r}$，这些近似可写为

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{\xi^2\,(1-y)}{y^2}, \quad \frac{1}{r} \approx \frac{\xi\,(1-y)}{y}. \tag{18}$$

将上述近似代入方程（13），并进行适当的代数运算后，可得微分方程

$$(1-y)^2\,\frac{d^2u\,(y)}{dy^2} - (1-y)\,\frac{du\,(y)}{dy} - \frac{\lambda^2\,(1-y)}{y^2}u\,(y) + \frac{\wp^2\,(1-y)}{y}u\,(y) + \kappa^2 u\,(y) = 0, \tag{19}$$

with

$$\lambda^2 = \frac{l\,(l+1)}{\alpha^2} \geq 0, \quad \wp^2 = \frac{2M}{\hbar^2\alpha^2\xi}\left(Ze^2 - \mathcal{K}\,(\alpha)\right), \quad \kappa = \frac{k}{\xi}. \tag{20}$$

可以证明，方程（19）在以下点处具有正则奇点：0、1和 ∞。通过适当的变量替换，可将其化为超几何微分方程，其解可用超几何函数 ${}_2F_1\,(a,b;\ c;\ y)$表示。由此，我们将区间 $0 \leq y \leq 1$ 内的波函数取为以下形式：

$$u\,(y) = y^d\,(1-y)^{-i\kappa}\ {}_2F_1\,(a,b;\,c;\,y)\,, \tag{21}$$

其中，参数 a、 b和 c 及 d 由下式给出：

$$a = d - i\kappa + \Delta, \tag{22}$$

$$b = d - i\kappa - \Delta, \quad \Delta = \sqrt{\wp^2 - \kappa^2}, \tag{23}$$

$$c = 2d, \quad d = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4\,\lambda^2}\right). \tag{24}$$

在方程（21）中，函数 $(1-y)^{-i\kappa}$ 表示对散射波特定条件的任意选取，即无穷远处的出射波（见方程（16））。图 3 和图 4 绘出了不同 n 值下的 $|u(y)|^2$。两幅图中，我们均取 $\hbar = 1$、 $M = 1$、 $e = 1$、 $k = 1$ 和 $l = 1$。对于 ξ，我们采用了文献中其他参数所对应的一些数值[76, 81, 83, 84]。当 $\xi = 0.1$ 和 $\alpha = 0.2$ 取值时，随着 n 增大， $|u(r)|^2$ 的振幅也增大（分别见 $n = 1$ 对应的蓝色实线和 $n = 5$ 对应的黑色实线）（图 3(a)）。保持 ξ 为 0.1，并将 α 增大至 0.8，可以观察到相反的效应，即振幅最大的曲线对应于逐渐减小的 n （见 $n = 1$ 对应的蓝色实线）。此外， $|u(r)|^2$ 变得更加局域化，振幅最大值向左移动（图 3(b)）。分析 $\alpha = 0.65$ 时 $|u(r)|^2$ 的分布曲线并保持其他参数不变，可见 $\alpha = 0.2$ 时 $|u(r)|^2$ 的振幅大于 $\alpha = 0.8$ 时的振幅。在这两种情况下，振幅均随 n 增大而增大。还需分析图 3 中 $\alpha > 1$ 对应的分布曲线（图 4）。对于相应的数值 $\alpha = 1.2$、 $\xi = 0.1$ 和 $\alpha = 1.8$、 $\xi = 0.1$，参数 α 增大时， $|u(r)|^2$ 的振幅仅会减小。在这两种情况下，振幅均随 n 增大而减小（图 4(a)–(b)）。与图 3(a)–(b) 类似，当我们将 ξ 增大至 0.65（分别见图 4(c)–(d)），并保持 α 取值不变时，只观察到 $|u(r)|^2$ 的振幅略有变化。量子数 n 增大时，振幅也随之增大。按图中显示的顺序， $n = 1$ 对应的振幅最小（蓝色实线），而 $n = 5$ 对应的振幅最大（黑色实线）。

如需了解超几何函数 ${}_2F_1\,(a,\ b;\ c;\ y)$ 的其他性质，请参阅方程（21）中提及的参考文献 [85, 86]。从解（21）出发，我们现在可以研究该系统的不同性质，例如散射相移、散射矩阵（S-矩阵），以及束缚态的能量。我们将在接下来的章节讨论这些主题。

