IRMP-CP3-23-10

引力电磁近似下的引力磁偶极子及其速度旋转曲线

Jan Govaerts[1]

宇宙学、粒子物理与唯象学中心 *(CP3)*，数学与物理研究所 *(IRMP)*，鲁汶天主教大学 *(UCLouvain)*，回旋加速器路 *2* 号，*B-1348* 新鲁汶，比利时电子邮件：*Jan.Govaerts@uclouvain.be*ORCID：http://orcid.org/0000-0002-8430-5180

数学物理与应用国际讲席 *(ICMPA–*联合国教科文组织讲席*)*，阿波美-卡拉维大学，*072 B.P. 50*，科托努，贝宁共和国

arXiv:2303.01386v1 [gr-qc] 2 Mar 2023

摘要

鉴于观测到的螺旋星系平坦旋转曲线，并且受到这样一个简单事实的启发：在牛顿引力中，有限范围的静态轴对称质量分布或暗物质涡旋，很容易在延伸至与该涡旋横向于星系盘的尺度相当的距离范围内，呈现出某种趋于平坦的速度旋转曲线，因此，本文考虑这样一种可能性：旋转曲线的这种变平或许反而是某种纯引力性质的定常轴对称时空曲率的表现，而无需求助于暗物质粒子。具体而言，研究对象是携带相反 NUT 荷的引力磁偶极子，以及其米斯纳弦的无张力极限；该对象是爱因斯坦方程的一个精确真空解。为了初步评估这一设想的潜力，而不是进行完整的测地线研究，本文在弱场引力电磁学和非相对论动力学的范围内分析了这一情形。由此确实得到了一些有趣且令人鼓舞的结果。

[1]研究员　南非共和国斯泰伦博斯的斯泰伦博斯高等研究院（STIAS）

1 引言

宇宙中缺失质量的物理实在性，或所谓的暗物质问题，如今已得到广泛认可并受到强调；各种相互补充、彼此汇聚且令人信服的证据不断积累，其尺度范围从星系距离尺度延伸至天体物理和宇宙学尺度（在众多现有综述中，例如参见文献[1, 2, 3, 4]）。鉴于牛顿引力的概念范式（以及高斯定理），人们很自然地会假设，暗物质困惑是某些未知种类的基本暗物质粒子存在的表现；除了引力相互作用之外，这些粒子与普通物质之间的相互作用即使存在也近乎为零。例如，对于螺旋星系旋转速度曲线的平坦现象——其延伸远超星系盘的可见外缘，历史上这是缺失质量问题的第一个真正表现——目前最受青睐且研究最为深入的解释，涉及一个（近乎）球形的暗物质粒子晕，而可见旋转星系就位于其中（关于这一主题的大量文献，例如参见文献[5, 6, 7, 8, 9, 10], 及其中的参考文献）。事实上，如今大多数人似乎都广泛接受暗物质粒子范式，认为它必然能够为宇宙在所有尺度上间接观测到的缺失质量之谜提供真正的存在理由。人们只需确定它可能是哪一种或哪几种新型粒子，并通过一切可以想象和利用的手段加以实现。

然而，尽管数十年来人们在物理与实验方面付出了诸多真正的巧思，投入了大量仪器设备，也在理论上进行了许多创新探索，迄今仍没有确凿的实验直接证据证明这类暗物质粒子的存在。或许正因如此，早年遭到大多数人摒弃的可能替代理论，如今又得到认真研究，人们也愈发意识到它们或许具有现实意义。无论是仍沿用牛顿引力或广义相对论的概念范式，还是通过对其进行修正、推广或变形而超越这些范式，人们都在探讨这类替代理论。

例如，不妨考虑螺旋星系的速度旋转曲线接近平坦的情形。[1] 在牛顿引力下，这种运动应源自某个静态轴对称质量分布所产生的轴对称引力场。事实上，此时（对于星系盘内的圆形轨迹），速度旋转曲线可由下式得出（例如参见附录）

$$v(r) = \sqrt{r \frac{\partial \phi(r, \cos\theta = 0)}{\partial r}}, \tag{1}$$

其中，$\phi(r, \cos\theta)$ 是由质量分布产生的牛顿引力标量势，而 (r, θ, φ) 是相对于质量分布的旋转对称轴 $z = r\cos\theta$ 定义的球坐标。对于可见物质的质量分布近似球对称且局限在半径 R 以内的情况，根据高斯定理，从距离 r 开始（其值并不远大于 R），旋转曲线基本上就应遵循一种主导的 $1/\sqrt{r}$ 整体行为，当然这与观测到的平坦曲线不同——因此，可见物质分布所提供的引力在较远距离处显得过弱。一个自然且简单的假设显然是，缺失质量可能来自一个半径远大于 R 的暗物质粒子球形晕。

[1] 由于下文将探讨的广义相对论中精确引力磁偶极子解，其旋转NUT黑洞双体产生了非零守恒角动量，因此这里具体考虑螺旋星系作为比较对象；显然，螺旋星系也具有由某种旋转物质分布产生的角动量。不过，这并不一定排除引力磁偶极子解最终也适用于椭圆星系和球状星系的可能性，因为已知这些星系同样面临缺失质量之谜 [4]。

然而，另一方面，如果 $v(r)$ 在较大的 r 取值范围内（相对于 R）基本保持恒定，那么上述关系意味着该区域内的引力势应基本呈现 $(\ln r)$ 的行为。当然，鉴于我们在本科物理中学过无限延伸的线性均匀电荷分布产生的电场和电势，这一观察直接启发我们提出： [9, 10, 11, 12, 13]造成旋转曲线平坦的不可见轴对称质量分布沿螺旋星系的旋转对称轴排列，并沿该方向延伸至较大的有限范围。

事实上，取一个总长度（或高度）为 $2L$、半径为 a、总质量为 $2m$且具有均匀体积质量分布的圆柱体，在极高精度的近似下，该引力系统在圆柱体外部的精确速度旋转曲线可由以下径向剖面 [12]表示（见附录），

$$r > a: \qquad v(r) \simeq \sqrt{G \cdot \frac{2m}{L}} \cdot \frac{1}{(1 + r^2/L^2)^{1/4}} = \sqrt{G \cdot \frac{2m}{r}} \cdot \frac{1}{(1 + L^2/r^2)^{1/4}}, \tag{2}$$

$G \simeq 4.3 \times 10^{-6}$ 千秒差距 $\cdot M_\odot^{-1} \cdot$（千米/秒）^{2} 为牛顿常数。调制因子 $(1 + L^2/r^2)^{-1/4}$ 乘在大距离剖面$\sqrt{G \cdot 2m/r}$ 上的净效果，确实是在区域 $a < r < L$ 内，甚至在距离 $r = L$ 之外，在 $1/\sqrt{r}$ 行为开始之前，使旋转曲线变得平坦，仿佛旋转曲线的平坦部分是某种不可见暗物质的轴对称质量分布横向范围的“镜像”，这种暗物质贯穿螺旋星系的中心，并且很可能并非以暗物质粒子的形式存在 [12]。因此，无须必然引入半径远大于星系盘可见边缘的暗物质粒子球形晕，便可以解释旋转曲线呈现平坦状态的可能性。尽管如此，暗物质涡旋贯穿星系中心这一设想，直接引出了另一个尚未解决的问题：这种形式的物质可能具有怎样的物理本质。

或者，在广义相对论的框架下，也可以设想：某个特定空间区域内观测到的缺失质量，体现了该区域的时空曲率；这种曲率由局域于另一空间区域、尚未观测到的某种能量动量分布（可能属于某种尚未知晓的物质形态）所产生，因此在后一个空间区域之外，对应于真空爱因斯坦方程的某个解。再具体而言，对于螺旋星系及其旋转曲线，定常轴对称解可能具有重要意义。事实上，早在广义相对论创立之初，韦尔便构造了爱因斯坦真空方程的精确静态轴对称解 [14, 15], ；此后数十年间，运用可积系统的强大技术求解非线性爱因斯坦方程，如今已获得了该方程一大类精确的定常轴对称解 [16], 。鉴于上述观察——与星系盘半径相比，横向延展范围较大的紧致轴对称质量分布或许值得关注——有一种广义相对论真空解尤其适合作为初步探索这类想法的对象，即所谓的“引力磁偶极子” [17, 18]。

简而言之，这个真空爱因斯坦方程的定常解由两个质量相同的旋转黑洞 m 所产生——它们是引力电“单极荷”；但它们还分别带有数值相反的 NUT（纽曼-翁蒂-坦布里诺）荷 $\pm\nu$——即引力磁“单极荷”——，因此由时空度规的一个米斯纳弦奇点 [19, 20,21, 22, 23] 连接起来。它无非就是狄拉克单极子 [24]所对应的、携带奇异磁通的狄拉克弦的引力磁类比。相应的电磁构型是两个磁单极-电荷复合体，它们具有相同的单极电荷 q ，并且

单极磁荷相反 $\pm g$。在后一种情况下，狄拉克弦连接两个磁单极-电荷复合体（且不延伸至无穷远）；引力磁偶极子解中的携带引力磁通的米斯纳弦也是如此，该解包含两个质量相同的黑洞 m，且 NUT 荷相反 $\pm\nu$。此外，当 $|q| = |g|$（以自然电磁单位计）时，无论两个磁单极-电荷复合体的相对空间位置和距离如何，它们都保持静态平衡。类似地，对于引力磁偶极子，当两个黑洞的质量和 NUT 荷满足特定条件 [17]时，米斯纳弦的张力将变为零，两个黑洞随即在特定距离处保持静态平衡。

类比于上文在牛顿引力框架下讨论暗物质涡旋的情形，这类引力磁偶极子时空度规或可为我们提供一个新的视角，以便在广义相对论框架下考察螺旋星系平坦旋转曲线的问题。此时，米斯纳弦所起的作用类似于某种暗物质轴对称涡旋，但不再需要任何形式的物质直接参与；相反，它是时空度规中某种特定的连续分布、轴对称且（近乎）奇异的结构的一种“暗”表现（纯粹由引力产生），其源于某种高度非局域化的能量动量分布。

要全面评估这类爱因斯坦方程解的潜力，需要对引力磁偶极子时空中的测地线进行完整而详尽（且涉及大量数值计算）的分析，但这并非本文讨论的目的。本文旨在初步探究上述设想能否为暗物质之谜提供可行的解释，因此将考察该时空度规的渐近弱场，亦即引力电磁近似。我们将据此确定该时空几何中非相对论性圆形轨道的旋转曲线，并评估它是否能够充分改善牛顿引力所预示的大距离 $1/\sqrt{r}$ 行为，从而在该$1/\sqrt{r}$ 行为开始显现之前形成足够平坦的旋转曲线，进而与实际观测结果相符，例如螺旋星系的观测情况。

本文的分析基于以下考虑展开。尽管引力磁偶极子解相当复杂，但其时空度规可用涉及三个物理参数的精确解析表达式表示。由于该度规渐近平坦，其弱场区域出现在远距离处，因此可以通过关于 $1/r$的幂级数给出近似表示，其中距离 r 是相对于该解特征性的某个距离尺度测量的。作为爱因斯坦场方程的精确解，弱场区域本身就是线性化爱因斯坦方程的现成解，并且还为远离引力磁偶极子的经典点粒子轨迹提供线性化测地线方程。在这种线性化近似下，广义相对论方程可以写成类似于经典电动力学的麦克斯韦方程与作用于经典点电荷的洛伦兹力相耦合的形式，这一理论称为引力电动力学。在当前情形中，由于时空度规已经作为精确解给出，因此无需考虑引力电磁场的动力学方程。我们可以直接关注测地线方程，将其写成涉及引力电磁场的类洛伦兹力形式。由此将讨论限定于引力磁偶极子对称轴横向平面内的圆形轨迹，最终确定非相对论和大距离近似下引力磁偶极子的速度旋转曲线。

