arXiv:2303.01395v1 [math.NT] 2 Mar 2023

有界聚集性质刻画算术非一致克莱因群

郝炎龙

摘要。本文简短地证明，B-C 性质刻画了 PSL(2,ℂ) 中所有非一致格里的算术格。

1. 引言与主要结果陈述

对于所有m、$n \in \mathbb{Z}$，记

$$S(m,n) = \{z \in \mathbb{C} \ / \ m \le \mathrm{Re}(z) \le m+1, n \le \mathrm{Im}(z) \le n+1\}.$$

若存在常数K_A，使得对于所有m、$n \in \mathbb{Z}$，集合A 中的复数集满足有界聚集或 *B-C* 性质，当且仅当$A \cap S(m,n)$的元素个数少于K_A。进一步，令

$$\mathrm{Gap}(A) := \inf\{|a-b| \ / \ a,b \in A, a \neq b\}$$

令 Γ 为一个克莱因群，即 PSL(2,ℂ) 的离散子群。Γ 的迹集Tr(Γ)（在相差一个符号的意义下）定义为 Γ中各元素的迹所组成的集合。

在 [5], 中，Luo 和 Sarnak 证明了算术福克斯群的迹集满足 B-C 性质。该证明实际上同样适用于克莱因群。此外，Sarnak 猜想反过来命题也成立。

猜想 1.1 (Sarnak [10])**.** 设 Γ 为一个余有限*Fuchsian*群。

(1) 若Tr(Γ) 满足 *B-C* 性质，则 Γ 是算术的。*(2)* 若Gap(Tr(Γ)) > 0,

则 Γ 由四元数代数导出。

在 [11], 中，Schmutz 提出了一个更强的猜想，用集合的线性增长代替 B-C 性质。若且唯若存在正实常数C和 D，使得对所有n，实数的一个子集才称为具有线性增长，

$$\#\{a \in A \ / \ |a| \le n\} \le Cn + D.$$

猜想 1.2 (Schmutz [11])。 设 Γ 是一个余有限*Fuchsian*群。如果 Tr(Γ) 呈线性增长，那么 Γ 是算术的。

Schmutz 曾为非一致格提出猜想 1.2 的证明。在本文中，Schmutz 基本上在条件 (1) 下证明了 Sarnak 的猜想 1.1 的第 (2) 部分。遗憾的是，猜想 1.2 的证明存在一个间隙。后来，Geninska 和 Leuzinger 在 [2] 中弥补了这一间隙，并证实了 Sarnak 猜想的第 (1) 部分对非一致福克斯格成立。请注意，即使对于

日期：2023年3月3日。

非一致格，猜想 1.2 仍未解决。而猜想 1.1 对余紧 Fuchsian 群仍完全悬而未决。

本文将 Geninska 和 Leuzinger 的工作推广到克莱因群，并对猜想 1.1 在非一致情形下给出纯代数证明。

定理 A. 设 Γ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 或 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的非一致格。

(1) 若 $\mathrm{Tr}(\Gamma)$ 满足 *B-C* 性质，则 Γ 是算术的。*(2)* 若 $\mathrm{Gap}(\mathrm{Tr}(\Gamma))>0$，则 Γ 由四元数代数导出。

证明定理 A 的策略与 Schmutz 的构想类似。给定 $\gamma\in\Gamma$，Schmutz 构造了一个 *Y*形片 *S*，即一个与 γ 相关的型为 (0,3) 的曲面。通过考察 $\pi_1(S)$ 中不同元素族的迹，可以对 γ 的迹加以限制。整个过程可以转化为纯代数语言。然而，Schmutz 的工作中涉及的那些元素，其代数表示相当复杂。此外，同样的构造是否适用于克莱因群尚不清楚。

我们的方法在很大程度上依赖幺幂元。两个不同的尖点子群提供了若干族元素。事实证明，这些元素的迹足以让我们得出与 Schnutz、Geninska 和 Leuzinger 的研究相同的结论。

本文安排如下：第 2 节回顾有关（算术）福克斯群和克莱因群的一些预备知识。随后在第 3 节中，我们证明福克斯群的定理 A。证明的大部分内容受到 [2] 的启发。在第 4 节中，我们将类似的策略推广到克莱因群。最后，在第 5 节中，给出一个出于个人兴趣的推论。

我想感谢 Alexander Furman 提出的许多建议，并感谢王天与我讨论数论。

2. 定义、记号及一些预备知识

本节的一般参考资料是书籍 [7]。

2.A. **福克斯群和克莱因群**。我们用 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ 表示行列式为 1 的实数集 2×2 矩阵构成的群，用 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 表示商群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})/\{\pm I_2\}$，其中 I_2 是 2×2 单位矩阵。类似地，我们有 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$。

$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 和 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的离散子群分别称为 福克斯群和 克莱因群。

令 $p_F\colon \mathrm{SL}(2,F)\to\mathrm{PSL}(2,F)$ 为投影，其中 $F=\mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$。设福克斯群或克莱因群为 Γ，记作 $\bar\Gamma=p_F^{-1}(\Gamma)$。我们称

$$\mathrm{Tr}(\Gamma):=\left\{\mathrm{tr}T \;\middle/\; T\in\bar\Gamma\right\}$$

Γ的迹集。类似地，Γ 的约化迹集为

$$\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(\Gamma):=\left\{\mathrm{tr}T \;\middle/\; T\in\bar\Gamma, T\neq\pm I_2\right\}$$