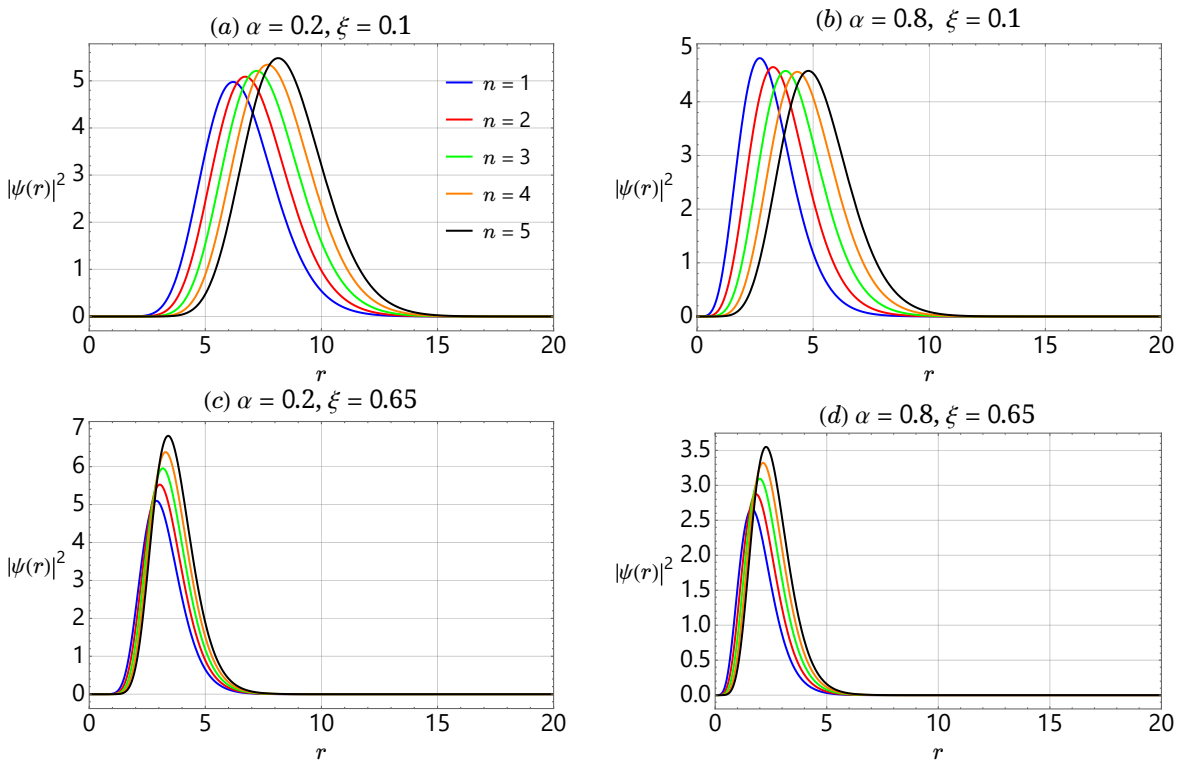


图 3. $|u(r)|^2$ 随 r 变化的曲线，展示了 n 取不同数值时的情况：(a) $\alpha = 0.2, \xi = 01$；(b) $\alpha = 0.8, \xi = 0.1$；(c) $\alpha = 0.2$, $\xi = 0.65$ $\alpha = 0.8$ $\xi = 0.65$ $\hbar = 1$ $M = 1$ $e = 1$ $k = 1$ $l = 1$ ；(d) , 。所用参数为 , , , , 和 。

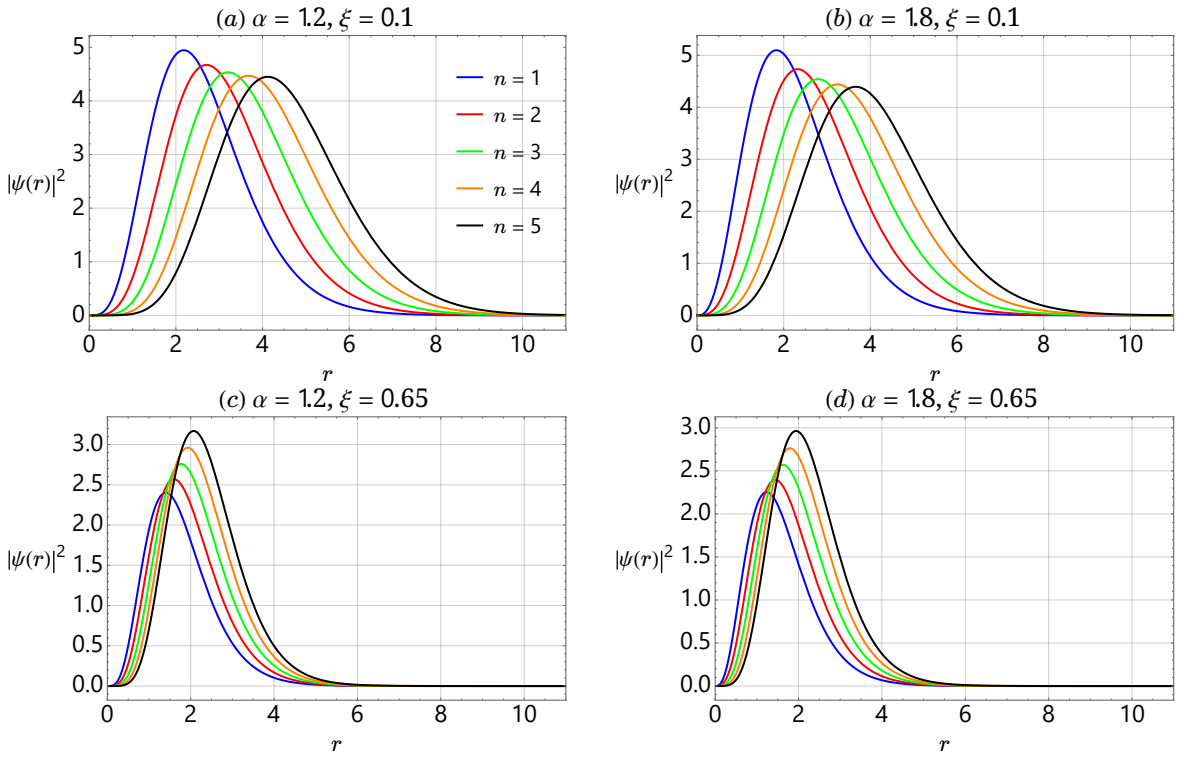


图 4. $|u(r)|^2$ 随 r 变化的曲线，展示了 n 取不同数值时的情况：(a) $\alpha = 1.2, \xi = 0.1$；(b) $\alpha = 1.8, \xi = 0.1$；(c) $\alpha = 1.2$, $\xi = 0.65$ $\alpha = 1.8$ $\xi = 0.65$ $\hbar = 1$ $M = 1$ $e = 1$ $k = 1$ $l = 1$ ；(d) , 。所用参数为 , , , , 和 。

III. 散射相移

在本节中，我们将推导与解（21）对应的波函数的相移。为此，我们考虑如下边界条件：当 $y \to 0$ （$r \to 0$）时， u（y）为有限值。解（21）满足这些要求。因此，回到变量 r，解变为

$$u(r) = c_n \left(1 - e^{-\xi r}\right)^d e^{ikr}\, {}_2F_1\left(a, b;\, c;\, 1 - e^{-\xi r}\right), \tag{25}$$

其中，c_n 为归一化常数。要继续求解该问题，我们需要将解 ${}_2F_1\left(a, b;\ c;\ 1 - e^{-\xi r}\right)$与某个变换关系联系起来，以便分析其渐近行为。通过对超几何函数进行解析延拓，可以得到这样的变换关系，如 [87] 所示