引力电动力学方程有着悠久的历史，从某种意义上说，甚至可以追溯到广义相对论提出之前 [25]。本研究采用的引力电动力学类洛伦兹力方程，具体采用了文献 [25] 中推导出的形式。该文献通过审慎而详尽的分析，评估了引力规范固定条件选择的自由度对线性化爱因斯坦场方程的影响，尤其是这些方程在

时空坐标微分同胚下的对称性。正如文献[25], 所指出的，引力电磁场方程的形式取决于规范选择。该文献还指出，这些方程除了包含引力电场和引力磁场之外，还应包含一个额外的标量场，称为中性场；事实上，该中性场也会与引力电动力学类洛伦兹力方程耦合。这些特点在文献中常常遭到忽视。引力电动力学的应用通常依赖于文献[26, 27] 中的讨论；然而，这些文献未能恰当地考虑此类更微妙的方面，尤其未必给出了自洽的测地线方程线性化，这与文献[25]不同，特别是在非相对论区域。

在尝试解释（螺旋）星系的平坦旋转曲线时，诉诸引力电动力学而非暗物质粒子晕，绝非什么新想法。多年来，已有许多论文发表了基于各种特定星系可见质量分布经验模型的不同尝试和详细分析，例如文献[28, 29, 30, 31, 32,33, 34, 35, 36] （及其中的参考文献）。这些研究没有纳入任何其他不可见物质或暗物质贡献，而是考虑由可见质量流产生的引力磁效应。然而，这些作者得出了彼此不同的结论——有些人（强烈）支持这种可能性，有些人则（完全）没有那么确信，还有一些人甚至不鼓励继续探索这条途径——具体取决于所采用的可见物质分布及其动力学模型。看来，对于这一设想，最终定论仍有待达成。例如，在近期一项颇有意思的研究（文献[31],）中，作者通过调整用于描述若干星系可见质量分布及其动力学的大量自由参数，在动力学方程中加入由可见质量流产生的引力磁修正，从而拟合了这些星系测得的旋转曲线及其平台段，且未引入任何额外的暗物质贡献。在这种方法中，需要同时求解由可见物质分布及其质量流的特设模型所产生的引力场对应的引力电磁场方程，以及描述同一可见物质分布动力学的耦合类洛伦兹力方程。

本文分析所采用的方法与前面刚刚提及的方法至少在三个主要方面存在明显不同，此外，所使用的引力电动力学表述也是专门在文献[25] 中精心发展起来的那一种（有别于其他研究）。首先，本文完全不涉及任何可见物质分布，而只考虑引力磁偶极子：它由两个质量相同、NUT 荷相反的旋转黑洞组成，二者通过米斯纳弦连接，并作为爱因斯坦场方程的一个精确强场解，具有弦状的时空奇点结构。其次，本文的讨论完全依据引力电磁类洛伦兹力方程，而根本不考虑引力场的引力电磁场方程，因为后者必然得到满足；原因很简单，所采用的时空度规本身已经是完整非线性爱因斯坦场方程的一个确切已知的非微扰解或非线性解。第三，鉴于该解所对应的质量尺度 m ，它只涉及另外两个参数，即两个黑洞之间的距离及其相反 NUT 荷的数值；事实上，在其米斯纳弦的无张力极限下，这两个参数会归结为一个单独的自由参数。实际上，由于在相对论情形下，质量尺度还通过具有长度的物理量纲的因子 Gm/c^2 设定引力相互作用的距离尺度，无张力引力磁偶极子解便由一个自由的无量纲参数表征。该参数的取值仍有待选择，以便不仅在速度曲线中形成足够宽的平坦平台，而且使平台速度的数值也能与实际观测到的那些数值良好符合。而这仍未计入某些可见物质分布及其质量流密度所带来的额外贡献。即使

这些结论是在所采用的弱场和非相对论近似下得到的，本文工作的主要结论仍将表明：通过恰当地选择该单独自由参数的取值，这两个目标都可以轻易实现。而且，这已经无需像其他所有方法那样，去调整应当（在稍后阶段）纳入的任何可见质量分布的轮廓，使之趋向于更加符合物理实际的评估，从而探讨引力磁偶极子及其在尝试理解暗物质之谜方面可能发挥的作用。

下文的讨论安排如下，从而落实前述总体方案。第2节考察引力磁偶极子的时空度规，并在第3节构造其 $1/r$ 渐近展开，展开到满足本文目的所需的阶数。随后，第4节确定该真空爱因斯坦方程解对应的引力电磁场[25] （见第4.1小节），最后在同一引力电磁近似下，确定非相对论区域中相应速度旋转曲线的重求和表示，并初步通过数值分析评估其物理潜力，即能否解释螺旋星系旋转曲线中观测到的平坦部分。结论部分将给出一些总结性意见。附录中则列出正文中涉及牛顿引力的进一步考量及相关关系，以供参考。

2 引力磁偶极子的时空度规

考虑真空爱因斯坦方程的引力磁偶极子解，采用参考文献[17, 18], 中的记号和约定，并隐含使用自然单位制，使得[2] $c = 1$且 $G = 1$。该构型由两个质量相等 $m > 0$ 、NUT 荷相反 $\pm\nu$ 的 NUT 物体非线性叠加而成（不失一般性，可取$\nu \geq 0$，下文均采用此设定），二者相距 $2k \geq 2m > 0$，并以 $z = 0$ 为中心，沿 z 坐标轴对称排列。

在韦尔坐标（t， ρ， φ， z）中，相应的定常渐近平直时空度规具有如下形式：

$$ds^2 = -f\,(dt - \omega d\varphi)^2 + f^{-1}\left[e^{2\gamma}\left(d\rho^2 + dz^2\right) + \rho^2 d\varphi^2\right], \tag{3}$$

其中 f（ρ， z）、 γ（ρ， z）以及 ω（ρ， z）仅是（ρ， z）的函数。这些函数由复值势 A， B 和 $G = G_2 + G_1$ 按如下方式构造，这些势将在下文详细说明（它们决定了解的恩斯特势 [17, 18]），

$$f = \frac{|A|^2 - |B|^2}{|A + B|^2}, \qquad e^{2\gamma} = \frac{|A|^2 - |B|^2}{64\, d^4\, \alpha_+^2 \alpha_-^2\, R_+ R_- r_+ r_-}, \qquad \omega = -4\,\frac{\mathrm{Im}\left[G(\bar{A} + \bar{B})\right]}{|A|^2 - |B|^2}. \tag{4}$$

这些势 A、 B、 G_1 和 G_2 的显式表达式将在下文列出，它们是（ρ， z）的函数，并且特别涉及以下特定量

$$R_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \alpha_+)^2}, \qquad r_\pm = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \alpha_-)^2}, \tag{5}$$

其中

$$\alpha_\pm = \sqrt{m^2 + k^2 - \nu^2 \pm 2d}, \qquad d = \sqrt{m^2 k^2 + \nu^2 (k^2 - m^2)}. \tag{6}$$

[2] 我们 th 感谢 G´erard Cl´ement [17] 通过私人电子邮件确认了这一单位选择 n.

参考文献[17, 18] 给出了复值势的以下表达式 A, B, G_1以及 G_2 据此构造了式（3）中给出的引力磁偶极子时空度规参数化。对于 A（ρ, z）势，有

$$\begin{aligned} A &= \left[(m^2+\nu^2)(k^2-m^2)(k^2-m^2-\nu^2)-2m^2k^2\nu^2\right](R_+-R_-)(r_+-r_-) \\ &\quad -\alpha_+\alpha_-\Big[\ \ 2(m^2+\nu^2)(k^2-m^2)(R_+R_-+r_+r_-) \\ &\qquad +(2m^4+(m^2+\nu^2)(k^2-m^2))(R_++R_-)(r_++r_-)\Big] \\ &\quad -2imk\nu d\left[(\alpha_+-\alpha_-)(R_+r_+-R_-r_-)-(\alpha_++\alpha_-)(R_+r_--R_-r_+)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

而 $B(\rho,\ z)$ 势为，

$$\begin{aligned} B &= 4d\,m\alpha_+\alpha_-\left[(m^2-d)(R_++R_-)-(m^2+d)(r_++r_-)\right] \\ &\quad +i\,4k\nu d\left[\alpha_-(m^2-d)(R_+-R_-)-\alpha_+(m^2+d)(r_+-r_-)\right]. \end{aligned} \tag{8}$$

最后，$G_2(\rho,\ z)$ 和 $G_1(\rho,\ z)$ 势分别为，

$$\begin{aligned} G_2 &= -d\left[d^2+m^2(m^2+2ik\nu)\right]\left[(\alpha_+-\alpha_-)(R_+r_+-R_-r_-)-(\alpha_++\alpha_-)(R_+r_--R_-r_+)\right] \\ &\quad +2m^2d^2\left[(\alpha_++\alpha_-)(R_+r_+-R_-r_-)-(\alpha_+-\alpha_-)(R_+r_--R_-r_+)\right] \\ &\quad -m\alpha_+\alpha_-(d^2+m^4)(R_++R_-)(r_++r_-) \\ &\quad +m\left[kd^2(k+4i\nu)-(2k^2-m^2)(m^2+\nu^2)^2+k^2\nu^4\right](R_+-R_-)(r_+-r_-) \\ &\quad -2m\alpha_+\alpha_-(m^2+\nu^2)(k^2-m^2)(R_+R_-+r_+r_-) \\ &\quad -2d\,z\Big\{\ \alpha_-(m^2-d)\left[m\alpha_+(R_++R_-)+i\,k\nu(R_+-R_-)\right] \\ &\qquad -\alpha_+(m^2+d)\left[m\alpha_-(r_++r_-)+i\,k\nu(r_+-r_-)\right]\Big\}, \end{aligned} \tag{9}$$

and

$$\begin{aligned} G_1 &= 2d\alpha_+\alpha_-(2m^2+i\,k\nu)\left[m^2(R_++R_--r_+-r_-)-d(R_++R_-+r_++r_-)\right] \\ &\quad -2md\left[d^2-m^4-i\,k\nu(2m^2+i\,k\nu)\right]\left[\alpha_-(R_+-R_-)-\alpha_+(r_+-r_-)\right] \\ &\quad +2md^2(m^2-k^2+\nu^2-2\,i\,k\nu)\left[\alpha_-(R_+-R_-)+\alpha_+(r_+-r_-)\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

关于该真空爱因斯坦方程解的主要物理性质的详细讨论，请参阅文献[17]。特别是，这个渐近平坦度规具有总质量 $M=2m$ 和总角动量 $J=2k\nu$。注意，鉴于采用自然单位制，所有距离尺度均可用 m表示。当 $k\geq m$足够大时，该系统由两个黑洞组成，它们由一条旋转米斯纳弦连接[19, 20, 21, 22, 23]。量 $\alpha_-<\alpha_+$ 和 $-\alpha_+<-\alpha_-$ 分别对应于这两个黑洞视界与 z轴对称轴交点的位置，而米斯纳弦沿着 $-\alpha_-<z<\alpha_-$延伸。不过，此处还需进行一些更明确的一般性讨论，以便为本文余下部分的分析准备一系列相关工具，具体从第3 节以及上述时空度规的弱场渐近展开开始。

在求取弱场渐近展开时，给定 m 的值后，与其将（ν, k）作为另外两个独立参数，不如改变参数化方式，改用以下两个无量纲量，这样更为有效：[17] 它们表示相对于 α_+ 和 α_- 的均值和差值，$M=2m$。

$$\sigma=\frac{\alpha_++\alpha_-}{2m},\qquad \delta=\frac{\alpha_+-\alpha_-}{2m},\qquad \sigma\geq\delta>0. \tag{11}$$

于是可得逆关系：

$$d = m^2\sigma\delta, \qquad k^2\nu^2 = m^4(\sigma^2-1)(\delta^2-1), \qquad k^2-\nu^2 = m^2(\sigma^2+\delta^2-1). \tag{12}$$

