arXiv:2303.01401v1 [math.AP] 2 Mar 2023

罗宾边界条件下加权各向异性问题的谱优化

BENEDE TTA PELLACCI、GIOVANNI PISANTE 和 DELIA SC HIERA

摘要。我们研究有界 Lipschitz 区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$、$N \geq 1$ 上具有各向异性扩散的加权特征值问题，并证明在罗宾边界条件下存在两个正特征值 $\lambda^{\pm}$，分别对应一个正特征函数和一个负特征函数。接着，我们分析关于变号权函数 $\lambda^{\pm}$ 的极小化问题，证明最优特征值 $\Lambda^{\pm}$ 相等，且最优权函数为 bang-bang 型，即分段常值函数，每个函数仅取两个值。因此，该问题等价于在满足体积约束的 Ω 子集上进行极小化。随后，我们在一维情形下，针对齐次狄利克雷条件或诺伊曼条件，彻底求解了这一优化问题，并揭示了各向异性扩散所引发的新现象。针对 λ^{+} 的优化问题自然源于这样一个研究：为使某一物种能够在异质栖息地中生存，如何实现资源的最优空间配置。

AMS学科分类。49K15, 49K20, 35J92, 35J70。
关键词。加权特征值、种群动力学、生存阈值、对称化。

1. 引言

本文聚焦于与以下特征值问题相关的谱优化问题

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left((H(\nabla u))^{p-1} H_{\xi}(\nabla u)\right) = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & \text{in } \Omega \\ H^{p-1}(\nabla u) H_{\xi}(\nabla u)\cdot n + \mathrm{k}|u|^{p-2}u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中，$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个有界利普希茨区域，$N \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$，$p > 1$，n 是 $\partial\Omega$ 上的外单位法向量，$\tau \cdot \eta$ 表示向量 τ 与 η之间的内积。常数 k 取自集合 $[0, +\infty]$，因此我们考虑齐次罗宾边界条件；当 $\mathrm{k} = 0$时，该条件退化为齐次诺伊曼边界条件；而对于 $\mathrm{k} = +\infty$，我们将其称为齐次狄利克雷情形（更多细节请参见第 3 节开头）。

函数 $m \in L^{\infty}(\Omega)$ 是一个变号权函数，属于以下函数类

$$\mathcal{M} = \left\{ -\beta \leqslant m(x) \leqslant 1,\ |\Omega_m^+| > 0,\ \int_{\Omega} m(x) \leqslant -m_0|\Omega|, \right\}, \tag{1.2}$$

其中 $\beta > 0$ 为常数，若 $\mathrm{k} > 0$，则 $m_0 \in (-1, \beta)$；若 $\mathrm{k} = 0$，则 $m_0 \in (0, \beta)$，并且 $\Omega^+{}_m := \{x \in \Omega : m(x) > 0\}$。我们假设函数 $H\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 属于 $C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$，且满足

$$H \geq 0 \text{ and } H(\xi) = 0 \text{ if and only if } \xi = 0 \tag{1.3}$$

$$H(t\xi) = tH(\xi), \quad \text{for any } t \geq 0, \xi \in \mathbb{R}^N \tag{1.4}$$

$$\{\xi \in \mathbb{R}^N : H(\xi) < 1\} \text{ is uniformly convex}, \tag{1.5}$$

这里的一致凸性是指边界的主曲率为正，且有严格的正下界。

我们将关注关于$m \in \mathcal{M}$ 的最小化，即（1.1）的正主特征值，也就是与恒定符号特征函数相对应的正特征值。

在这种情况下

$$H(\xi) = |\xi| \tag{1.6}$$

问题（1.1）对应于非线性椭圆逻辑斯蒂问题的线性化

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda |u|^{p-2}u(m(x) - |u|^q) & \text{in } \Omega \\ \nabla u \cdot n + \mathrm{k}|u|^{p-2}u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.7}$$