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; y) = {} & \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}\, {}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 1-y) \\ & + (1-y)^{c-a-b}\, \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\, {}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 1-y) \end{aligned} \tag{26}$$

以及以下结果

$${}_2F_1(a, b; a+b-c+1; 0) = 1, \tag{27}$$

$${}_2F_1(c-a, c-b; c-a-b+1; 0) = 1. \tag{28}$$

然后，将（27）和（28）代入方程（26），可得所需的变换关系： [76]

$${}_2F_1\left(a, b; c; 1 - e^{-\xi r}\right) \to \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} + e^{-\xi(c-a-b)r}\, \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}. \tag{29}$$

我们希望将方程（29）写成便于求出相移表达式的形式。首先，方程（29）中的量 $c-a-b$和 $a+b-c$ 分别由 $2i\kappa$ 和 $-2i\kappa$给出，由此可验证

$$a + b - c = (c - a - b)^*. \tag{30}$$

同样，我们也可以证明

$$c - a = d + i\kappa - \Delta = b^*, \tag{31}$$

$$c - b = d + i\kappa + \Delta = a^*. \tag{32}$$

利用这些结果，方程（29）可写为

$${}_2F_1(a, b; c; y) \to \Gamma(c) \left[\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} + e^{-2ikr}\, \frac{\Gamma(c-a-b)^*}{\Gamma(c-b)^*\,\Gamma(c-a)^*}\right]. \tag{33}$$

考虑到这些关系

$$\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} = \left|\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}\right| e^{i\delta_l}, \tag{34}$$

$$\frac{\Gamma(c-a-b)^*}{\Gamma(c-a)^*\,\Gamma(c-b)^*} = \left|\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}\right| e^{-i\delta_l}, \tag{35}$$

并将其代入方程（33），可得

$${}_2F_1(a, b; c; y) \to \Gamma(c) \left|\frac{\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}\right| e^{-ikr} \left[e^{i(kr+\delta_l)} + e^{-i(kr+\delta_l)}\right]. \tag{36}$$

这个方程可以写成更便于处理的形式。首先，我们利用恒等式 $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$，然后重写 $2\cos(kr+\delta_l) = e^{i(kr+\delta_l)} + e^{-i(kr+\delta_l)}$。接着，通过验证 $\cos(kr+\delta_l) = \sin(kr+\pi/2+\delta_l)$，我们得到

$$\cos(kr + \theta) = \sin\left(kr - \frac{\pi\ell}{2} + \frac{\pi}{2}(\ell+1) + \delta_l\right). \tag{37}$$

上面的表达式给出了当 $r \to \infty$ 时，解 $u(y)$ 的渐近行为，即

$$u(y) \sim \sin\left(kr - \frac{\pi\ell}{2} + \frac{\pi}{2}(\ell+1) + \delta_l\right). \tag{38}$$

将此结果与边界条件（15）进行比较，可得相移 δ_θ，其表达式为

$$\delta_l = \frac{\pi}{2}(\ell+1) + \arg\Gamma(c-a-b) - \arg\Gamma(c-a) - \arg\Gamma(c-b). \tag{39}$$

将参数（30）、（31）和（32）代入（39，可得

$$\delta_l = \frac{\pi}{2}(\ell+1) + \arg\Gamma(2i\kappa) - \arg\Gamma(d+i\kappa-\Delta) - \arg\Gamma(d+i\kappa+\Delta). \tag{40}$$

需要强调的是，相移显式依赖于参数 α 和 ξ，并通过 ℓ、d 和 Δ体现，这表明 δ_l 受到全局磁单极子所产生的曲率影响。

IV. 束缚态分析

与库仑势类似，Hulth´én 势也存在束缚态解。束缚态能量可以从 S-矩阵中求得。根据一般散射理论，复平面上半平面内 S-矩阵的极点对应于束缚态能量。利用相移（40）的结果， S-矩阵可写为

$$S = e^{2i\delta_l}, \tag{41}$$

$$= e^{i\pi(\ell+1)} e^{2i\arg\Gamma(2i\kappa)} e^{-2i\arg\Gamma(d+i\kappa-\Delta)} e^{-2i\arg\Gamma(d+i\kappa+\Delta)}. \tag{42}$$

S矩阵的极点由伽马函数的极点给出 $\Gamma(d+i\kappa-\Delta)$ 和 $\Gamma(d+i\kappa+\Delta)$，见方程（40）。然而，我们必须记住，函数 $\Gamma(z)$ 在 $z=-n$处有极点，其中 n 是非负整数。因此，分析 $\Gamma(d+i\kappa-\Delta)$ 的极点，可得

$$d + i\kappa - \Delta = -n. \tag{43}$$

利用方程（24）中给出的参数，我们得到

$$d + i\frac{\sqrt{2ME_{nl}}}{\hbar\alpha\xi} - \sqrt{\wp^2 - \frac{2ME_{nl}}{\hbar^2\alpha^2\xi^2}} = -n. \tag{44}$$

最后，求解方程（44）以确定 E_{nl}，可得能量本征值

$$E_{nl} = -\frac{(d+n-\wp)^2(d+n+\wp)^2}{\beta(d+n)^2}, \text{ with } \beta = \frac{8M}{\alpha^2\hbar^2\xi^2}. \tag{45}$$

这些能量也可以通过求解 方程（19）得到束缚态。我们通过以下方式求解方程（19）：采用
弗罗贝尼乌斯方法。我们采用如下形式的解 形式为的解

$$u(y) = y^\gamma (1-y)^\nu h(y), \tag{46}$$

其中 ν 和 γ 是待确定的任意常数，并且 $h(y)$ 是一个未知函数。注意，解（46）在正则奇点 $y=0$、$y=1$和 $y=\infty$ 处有限。将该解代入方程（19），得到微分方程

$$h''(y) + \left[\frac{2\gamma - (1+2\gamma+2\nu)y}{y(1-y)}\right] h'(y) + \frac{\nu^2-\kappa_b^2}{(1-y)^2} h(y) + \left[\frac{\wp^2 - 2\gamma\nu - \gamma^2}{y(1-y)}\right] h(y) + \frac{\gamma(\gamma-1)-\lambda^2}{y^2(1-y)} h(y) = 0, \tag{47}$$