局部紧的第二可数拓扑G的一个格是指离散子群 Γ，使得G/Γ 具有有限的Haar测度。如果G/Γ 是紧的，则称该格为一致的，否则称为非一致的。

Fuchsian 格或克莱因格 Γ 是非一致的，当且仅当 Γ 含有抛物元素。

算术克莱因群按以下方式构造：设k 是一个恰有一个非实阿基米德赋值的代数数域，使得从k到$\mathbb{C}$的$\mathbb{Q}$-同构为$\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n$，其中我们取$\phi_2$ = 恒等映射、 ϕ_2复共轭以及 $\phi_i(k) \subset \mathbb{R}$，其中$i = 3, 4, ..., n$。设$A$是$k$上的一个四元数代数，它在所有实赋值处都分歧，因此存在一个同构

$$\rho : A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \oplus \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} \oplus \cdots \oplus \mathbf{H},$$

其中$\mathbf{H}$ 表示Hamilton四元数。记P 为到第一个因子的投影。

设$\mathcal{O}$是A中的一个序，并令$\mathcal{O}^1$ 表示约化范数为1的元素构成的群。则$P\rho(\mathcal{O}^1)$是PSL(2,$\mathbb{C}$)的一个格。算术克莱因群类由所有与这类群$P\rho(\mathcal{O}^1)$可公度的克莱因格构成。此外，如果一个克莱因群是某个$P\rho(\mathcal{O}^1)$中的有限指数子群，我们就称它由四元数代数导出。

算术福克斯群的定义类似：在这种情况下，域k是全实的，而四元数代数A在除一个实赋值外的所有实赋值处都分歧，该例外赋值可以取为恒等嵌入。因此存在一个同构

$$\rho : A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathbf{H} \oplus \mathbf{H} \oplus \cdots \oplus \mathbf{H}.$$

由四元数代数导出的算术Fuchsian群，正是按上述方式得到的Fuchsian群。

2.B. **算术Fuchsian群和克莱因群的刻画**。 Takeuchi 在[12]中刻画了所有 Fuchsian 格中的算术Fuchsian群。Maclachlan 和 Reid [6] 将这项工作推广到了克莱因群。

设Γ是一个福克斯群或克莱因群，并令$\Gamma^{(2)}$ 表示由Γ中元素的平方生成的子群。注意，如果 Γ 是有限生成的，那么$\Gamma^{(2)}$ 在 Γ中的指数有限。

定理 2.1 ([12], [1])。 如果 Γ 是一个算术福克斯群或克莱因群，那么$\Gamma^{(2)}$ 由四元数代数导出。

定理 2.2([12])。 设 Γ 是一个余有限*Fuchsian*群。那么，当且仅当 Γ 满足以下两个条件时， Γ 由一个全实代数数域上的四元数代数导出：

(1) $K := \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma))$ 是有限次数的代数数域，并且 $\mathrm{Tr}(\Gamma)$ 包含于 K 的整数环 $\mathcal{O}_K$ 中。*(2)* 对于将 K 嵌入 $\mathbb{C}$ 的任意非恒等嵌入 ϕ， $\phi(\mathrm{Tr}(\Gamma))$ 在 $\mathbb{C}$ 中有界。

定理 2.3 ([6])**.** 设 Γ 是一个余有限克莱因群。当且仅当 Γ 满足以下两个条件时，Γ 由一个四元数代数导出：

(1) $K := \mathbb{Q}(\mathrm{Tr}(\Gamma))$ 是一个有限次数的代数数域，且$\mathrm{Tr}(\Gamma)$ 包含于 K 的整数环 $\mathcal{O}_K$中，且 $K \not\subseteq \mathbb{R}$。*(2)* 对于任何将 K 嵌入 $\mathbb{C}$的嵌入 ϕ，只要该嵌入不是恒等映射或复共轭映射，$\phi(\mathrm{Tr}(\Gamma))$ 在 $\mathbb{C}$中有界。

3. 福克斯群

本节中我们证明福克斯群的定理 A。

设 Γ 是一个非一致 Fuchsian 群，$x \in \partial\Gamma$ 是一个尖点，其尖点子群为 Γ_x。取 $g \in \Gamma$，使得 $gx \neq x$，则 gx 是 Γ 的一个尖点，并且$\Gamma_{gx} = g\Gamma_x g^{-1}$。在 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 中经过共轭后，我们可以假设 $x = \infty$、$gx = 0$，并且

$$\Gamma_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

由于 $g\infty = 0$，g 具有如下形式：$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\beta} \\ -\beta & * \end{pmatrix}$，其中 $\beta \in \mathbb{R}$。由这一事实$\Gamma_0 = g\Gamma_\infty g^{-1}$可知

$$\Gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\beta^2 & 1 \end{pmatrix} / \, k \in \mathbf{Z} \right\}.$$

从现在起，我们假设 Γ 是一个 Fuchsian 格，在本节中包含上述的 Γ_0 和 Γ_∞。我们将证明，在此嵌入下，Γ 与 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Z})$ 可公度。为证明这一点，我们首先通过迹集的线性增长证明 $\Gamma^{(2)} < \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q})$。然后利用迹集具有 B-C 性质这一事实，$\Gamma^{(2)}$ 的迹集是 $\mathbb{Z}$ 的子集。

3.A. 第一步：$\Gamma^{(2)}$ 是有理数。本小节的主要结果是引理 3.1。设$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$。记 $\mathbb{Q}\langle x_1, x_2, \cdots, x_n\rangle$ 为由$x_1, x_2, \cdots, x_n$生成的 $\mathbb{Q}$-向量空间。