其中 $q > 0$。正解是相应反应扩散方程的稳态。该模型在 [24, 30]，中引入，用于描述异质环境 Ω 中种群的扩散，其稠密度为 u，并由布朗运动定律触发，因此每个个体向各个方向移动的概率相同。通过将 Ω 表示为斑块、有利区和不利区的并集，对栖息地的异质性进行建模；这些区域分别对应于权函数 m 的正集和负集，因此 $\Omega^+{}_m$ 可以解释为 Ω 的有利区（见 [5]）。

在这一背景下，正主特征值 λ 及其特征函数 φ（根据（1.6），该特征函数可以取为正）被证明是种群生存的阈值。因此，关于权函数或模型的其他特征对 λ 进行最小化，有助于提高种群的生存机会。文献中已有多项相关研究；关于碎片化效应、非局部方面或渐近分析等有趣现象，参见近期论文 [37, 4, 20, 39, 40, 23] 及其中的参考文献。还应提及的是，类似的优化问题也在其他相关背景下得到研究，例如复合膜框架下的问题（见 [12, 26] 及其中的参考文献）。关于权函数 m 对 $\lambda = \lambda(m)$ 的优化研究可追溯至 Cantrell 和 Cosner 在 [9] 中的工作；已知最小值 Λ 由一个 bang-bang 型最优权函数取得，即分段函数 $m = \mathbb{1}_D - \beta\mathbb{1}_{D^c}$，其中 $\mathbb{1}_D$ 表示集合 D 的示性函数，而 $D \subset \Omega$ 被证明是相应正特征函数的超水平集（见 [31, 19, 10, 34]）。

于是，自然会引出有关“最优集合”D 定性性质的问题。这是一项相当困难的任务，通常仍有许多问题尚未解决；目前仅对$p = 2$且在一维情形下完成了分析。 [10, 34] 首次研究了齐次狄利克雷或诺伊曼边界条件下的这一问题，随后 [31, 27],完成了相关研究，并证明D 是连通的，因此是一个区间；此外，存在常数 k，使得对于每个 $\mathrm{k} > \mathrm{k}$，D 以区间 Ω的中点为中心, 而对于 $\mathrm{k} < \mathrm{k}$，D 则贴着边界。对于$p \neq 2$， [19]在齐次诺伊曼边界条件下进行了同样的分析。

当种群采用不同的扩散策略时，自然会考虑在模型中使用不同的微分算子。例如，[11, 20, 41] 研究了分数阶扩散算子（另见其中的参考文献）。特别是，对于满足齐次诺伊曼边界条件的谱分数阶拉普拉斯算子，最优权函数属于 bang-bang 型（[41]）；然而，即使在一维情形下，最优集合D 的形状和定位仍然未知。

这里，我们关注各向异性扩散，即种群在栖息地中的扩散概率因方向而异（相关模型见[8] ），因此扩散算子由所谓的各向异性p–拉普拉斯算子给出

$$\Delta_{H,p}u := \operatorname{div}\left((H(\nabla u))^{p-1}H_{\xi}(\nabla u)\right).$$

当$m \equiv 1$ 时，特征值的性质已在各种边界条件下得到广泛研究，其中假设对每个$t \in \mathbb{R}$，$H(t\xi) = |t|H(\xi)$，以此替代（ 1.4 ）（例如见 [3, 17, 25] 及其中的参考文献）。从这一角度出发，我们研究一般Robin边界条件下的不定特征值问题。

首先，我们通过在正函数锥上对一个适当的瑞利商进行最小化，证明对每个固定的$m \in \mathcal{M}$都存在一个正主特征值（见命题 3.1）。

即使在本研究中，也出现了一项新颖之处：由于我们希望将一维各向异性扩散算子的研究纳入其中，因此假设$H(t\xi) = tH(\xi)$ 对每个 $\xi \in \mathbb{R}^N$都成立，但仅对$t \geq 0$成立，因此H 不被假设为范数，因为它可能不是偶函数。这会带来重要后果。例如，若在整个 Sobolev空间上对相应的瑞利商进行最小化，就无法事后推断相应特征函数的符号（见注3.4）。这就是我们将最小化问题限制在非负函数锥上的原因。