其中 $\kappa_b = k_b/\xi$，$k_b = \sqrt{-2ME_{nl}}/\hbar\alpha > 0$，“$b$”用于标记束缚态。参数 ν 和 γ 由消去系数确定

$$\nu^2 - \kappa_b^2 = 0, \tag{48}$$

$$\gamma(\gamma-1) - \lambda^2 = 0, \tag{49}$$

由此可得

$$\nu_1 = +\kappa_b \text{ or } \nu_2 = -\kappa_b \tag{50}$$

and

$$\gamma_1 = d \text{ or } \gamma_2 = 1 - d, \tag{51}$$

分别。对于束缚态解，我们必须选择上面的 ν_1 和 γ_1 ，从而得到方程 n

$$y\left(1-y\right)h''\left(y\right) + \left[\zeta_3 - \left(1+\zeta_1+\zeta_2\right)y\right]h'\left(y\right) - \zeta_1\zeta_2 h\left(y\right) = 0, \tag{52}$$

其中

$$\zeta_1 = \gamma_1 + \nu_1 + \sqrt{\wp^2 + \nu_1^2}, \tag{53}$$

$$\zeta_2 = \gamma_1 + \nu_1 - \sqrt{\wp^2 + \nu_1^2}, \tag{54}$$

$$\zeta_3 = 2\gamma_1. \tag{55}$$

方程（52）是一个超几何微分方程。已知该方程的奇点是正则的。因此，我们可以在 $y = 0$附近设其级数解为

$$h\left(y\right) = \sum_{s=0}^{\infty} a_s\, y^{s+c}, \text{ with } a_0 \neq 0. \tag{56}$$

B将解（56）代入微分方程（52），可得指标方程 on

$$a_0\left[c\left(c-1\right) + \zeta_3 c\right] = 0, \tag{57}$$

其根为

$$c_1 = 0, \tag{58}$$

$$c_2 = 1 - \zeta_3. \tag{59}$$

以及递推关系

$$a_{s+1} = \frac{\left(s+c\right)\left(s+c+\zeta_1+\zeta_2\right) + \zeta_1\zeta_2}{\left(s+c+1\right)\left(s+c+\zeta_3\right)} a_s, \text{ for } s \geqslant 0. \tag{60}$$

(52) 的通解写作

$$h\left(y\right) = A\, h_1\left(y\right) + B\, h_2\left(y\right), \tag{61}$$

其中 A 和 B 分别是原点处正则解和非正则解的系数，wi th

$$h_1\left(y\right) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\zeta_1\right)_s \left(\zeta_2\right)_s}{\left(1\right)_s \left(\zeta_3\right)_s} y^s = {}_2F_1\left(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3; y\right) \tag{62}$$

and

$$h_2\left(y\right) = y^{1-\zeta_3} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\left(\zeta_1+1-\zeta_3\right)_s \left(\zeta_2+1-\zeta_3\right)_s}{\left(2-\zeta_3\right)_s \left(1\right)_s} y^s, \tag{63}$$

$$= y^{1-\zeta_3}\, {}_2F_1\left(\zeta_1+1-\zeta_3, \zeta_2+1-\zeta_3, 2-\zeta_3; y\right). \tag{64}$$

解（46）表示为

$$\begin{aligned} u\left(y\right) = {} & A\, y^d \left(1-y\right)^{\kappa_b}\, {}_2F_1\left(\zeta_1, \zeta_2, 2d; y\right) \\ & + B\, y^{1-d} \left(1-y\right)^{\kappa_b}\, {}_2F_1\left(\zeta_1+1-2d, \zeta_2+1-2d, 2-2d; y\right) \end{aligned} \tag{65}$$

由于 ζ_3 不是整数，且 $u(y) = 0$在 $y = 0$ （或 $r \to \infty$）处，因此我们取 $B = 0$。于是，相关的解为

$$u(y) = C_{nl}\, y^{d} (1-y)^{\kappa_b}\, {}_2F_1(\zeta_1, \zeta_2, 2d; y), \tag{66}$$

其中， C_{nl} 为归一化常数。为了获得束缚态能量，我们必须要求级数 ${}_2F_1(\zeta_1, \zeta_2, 2d; y)$终止，从而得到一个次数为 n的多项式。这意味着在递推关系（60）中，我们必须施加条件 $a_{n+1} = 0$，这将导出（其中 $c_1 = 0$）

$$n(n + \zeta_1 + \zeta_2) + \zeta_1\zeta_2 = 0 \tag{67}$$

or

$$2n\kappa_b + d^2 - \wp^2 + 2d\kappa_b + 2dn + n^2 = 0, \tag{68}$$

解出 κ_b 可得

$$\kappa_b = \frac{\wp^2 - (d+n)^2}{2(n+d)} > 0, \text{ with } n + d \neq 0. \tag{69}$$

利用关系式

$$\kappa_b = \sqrt{-\frac{2ME_{nl}}{\hbar^2\alpha^2\xi^2}} > 0, \tag{70}$$

代入方程（69），并对 E_{nl}求解所得方程，我们得到

$$E_{nl} = -\frac{(d+n-\wp)^2(d+n+\wp)^2}{\beta(d+n)^2}, \text{ with } \beta = \frac{8M}{\alpha^2\hbar^2\xi^2}, \tag{71}$$

这正是方程（45）。为确保关系式（70）的有效性，我们必须在方程（69）中要求

$$\wp^2 > (d+n)^2, \tag{72}$$

由此给出 n的上限值

$$n < |\wp| - d, \text{ with } d \in \mathbb{R} \;\; \wp \in \mathbb{R} \tag{73}$$

或者更明确地说

$$n < \left| \frac{2M}{\hbar^2\alpha^2\xi} \left(Ze^2 - \mathcal{K}(\alpha) \right) \right| - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{4l(l+1)}{\alpha^2}} \right]. \tag{74}$$