引理 3.1。若$\mathrm{Tr}(\Gamma)$ 呈线性增长，则对所有 $A \in \Gamma$，$A^2 \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q})$。

证明。设$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$。不失一般性，假设$c \neq 0$。事实上，$c = 0$ 意味着$A\infty = \infty$。于是$A \in \Gamma_\infty \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q})$。

由于

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\beta^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & al+b \\ k\beta^2 a + c & kl\beta^2 a + lc + k\beta^2 b + d \end{pmatrix},$$

$\mathrm{Tr}(\Gamma)$包含所有形如$a + d + kl\beta^2 a + k\beta^2 b + lc$的元素，其中$k$、$l \in \mathbb{Z}$。因此该集合

$$\Omega_{a,b,c} := \left\{ kl\beta^2 a + k\beta^2 b + lc \;/\; k, l \in \mathbb{Z} \right\}$$

具有线性增长。为方便起见，记作 $\Theta(k,l) = kl\beta^2 a + k\beta^2 b + lc$。

命题 3.2. $\mathbb{Q}\langle \beta^2 a,\ \beta^2 b,\ c,\ \beta^2 d\rangle = \mathbb{Q}\langle c\rangle$。

命题 3.2 的证明分为两个步骤。

步骤 1。$\beta^2 a \in \mathbb{Q}\langle c, \beta^2 b\rangle$。

假设 $\beta^2 a \notin \mathbb{Q}\langle c, \beta^2 b\rangle$。一方面，在此假设下，$\Theta(k, l) = \Theta(k', l')$ 当且仅当 $kl = k'l'$ 且 $k\beta^2 b + lc = k'\beta^2 b + l'c$。假设 $kl \neq 0$，则 $l' = kl k'$，我们有

$$(k - k')\beta^2 b = \left(\frac{l(k - k')}{k'}\right)c.$$

如果 $k = k'$，则 $l = l'$。如果 $k \neq k'$，则 $l k' = \beta^2 b c$。因此，当 $kl \neq 0$ 时，Θ 至多为 2 比 1。

另一方面，集合

$$D_N := \{(k, l) \mid 1 \leq kl \leq N, k, l \in \mathbb{N}^+\}$$

至少含有 $N\ln N - N$ 个元素。而且，$\Theta(D_N)$ 中的所有元素的绝对值都小于 $N(|\beta^2 a| + |\beta^2 b| + |c|)$。这与线性增长性质相矛盾。因此 $\beta^2 a \in \mathbb{Q}\langle c, \beta^2 b\rangle$。

步骤 2。$\beta^2 b \in \mathbb{Q}\langle c\rangle$。

由于 $\beta^2 a \in \mathbb{Q}\langle c, \beta^2 b\rangle$，存在 s、$t \in \mathbb{Q}$，使得 $\beta^2 a = s\beta^2 b + tc$。现在

$$\Omega_{a,b,c} = \{(skl + k)\beta^2 b + (tkl + l)c \mid k, l \in \mathbb{Z}\}$$

具有线性增长。

定义

$$\Phi(k, l) = (skl + k, tkl + l).$$

并注意到

$$\Theta(k, l) = (skl + k)\beta^2 b + (tkl + l)c.$$

Θ 将集合 $\{(k,l) \mid 1 \leq l, k \leq N\}$ 映射到范数不超过 $N(|\beta^2 b| + |c|)$ 的数。

情形 1：$s = t = 0$。

情况 2：$s = 0$，$t \neq 0$。Φ 的像决定了 k。因此，当 $k \neq -\frac{1}{t}$ 时，ϕ 是单射。集合 $D_N \setminus \{k = -\frac{1}{t}\}$ 的元素多于 $N\ln N - 2N$。另一方面，对于所有 $u \in D_N \setminus \{k = -\frac{1}{t}\}$，都有 $|\Theta(u)| \leq N[(|s| + 1)|\beta^2 b| + (|t| + 1)|c|]$。

情况 3：$s \neq 0$ 且 $t = 0$。与情况 2 类似。

情况 4：$st \neq 0$。一方面，对于所有 $u \in D_N$，有 $|\Theta(u)| \leq N[(|s|+1)|\beta^2 b| + (|t|+1)|c|]$。另一方面，$\Phi$ 至多为 2 比 1。

在所有情况下，狄利克雷原理都给出 $(k,l) \neq (k',l')$，使得 $\Theta(k,l) = \Theta(k',l')$ 且 $\Phi(k,l) \neq \Phi(k',l')$。我们有一个关于 $\beta^2 b$ 和 c 的非平凡齐次线性方程。根据假设，$c \neq 0$。因此 $\beta^2 b \in \mathbb{Q}\langle c\rangle$。

同样，$\beta^2 d \in \mathbb{Q}\langle c\rangle$ 由

$$\begin{pmatrix} 1 & l \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k\beta^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + kl\beta^2 d + lc + k\beta^2 b & ld + b \\ k\beta^2 d + c & d \end{pmatrix}.$$

该断言得证。

现在我们证明该引理。考虑元素 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 & 1 \\ \beta^2 & 1 \end{pmatrix} \in \Gamma$。命题 3.2 给出 $\beta^2 + \beta^4 \in \mathbb{Q}\langle \beta^2\rangle$。