请注意，性质 $k^2\nu^2 \geq 0$ 要求满足必要条件 $\sigma \geq \delta \geq 1$。此外，由此可得无量纲参数 $k/m \geq 1$ 和 $\nu/m \geq 0$ 为：

$$\frac{k^2}{m^2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(\sigma^2+\delta^2-1)^2+4(\sigma^2-1)(\delta^2-1)} \; + \; (\sigma^2+\delta^2-1)\right], \tag{13}$$

$$\frac{\nu^2}{m^2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(\sigma^2+\delta^2-1)^2+4(\sigma^2-1)(\delta^2-1)} \; - \; (\sigma^2+\delta^2-1)\right]. \tag{14}$$

最后，在讨论第4 节中与第3节所建立的弱场近似相对应的引力电磁场的最终表达式时，另一种参数化方式很有用。为此，考虑表示总角动量与总质量之比的通常量 J M，即 $a = |J|/M$，以及定义如下的无量纲量 $\xi \geq 0$

$$\xi = \frac{a}{M} = \frac{|J|}{M^2} = \frac{1}{2}\frac{k|\nu|}{m^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma^2-1)(\delta^2-1)} \geq 0. \tag{15}$$

给定质量 m的值后，该参数 ξ 还允许对引力磁偶极子解进行另一种双重无量纲参数化。这种变量变换涉及另一对记为（$\alpha \geq 0$，$\xi \geq 0$）的量，它们由（σ，δ）构造而成，其中 ξ由上式给出，而参数 $\alpha \geq 0$ 定义为：

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(\sigma^2+\delta^2-2\right), \qquad \sigma^2+\delta^2-2 = 4\alpha = \frac{k^2-\nu^2}{m^2} - 1 \geq 0. \tag{16}$$

(ν, k) 的逆关系为，

$$\frac{k^2}{m^2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(4\alpha+1)^2+16\xi^2} \; + \; (4\alpha+1)\right], \tag{17}$$

$$\frac{\nu^2}{m^2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(4\alpha+1)^2+16\xi^2} \; - \; (4\alpha+1)\right]. \tag{18}$$

除了这些一般性考量之外，我们还要指出，在我们感兴趣的特殊情形中，即不涉及 NUT 荷的情形，也就是 $\nu = 0$ 的双黑洞解，其特征值为 $\alpha = (k^2/m^2-1)/4 \geq 0$ 和 $\xi = 0$，或者等价地，

$$d = mk, \quad \alpha_\pm = k \pm m \geq 0, \quad \sigma = \frac{k}{m} \geq 1, \quad \delta = 1, \quad \frac{k^2}{m^2} = \sigma^2 \geq 1, \quad \frac{\nu^2}{m^2} = 0, \tag{19}$$

因此，两黑洞之间的距离 $2k = \overline{2m\sqrt{4}}\alpha + 1 = 2m\sigma \geq 2m$ 仍是任意的。换言之，在 (σ^2, δ^2) 平面上的区域 $\sigma^2 \geq \delta^2 \geq 1$ 中，满足 $\sigma^2 = k^2/m^2 \geq 1$ 的直线 $\delta^2 = 1$ 表示具有 $\nu = 0$ 的解。或者等价地，在 (α, ξ) 平面上的象限 $(\alpha \geq 0, \xi \geq 0)$ 中，满足 $\alpha \geq 0$ 的直线 $\xi = 0$ 表示那些具有 $\nu = 0$ 的相同解。

正如参考文献中所讨论的[17], 当 $\nu \neq 0$ 并且作为距离 $k \geq m$ 的函数时，奇异米斯纳弦中的张力衡量了平衡两个源之间引力所需的力：对于两个相等质量的源，引力为吸引力；而对于两个相反的 NUT 荷，引力为排斥力。因此，米斯纳弦可能变得无张力，此时形成一种

平衡构型。这是一种具有显著物理相关性的情形，当满足 σ 与 δ 的取值之间以下限制条件时便会出现 [17],

$$\delta^2 = 2 - \frac{1}{\sigma^2}. \tag{20}$$

相应地，因为在这种情况下 $(\sigma^2-1)\ (\delta^2-1) = (\sigma^2-1)\ (1-\sigma^{-2}) = (\sigma-\sigma^{-1})^2$, 可得,

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{1}{\sigma}\right) \geq 0. \tag{21}$$

换言之，就当时仅剩的自由参数 $\xi \geq 0$ 以及 $m \geq 0$而言，无张力构型的特征是 σ、δ 和 α 取以下数值,

$$\sigma^2 = 1 + 2\xi\left(\sqrt{\xi^2+1} + \xi\right), \qquad \sigma = \sqrt{\xi^2+1} + \xi, \qquad \frac{1}{\sigma} = \sqrt{\xi^2+1} - \xi, \tag{22}$$

$$\delta^2 = 1 + 2\xi\left(\sqrt{\xi^2+1} - \xi\right), \qquad \alpha = \xi\sqrt{\xi^2+1}, \tag{23}$$

这又意味着逆关系为,

$$\frac{k^2}{m^2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(1+4\xi\sqrt{\xi^2+1}\right)^2 + 16\xi^2} + \left(1+4\xi\sqrt{\xi^2+1}\right)\right], \tag{24}$$

$$\frac{\nu^2}{m^2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(1+4\xi\sqrt{\xi^2+1}\right)^2 + 16\xi^2} - \left(1+4\xi\sqrt{\xi^2+1}\right)\right]. \tag{25}$$

事实上，这些表达式满足,

$$\frac{k^2-\nu^2}{m^2} = \sigma^2 + \delta^2 - 1 = 1 + 4\xi\sqrt{\xi^2+1}, \qquad \frac{k^2\nu^2}{m^4} = (\sigma^2-1)(\delta^2-1) = 4\xi^2, \tag{26}$$

正如理应如此。

在 (σ^2, δ^2) 平面中，无张力构型的线 $(\sigma^2 \geq 1, \delta^2 = 2 - 1/\sigma^2 \geq 1)$ 与满足 $\nu = 0$ 的解线 $(\sigma^2 \geq 1, \delta^2 = 1)$ 相交，且仅当取值为 $\xi = 0$ 时才成立，此时有:

$$\text{Tensionless with } \xi = 0: \quad \sigma^2 = 1, \quad \delta^2 = 1, \quad \alpha = 0, \quad \frac{k^2}{m^2} = 1, \quad \frac{\nu^2}{m^2} = 0. \tag{27}$$

此外，对于无张力构型，在考虑本文所建立的解析近似的数值计算时也很有用，请注意这些不同关系在 ξ 较小或较大时的如下表示形式。当 ξ 取较小值时，有如下级数近似,

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= 1 + 2\xi + 2\xi^2 + \xi^3 - \frac{1}{4}\xi^5 + \mathcal{O}(\xi^7), \\
\delta^2 &= 1 + 2\xi - 2\xi^2 + \xi^3 - \frac{1}{4}\xi^5 + \mathcal{O}(\xi^7), \\
\alpha &= \xi + \frac{1}{2}\xi^3 - \frac{1}{8}\xi^5 + \mathcal{O}(\xi^7), \\
\frac{k^2}{m^2} &= 1 + 4\xi + 4\xi^2 - 14\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4), \\
\frac{\nu^2}{m^2} &= 4\xi^2\left(1 - 4\xi + 12\xi^2 - 18\xi^3 + \mathcal{O}(\xi^4)\right).
\end{aligned} \tag{28}$$

事实证明，在 $\xi \to \infty$ 的另一极限下，对于无张力构型，当两个 NUT黑洞之间的距离 $2k$ 足够大时，参数 4ξ 基本上以 m 为单位度量两个物体之间的总距离，而它们的 NUT 荷则基本上与其质量 m 相同。事实上，当 ξ取较大值时，有如下渐近关系，

$$\xi \to \infty: \quad \frac{k^2}{m^2} \simeq 4\xi^2 \left(1 + \frac{1}{\xi^2} - \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\xi^4} + \mathcal{O}(1/\xi^6)\right), \quad \frac{\nu^2}{m^2} \simeq 1 - \frac{1}{\xi^2} + \frac{11}{8}\cdot\frac{1}{\xi^4} + \mathcal{O}(1/\xi^6), \tag{29}$$

对应于，

$$\xi \to \infty: \quad \sigma^2 \simeq 4\xi^2 \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\xi^4} + \mathcal{O}(1/\xi^6)\right), \quad \delta^2 \simeq 2\left(1 - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{\xi^4} + \mathcal{O}(1/\xi^6)\right), \tag{30}$$

以及，

$$\xi \to \infty: \quad \alpha \simeq \xi^2 \left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\xi^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{\xi^4} + \mathcal{O}(1/\xi^6)\right). \tag{31}$$

3 度规的弱场渐近展开

给定类空韦尔坐标 $(\rho,\ \varphi,\ z)$，引入相应的径向变量 r以及相对于 z 轴的球角 θ，使得，

$$r = \sqrt{\rho^2 + z^2}, \qquad z = r\,\cos\theta. \tag{32}$$

坐标 $(r,\ \theta,\ \varphi)$ 可视为相对于 z轴且以 $z = 0$为中心的球坐标。

因此，对于较大的r 值，引力磁偶极子时空度规的渐近展开可用无量纲变量的级数展开来进行

$$u = \frac{m}{r}. \tag{33}$$

如第4节所述，在弱场近似下考察引力电磁场及其对速度曲线的贡献时，结果表明，对于势 $u = r/m$，这些展开需要精确计算至 u^4 阶（含该阶），对于势 A 和 B，以及式（ $R_\pm$ 和 $r_\pm$ ）中引入的距离因子5，下文将对此进行计算。例如，根据后者在 r 中的标度关系，必须恰当地提出相关的 r 因子，从而得到以下距离因子的展开式；这些因子对势 A、 B 和 G有贡献，且精确至 u^4阶。

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}R_\pm \;=\;& 1 \pm (\sigma+\delta)\,\cos\theta\cdot u + \frac{1}{2}(\sigma+\delta)^2\,\sin^2\theta\cdot u^2 \\ & \mp\frac{1}{2}(\sigma+\delta)^3\,\sin^2\theta\,\cos\theta\cdot u^3 \;-\; \frac{1}{8}(\sigma+\delta)^4\,\sin^2\theta\,(1-5\cos^2\theta)\cdot u^4 \;+\; \mathcal{O}(u^5),\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}r_\pm \;=\;& 1 \pm (\sigma-\delta)\,\cos\theta\cdot u + \frac{1}{2}(\sigma-\delta)^2\,\sin^2\theta\cdot u^2 \\ & \mp\frac{1}{2}(\sigma-\delta)^3\,\sin^2\theta\,\cos\theta\cdot u^3 \;-\; \frac{1}{8}(\sigma-\delta)^4\,\sin^2\theta\,(1-5\cos^2\theta)\cdot u^4 \;+\; \mathcal{O}(u^5).\end{aligned} \tag{35}$$

应当强调，在本节推导时空度规渐近展开所带来的结果时，并不需要满足无张力条件。此阶段，参数 $\sigma \geq \delta \geq 1$ 或（$\alpha \geq 0,\ \xi \geq 0$）均保持任意。

另一方面，为了以方便的形式表述下文的结果，以下附加记号很有用：

$$\begin{aligned} X_2(\cos\theta) &= (\sigma^2+\delta^2) - 2(\sigma^2+\delta^2-1)\,\cos^2\theta, \\ X_3(\cos\theta) &= (\sigma^2+\delta^2-2)\,\sin^2\theta = (\sigma^2+\delta^2-2)(1-\cos^2\theta), \\ X_4(\cos\theta) &= \left[(\sigma^2\delta^2+1) - (2\sigma^4+2\delta^4+11\sigma^2\delta^2-2\sigma^2-2\delta^2-1)\,\cos^2\theta\right]\,\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{36}$$

按照上述方法，使用（7）（此处略去冗长但直接的计算细节），仔细评估势 A（其尺度为 r^2）渐近展开中的所有贡献，可得：

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[\frac{1}{r^2}A\right] &= -8m^6(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\left[1+X_2\cdot u^2 - X_4\cdot u^4 + \mathcal{O}(u^6)\right], \\ \mathrm{Im}\left[\frac{1}{r^2}A\right] &= -32m^6\cdot\frac{k\nu}{m^2}\cdot(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\,\sin^2\theta\,\cos\theta\cdot u^3 + \mathcal{O}(u^5), \end{aligned} \tag{37}$$