方程（74）确立了束缚态出现的条件，并进一步确定了这些态必然出现时量子数 n 的取值范围。需要强调的是，能量（71）可通过将 $\kappa \to ik_b$ 直接代入方程（21）得到。这便导出了式（66）的解。超几何函数的性质众所周知。如上所述，当 $\zeta_1 = -n$，其中 $n = 0$、1、2、.....，且 $\zeta_3 \neq 0$、-1、-2、.....时，函数 ${}_2F_1(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3; y)$ 变为多项式。由此，束缚态的波函数（作为 r 的函数）为

$$u(r) = C_{nl} \left(1 - e^{-\xi r}\right)^{d} e^{-k_b r}\, {}_2F_1\left(-n, d + \kappa_b - \sqrt{\wp^2 + \kappa_b^2}, 2d; 1 - e^{-\xi r} \right), \tag{75}$$

而束缚态能量的表达式可由该条件得出

$$d + \kappa_b + \sqrt{\wp^2 + \kappa_b^2} = -n, \tag{76}$$

求解后 E_{nl} 再次得到方程（45），其显式形式为

$$E_{nl} = -\frac{\alpha^2\hbar^2\xi^2}{8M} \left[\frac{\frac{2M\xi}{\hbar^2\alpha^2\xi^2}\left(Ze^2 - \mathcal{K}(\alpha) \right)}{n + \frac{\sqrt{4l(l+1)+\alpha^2}}{2\alpha} + \frac{1}{2}} - \left(n + \frac{\sqrt{4l(l+1)+\alpha^2}}{2\alpha} + \frac{1}{2} \right) \right]^2. \tag{77}$$

表 I. 在极限 $\xi \to 0$ 下，对于 $n = 1$ 和不同的 l (方程 (77))。我们假设 $\hbar = 1$， $M = 1$， $Z = 1$， $e = 1$， $n = 1$ 和 $\alpha = 0.7$。

$E_{n,l}$	数值
$E_{1,1}$	-0.0472842
$E_{1,2}$	-0.0236029
$E_{1,3}$	-0.0141781
$E_{1,4}$	-0.0094620
$E_{1,5}$	-0.0067639
$E_{1,6}$	-0.0050758
$E_{1,7}$	-0.0039496
$E_{1,8}$	-0.0031608
$E_{1,9}$	-0.0025868
$E_{1,10}$	-0.0021561

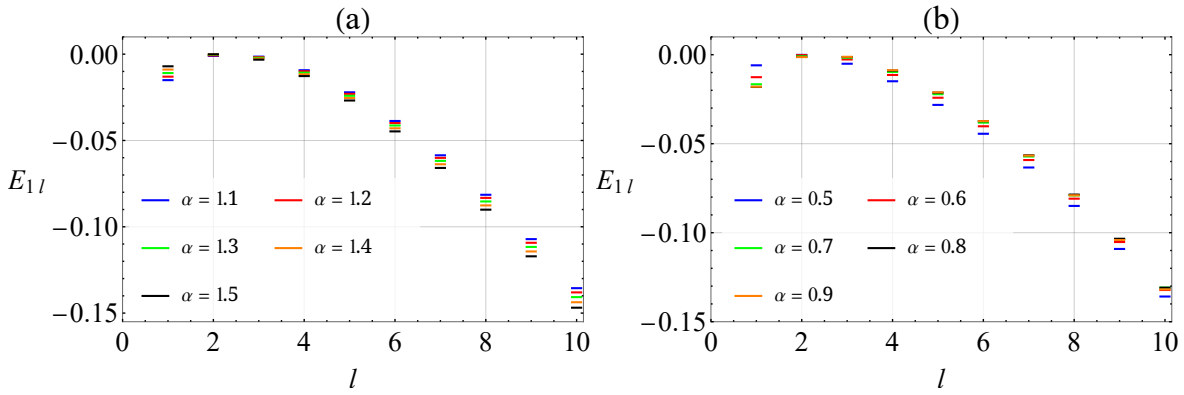


图 5. 能级（方程（77））与 $n = 1$ 作为 l 的函数，取 $\xi = 0.1$。图（a）展示了对应于不同 $\alpha > 1$ 数值的能量，图（b）展示了对应于不同 $\alpha < 1$数值的能量。在 $l = 2$处观察到两条曲线的反转。

可以验证，对于 $\xi \to 0$，并在方程（77）中保持其他参数不变时， E_{nl} 取有限值。在表 I 中，我们给出 $\alpha = 0.7$ 以及 l的不同取值对应的一些能量值。值得一提的是，对于 $Ze^2 = 0$ （不存在 Hulth´en 势），系统仅在 $\mathcal{K}$（α） < 0 时存在束缚态，即只有在静电自相互作用具有吸引性时才存在束缚态。然而，存在 Hulth´en 势时，系统在 $\mathcal{K}$（α） > 0时也存在束缚态。事实上，图1和图2更清楚地展示了势 V_H（r）与 V_{SI}（r）叠加的结果。因此，只有当 V_H（r） + V_{SI}（r） < 0时，才可能存在束缚态。我们可以将能量（77）描绘为相关参数的函数，以此进行研究。对于此处展示的所有能量图，为便于分析，我们选择研究 $n = 1$ 态，并取 $\hbar = 1$、 $M = 1$、 $Z = 1$和 $e = 1$。在图5中，我们绘出了 $n = 1$ 时不同 l取值对应的能级。可以看出， $|E_{10}| > |E_{11}| > |E_{12}|$，其顺序与所考虑的 α 取值一致。我们还发现，对于给定的 α， $l = 0$ 时各能级之间的间隔大于$l > 0$时的间隔。对于 $l > 2$，与 $l < 2$时的能级相比，我们观察到给定 α 值对应的能级发生了反转。在这种情况下， $|E_{1l}|$ 随 $l > 2$增大。图6展示了在$n = 1$且 ξ取两个不同值时，能级随 α 变化的曲线。由于参数 ξ 表示 Hulth´en 势的屏蔽参数，因此在其他参数取某些特定值时，它必然会控制这些能级的变化趋势。可以看出， $\xi = 0.01$ （图6(a)）与 $\xi = 0.5$ （图6(b)）产生了不同的曲线，对应于不同的物理情形。在图6(a)所示的情形中，我们看到，当 α 的取值范围为 1.1 至 1.4 时， $|E_{1l}|$先呈下降趋势，随后上升。对于$\alpha > 1.4$，我们看到 $|E_{1l}|$ 减小。另一方面，图6(b)表明，随着 α 增大， $|E_{1l}|$ 也增大。