我们得出 $\beta^2 \in \mathbb{Q}$。于是

$$\mathbb{Q}\langle a, b, c, d\rangle = \mathbb{Q}\langle c\rangle.$$

现在 $A = cA'$，其中 $A' \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{Q})$。取行列式，$c^2 \in \mathbb{Q}$。最后，

$$A^2 = c^2 A'^2 \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q}).$$

□

3.B. **第二步：** 迹(Γ) **属于** $\mathbb{Z}$。根据定理 2.1 和定理 2.2，只需研究 $\Gamma^{(2)}$，以证明 Γ 是算术的。但要证明 Γ 由四元数代数导出，我们需要一个稍大的子群 $\Gamma = \Gamma \cap \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q})$。Γ是 Γ 的有限指数子群，因为 Γ 是有限生成的，且 $\Gamma^{(2)} < \bar{\Gamma}$。

引理 3.3。如果迹(Γ) 具有 *B-C* 性质，那么 Γ 由四元数代数导出。

证明。取 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}$。那么

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+ac+c^2 & 1-ac-a^2 \\ c^2 & 1-ac \end{pmatrix} \in \bar{\Gamma}.$$

通过迭代，我们得到一列元素 $A_n \in \bar{\Gamma}$，使得 $A_n = \begin{pmatrix} * & * \\ 2^n & * \end{pmatrix} c$ 且 $\mathrm{tr}(A_n) = 2 + c^{2^n}$。

显然，$\mathrm{tr}(A_n \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 2 + (k+1)c^{2^n}$。这意味着集合

$$\Delta_c := \left\{ kc^{2^n} \;/\; k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

满足 B-C 性质。

在 [2]，中命题 4.9 的证明表明，当 $c \notin \mathbb{Z}$ 时，Δ_c 不具有 B-C 性质。由此得出 $c \in \mathbb{Z}$。下一节将详细证明克莱因群稍复杂情形下的同一结论。

考虑以下两个方程：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \beta^2 a + c & \beta^2 b + d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+\beta^2 b & b \\ c+\beta^2 d & d \end{pmatrix}.$$

于是 $\beta^2 a = (\beta^2 a + c) - c \in \mathbb{Z}$。类似地，$\beta^2 d \in \mathbb{Z}$。特别地，$\mathrm{Tr}(\bar{\Gamma}) \subset \frac{1}{\beta^2}\mathbb{Z}$。

设 $B \in \bar{\Gamma}$。若 $\mathrm{tr}(B) = \frac{p}{q}$，其中 p、$q \in \mathbb{Z}$，则 $(p, q) = 1$。那么 $\mathrm{tr}(B^2) = \mathrm{tr}(B)^2 - 2$ 的分母为 q^2。归纳可得，$\mathrm{tr}(B^{2^n})$ 的分母为 q^{2^n}。因此 $q = 1$。换言之，$\mathrm{tr}(B) \in \mathbb{Z}$。

Γ 由定理 2.2 可知是由四元数代数导出的。 □

3.C. **定理 A 的证明**。

证明。 Luo 和 Sarnak 在 [5] 中证明，若 Γ 是算术的，则 $\mathrm{Tr}(\Gamma)$ 满足 B-C 性质。此外，当 Γ 由四元数代数导出时，$\mathrm{Gap}(\mathrm{Tr}(\Gamma)) > 0$。

另一方面，如果 $\mathrm{Tr}(\Gamma)$ 满足 B-C 性质，且 Γ 不是一致的，引理 3.3 表明，Γ 由四元数代数导出。因此，Γ 是算术的。

当 Γ 不是由四元数代数导出时，必然存在一个 $A \in \Gamma$。如有必要，将 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2 & 1 \end{pmatrix}$ 左乘或右乘，A 可写成 $\begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix}$ 的形式，其中 $c \notin \mathbb{Q}$。因此，对于所有 $k \in \mathbb{Z}$，有 $kc + \mathrm{tr}(A) \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$。另一方面，对于所有 $l \in \mathbb{Z}$，有 $2 + l\beta^2 \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$。由克罗内克定理，$\mathrm{Gap}(\mathrm{Tr}(\Gamma)) = 0$。□

4. 克莱因群

克莱因群情形下定理 A 的证明采用了与福克斯情形类似的策略。

设 Γ 是一个非一致克莱因群，$x \in \partial\Gamma$ 是一个尖点，其尖点子群为 Γ_x。取 $g \in \Gamma$，使得 $gx \neq x$，则 gx 是 Γ 的一个尖点，并且 $\Gamma_{gx} = g\Gamma_x g^{-1}$。在 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 中经过共轭后，不妨设 $x = \infty$，$gx = 0$，且

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & k + l\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / \, k, l \in \mathbf{Z} \right\} \subset \Gamma_\infty$$

对某个 $\alpha \notin \mathbb{R}$ 成立。

$g\infty = 0$ 意味着 g </style>具有如下形式：，其中 。由 $g\Gamma_\infty g^{-1}$ 这一事实可知，

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2(k + l\alpha) & 1 \end{pmatrix} / \, k, l \in \mathbf{Z} \right\} \subset \Gamma_0.$$

从现在起，我们假设 Γ 是一个克莱因格，其中包含上述的 Γ_0 和 Γ_∞。

4.A. **预备步骤：** α 是一个二次数。 </style}与福克斯情形不同，α 的算术性质与 Γ 的结构有关。因此，我们从以下引理开始证明。

引理 4.1。 如果 $\mathrm{Tr}(\Gamma)$ 具有线性增长，α 是代数数，并且 $\deg(\alpha) = 2$。

证明。 首先，以下恒等式

$$\begin{pmatrix} 1 & m + n\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2(m' + n'\alpha) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \beta^2(m' + n'\alpha)(m + n\alpha) & m + n\alpha \\ \beta^2(m' + n'\alpha) & 1 \end{pmatrix}$$