类似地，使用（8）处理势 B（其尺度为 r），可得：

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}B\right] &= -16m^6(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\left[u + \frac{1}{2}X_3\cdot u^3 + \mathcal{O}(u^5)\right], \\ \mathrm{Im}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}B\right] &= -16m^6\cdot\frac{k\nu}{m^2}\cdot(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\left[\cos\theta\cdot u^2 - \frac{1}{2}X_3\cos\theta\cdot u^4 + \mathcal{O}(u^6)\right], \end{aligned} \tag{38}$$

最后，对于组合 $A+B=r^2(A/r^2+(B/r)/r)$，有：

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left[\frac{1}{r^2}(A+B)\right] &= -8m^6(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\left[1+2\cdot u+X_2\cdot u^2 + X_3\cdot u^3 - X_4\cdot u^4 + \mathcal{O}(u^5)\right], \\ \mathrm{Im}\left[\frac{1}{r^2}(A+B)\right] &= -8m^6\cdot\frac{k\nu}{m^2}\cdot(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2 \\ &\quad\times\left[2\cos\theta\cdot u^2 + 4\sin^2\theta\,\cos\theta\cdot u^3 - X_3\cos\theta\cdot u^4 + \mathcal{O}(u^5)\right]. \end{aligned} \tag{39}$$

注意，A 和 B 的虚部通过组合 $k\nu/m^2=2\xi$与 NUT 荷呈直接线性关系。

根据这些量用势 A 和 B 表示的定义（见式（4）），这些结果给出了式（ f 和 $f^{-1}e^{2\gamma}$）中对度规分量的贡献的渐近表达式。这里只列出 f 的详细表达式（因为在本文分析的其余部分不需要$f^{-1}e^{2\gamma}$ 的表达式），如下：

$$\begin{aligned} f &= 1-4\cdot u+8\cdot u^2+2\left[(\sigma^2+\delta^2-6)-3\left(\sigma^2+\delta^2-\frac{2}{3}\right)\cos^2\theta\right]\cdot u^3 \\ &\quad -8\left[(\sigma^2+\delta^2-2)-3\left(\sigma^2+\delta^2-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{k\nu}{m}\right)^2\right)\cos^2\theta\right]\cdot u^4 + \mathcal{O}(u^5), \end{aligned} \tag{40}$$

而对于 $e^{2\gamma}$，为便于说明，取最低的非平凡阶，可得：

$$e^{2\gamma} = 1-4\sin^2\theta\cdot u^2 + \mathcal{O}(u^4). \tag{41}$$

请注意，这些结果明确表明，对于所有使 $\alpha_\pm$ 取实值的 $(m,\ k,\ \nu)$，引力磁偶极子的时空度规具有渐近平坦性。

对 $\omega(\rho,\ z)$ 进行渐近展开，需要展开势 G_1 和 G_2，它们的阶分别为 r 和 r^2。然而，鉴于角线元为 $\rho\, d\varphi$，并考虑到此展开将用于评估第4节引力电磁场对速度曲线的贡献，正如第4节所述，所需展开只需精确到 u^2 阶（含该阶），因为 $\omega d\varphi = (\omega/\rho)\,\rho\, d\varphi$。此外请注意，$\omega$ 必然通过 $k\nu/m^2 = 2\xi$与 NUT 荷呈线性关系，因为它来自纯虚贡献（见（4））。

对于 u 中关于 G_1 和 G_2 的这些展开式，不如上文关于 A和 B 的展开式那样紧凑简洁。此次使用（9）和（10），可得：

$$\mathrm{Re}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}G_1\right] = -16m^7(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\cdot u - 8m^7(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2(\sigma^2+\delta^2-2)\,\cos\theta\cdot u^2 + \mathcal{O}(u^3), \quad (42)$$

$$\mathrm{Im}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{1}{r}G_1\right] = -16m^7(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\cdot\frac{k\nu}{m^2}\cdot u + 8m^7(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\cdot\frac{2k\nu}{m^2}\,\cos\theta\cdot u^2 + \mathcal{O}(u^3), \quad (43)$$

以及，

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{r^2}G_2\right] \;=\;& 16m^7(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\,\cos\theta\cdot u\\ &-4m^7(\sigma^2-\delta^2)(\sigma^2\delta^2+1)[1+(\sigma^2+\delta^2)\sin^2\theta\cdot u^2]\\ &+4m(\sigma^2-\delta^2)[d^2k^2-(2k^2-m^2)(m^2+\nu^2)^2+k^2\nu^4]\,\cos^2\theta\cdot u^2\\ &-4m^7(\sigma^2-\delta^2)(\sigma^2\delta^2-1)[1+(\sigma^2+\delta^2)(\sin^2\theta-\cos^2\theta)\cdot u^2]\\ &+8m^7(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\,\cos\theta\,[1+\frac{1}{2}(\sigma^2+\delta^2-2)\sin^2\theta\cdot u^2]\,+\,\mathcal{O}(u^3), \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left[\frac{1}{r^2}G_2\right] \;=\;& 16m^7(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\cdot\frac{k\nu}{m^2}\,\cos^2\theta\cdot u^2\\ &+8m^7(\sigma^2-\delta^2)\sigma^2\delta^2\cdot\frac{k\nu}{m^2}\,\cos^2\theta\cdot u\,+\,\mathcal{O}(u^3). \end{aligned} \quad (45)$$

仔细展开（G_1+G_2）和（$A+B$）中实部和虚部的乘积组合（这些组合出现在（ ω ）中4）的表达式里），可得最低阶结果：

$$\omega = -4m\cdot\frac{k\nu}{m^2}\,\left[\sin^2\theta\cdot u\,-\,4\cos^2\theta\cdot u^2\right]\,+\,\mathcal{O}(u^3), \quad (46)$$

以及，

$$f\,\omega = -4m\cdot\frac{k\nu}{m^2}\,\left[\sin^2\theta\cdot u\,-\,4\cdot u^2\right]+\mathcal{O}(u^3), \qquad f\,\omega^2 = 16m^2\cdot\left(\frac{k\nu}{m^2}\right)^2\,\sin^4\theta\cdot u^2+\mathcal{O}(u^3). \quad (47)$$

4 引力电磁近似

为了确定与类洛伦兹运动方程相关的引力电场和引力磁场，并将其视为非相对论区域内有质量测试点粒子的测地线方程的引力电磁近似，我们遵循参考文献[25] 中谨慎而详尽的讨论，采用相同的符号，但额外使用自然单位制，使得 $c=1$且 $G=1$。

因此，渐近平坦时空度规采用以下形式：

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad h_{\mu\nu} \ll 1, \tag{48}$$

其中 $\eta_{\mu\nu}$ 是通常的闵可夫斯基时空度规（例如，相对于笛卡尔坐标（t，x，y，z）），其度规符号为（$-+++$）。

微扰 $h_{\mu\nu}$ 由此通过以下关系确定引力电磁势（ϕ，$\vec{w}$，Ψ，s_{ij}）[25]，

$$h_{tt} = -2\phi, \qquad h_{ti} = w^i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{49}$$

$$\Psi = -\frac{1}{6}\delta^{ij}\, h_{ij}, \qquad s_{ij} = \frac{1}{2}h_{ij} + \Psi\, \delta_{ij} = \frac{1}{2}h_{ij} - \frac{1}{6}\delta_{ij}\, \delta^{k\ell} h_{k\ell}, \tag{50}$$

s_{ij} 因此是对称且无迹的，并表示引力场的辐射部分。相应的引力电磁场（$\vec{E}_g$，$\vec{B}_g$，$\vec{N}_g$）则为[25]，

$$E_g^i = -\partial_i\phi - \partial_t\, w^i, \qquad B_g^i = \epsilon^{ijk}\partial_j\, w^k, \qquad N_g^i = -\partial_i\, \Psi, \tag{51}$$

而参考文献[25] 的作者强调，在这些引力电磁场必须满足的运动方程中，也应纳入中性场 $\vec{N}_g$，这同样具有重要意义（此处无须考虑这些运动方程，参见参考文献[25]）。

以质量为 μ的测试点粒子的非相对论动量 $\vec{p} = \mu\, \vec{x}$ 表示，并将其速度展开至线性阶，在这种非相对论近似下，该粒子的测地线方程可化为以下类洛伦兹形式 [25]，

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \mu\, \left(\vec{E}_g\, +\, \vec{v}\times\vec{B}_g\, +\, 2\vec{v}\,\partial_t\Psi\, -\, 2v^j\,\partial_t\, s_{ij}\right)\, +\, \mathcal{O}(v^i\, v^j). \tag{52}$$

特别是，当扰动 $h_{\mu\nu}$ 是定常的，即与时间无关时，该方程具有洛伦兹形式，

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \mu\, \left(\vec{E}_g\, +\, \vec{v}\times\vec{B}_g\right)\, +\, \mathcal{O}(v^i\, v^j), \tag{53}$$

因此，最终只需了解引力电磁标量势和矢量势 ϕ 及 $\vec{w}$。

4.1 引力磁偶极子的引力电磁场

为了将上述讨论应用于引力磁偶极子时空度规的渐近展开，我们还来考虑与上文使用的球坐标和柱状韦尔坐标相关的笛卡尔坐标（x，y，z），即

$$x = r\sin\theta\, \cos\varphi, \qquad y = r\sin\theta\, \sin\varphi, \qquad z = r\cos\theta, \tag{54}$$

使得特别有 $\rho^2 = x^2 + y^2 = r^2\sin^2\theta = r^2(1 - \cos^2\theta)$。

按照参考文献[25] 并采用3式中引力磁偶极子时空度规的参数化，可得到以下对应关系，

$$h_{tt} = 1 - f, \tag{55}$$

$$h_{tx} = -f\,\omega\,\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad h_{ty} = f\,\omega\,\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad h_{tz} = 0, \tag{56}$$

最后，

$$\begin{aligned}
h_{xx} &= \frac{1}{x^2+y^2}\left[x^2\left(f^{-1}e^{2\gamma}-1\right)+y^2\left(f^{-1}-f\frac{\omega^2}{x^2+y^2}-1\right)\right],\\
h_{yy} &= \frac{1}{x^2+y^2}\left[y^2\left(f^{-1}e^{2\gamma}-1\right)+x^2\left(f^{-1}-f\frac{\omega^2}{x^2+y^2}-1\right)\right],\\
h_{zz} &= \left(f^{-1}e^{2\gamma}-1\right),\\
h_{xy} &= \frac{xy}{x^2+y^2}\left[\left(f^{-1}e^{2\gamma}-1\right)-\left(f^{-1}-f\frac{\omega^2}{x^2+y^2}-1\right)\right],\\
h_{xz} &= 0,\\
h_{yz} &= 0.
\end{aligned} \tag{57}$$

如上所述，要应用类洛伦兹运动方程（53），只需要三维标量场和三维矢量场 $h_{tt}=-2\phi$ 以及 $h_{ti}=w^i$。

由于 $h_{tt}=-2\phi=1-f$ 且 f 如（40）所示，因此引力电标势在 $1/r^4$ 阶（含）以内为：

$$\phi(r,\cos\theta)=\frac{1}{2}(f-1)=-\frac{2m}{r}+4\left(\frac{m}{r}\right)^2+\frac{1}{2}f_3(\cos\theta)\left(\frac{m}{r}\right)^3+\frac{1}{2}f_4(\cos\theta)\left(\frac{m}{r}\right)^4+\cdots, \tag{58}$$

其中，量 $f_3(\cos\theta)$ 和 $f_4(\cos\theta)$ 定义如下：

$$f_3(\cos\theta)=8\left[(\alpha-1)-(3\alpha+1)\cos^2\theta\right], \qquad f_4(\cos\theta)=-32\left[\alpha-\left(3\alpha+1-\xi^2\right)\cos^2\theta\right], \tag{59}$$