我们还研究了选择不同的参数 ξ对能级的影响。在图7中，我们绘制了能级 E_{1l} 随 ξ 变化的曲线，针对 $\alpha = 1.5$这一特定情况。可以看到，存在一段 ξ 范围，在此范围内$|E_{1l}|$ 会减小，而在其他取值下 $|E_{1l}|$ 则会增大。随着 l的取值增大， $|E_{1l}|$ 也会增大（例如，图 $l = 4$ 7(a) 中的能量曲线（黑色实线））。图5、6 和7 所示的各种能量分布，可以结合图1 和2来解读，从而更容易理解。能量区间中 $|E_{1\ell}|$ 变小的区域，恰好对应于势阱开始形成的局域区域

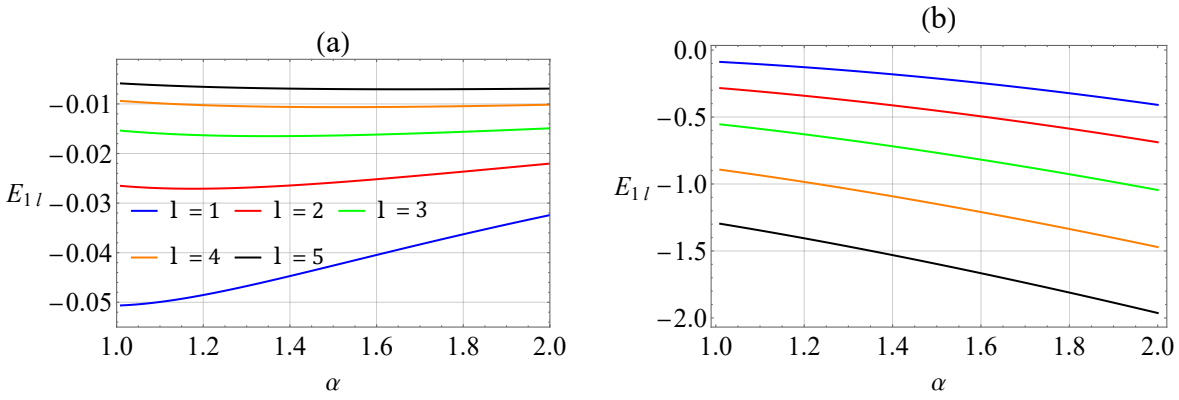


图 6. 能级（方程（77））随 $n = 1$变化， α 对应于 (a) $\xi = 0.01$ 和 (b) $\xi = 0.5$。

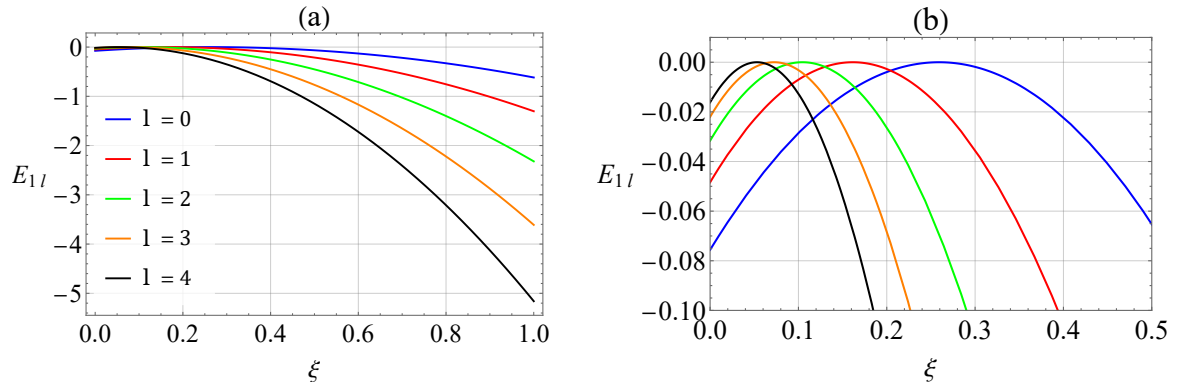


图 7. 能级（ 方程（77）与 $n = 1$ 作为 ξ 在 $\alpha = 1.5$下的函数关系。在（b）中，我们展示了从（a）到 $\xi = 0.5$的范围。

。 $|E_{1\ell}|$可以通过调整相关参数而增大或减小。

能量（77）可以与文献中的其他模型进行比较。例如，取 $\alpha = 1$，可得到能量

$$E_{nl} = -\frac{\hbar^2\xi^2}{2M}\left[\frac{\frac{2MZe^2}{\hbar^2\xi}}{2\,(n+l+1)} - \frac{n+l+1}{2}\right]^2 . \tag{78}$$

此外，通过在方程（ $\xi = \delta$ 和 $M = \mu$ ）中进行变换78，我们恰好得到参考文献 [84],中的表达式（24），该表达式也与参考文献 [88]中的方程（32）一致。

V. 结论

在本文中，我们研究了全局单子时空中存在 Hulth´én 势时电子量子运动的问题。由于全局单子背景的存在，有必要考虑由此产生的自相互作用势。在这种条件下，我们从球坐标中具有矢量耦合的薛定¨格方程出发。随后，通过文献中的标准步骤，得到了相应的径向方程。通过分析有效势的几种分布，我们验证了该问题既可针对束缚态，也可针对散射态求解。我们通过绘制有效势关于 r 的分布图来证实这一点，其中采用了α 参数的不同取值，并考虑了参数 ξ 的一些特定数值。我们采用指数函数变换方法，并对离心势进行近似，将薛定¨格方程导出的径向方程转换为超几何型微分方程。我们求解了散射态下的该方程，并得到了相移的表达式。为求得束缚态能量的表达式，我们采用了以下步骤：首先得到 S-矩阵。然后分析其极点。我们考察了自相互作用势分别为吸引势和排斥势时的能量分布。通过一些示意图，我们展示了该势和 α