证明对于所有的 $m' + n'\alpha$、$(m + n\alpha) \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$、$m$、$n$、$m'$ 和 $n' \in \mathbb{Z}$，均有 $2 + \beta^2$。由于 $\mathrm{Tr}(\Gamma)$ 具有线性增长，该集合也同样如此

$$\left\{ nn'\alpha^2 + (nm' + mn')\alpha + mm' \, / \, m, n, m', n' \in \mathbb{Z} \right\}.$$

对于任意复数 x，考虑以下两个映射：$f\colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{Z}^3$ 和 $g_x\colon \mathbb{Z}^4 \to \mathbb{C}$，其定义为

$$f(m,n,m',n') = (nn', nm'+mn', mm'),$$
$$g_x(m,n,m',n') = nn'x^2 + (nm'+mn')x + mm'.$$

令 实数集$_N$为 $\mathbb{Z}^4$ 的子集，由下式给出

$$\left\{(r_1,r_2,r_3,r_4) \;\middle/\; 1 \le r_2 \le r_1 \le N, (r_1,r_2)=1, r_4 \le r_3 \le \frac{N}{r_1}, (r_3,r_4)=1\right\}.$$

命题 4.2. 将 f 限制在 R_N 上至多是 *2* 对 *1* 的，且 $\lim_{N\to\infty} \#R_N N^{-2} = \infty$.

暂且假设该命题成立。直接计算可知，对所有 u ∈ R_N,|g_α(u)| ≤ 4N (1 + |α|^2)。线性增长意味着 #{g_α(u) / u ∈R_N} ≤LN ^{2}，其中 L 为某个常数。该命题保证，当 N 足够大时，存在两个不同的 u、v ∈R_N，使得 g_α(u) =g_α(v) 且 f (u) ≠f (v)。于是，g_α(u) =g_α(v) 是关于 α 的一个二次（可能是线性的）整数系数方程。若 deg(α) = 1，则$\alpha \in \mathbb{Q}$，矛盾。因此 deg(α) =2。

现在我们证明该命题。首先，估计实数集$_N$中元素的个数。固定r_1, r_2 有 $\varphi(r_1)$ 种选择，其中 φ 是欧拉函数；对 r_4 也有类似结论。因此

$$\#R_N = \sum_{i=1}^{N} \varphi(i) \sum_{j=1}^{\frac{N}{i}} \varphi(j).$$

回顾一下，在 [13], 中，Walfisz 改进了梅滕斯结果，并得到

$$\sum_{1\le n\le x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x\log^{0.75} x(\log\log x)^2).$$

因此

$$\#R_N \ge \kappa \sum_{i=2}^{\frac{N}{2}} \varphi(i)(\frac{N}{i})^2 = \kappa N^2 \sum_{i=2}^{\frac{N}{2}} \varphi(i)(\frac{1}{i})^2$$

对于某个 $\kappa > 0$。

众所周知（例如，参见 [9]），对于 $n \ge 2$

$$\varphi(n) > \frac{n}{e^\gamma \log\log n + \frac{3}{\log\log n}},$$

其中 γ 是欧拉常数。由此可得

$$\#R_N > \kappa N^2 \sum_{i=2}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{ie^\gamma \log\log i + \frac{3i}{\log\log i}}.$$

这个估计是级数发散的结果。

其次，我们需要证明 f 在 R 上至多是二对一的。设 u =(u$_1$,u$_2$,u$_3$,u$_4$) 和 v =(v$_1$, v$_2$, v$_3$, v$_4$) 是 R_N 中的两个元素，且 f (u) =f (v)。那么对所有 x，都有 g_x(u) =g_x(v)。特别地，g_u1 u2 (u) = 0。因此 v$_2$(− u$_1$u$_2$)+v$_1$ = 0，或者 v$_3$(− u$_1$u$_2$)+v$_4$ =0。

如果 $v_2(-\frac{u_1}{u_2})+v_1=0$，那么 $v_1v_2 = u_1u_2$。根据假设，这两个数都处于既约形式，因此 $v_1 = u_1$, $v_2 = u_2$。f 的第一和第三个坐标告诉我们 $u = v$。

若 $v_3(-\frac{u_1}{u_2}) + v_4 = 0$。那么类似的 $v_3 = u_1$ 和 $v_4 = u_2$。对 $g_{\frac{u_3}{}}$，重复同样的论证可得 $v_1 = u_3, v_2 = u_4$。

总之，f在对角线$\{(r_1,r_2,r_1,r_2)\} \cap R_N$上是单射，在其他情况下则是二对一。□

4.B. **第一步：** $\Gamma^{(2)}$ **是代数的**。适用于克莱因群的方法与福克斯情形中的类似。回想一下，α 是一个二次代数数。

设$x_1, x_2, \cdots、x_n$为复数。记 $\mathbb{Q}(\alpha)\langle x_1, x_2, \cdots、x_n\rangle$ 为由$x_1, x_2, \cdots、x_n$生成的 $\mathbb{Q}(\alpha)$-向量空间。

引理 4.3。若Tr(Γ) 具有线性增长，则对所有 $A \in \Gamma$，$A^2 \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q}(\alpha))$。

Proof. Let $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

首先，假设$c \neq 0$。

由方程

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2(m+n\alpha) & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & m'+n'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a\beta^2(m+n\alpha)a + c\beta^2(m+n\alpha)(m'+n'\alpha)a + (m'+n'\alpha)c + \beta^2(m+n\alpha)b + \\ a(m'+n'\alpha) + b \end{pmatrix}$$