同时，关系式 $\alpha=(\sigma^2+\delta^2-2)/4$ 和 $\xi=k|\nu|/(2m^2)$ 现在也已代入。在相同的相对阶数 $1/r$ 下，相应引力电场 $E_g=-\nabla\phi$ 的径向分量为：

$$\left(\vec{E}_g(r,\cos\theta)\right)_r=-\frac{\partial\phi(r,\cos\theta)}{\partial r}=-\frac{2m}{r^2}+\frac{8m^2}{r^3}+\frac{3}{2}f_3(\cos\theta)\frac{m^3}{r^4}+2f_4(\cos\theta)\frac{m^4}{r^5}+\cdots, \tag{60}$$

特别是在 $z=0$ 或 $\cos\theta=0$ 平面内：

$$\left(\vec{E}_g(r,\cos\theta=0)\right)_r=-\frac{2m}{r^2}+\frac{8m^2}{r^3}+12(\alpha-1)\frac{m^3}{r^4}-64\alpha\frac{m^4}{r^5}+\cdots, \tag{61}$$

以及：

$$\phi(r,\cos\theta=0)=-\frac{2m}{r}+\frac{4m^2}{r^2}+4(\alpha-1)\frac{m^3}{r^3}-16\alpha\frac{m^4}{r^4}+\cdots, \tag{62}$$

因此

$$r\frac{\partial\phi(r,\cos\theta)}{\partial r}_{|\cos\theta=0}=\frac{2m}{r}-8\left(\frac{m}{r}\right)^2-12(\alpha-1)\left(\frac{m}{r}\right)^3+64\alpha\left(\frac{m}{r}\right)^4+\cdots. \tag{63}$$

当然可以从 $-2m/r$（对于 ϕ）和 $-2m/r^2\hat{e}_r$（对于 $\vec{E}_g$）中的第一项看出通常的牛顿引力势和引力场，即值为 $M=2m$ 的点质量（单位为 $c=1$ 和 $G=1$）所产生的 $-2Gm/r$ 和 $-2Gm/r^2\,\hat{e}_r$，这正是预期的结果。

关于 $1/r$ 的高阶修正则由交错符号级数表示，实际上是两个此类级数交织而成。如附录所述，为了改善此类展开在小 r 处的行为，使其能更好地表示三维标量势的实际解，可以按照（100）的形式对级数进行重求和，并加入一个修正

调制因子，其中涉及特定的距离尺度因子 λ 和特定的幂 $\beta > 0$，使得，

$$\frac{1}{x} - \beta\frac{\lambda^2}{x^3} + \cdots \simeq \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{(1+\lambda^2/x^2)^\beta}, \tag{64}$$

其中 $x = r/m$ （以及采用自然单位制，使得 $G = 1$ 和 $c = 1$）。如附录所示，对于连续分布的轴对称质量分布，采用幂次 $\beta = 1/2$ （而非两个点质量情况下的 $\beta = 3/2$ ）预计能够很好地描述。鉴于连接引力磁偶极子中两个黑洞的米斯纳弦存在， $\beta = 1/2$ 仍是此后采用的首选值。

以这一观察为依据，对上述级数表示进行可靠的重求和，便可直接得到以下涉及两个相互交织的交错符号级数的项组织方式，其中 $x = r/m$，

$$\begin{aligned}
r\frac{\partial\phi(r,\cos\theta)}{\partial r}_{|\cos\theta=0} &= \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2} - \frac{12(\alpha-1)}{x^3} + \frac{64\alpha}{x^4} + \cdots \\
&= \frac{2}{x}\left[1 - \frac{4}{x} - \frac{6(\alpha-1)}{x^2} + \frac{32\alpha}{x^3} + \cdots\right] \\
&= \frac{2}{x}\left[\left(1 - \frac{6(\alpha-1)}{x^2} + \cdots\right) - \frac{4}{x}\left(1 - \frac{8\alpha}{x^2} + \cdots\right)\right] \\
&\simeq \frac{2}{x}\left[\left(1+12(\alpha-1)/x^2\right)^{-1/2} - \frac{4}{x}\left(1+16\alpha/x^2\right)^{-1/2}\right] \\
&\simeq \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+12(\alpha-1)/x^2}} \cdot \left[1 - \frac{4}{x} \cdot \sqrt{\frac{1+12(\alpha-1)/x^2}{1+16\alpha/x^2}}\right].
\end{aligned} \tag{65}$$

因此，此后应采用后一种形式的引力电标量势弱场近似及其对旋转曲线的贡献[3] ，因为与上述有限阶级数近似相比，这种形式应能更好地表示该量的径向变化；上述近似会出现剧烈且不符合物理规律的波动，原因是 r 会随着交错符号的影响而减小。

现在转而讨论引力磁场 $w^i = h_{ti}$ ，其分量由式（56）给出，其中现在需要将结果（47）代入 $f\omega$ ，并保留 $1/r$ 的最低阶项，这些引力磁三矢量势分量为：

$$\begin{aligned}
w^1 = w_x = h_{tx} &= 4 \cdot \frac{k\nu}{m^2} \sin\theta \sin\varphi \cdot u^2, \\
w^2 = w_y = h_{ty} &= -4 \cdot \frac{k\nu}{m^2} \sin\theta \cos\varphi \cdot u^2, \\
w^3 = w_z = h_{tz} &= 0,
\end{aligned} \tag{66}$$

因此它们已经是 $1/r^2$阶。在笛卡尔坐标中，引力磁矢量势满足

$$w^1 = 4k\nu\,\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad w^2 = -4k\nu\,\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \qquad w^3 = 0. \tag{67}$$

可以看出，这个场是一个磁偶极子的矢量势，其磁矩沿 z轴方向，磁矩大小与（$-4k\nu$）成正比。

[3]事实上，若暂且不考虑引力磁场对下文将要讨论的最终旋转曲线的贡献，则式（65）已经确定了量 $v^2\,(r)\,/c^2$，即以 c为单位的速度旋转曲线的平方。

因此，引力磁场可表示为:

$$\begin{aligned} B_g^1 = \left(\vec{\nabla}\times\vec{w}\right)^1 &= -12\,k\nu\,\frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \\ B_g^2 = \left(\vec{\nabla}\times\vec{w}\right)^2 &= -12\,k\nu\,\frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \\ B_g^3 = \left(\vec{\nabla}\times\vec{w}\right)^3 &= -4\,k\nu\,\frac{2z^2-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}. \end{aligned} \tag{68}$$

特别是在 $z=0$ or $\cos\theta=0$ 平面中，有:

$$\vec{B}_g(x,y,z=0) = \vec{\nabla}\times\vec{w} = \frac{4k\nu}{r^3}\,\hat{e}_z, \tag{69}$$

从而通过类洛伦兹运动方程（53），确定了对速度旋转曲线的额外贡献。

4.2 $z=0$处圆形轨迹的旋转曲线

在非相对论极限下，并给定所考虑的弱场引力电磁近似中的引力磁偶极子时空度规，类洛伦兹运动方程（53）可化简为:

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = \vec{E}_g + \vec{v}\times\vec{B}_g. \tag{70}$$

对于半径为 r 、位于 $z=0$ or $\cos\theta=0$ 平面内的圆形轨迹，有:

$$\vec{v} = v(r)\,\hat{e}_\varphi, \qquad \vec{v}\times\vec{B}_g(x,y,z=0) = \frac{4k\nu}{r^3}\,v(r)\,\hat{e}_r, \tag{71}$$

其中， $v(r)$ 是速度矢量沿 φ 方向的切向分量，其符号可正可负。在这些特定条件下，运动方程化简为

$$\frac{v^2(r)}{r} = \frac{\partial\phi(r,\cos\theta)}{\partial r}_{|\cos\theta=0} - \frac{4k\nu}{r^3}\,v(r). \tag{72}$$

因此，旋转曲线 $v(r)$ 由二次方程确定，

$$v^2(r) + \frac{4k\nu}{r^2}\,v(r) - r\frac{\partial\phi(r,\cos\theta)}{\partial r}_{|\cos\theta=0} = 0, \tag{73}$$

得到以下两个解，单位为 c,

$$v_+(r) = \sqrt{r\frac{\partial\phi(r,\cos\theta)}{\partial r}_{|\cos\theta=0} + \frac{4k^2\nu^2}{r^4}} - \frac{2k\nu}{r^2}, \tag{74}$$

$$v_-(r) = -\sqrt{r\frac{\partial\phi(r,\cos\theta)}{\partial r}_{|\cos\theta=0} + \frac{4k^2\nu^2}{r^4}} - \frac{2k\nu}{r^2}. \tag{75}$$

根据这些量 $x=r/m$， $\xi=k|\nu|/(2m)$ 和 $\alpha=(\sigma^2+\delta^2-2)/4$，并对引力电标量场贡献采用形式为（65）的重求和表达式，可得:

$$v_\pm(r) = \pm\sqrt{\frac{2}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+12(\alpha-1)/x^2}}\cdot\left(1-\frac{4}{x}\cdot\sqrt{\frac{1+12(\alpha-1)/x^2}{1+16\alpha/x^2}}\right)+\frac{16\xi^2}{x^4}} - \frac{4\xi}{x^2}, \tag{76}$$

或者等价地，

$$v_{\pm}(r) = \pm\sqrt{\frac{2}{x}}\cdot\frac{1}{(1+12(\alpha-1)/x^2)^{1/4}}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x}\sqrt{\frac{1+12(\alpha-1)/x^2}{1+16\alpha/x^2}}+\frac{8\xi^2}{x^3}\sqrt{1+\frac{12(\alpha-1)}{x^2}}}-\frac{4\xi}{x^2}, \tag{77}$$

这清楚地展现了在 $\sqrt{2m/r}$ 中预期的渐近主导行为。[4] 此外，还需要再作几点说明。

由于加入引力电标量场贡献的引力磁学修正，其旋转曲线 $v^2(r)/c^2$ 在 $1/r$ 展开中的最低阶贡献，即 $r\partial\phi(r,\ \cos\theta=0)/\partial r$，为 $1/r^4$ 阶，因此前一项在 ϕ 中至少也必须计算到同一阶（含该阶），上文确实如此处理。

另一方面，请注意，由于这些表达式是在非相对论近似下得到的，因此只有在满足 $|v_{\pm}(r)| \ll 1$ 的条件下，它们在物理上才可靠。

显然，具有非零 NUT 荷的 NUT引力磁偶极子$\pm\nu$ 会破坏旋转不变性（以及时间反演不变性），因为它区分了两种空间手性，从而也区分了相对于 z 对称轴的两种旋转方向；当 $\xi\neq 0$ 或 $\nu\neq 0$ 时，$v_+(r)$ 与 $v_-(r)$ 的取值不同。然而，由于引力偶极子时空度规渐近平坦，当 r/m 足够大时，这些旋转曲线的渐近行为在 $\sqrt{2m/r}$ 中呈现出通常的开普勒型轮廓，与旋转方向、NUT 荷的取值以及相对论修正无关。

更具体地说，首先为了与附录中讨论的总长度为 $2L$ 的圆柱形均匀质量分布的牛顿结果进行比较，让我们考察上述 $v_{\pm}(r)$ 的表达式，其中 $\xi=0$ 或 $\nu=0$，此时，

$$\xi=0:\quad v_{\pm}(r) = \pm\sqrt{\frac{2}{x}}\cdot\frac{1}{(1+12(\alpha-1)/x^2)^{1/4}}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x}\sqrt{\frac{1+12(\alpha-1)/x^2}{1+16\alpha/x^2}}}, \tag{78}$$

参数 α 因而为 $\alpha=(k^2/m^2-1)/4$，其中 $2k$ 是两个黑洞之间的总距离（以 m 为单位）。此时，对称轴 z 周围的旋转不变性得以恢复，特别是 $|v_+(r)|=|v_-(r)|$；采用 $L=m\sqrt{3}(k^2/m^2-5)$（以 m 为单位）的对应关系时，上述表达式等式右侧的前两个因子再现了牛顿结果。鉴于这一比较，上述表达式中的第三个因子应对应于一个相对论修正项；当 $c\to\infty$ 时，该项趋于 1，正如 $1/x=Gm/(rc^2)$ 所示。