参数可以改变束缚态能量。我们还研究了概率密度函数及其对参数的依赖性 α， ξ以及量子数 n。此外，我们还使用弗罗贝尼乌斯方法求解了束缚态问题，并确认束缚态能量和波函数与之前得到的相同。采用弗罗贝尼乌斯方法的理由在于，它能够给出一个表达式，从而确立束缚态出现的条件（方程（74））。

致谢

本研究部分得到巴西资助机构 CAPES、CNPq 和 FAPEMA 的支持。E. O. Silva 感谢 CNPq 提供的资助项目 306308/2022-3，以及 FAPEMA 提供的资助项目 PRONEM-01852/14 和 UNIVERSAL-06395/22。M.M.Cunha 感谢 CAPES 提供的资助项目 88887.358036/2019-00。本研究还部分获得巴西高等教育人员培训协调机构（CAPES）的资助，资助代码为 001。

[1] A. Suzko 和 E. Velicheva，载于 G. Adam、J. Buˇsa 和 M. Hnatiˇc 编《数学建模与计算科学》（Springer Berlin Heidelberg，柏林、海德堡，2012），第 182–188 页。[2] David J. Griffiths，《量子力学导论》，第 2 版（Addison-Wesley，2005）。[3] B. Davies 和 L. M. Delves，《澳大利亚物理学杂志》16，311（1963）。[4] H. Karayer 和 D. Demirhan，《欧洲物理学杂志 Plus》137，527（2022）。[5] X.-H. Wang、C.-Y. Chen、Y. You、F.-L. Lu、D.-S. Sun 和 S.-H. Dong，《中国物理 B》31，040301（2022）。[6] J. A. L´opez-Villanueva、I. Melchor、P. Cartujo 和 J. E. Carceller，《物理评论 B》48，1626（1993）。[7] R. A. El-Nabulsi，《Physica E：低维系统与纳米结构》134，114827（2021）。[8] D. Biswas 和 S. Ghosh，《欧洲物理快报》132，10004（2020）。[9] A. Vilenkin 和 E. P. S. Shellard，《宇宙弦与其他拓扑缺陷》（剑桥大学出版社，剑桥，2000）。[10] R. Durrer、M. Kunz 和 A. Melchiorri，《物理学报告》364，1（2002）。[11] L. Ma 和 X. C. Zeng，《物理化学快报》9，6801（2018）。[12] H. Jagodzinski，《晶体学报 A 辑》40，309（1984）。[13] A. Vilenkin，《物理评论 D》23，852（1981）。[14] G. de A Marques 和 V. B. Bezerra，《经典与量子引力》19，985（2002）。[15] Mikhail O. Katanaev，《物理学—乌斯别希》48，675（2005）。[16] M. O. Katanaev 和 I. V. Volovich，《物理学年鉴》216，1（1992）。[17] F. Ahmed，《现代物理学国际期刊 A》37，2250122（2022）。[18] Y. Yang、J. Jing 和 Z. Tian，《欧洲物理学杂志 C》82，688（2022）。[19] C. Edet、P. Nwbabuzor、E. Ettah、C. Duque、N. Ali、A. Ikot、S. Mahmoud 和 M. Asjad，《物理学研究成果》39，105749（2022）。[20] H. Chen、Z.-W. Long、C.-Y. Long、S. Zare 和 H. Hassanabadi，《现代物理学中的几何方法国际期刊》19，2250133 2022（）。[21] R. Zhou 和 L. Bian，《中国物理 C》46，043104（2022）。[22] O. Mustafa，《物理学年鉴》440，168857（2022）。[23] R. R. Cuzinatto、M. de Montigny 和 P. J. Pompeia，《经典与量子引力》39，075006（2022）。[24] R. R. Cuzinatto、M. de Montigny 和 P. J. Pompeia，《经典与量子引力》39，075007（2022）。[25] F. Ahmed，《加拿大物理学杂志》99，496（2021）。[26] F. Ahmed，《现代物理学中的几何方法国际期刊》18，2150187（2021）。[27] M. Silva 和 A. Mohammadi，《经典与量子引力》38，205006（2021）。[28] A. Guvendi 和 H. Hassanabadi，《少体系统》62，57（2021）。[29] Y. Yang、H. Hassanabadi、H. Chen 和 Z.-W. Long，《现代物理学国际期刊 E》30，2150050（2021）。[30] F. Ahmed，《现代物理快报 A》36，2150004（2021）。[31] M. M. Cunha 和 E. O. Silva，《宇宙》6，10.3390/universe6110203（2020）。[32] M. M. Cunha、H. S. Dias 和 E. O. Silva，《物理评论 D》102，105020（2020）。[33] M. Hosseinpour 和 H. Hassanabadi，《现代物理学国际期刊 A》30，1550124（2015）。[34] X.-Q. Sun、P. Zhu 和 T. L. Hughes，《物理评论快报》127，066401（2021）。[35] J. Oliveira、G. Garcia、P. Porf´ırio 和 C. Furtado，《物理学年鉴》425，168384（2021）。[36] S. Zare、H. Hassanabadi 和 M. de Montigny，《现代物理学国际期刊 A》35，2050071（2020）。[37] A. Belouad、A. Jellal 和 H. Bahlouli，《欧洲物理学杂志 B》94，75（2021）。[38] J. Jiang、K. Ranabhat、X. Wang、H. Rich、R. Zhang 和 C. Peng，《美国国家科学院院刊》119，e2122226119（2022）。[39] P. A. Monderkamp、R. Wittmann、M. te Vrugt、A. Voigt、R. Wittkowski 和 H. L¨owen，《物理化学与化学物理》24，15691（2022）。[40] K. Bakke，《现代物理学国际期刊 A》37，2250046（2022）。[41] A. Pandey、M. Singh 和 A. Gupta，《物理评论 E》104，065002（2021）。[42] H. Kleinert，《凝聚态物质中的规范场》（WORLD SCIENTIFIC，1989）。