$d\Big), a + d + \beta^2(m+n\alpha)(m'+n'\alpha)a + (m'+n'\alpha)c + \beta^2(m+n\alpha)b \in Tr(\Gamma)$。因此集合

$$\{\beta^2(m+n\alpha)(m'+n'\alpha)a + (m'+n'\alpha)c + \beta^2(m+n\alpha)b \;/\; m,n,m',n' \in \mathbb{Z}\}$$

满足 B-C 性质。

记 $\Theta(m,n,m',n') = \beta^2(m+n\alpha)(m'+n'\alpha)a + (m'+n'\alpha)c + \beta^2(m+n\alpha)b$。

步骤 1。$\beta^2 a \in \mathbb{Q}\langle c, \beta^2 b\rangle$。

假设 $\beta^2 a \notin \mathbb{Q}\langle c, \beta^2 b\rangle$。与引理 3.1 的证明相同的论证表明，当 $(m+n\alpha)(m'+n'\alpha) \neq 0$ 时，Θ 至多为 2 对 1。

另一方面，该集合的大小

$$D'_N := \{(m,n,m',n') \;/\; 1 \leq |(m+n\alpha)(m'+n'\alpha)| \leq N, m,n,m',n' \in \mathbb{Z}\}$$

随 $N^2 \ln N$ 增长，并且将该集合映射为复范数小于$AN(|\beta^2 a| + |\beta^2 b| + |c|)$ 的数，其中 $A = \max\{1, |\frac{1}{+mn\alpha}| (m,n) \in D'_N\}$。这与线性增长相反。

步骤 2。$\beta^2 b \in \mathbb{Q}(\alpha)\langle c\rangle$。

存在 $s, t \in \mathbb{Q}(\alpha)$，使得 $\beta^2 a = s\beta^2 b + tc$。将引理 3.1 中的$D_N$替换为$D'_N$，同样的证明即可适用。

步骤 3。$A^2 \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q}(\alpha))$。

步骤 1 和 2 表明 $\beta^2 a \in \mathbb{Q}(\alpha)\langle c\rangle$。同理，

$$\begin{pmatrix} 1 & m'+n'\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2(m+n\alpha) & 1 \end{pmatrix}$$

蕴含 $\beta^2 d \in \mathbb{Q}(\alpha)\langle c\rangle$。

考虑 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta^2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+\beta^2 & 1\\ \beta^2 & 1\end{pmatrix}\in\Gamma$。则 $\beta^2+\beta^4\in\mathbb{Q}(\alpha)\langle\beta^2\rangle$。我们得出结论，$\beta^2\in\mathbb{Q}(\alpha)$。

最后，我们有 $A=cB$，其中 $B\in$ 属于 $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{Q}(\alpha))$。取行列式，$c^2\in\mathbb{Q}(\alpha)$。并且 $A^2=c^2B^2\in$ 属于 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q})$。

若 $c=0$，则考虑 $A\begin{pmatrix}1 & 0\\ \beta^2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+\beta^2 b & b\beta^2 d & d\end{pmatrix}$。因此，$a,b\in\mathbb{Q}(\alpha)\langle d\rangle$。现在$A^2\in$ 属于 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q}(\alpha))$，证明方法相同。 □

4.C. **第二步：** $\mathrm{Tr}(\Gamma^{(2)})$ **是代数整数。** 我们先介绍一些关于二次域和估计的背景知识。

$\alpha\in\mathbb{Q}(\overline{p\quad -D})$，其中 D 是某个无平方因子整数。令 $\mathcal{O}$ 为 $\mathbb{Q}(p\quad -D)$ 中的代数整数环。回想

$$\mathcal{O}=\begin{cases}\mathbb{Z}[\sqrt{D}], & D\equiv 2,3 \pmod 4,\\ \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{D}}{2}], & D\equiv 1 \pmod 4.\end{cases}$$

显然，存在 $M_1\in\mathbb{N}^+$，使得 $M_1\mathcal{O}\subset\{m+n\alpha/\ m,n\in\mathbb{Z}\}$。取这样一个 M_1。

定义 4.4。 对于任意r、$s\in\mathcal{O}$，若存在u''、$v''\in\mathcal{O}$满足$u''r+v''s=1$，则记作（r，s）$=1$。

设（r，s）$=1$。

引理 4.5。 假设存在 $s_1\in\mathcal{O}$ 使得主理想(s_1) 是初等的，且 $s\in(s_1)$。若$(r,s)=1$，则存在 $u,v\in\mathcal{O}$以及常数 M_2，使得 $us+vr=1$, $|v|\le M_2|r|$且$(v,s_1)=1$。

证明。根据定义，存在 u''、$v''\in\mathcal{O}$满足 $u''r+v''s=1$。取 v 的一个表示 v'，使其在 $\overline{\mathcal{O}}r\ \mathcal{O}$ 中范数最小。我们有 $v''=v'+wr$，其中 $|v'|\le p1+D^2|r|$且 $w\in\mathcal{O}$。于是 $(u''-ws)r+v's=1$。若 $(v',s_1)=1$，取 $v=v'$，并令 $u=u''-ws$。若 $(v',s_1)\neq 1$，则存在 k 使得 $v'k\in(s_1)$。取 $v=v'+r$，$u=u''-ws-s$。