事实上，存在两个正特征值 $\lambda^{\pm}$，它们各自对应的特征函数符号恒定（见第 3 节）。其中一个可通过在正函数锥上取极小得到，另一个则可在负函数锥上取极小得到（见命题 3.8）。这一现象源于 H 不必是偶函数，与全非线性算子中的情形相似（见 [7], [42] 及其中的参考文献）。

与各向同性扩散的情形类似，我们证明 $\lambda^+(m)$ 是非线性 Logistic 椭圆问题存在正解的一个阈值（见定理 2.2）。因此，对$m \in \mathcal{M}$ 进行极小化 $\lambda^+(m)$，就是要寻找资源的最佳空间配置，以提高生活在 Ω中的种群的生存机会。

为此，我们首先证明以下结果。

Th定理 1.1. 假设 $H \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ 满足假设 (1.3)、(1.4) 和 (1.5)。最小-*miz*化问题

$$\Lambda^+ := \inf_{m \in \mathcal{M}} \lambda^+(m) \tag{1.8}$$

其解为 $m(x) = \mathbb{1}_D - \beta \mathbb{1}_{D^c}$, $(D^c = \Omega \setminus D)$。若 $\varphi = \varphi(m)$ 是与 $\Lambda^+ = \lambda^+(m)$对应的正特征函数，则集合 D 是 φ 的一个超水平集，即对某个适当的 t，有 > 0

$$D = \{x \in \Omega \,:\, \varphi(x) > t\} \tag{1.9}$$

且 φ 的每个水平集的测度均为零。

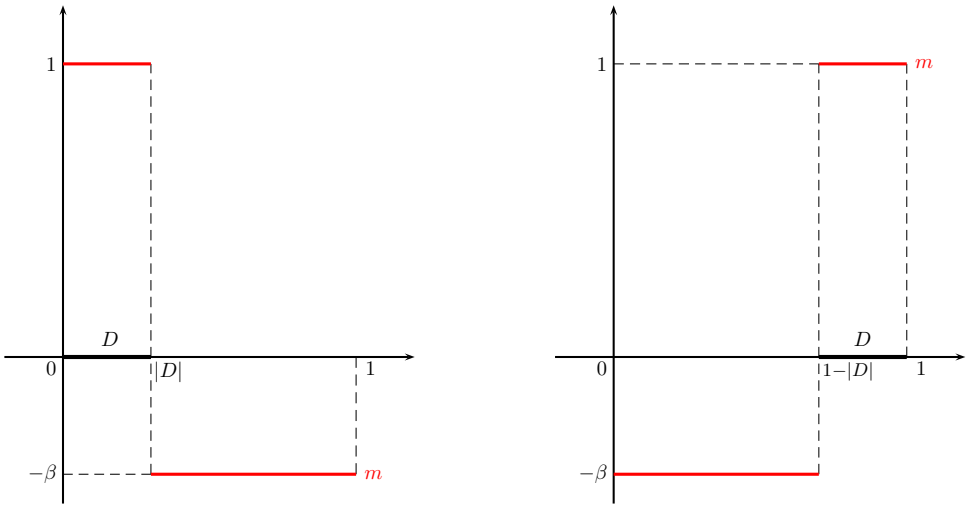
定理1.1证明，正如在若干情形中所示（例如参见 [10, 34, 31, 36, 38, 35]），在各向异性情形下，Λ^+ 的优化器同样是 bang-bang 型。

特别地，最小化问题 (1.8) 等价于在满足体积约束的 Ω 子集上进行最小化（见注3.6），因此人们自然会研究最优集的定性性质。为此，我们考虑齐次狄利克雷或诺伊曼边界条件，并将讨论限制在一维情形；此时，满足 (1.3)、(1.4) 和 (1.5) 的H 必然具有如下表达式

$$H(x) = \begin{cases} ax & \text{if } x \geq 0 \\ -bx & \text{if } x < 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