如附录中所述，第二个因子 $(1+12(\alpha-1)/x^2)^{-1/4}$ 在 $\sqrt{2/x}$ 中调节整体渐近行为，且其修正已足以使旋转曲线在距离达到 $r\simeq L$ 之前都相当平坦。因此，上述额外的第三个因子和第二个调制项，以相对论修正的形式，进一步改善了这一吸引人的特性；这是因为最后一个平方根因子内的贡献$-4/x\cdot\sqrt{(1+12(\alpha-1)/x^2)/(1+16\alpha/x^2)}$带有负号。

这种旋转曲线的平坦化趋势会进一步增强，尤其是在解 $v_+(r)$的情况下；这也是因为还纳入了与非零 NUT 荷 $\nu\neq 0$ 或 $\xi\neq 0$ 成正比的引力磁场修正，而以下两项之间存在竞争：

[4]如果在以 (64) 的形式实现重求和时，倾向于采用不同于 $\beta=1/2$ 的值，例如$\beta=n/2$ 对于某个 $n>0$，那么 $v_{\pm}(r)$ 的相应结果为：其首项渐近行为仍相同，$v_{\pm}(r) = \pm\sqrt{\frac{2}{x}}\cdot(1+12(\alpha-1)/x^2)^{-n/4}\cdot\sqrt{1-\frac{4}{x}\left(\frac{1+12(\alpha-1)/x^2}{1+16\alpha/x^2}\right)^{n/2}+\frac{8\xi^2}{x^3}\left(1+\frac{12}{(\alpha-1}\right)^{n/2}-\frac{4\xi}{x^2}}$。

(76）等式右侧的首个平方根项整体为正，而$4\xi/x^2 > 0$中的贡献则被减去。[5] 将该解表示为以下形式，可以更清楚地展现这一特征：

$$v_+(r) = \sqrt{\frac{2}{x}} \cdot \frac{1}{(1+12(\alpha-1)/x^2)^{1/4}} \times \\ \times \frac{1 - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{1+12(\alpha-1)/x^2}{1+16\alpha/x^2}}}{\sqrt{1 - \frac{4}{x}\sqrt{\frac{1+12(\alpha-1)/x^2}{1+16\alpha/x^2}} + \frac{8\xi^2}{x^3}\sqrt{1+\frac{12(\alpha-1)}{x^2}}} + \frac{4\xi}{x^2}\sqrt{\frac{x}{2}\left(1+\frac{12(\alpha-1)}{x^2}\right)^{1/4}}}, \quad (79)$$

对于较大的（无量纲） α 和 ξ值以及逐渐减小的 x值，这种形式也更便于进行数值计算。

对于给定的 m值（它设定了物理距离的尺度），这种最后得到的引力磁偶极子旋转曲线近似表示 $v_+(r)$取决于两个独立参数；这两个参数标记了真空爱因斯坦方程这一类解，即

$$\alpha = \frac{1}{4}\left(\frac{k^2-\nu^2}{m^2} - 1\right) \geq 0, \qquad \xi = \frac{1}{2}\cdot\frac{k|\nu|}{m^2} \geq 0. \quad (80)$$

严格来说，应将讨论限制在米斯纳弦的无张力极限，对应于满足$\alpha = \xi\sqrt{\xi^2+1}$的构型。尤其是在这种情况下，当唯一剩余的自由参数 $\xi \geq 0$取较大值时，先前已指出其主导阶为：

$$\text{Tensionless limit}, \quad \xi \to \infty: \quad \alpha \simeq \xi^2, \qquad \frac{1}{4}\cdot\frac{k^2}{m^2} \simeq \xi^2, \qquad \frac{\nu^2}{m^2} \simeq 1. \quad (81)$$

因此，即使未严格施加无张力极限，只要 α 和 ξ 都较大，且近似满足 $\alpha \simeq \xi^2$，那么由 (76) 或 (79) 得到的 $v_+(r)$ 数值仍代表物理上相关的无张力情形。

因此，在这种情况下，除了 m 的取值决定了物理长度尺度（无量纲距离变量 $x = r/m$ 以此为尺度进行测量，其中$G = 1$ 和 $c = 1$），能够控制无量纲速度 $v_+(r)$（以 c为单位）取值的另外两个无量纲变量，唯一的可能就是联合选择 α 和 ξ的取值。

为了评估引力磁偶极子解解释螺旋星系观测到的扁平化旋转曲线这一现实现象的潜力，我们拟重现此类曲线的平台速度的典型值 v_0 （例如参见文献[6, 7]中的图1），其数量级为 $v_0 \simeq 230$ 千米/秒（大致范围为 $150 \lesssim v_0 \lesssim 300$ 千米/秒），从这类星系的可见边缘开始，因此其非相对论值为 $v_0/c \simeq 7.7\times10^{-4}$。

例如，取

$$\xi = 9\times10^5, \qquad \alpha = 8.1\times10^{11}, \quad (82)$$

确实会使旋转曲线 $v_+(r)$ 达到平台值

$$\frac{v_+(r)}{c} \simeq 7.8\times10^{-4}, \quad (83)$$

在该距离范围内，该速度值变化不大

$$400\,000 < x < 1\,500\,000. \quad (84)$$

[5]我们回顾一下，在不失一般性的前提下， ν 始终假定为正。

这一构型如图1所示。相应地，鉴于 ξ 和 α的值都很大，仍以 m为单位时，也有：

$$k \simeq 2\xi\, m, \qquad \nu \simeq m, \tag{85}$$

当 黑洞视界在 $z = \alpha_{\pm}$ （或 $z = -\alpha_{\pm}$）处截距时，取以下数值 ，

$$\frac{\alpha_+}{m} \simeq 1.8 \times 10^6 \simeq \frac{k}{m}, \qquad \frac{\alpha_-}{m} \simeq 1.8 \times 10^6 \simeq \frac{k}{m}, \qquad \frac{\alpha_+}{m} - \frac{\alpha_-}{m} = 2\delta \simeq 2\sqrt{2} = 2.828. \tag{86}$$

m 的值根据旋转曲线中此类平台区的典型物理距离确定。在螺旋星系的可见边缘附近，平台区通常从 $r_0 \simeq 5 - 15$ 千秒差距开始，对应于 $x \simeq 400\,000$。在该区间内选取数值，并结合上述 α 和 ξ 的取值以及 $\alpha \simeq \xi^2$，即可确定物理尺度为：

$$\begin{aligned} r_0 = 5 \text{ kpc} \quad &: \qquad m = 2.6 \times 10^{11}\, M_\odot, \qquad k = 45 \text{ kpc}; \\ r_0 = 10 \text{ kpc} \quad &: \qquad m = 5.2 \times 10^{11}\, M_\odot, \qquad k = 90 \text{ kpc}; \\ r_0 = 15 \text{ kpc} \quad &: \qquad m = 7.8 \times 10^{11}\, M_\odot, \qquad k = 135 \text{ kpc}, \end{aligned} \tag{87}$$

而对于黑洞视界在 z 轴上的截距，所有这些情况均有：

$$\alpha_+ - \alpha_- \simeq \frac{2\sqrt{2}}{k/m}\, k \simeq 1.57 \times 10^{-6}\, k \tag{88}$$

（我们记得，1 秒差距 $= 1$ 秒差距 $\simeq 3.262$ 光年 $\simeq 3.086 \times 10^{13}$ 千米）。对于 k 而言，这样的距离尺度值对应于星系之间总体平均距离的某个分数；而对于 m 而言，这些数值则与螺旋星系的典型总可见质量相当。

鉴于 $v_+(r)$ 在 (77中的表达式相当复杂，给出它在 r 取值的不同范围内的简化形式或许会有所帮助。与图1可能呈现的情况相反， r 趋于较小值时， $v_+(r)$ 并不会在 $r \to 0$时趋于 0，而是在$r > 0$取非零值时才达到该值。不过应当牢记，式 (77) 本身已经是对以 $1/r$ 为变量、表示速度曲线的渐近级数所作的重求和近似。尽管当 r 的取值越来越小时，该级数并不会出现剧烈变化，但对于较小的 r 值仍不应过分依赖它，因为此时引力场会变强，弱场展开不再适用。此外，即便能够可靠地确定 r 较小时 $v_+(r)$ 的行为，之后仍需针对具体情况，将各个星系可见质量分布对特定星系速度旋转曲线的贡献纳入考量。

另一方面，关于 $v_+(r)$ 中平台值的情况则有所不同。当ξ 和 $\alpha \simeq \xi^2$ 足够大时， $v_+(r)$ 中的平台值对应于 r 的一系列取值，使得 x 大致位于 $x \simeq \xi$附近。根据（77），可以建立速度曲线平台值的以下领先近似：

$$v_+^{\text{plateau}} \simeq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{13}}}\, \frac{1}{\sqrt{\xi}}, \qquad \sqrt{\frac{2}{\sqrt{13}}} \simeq 0.754. \tag{89}$$

上述引用的典型平台值范围，即 $150 \lesssim v_0 \lesssim 300$ km/s（例如参见参考文献[6, 7]中的图1），对应于参数$\xi \simeq \sqrt{\alpha}$中的以下取值范围，

$$\begin{aligned} v_0 = 150 \text{ km/s}: \quad & v_0/c = 5 \times 10^{-4}, \qquad \xi = 2.22 \times 10^6; \\ v_0 = 200 \text{ km/s}: \quad & v_0/c = 6.67 \times 10^{-4}, \qquad \xi = 1.28 \times 10^6; \\ v_0 = 230 \text{ km/s}: \quad & v_0/c = 7.67 \times 10^{-4}, \qquad \xi = 9.44 \times 10^5; \\ v_0 = 234 \text{ km/s}: \quad & v_0/c = 7.8 \times 10^{-4}, \qquad \xi = 9.12 \times 10^5; \\ v_0 = 250 \text{ km/s}: \quad & v_0/c = 8.33 \times 10^{-4}, \qquad \xi = 7.99 \times 10^5; \\ v_0 = 300 \text{ km/s}: \quad & v_0/c = 1 \times 10^{-3}, \qquad \xi = 5.55 \times 10^5. \end{aligned}$$

对于如此大的 ξ值，引力磁偶极子参数（k，ν）分别为 $k \simeq 2\xi\, m$ 和$\nu \simeq m$。

当然，这些数值只是对这些物理量的粗略估算，其依据是引力磁偶极子时空度规的弱场渐近展开，目的是通过引力电磁评估，初步探究这类系统的旋转曲线，而未计入任何其他可能的可见物质分布，例如螺旋星系中的可见物质分布。此类系统的“暗物质”可能在某些参数范围内呈现平坦的旋转曲线，它由两个质量相等、彼此旋转的大质量黑洞组成；这两个黑洞带有大小相等、符号相反的大 NUT（或引力磁）荷，并沿其旋转轴排列，彼此间距远大于相关螺旋星系的可见空间范围。显然，要进行更现实的比较，还必须将构成该星系的所有可见质量对其旋转曲线的贡献也纳入考量，并与引力磁偶极子本身产生的贡献结合起来；本研究则基于弱场引力电磁近似评估了后者。

5 结论

在弱场引力电磁学和试验点质量的非相对论动力学适用范围内，评估引力磁偶极子的速度旋转曲线整体形态后，这项初步分析表明，对于真空爱因斯坦方程这些精确解的参数取值范围内，旋转曲线确实可能足够平坦，从而与螺旋星系旋转曲线的观测结果相当。尤为值得注意的是，该系统存在非零 NUT 荷会进一步改善这一情况：随着 NUT 荷增大，旋转曲线中平坦平台的宽度也随之增加。

换言之，螺旋星系旋转曲线的平坦形态可能是某种非零定常轴对称时空曲率的体现，其源自一种主要分布于星系中心以外的能量动量分布，并且也可能带有 NUT 荷；而不一定是星系周围存在暗物质粒子晕所造成的。