Now,

$$(v'+r)\sum_{i=1}^{k}((-1)^{i+1}v'^{2i-1})+(u''-ws-s)s(\sum_{i=1}^{k}((-1)^{i+1}v'^{2i-2}))=1+(-1)^{k+1}v'^{2k}.$$

由于$s\in(s_1)$和$v^{2k}\in(s_1)$，因此，$(v,s_1)=1$。取$M_2=p1+D^2+1$，引理得证。□

取 $M=\max\{M_1.M_2\}$。令 $\Gamma=\Gamma\cap(\mathrm{PSL}(2,\mathbb{Q}(\alpha)))$。$\Gamma$ 是 Γ 的有限指数子群，因为 Γ 是有限生成的，且 $\Gamma^{(2)}<\bar{\Gamma}$。取 $\begin{pmatrix}a & b & c & d\end{pmatrix}\in\bar{\Gamma}$。

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+ac+c^2 & 1-ac-a^2\\ c^2 & 1-ac\end{pmatrix}\in\bar{\Gamma}.$$

迭代得到一列元素$A_n \in \bar{\Gamma}$，满足$A_n = \begin{pmatrix} * & * \\ 2^n & * \end{pmatrix} c$且 $\mathrm{tr}(A_n) = 2 + c^{2^n}$。由恒等式 $\mathrm{tr}(A_n \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} n) = 2 + (m + 1 + n\alpha)c^{2^n}$，集合

$$\Delta_c := \left\{ M_1 x c^{2^n} \ / \ x \in \mathcal{O}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

满足 B-C 性质。

引理 4.6。若 $c \notin \mathcal{O}$，则 Δ_c 不具有 *B-C* 性质。

证明。设 $2^s h$ 为 $\mathcal{O}$ 的理想类群的序，且 h 为奇数。选取 $t \in \mathbb{N}^+$，使得 $2^t \equiv 1$（模 h）。我们固定这一选择，不再更改。由于 $c \notin \mathcal{O}$，$c^{2^s(2^t-1)} = pq$，其中 $(p, q) = 1$，$p \nmid q \in \mathcal{O}$，$N_{\mathbb{Q}(\alpha)} q \neq 1$。令 q_1 为 q 的一个因子，使得主理想 (q_1) 是初等的。这是可能的，因为 $2^s h$ 是理想类群的序。

由 $c^{2^{s+t}} = c^{2^s} C^{2^s(2^t-1)}$ 可知，存在严格递增函数 $g: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$，使得 $c^{2^{s+kt}} = (pq)^{g(k)} c^{2^s}$。

定义函数 f 如下：$f(0) = 0$,

$$f(n) = \min \left\{ g(k) \ \middle/ \ |q|^{g(k)} \geq 2M^n |c^{2^s}| \prod_{i=o}^{n-1} |p|^{f(i)} \right\}.$$

由引理 4.6，从 $i = n$ 开始归纳，可得 u_i、$v_i \in \mathcal{O}$，使得

$$u_i p^{f(i)} - v_i v_{i+1} \cdots v_n q^{f_i} = 1,$$

$(u_i, q) = 1, (v_i, q_1) = 1, |v_i| \leq M|p|^{f(i)}$.

令 $m_0 = M_1 \prod^n{}_{i=1} v_i$、$m_k = M_1 u_k \prod^{k-1}{}_{i=1} v_i$, $1 \leq i \leq n$。那么，对所有 $0 \leq j \leq n$，$z_j = m_j c^{2^s} (pq)^{f(i)} \in \Delta_c$。

首先，由于 $(u_i, q_1) = 1$ 和 $(v_i, q_1) = 1$，$z_j, 0 \leq i \leq n$ 互不相同（考虑 $z_i = z_i M_1$ 即可）。

其次，

$$\begin{aligned} |z_j - z_0| &= |M_1 c^{2^s} \prod_{i=1}^{j-1} v_i| |u_i (\tfrac{p}{q})^{f(j)} - \prod_{i=j}^{n} v_i| \\ &= \frac{|M_1 c^{2^s} \prod_{i=1}^{j-1} v_i|}{|q|^{f(j)}} |u_i p^{f(i)} + v_i v_{i+1} \cdots v_n q^{f(i)}| \\ &\leq \frac{M^n |c^{2^s}| \prod_{i=o}^{j-1} |p|^{f(i)}}{|q|^{f(j)}} \\ &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

由此可知，Δ_c 不具有 B −复数集 性质。 □

我们得出结论：$c \in \mathcal{O}$。

考虑以下两个方程:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ \beta^2 a + c & \beta^2 b + d \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \beta^2 b & b \\ c + \beta^2 d & d \end{pmatrix}.$$

那么 $\beta^2 a = (\beta^2 a + c) - c \in \mathcal{O}$，类似地，$\beta^2 d \in \mathcal{O}$。特别是，$\mathrm{Tr}(\bar{\Gamma}) \subset \frac{1}{\beta^2} \mathcal{O}$。

取 $S \in \mathbb{N}^+$，使得 $S\mathrm{Tr}(\bar{\Gamma}) \subset \mathscr{O}$。令 $B \in \bar{\Gamma}$。由于

$$\mathrm{tr}(B^n) = \mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(B^{n-1}) - \mathrm{tr}(B^{n-2}).$$

由归纳可知 $S(\mathrm{tr}(B))^n \in \mathscr{O}$。取范数，得 $N_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\mathrm{tr}(B)) \in \mathbb{Z}$。于是

$$\mathrm{Tr}^n_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\mathrm{tr}(B)) = \mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\mathrm{tr}(B))\mathrm{Tr}^{n-1}_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\mathrm{tr}(B)) + N_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\mathrm{tr}(B))\mathrm{Tr}^{n-2}_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\mathrm{tr}(B)),$$