[43] H. Kleinert，《凝聚态物质中的规范场》（WORLD SCIENTIFIC，1989）https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/0356。[44] W. P. Su、J. R. Schrieffer 和 A. J. Heeger，《物理评论 B》22，2099（1980）。[45] M. Kleman 和 J. Friedel，《现代物理评论》80，61（2008）。[46] H. Jagodzinski，《晶体学报 A 辑》40，309（1984）。[47] M. Barriola 和 A. Vilenkin，《物理评论快报》63，341（1989）。[48] L. Kaur 和 A.-M. Wazwaz，《随机与复杂介质中的波》31，199（2021），https://doi.org/10.1080/17455030.2019.1574410。[49] 以及，《中国物理 B》22，100203（2013）。[50] L. Kaur 和 R. K. Gupta，《物理学文稿》87，035003（2013）。[51] M. S. Ali 和 S. Bhattacharya，《物理评论 D》105，085006（2022）。[52] Y. V. Grats 和 P. A. Spirin，《实验与理论物理学杂志》123，807（2016）。[53] V. S. Barroso 和 J. P. M. Pitelli，《物理评论 D》98，065009（2018）。[54] F. Ahmed，《科学报告》12，8794（2022）。[55] M. de Montigny、J. Pinfold、S. Zare 和 H. Hassanabadi，《欧洲物理学杂志 Plus》137，54（2021）。[56] E. A. F. Braganc¸a、R. L. L. Vit´oria、H. Belich 和 E. R. B. de Mello，《欧洲物理学杂志 C》80，206（2020）。[57] M. Anacleto、F. Brito、S. Ferreira 和 E. Passos，《物理快报 B》788，231（2019）。[58] J. Pu 和 Y. Han，《国际理论物理学杂志》56，2061（2017）。[59] J. Z. Shao 和 Y. J. Wang，《中国物理 B》21，040404（2012）。[60] B. I. Ita、H. Louis、E. I. Ubana、P. E. Ekuri、C. U. Leonard 和 N. I. Nzeata，《分子建模杂志》26，349（2020）。[61] C. P. Onyenegecha、U. M. Ukewuihe、A. I. Opara、C. B. Agbakwuru、C. J. Okereke、N. R. Ugochukwu、S. A. Okolie 和 I. J. Njoku，《欧洲物理学杂志 Plus》135，571（2020）。[62] H. Louis、B. I. Ita 和 N. I. Nzeata，《欧洲物理学杂志 Plus》134，315（2019）。[63] K. Oyewumi、B. Falaye、C. Onate、O. Oluwadare 和 W. Yahya，《分子物理学》112，127（2014）。[64] O. Bayrak 和 I. Boztosun，《物理学文稿》76，92（2007）。[65] D. Agboola，《物理学文稿》80，065304（2009）。[66] N. Saad，《物理学文稿》76，623（2007）。[67] X.-L. Peng、J.-Y. Liu 和 C.-S. Jia，《物理快报 A》352，478（2006）。[68] M. Hosseinpour、F. M. Andrade、E. O. Silva 和 H. Hassanabadi，《欧洲物理学杂志 C》77，270（2017）。[69] K. Jusufi、M. C. Werner、A. Banerjee 和 A. ¨Ovg¨un，《物理评论 D》95，104012（2017）。[70] E. R. Bezerra de Mello 和 C. Furtado，《物理评论 D》56，1345（1997）。[71] L. Hulth´en，《数学、天文学与物理学档案》A辑 28，5（1942）。[72] W.-C. Qiang 和 S.-H. Dong，《物理快报 A》368，13（2007）。[73] C.-Y. Chen、F.-L. Lu 和 D.-S. Sun，《中欧物理学杂志》6，884（2008）。[74] C.-S. Jia、J.-Y. Liu 和 P.-Q. Wang，《物理快报 A》372，4779（2008）。[75] J. J. Sakurai，《现代量子力学》，修订版（Addison-Wesley，美国，1994）。[76] W. Gao-Feng、C. Wen-Li、W. Hong-Ying 和 L. Yuan-Yuan，《中国物理 B》18，3663（2009）。[77] H. Hassanabadi、B. H. Yazarloo、S. Hassanabadi 和 S. Zarrinkamar，《波兰物理学报A辑》124，20（2013）。[78] L. Landau 和 E. Lifshitz，《量子力学：非相对论理论》，《理论物理学教程》（Elsevier Science，1981）。[79] R. L. Greene 和 C. Aldrich，《物理评论 A》14，2363（1976）。[80] O. Adebimpe、C. Onate、S. Salawu、A. Abolanriwa 和 A. Lukman，《物理学研究成果》14，102409（2019）。[81] A. Ahmadov、S. Aslanova、M. Orujova、S. Badalov 和 S.-H. Dong，《物理快报 A》383，3010（2019）。[82] C. O. Edet 和 A. N. Ikot，《低温物理学杂志》203，84（2021）。[83] M. Eshghi、R. Sever 和 S. M. Ikhdair，《中国物理 B》27，020301（2018）。[84] C.-S. Jia、J.-Y. Liu 和 P.-Q. Wang，《物理快报 A》372，4779（2008）。[85] K. Aomoto、M. Kita、T. Kohno 和 K. Iohara，《超几何函数理论》，《施普林格数学专著》（Springer Japan，2011）。[86] M. Abramowitz 和 I. A. Stegun，《数学函数手册》（Dover Publications，纽约，1972）。[87] F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark 编，《NIST数学函数手册》（剑桥大学出版社，2010）。[88] O. Bayrak、G. Kocak 和 I. Boztosun，《物理学杂志A：数学与通论》39，11521（2006）。