然而，要确认这一结论，显然还需要进一步深入研究这一设想所具有的物理潜力，尤其是引力磁偶极子的潜力。一方面，应当在不采用本研究所用方法中固有近似的情况下，研究引力磁偶极子时空度规的测地线。另一方面，也应将构成真实螺旋星系的可见物质分布对其总速度曲线的贡献纳入考量，并考虑其中心可能存在的大质量黑洞。[6] 为尝试确定相关参数的取值，进而刻画特定的引力磁偶极子，并将其与任一给定螺旋星系平坦旋转曲线的物理现实进行比较，必须对这两个问题展开研究。

从更广阔的视角来看，本研究提出的设想无疑引出了一系列其他重要问题。鉴于已知的宇宙整体缺失质量或暗物质的比例，这类解所具有的特征参数所需取值在物理上是否现实？正如有人提出原初黑洞或许能够提供宇宙所需的暗物质，大爆炸是否也可能

[6]请注意，存在精确的定常轴对称

N [16, 爱因斯坦真空解中的黑洞解。37, 38]

见证了携带 NUT 荷的这类引力磁偶极子的产生，其密度随宇宙膨胀而降低，最终成为结构形成和星系形成的种子，并可能解释至少一部分观测效应——这些效应表明，缺失质量确实存在于宇宙中，而且不仅存在于星系尺度，也存在于天体物理和宇宙学尺度？由此会产生哪些类型的物理限制，例如对天体物理透镜效应的限制；即使在无张力极限下，米斯纳弦的存在也可能产生这类效应。这类构型的稳定性如何？缺失质量观测是否可能是宇宙中存在 NUT物质的表现？鉴于宇宙暗物质难题的紧迫性以及其至今仍是一个彻底的谜，沿着这些方向开展的研究也值得进一步探索。

致谢

本工作主要是在2022年4月访问澳大利亚新南威尔士州悉尼大学物理学院期间完成的。作者衷心感谢Archil Kobakhidze教授的热情款待，并感谢他就本工作主题所进行的深入讨论；同时也感谢当时担任物理学院院长的C´eline Bœhm教授。作者的工作及此次访问部分得到大学间核科学研究所´（IISN，比利时）的资助。

附录

在牛顿引力及其非相对论力学的概念框架内，考虑由沿笛卡尔 z 坐标轴排列的定常轴对称质量分布所产生的牛顿引力标量势。相对于该对称轴选取球坐标（r，θ，φ）后，引力标量势 ϕ（r，$\cos\theta$）便与 φ无关，相关的牛顿引力场由下式确定

$$\vec{g}(r,\cos\theta) = -\vec{\nabla}\phi(r,\cos\theta), \qquad g_r(r,\cos\theta) = -\frac{\partial}{\partial r}\phi(r,\cos\theta), \tag{90}$$

尤其是其径向分量 $g_r(r,\ \cos\theta)$。

因此，对于在 $z=0$ 或 $\cos\theta=0$ 处的、位于垂直于z轴的平面内，半径为 r 的试验点质量 μ 的任意圆形轨迹，其速度的模 $v(r)$ 满足：

$$\mu\frac{v^2(r)}{r} = -\mu\, g_r(r,\cos\theta=0) = \mu\, r\frac{\partial}{\partial r}\phi(r,\cos\theta=0). \tag{91}$$

这类轨迹的 r 分布因此可用以下“旋转曲线”来表征：

$$v(r) = \sqrt{r\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\cos\theta=0)}, \quad \frac{v(r)}{c} = \sqrt{\frac{1}{c^2}r\frac{\partial\phi}{\partial r}(r,\cos\theta=0)}, \quad \frac{v^2(r)}{c^2} = \frac{1}{c^2}\,r\frac{\partial\phi(r,\cos\theta)}{\partial r}_{|_{\cos\theta=0}}, \tag{92}$$

在最后两个表达式中，旋转速度以真空光速 c 为单位进行归一化，从而得到无量纲量以及由所考虑的轴对称质量分布所决定的分布 $v(r)/c$ 。

当然，对于数值为 m的点质量源，其引力势为$\phi(r) = -Gm/r$，其中 G 为牛顿常数，因此可得众所周知的速度曲线，其变化规律为 $1/\sqrt{r}$，即，

$$v(r) = \sqrt{\frac{Gm}{r}}, \qquad \frac{v(r)}{c} = \sqrt{\frac{G}{c^2}\cdot\frac{m}{r}}, \qquad \frac{v^2(r)}{c^2} = \frac{1}{x}. \tag{93}$$

在这个关于 $v^2(r)/c^2$的最后表达式中，变量 x 表示距离 r ，其单位为由质量值 m确定的引力长度尺度 Gm/c^2 ，定义如下

$$x = \frac{r\,c^2}{Gm}, \qquad r = \frac{Gm}{c^2}\,x. \tag{94}$$

对于任何局限于某个有限范围、有限体积空间区域内的质量分布，在足够远的距离处且处于非相对论极限时，其速度曲线总会呈现这一不可避免的 $1/\sqrt{x}$ 行为，作为整体乘性特征；当逐渐靠近该质量分布时，这一特征会受到由该质量分布空间范围细节所产生的 $1/r$ 中的高阶修正效应的调制。

下一个最简单的例子是两个相同的点质量 m ，它们在 $z=0$ 两侧对称分布，沿 z轴排列，彼此相距有限，坐标值为$z=\pm\ell$ （其中 $\ell>0$）。该质量分布的引力标量势表示为

$$\phi(r,\cos\theta) = -Gm\left(\frac{1}{\sqrt{r^2-2\ell r\cos\theta+\ell^2}} + \frac{1}{\sqrt{r^2+2\ell r\cos\theta+\ell^2}}\right). \tag{95}$$

相应的旋转曲线具有如下径向依赖关系，

$$\frac{v(r)}{c} = \sqrt{\frac{G}{c^2}\cdot\frac{2m}{r}}\cdot\frac{1}{(1+\ell^2/r^2)^{3/4}}, \qquad \frac{v^2(r)}{c^2} = \frac{1}{c^2}\,r\frac{\partial\phi}{\partial r}_{|\cos\theta=0} = \frac{2}{x}\cdot\frac{1}{(1+\lambda^2/x^2)^{3/2}}, \tag{96}$$

用无量纲量 x 和 λ 表示，它们定义为

$$x = \frac{rc^2}{Gm}, \qquad \lambda = \frac{\ell\,c^2}{Gm}, \tag{97}$$

它们分别表示以 Gm/c^2为单位的距离 r 和 ℓ 。在本例中，对于 $v^2\left(r\right)/c^2$ ， $2/x$ 中的整体远距离渐近行为会受到额外乘性因子 $(1+\lambda^2/x^2)^{-3/2}$的调制；特别是，根据质量分布在 $z\to -z$ 下的宇称对称性，必有 $\lim_{x\to 0} v\left(r\right)/c = 0$ 。

更明确地说，旋转曲线关于 $1/r$ 的渐近展开由下列级数给出，

$$\frac{1}{c^2}\,r\frac{\partial\phi}{\partial r}_{|\cos\theta=0} = \frac{2}{x}\cdot\left(1-\frac{3}{2}\frac{\lambda^2}{x^2}+\frac{15}{8}\frac{\lambda^4}{x^4}-\frac{35}{16}\frac{\lambda^6}{x^6}+\cdots\right), \tag{98}$$

因此，

$$\frac{v(r)}{c} = \sqrt{\frac{2}{x}-3\frac{\lambda^2}{x^3}+\frac{15}{4}\frac{\lambda^4}{x^5}-\frac{35}{8}\frac{\lambda^6}{x^7}+\mathcal{O}(x^{-9})}. \tag{99}$$

然而请注意，由于该级数不可避免地带有交错符号，当仅考虑有限阶级数时，无论截断到哪一阶，都无法以任何可靠程度再现 $v^2(r)/c^2\geq 0$ 在 $x\simeq 0$ 附近的正确行为（当 x 足够小时）。事实上，任何此类有限阶近似都会导致 $v^2(r)/c^2\geq 0$ 在 $x\simeq 0$ 附近的值发散（至 $+\infty$ 或 $-\infty$），而另一方面，$\lim_{x\to 0} v^2(r)/c^2 = 0$。这种不理想且不符合物理规律的行为，可以通过根据级数的前几项对其进行重求和来修正，形式如下：

$$\frac{v^2(r)}{c^2} = \frac{2}{x}\cdot\left(1+\lambda^2/x^2\right)^{-\beta} \simeq \frac{2}{x}\cdot\left(1-\beta\,\frac{\lambda^2}{x^2}+\cdots\right), \tag{100}$$

对于某个幂次 $\beta>0$，并给定长度尺度 $\lambda>0$ （以 Gm/c^2 为单位）。上述结果表明，数值 $\beta=3/2$ 适用于这样一个系统：两个位置明确且彼此分离的点质量沿 z-对称轴排列。

与此相反，现在我们来讨论一种轴对称质量分布沿 z 轴在 z的两个极值之间连续延伸的情形。作为最简单的选择， [12], 我们考虑一个均匀质量密度为 ρ、半径为 a 且总长度（或高度）为 $2L > 0$ 的圆柱体，它沿 z方向对称地放置在 $z = 0$ 周围，占据区间$-L \leq z \leq L$。由此可得，相应的精确旋转曲线可用以下积分表示给出： [12],

$$r \neq a: \quad \frac{v^2(r)}{c^2} = \frac{G}{c^2} \cdot 2m \cdot \frac{1}{\pi a} \cdot \frac{r}{L} \int_0^{2\pi} d\phi \, \cos\phi \, \mathrm{asinh}\left(\frac{L}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\phi}}\right), \tag{101}$$

其中， $m = \pi a^2 \, L \, \rho$ 表示圆柱体总质量的一半 $2m$。

事实证明，即使$r > a$ 与 a （按相对量而言）相差甚微，上述表达式仍能以极高的精度 [12] 与 r中的以下行为数值上高度吻合；而且，当用圆柱体的总质量 $2m$表示时，该行为完全不受圆柱体半径 a 的影响，

$$r > a: \quad \frac{v(r)}{c} = \sqrt{\frac{G}{c^2} \cdot \frac{2m}{L}} \cdot \frac{1}{(1 + r^2/L^2)^{1/4}}, \qquad \frac{v^2(r)}{c^2} = \frac{G}{c^2} \cdot \frac{2m}{r} \cdot \frac{1}{(1 + L^2/r^2)^{1/2}}, \tag{102}$$

即，

$$\frac{v^2(r)}{c^2} = \frac{2}{x} \cdot \frac{1}{(1 + \lambda^2/x^2)^{1/2}}, \tag{103}$$

再次使用无量纲距离尺度参数，

$$x = \frac{r\,c^2}{Gm}, \qquad \lambda = \frac{L\,c^2}{Gm}. \tag{104}$$

The $1/r$ 对该表达式进行渐近展开，可得级数表示

$$\frac{v^2(r)}{c^2} = \frac{2}{x} - \frac{\lambda^2}{x^3} + \frac{3}{4}\frac{\lambda^4}{x^5} - \frac{5}{8}\frac{\lambda^6}{x^7} + \mathcal{O}(x^{-9}), \tag{105}$$

由于级数符号交替，该表达式再次表现出上述令人不快且不合物理实际的行为。

不过，可以通过根据级数的前几项进行级数重求和来弥补这一点，从而再次得到形式为（100）的调制因子，但这次幂为 $\beta = 1/2$。[7] 因此， β 这一数值是轴对称构型中沿 z 轴连续分布的质量密度的特征值，这与上述数值 $\beta = 3/2$ 形成对照；后者适用于两个相距有限的局域点质量的情形。

参考文献

[1] 如需了解暗物质假说的诸多方面，可参阅以下入门综述，例如 https://en.wikipedia.org/wiki/Dark_matter。 -

[7] 上述（103）中的结果意味着旋转曲线 $v(r)/c$会趋于平坦，与 $\sqrt{2m/x}$中的行为相比，这种情况会持续到由 L 代表质量分布横向范围的距离尺度[12], 所确定的距离，因此未必需要额外引入球状暗物质晕来包裹螺旋星系。