$S\mathrm{Tr}^n_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\mathrm{tr}(B)) \in \mathbb{Z}$。因此 $\mathrm{Tr}_{\mathbb{Q}(\alpha)}(\mathrm{tr}(B)) \in \mathbb{Z}$。

换言之，$\mathrm{tr}(B) \in \mathscr{O}$。

⊥Γ 根据定理 2.3 由四元数代数导出。

4.D. **定理 A 的证明**。

证明。 将 Luo 和 Sarnak 在 [5] 中的工作推广到克莱因群并不困难。另一方面，如果 Tr(Γ) 满足 B-C 性质，且 Γ 不是一致的，¯§ 4.C 表明 Γ 是由四元数代数导出的。因此， Γ 是算术的。

¯当 Γ 不是由四元数代数导出时，必然存在一个 $A \in \Gamma\backslash\Gamma$。如有必要，将 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta^2 & 1 \end{pmatrix}$ 左乘或右乘，A 可写成 $\begin{pmatrix} * & * \\ c & * \end{pmatrix}$ 的形式，其中 $c \notin \mathbb{Q}(\alpha)$。因此，对于所有 $k \in M_1\mathscr{O}$，都有 $kc + \mathrm{tr}(A) \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$。另一方面，对于所有$l \in M_1\mathscr{O}$， $2 + l\beta^2 \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$。根据克罗内克定理，$\mathrm{Gap}(\mathrm{Tr}(\Gamma)) = 0$。□

5. 一个推论

在 [3], Lafont 和 McReynolds 证明，每个非紧、局部对称、算术流形的本原长度谱中都包含任意长的等差数列。Miller [8] 将这一结果推广到了所有没有欧氏因子或紧因子的经典型算术局部对称轨形。

我们还考察迹集的算术性质。约化迹集 $\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(\Gamma)$ 是 Γ 中非平凡元素的迹所构成的集合。

推论 5.1。 设 Γ 是 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ 或 $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$ 的格。若 $\mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(\Gamma)$ 在减法下封闭，即对于所有 $a, b \in \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(\Gamma)$，都有 $a - b \in \mathrm{Tr}_{\mathrm{R}}(\Gamma)$，则 Γ 是非一致的，且由四元数代数导出。

证明。 注意，我们对迹集的定义在符号变号下保持不变。由于 a、$b \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$ 意味着 $a + b = a - (-b) \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$，所以 Tr(Γ) 在加法下构成一个群。

显然

$$\mathrm{Tr}(A^2) = \mathrm{Tr}^2(A) - 2.$$

令 a、$b \in \mathrm{Tr}(\Gamma)$。则

$$(a+b)^2 - 2 + (a-b)^2 - 2 - 2(a^2-2) - 2(b^2-2) = 4 \in \mathrm{Tr}(\Gamma),$$

and

$$4^2 - 2 - 3 \times 4 = 2 \in \mathrm{Tr}(\Gamma).$$

因此， Γ 是非一致的。

由于 Tr(Γ) 没有聚点，我们知道 $\mathrm{Gap}(\mathrm{Tr}(\Gamma)) > 0$。根据定理 A， Γ由四元数代数导出。□

注 5.2. 在 [4], 中，Lakeland构造了多个含有无穷多个格的族，其迹集为 $\mathbb{Z}$ 和 $2\mathbb{Z}$。

参考文献

[1] A. Borel, 《双曲3-流形的可交换类与体积》, 比萨高等师范学校科学系列年刊**8** (1981), 第1期, 1–33页。[2] S. Geninska 和 E. Leuzinger, 《算术福克斯群的几何刻画》, 《杜克数学杂志》**142** (2008), 第1期, 111–125页。[3] J-F Lafont 和 D. B. McReynolds, 《本原测地线长度与（几乎）等差数列》, 《数学出版物》**63** (2019), 第1期, 183–218页。[4] G. Lakeland, 《算术福克斯群的等价迹集》, 《美国数学会会刊》**145** (2017), 第1期, 445–459页。[5] W. Luo 和 P. Sarnak, 《算术双曲曲面的数方差》, 《数学物理通讯》**161** (1994), 第2期, 419–432页。[6] C. Maclachlan 和 A. W Reid, 《算术克莱因群的可交换类及其 Fuchsian 子群》, 《剑桥哲学会数学会刊》, 1987年, 第251–257页。[7] ———, 《双曲3-流形的算术》, 第219卷, Springer, 2003年。[8]N. Miller, 《本原长度谱中的等差数列》, arXiv 预印本 arXiv:1602.01869 (2016)。[9] J B. Rosser 和 L. Schoenfeld, 《素数某些函数的近似公式》, 《伊利诺伊数学杂志》**6** (1962), 第1期, 64–94页。[10] P. Sarnak, 《算术量子混沌》, 《TheSchur 讲座》(1992)（特拉维夫）, 1995年, 第183–236页。[11] P. Schmutz, 《算术群与黎曼曲面的长度谱》, 《杜克数学杂志》**84** (1996), 第1期, 199–215页。[12] K. Takeuchi, 《算术福克斯群的刻画》, 《日本数学会杂志》**27** (1975), 第4期, 600–612页。[13] A. Walfisz, 《现代数论中的魏尔指数和》, VEB 德国科学出版社 (1963)。

伊利诺伊大学芝加哥分校电子邮件地址:
yhao23@uic.edu