[2] M. Bauer 和 T. Plehn，《暗物质的又一篇导论——粒子物理学方法》，《物理学讲义》959（施普林格·自然瑞士股份公司，2019），https: //doi.org/10.1007/978-3-030-16234-4。[3] G. Bertin，《宇宙中的可见物质与暗物质——天体物理动力学简明入门》（剑桥大学出版社，剑桥，2022）。[4] L. E. Strigari，《矮椭球星系中的暗物质与间接探测：综述》，Rept. Prog. Phys. 81（2018）056901，https://doi.org/10.1088/1361-6633/aaae16。[5] Y. Sofue 和 V. Rubin，《螺旋星系的旋转曲线》，《天文学与天体物理学年评》39（2001）137-174，https://doi.org/10.1146/annurev.astro.39.1.137。[6] Y. Sofue，《螺旋星系中核球、盘和暗晕成分的尺度—质量关系的旋转曲线分解》，Publ. Astron. Soc. Japan 68 (1), 2 (1-5)（2016），https: //doi.org/10.1093/pasj/psv103。[7] Y. Sofue，《螺旋星系中的表面质量密度和质光比的径向分布》，Publ. Astron. Soc. Japan 70 (2), 31 (1-15)（2018），https://doi.org/10.1093/pasj/ psy014。[8] Y. Sofue，《银河系的旋转曲线与暗物质密度》，Galaxies，8（2020）37，https://doi.org/10.3390/galaxies8020037。[9] K. Zatrimaylov，《关于丝状体、长球形晕与旋转曲线》，JCAP04（2021）056，https: //doi.org/10.1088/1475-7516/2021/04/056。[10] K. Zatrimaylov，《暗物质、旋转曲线与星系形态》，https://doi. org/10.48550/arXiv.2108.13350，2021年8月30日。[11] B. A. Slovick，《盘星系暗物质晕的柱状模型》，https://doi.org/ 10.48550/arXiv.1009.1113，2014年2月24日。[12] J. Govaerts，《牛顿引力与星系旋转曲线：重新审视……的本质

f

暗物质之谜，未发表，2022年1月14日，已提交发表。[13] A. Bariego Quintana、F. J. Llanes-Estrada 和 O. Manzallia Carretero，星系旋转支持扁长暗物质晕，https://doi.org/10.48550/arXiv.2204.06384，2022年4月13日。[14] H. Weyl，论引力理论，《物理学年鉴》54 (1917) 117-145，https://doi.org/10.1002/andp.19173591804。有关重刊、译文及其他相关研究，参见文献[15]。[15] G. Neugebauer、D. Petroff 和 B. Mashhoon，编者按，《广义相对论与引力》44 (2012) 771-777，https://doi.org/10.1007/s10714-011-1309-0；H. Weyl，重刊：论引力理论，《广义相对论与引力》44 (2012) 779-810，https://doi.org/10.1007/s10714-011-1310-7；H. Weyl，重刊：关于爱因斯坦引力方程轴对称解的评论，《广义相对论与引力》44 (2012) 811-815，https://doi.org/10.1007/s10714-011-1311-6；R. Bach、H. Weyl，重刊：爱因斯坦引力方程的新解。*B.* 静态轴对称场的明确确定（*R. Bach* 著）。附论静态二体问题（*H. Weyl* 著），《广义相对论与引力》44 (2012) 817-832，https://doi.org/10.1007/s10714-011-1312-5。

[16] H. Stephani、D. Kramer、M. MacCallum、C. Hoenselaers 和 E. Herlt，《爱因斯坦场方程的精确解》，第二版（剑桥大学出版社，2003）。[17] G. Cl´ement，《引力磁偶极子》，《经典与量子引力》38 (2021) 075003，https: //doi.org/10.1088/1361-6382/abe4ed。[18] V. S. Manko、E. D. Rodchenko、E. Ruiz 和 M. B. Sadovnikova，《由两个弦论NUT对象形成Kerr黑洞》，《莫斯科大学物理学通报》64 (2009) 359-361。[19]C. W. Misner，《Newman、Unti 和 Tamburino 广义Schwarzschild空间的平坦区域》，《数学物理学杂志》4 (1963) 924-937，https://doi.org/10.1063/1.1704019。[20] C. W. Misner 和 A. H. Taub，《无奇点空宇宙》，《苏联物理学JETP》28 (1969) 122-133。[21]G. Bossard、H. Nicolai、K. S. Stelle，《引力多NUT孤子、Komar质量与荷》，《广义相对论与引力》41 (2009) 1367-1379，https://doi.org/10.1007/ s10714-008-0720-7。[22] G. Cl´ement、D. Gal'tsov、M. Guenouche，《为含NUT的时空正名》，《物理快报B》750 (2015) 591-594，https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.09.074。[23] A. Awad 和 S. Eissa，《Lorentz型Taub-NUT时空：Misner弦荷与第一定律》，《物理评论D》105 (2022) 124034，https://doi.org/10.1103/PhysRevD.105.124034。[24] P. A. M. Dirac，《电磁场中的量子化奇点》，《伦敦皇家学会会刊》A133，60-72 (1931)，https://doi.org/10.1098/rspa.1931.0130。[25] L. L. Williams 和 N. Inan，《广义相对论中的麦克斯韦幻象》，《新物理学杂志》23 (2021) 053019，https://doi.org/10.1088/1367-2630/abf322。[26] B. Mashhoon，《引力电磁学》，载于《参考系与引力磁学》，第二十三届西班牙相对论会议论文集，西班牙巴利亚多利德，2000年9月6–9日，编者：J. F. Pascual-S´anchez、L. Floria、A. San Miguel 和 F. Vicente（World Scientific，新加坡，2001），第121-133页，https://doi.org/10.1142/9789812810021 0009，https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0011014。[27] B. Mashhoon，《引力电磁学：简要综述》，载于《引力磁学测量：一项富有挑战性的事业》，编者：L. Iorio（Nova Science，纽约，2007），第29-39页，https://doi.org/10.48550/arXiv.gr-qc/0311030。[28] A. Barros，《Kerr-Newman时空中的引力磁效应》，《理论物理高级研究》10 (2016) 81-87，http://dx.doi.org/10.12988/astp.2016.512114。[29] S. Le Corre，《不引入新物质的暗物质符合广义相对论》，《开放获取图书馆期刊》4 (2017) e3877，https:doi.org/10.4236/oalib.1103877；另见该作者在文中的其他相关参考文献。[30] G. G. Nyambuya，《螺旋星系反常平坦旋转曲线的引力磁起源》，《新天文学》67 (2019) 1-15，https:doi.org/10.1016/j.newast.2018.08.004。[31] G. O. Ludwig，《引力磁学理论下的星系旋转曲线与暗物质》，《欧洲物理学杂志C》81: 186 (2021)，https:doi.org/10.1140/epjc/s10052-021-08967-3。

[32] V. T. Toth, 《星系中的引力电磁学与恒星轨道》, Int. J. Mod. Phys. D 30 (2021) 2150102, https://doi.org/10.1142/S0218271821501029。[33] L. Ciotto, 《广义相对论中的盘星系旋转曲线》, 《天体物理学杂志》936:180 (2022), https:doi.org/10.3847/1538-4357/ac82b3。[34] M. L. Ruggiero、A. Ortolan 和 C. C. Speake, 《广义相对论中的星系动力学：引力磁学的作用》, Class. Quantum Grav. 39 (2022) 225015, https:doi.org/10.1088/ 1361-6382/ac9949。[35]D. Astesiano 和 M. L. Ruggiero, 《广义相对论纯几何方面产生的星系暗物质效应》, Phys. Rev. D106 (2022) 044061, https://doi.org/10.1103/ PhysRevD.106.044061。[36] D. Astesiano 和 M. L. Ruggiero, 《广义相对论能否在星系动力学中发挥作用？》, Phys. Rev. D106 (2022) L121501, https://doi.org/10.1103/PhysRevD.106.L121501。[37] E. Ruiz、V. S. Manko 和 J. Mart´ín, 《爱因斯坦–麦克斯韦方程的扩展 N-孤子解》, Phys. Rev. D51 (1995) 4192-4197, https://doi.org/10.1103/PhysRevD.51.4192。[38] 更多参考文献例如：E. S. Costa Filho, 《电真空爱因斯坦方程新解的构造》, 博士论文, 圣保罗大学（巴西）, 2020, 未发表, https://www.teses.usp. br/teses/disponiveis/76/76131/tde-25082021-085139/en.php。

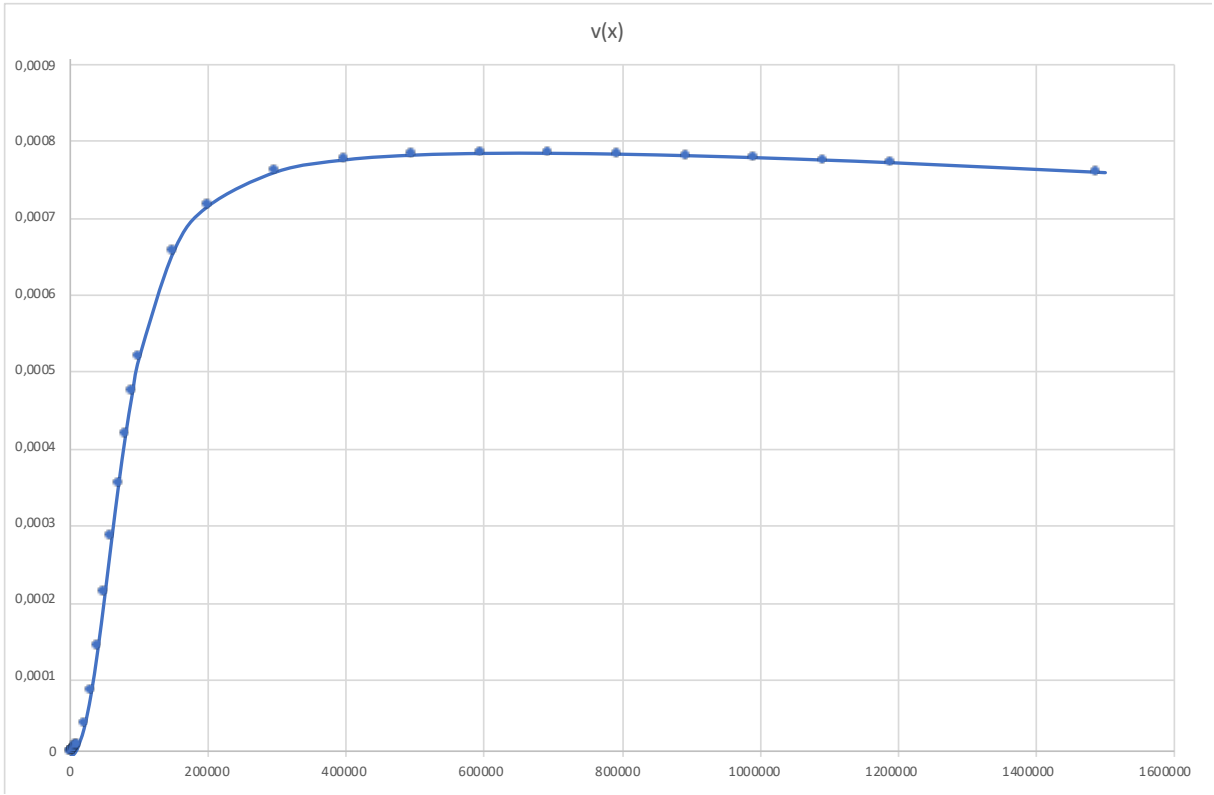


图**1**：速度旋转曲线 $v_+(r)$（纵轴，单位为 c），由方程（76、79）给出，是 $x = r/m$ 的函数（横轴，其中 $0 \leq x \leq 1\,600\,000$，单位为 $G = 1 = c$），取无量纲参数 $\xi = 9 \times 10^5$ 和 $\alpha = 8.1 \times 10^{11}$。