当 $a \neq b$ 时，否则不会出现各向异性。我们将证明以下结果。

定理 1.2. 设 $N = 1, \Omega = (0,1)$，并假设 H 具有(1.10)的形式。那么，
超水平集 D 是一个区间。此外



（a）$\mathrm{k}=0$ 且 $a>b$。　　（b）$\mathrm{k}=0$ 且 $a<b$。

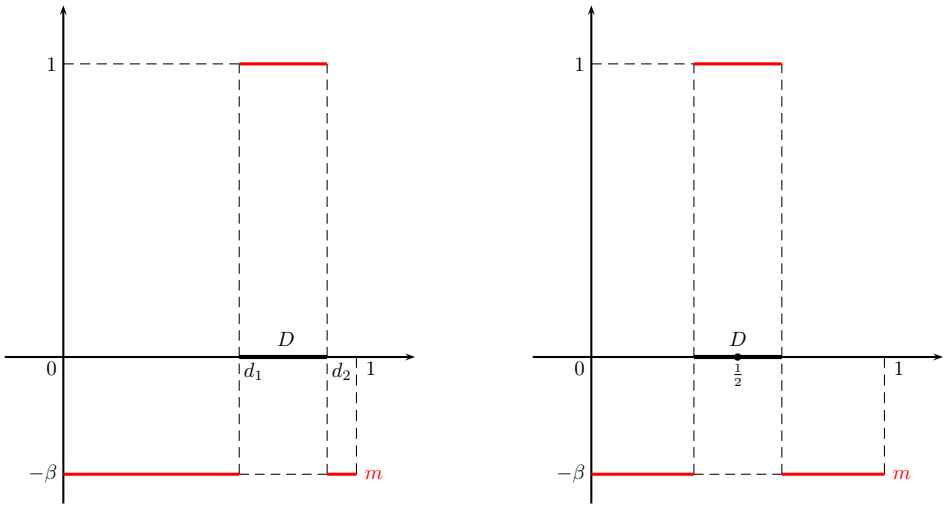
图 1. 一维情况下具有诺伊曼边界条件的最优权函数 $m\ \Lambda^{+}$ 的表示（$\mathrm{k}=0$）（见定理 1.2）。如果 $a=b$，则上述两个权函数均为最优权函数。

(1) 如果$\mathrm{k}=0$，当 $a>b$ 时，$D=(0,|D|)$；当 $b>a$ 时，$D=(1-|D|,1)$。如果 $a=b$，$(0,|D|)$ 和$(1-|D|,1)$ 都是最优集合。(2) 如果$\mathrm{k}=+\infty$，那么 D 由下式给出

$$D=\left(\frac{(1-|D|)a}{a+b},\frac{|D|b+a}{a+b}\right). \tag{1.11}$$

这一结果揭示了各向异性对最优区间 D位置的影响。事实上，在齐次狄利克雷边界条件的情形下，各向异性会使 D发生偏移，结果得到的是以 1/2 为中心的一维各向异性球，即式（1.11）所给出的区间。在齐次诺伊曼边界条件的情形下，各向异性决定了区间 D 应贴近哪个极值点，见图 1 和图 2。

为证明定理 1.2，我们将首先按照 [31], 的思路进行适当的单调重排，以证明特征函数 φ 有唯一的最大值点，从而使超水平集 D 成为一个区间。随后，分别在齐次诺伊曼边界条件和狄利克雷边界条件下完成分析，其中 $\mathrm{k}=0$、$\mathrm{k}=\infty$。值得注意的是，当 $H(\xi)=|\xi|^2$ 且施加罗宾边界条件时，通过直接计算并比较与可能的最优集相关联的特征值，可以确定 D 的位置（见 [27]）。由于各向异性的存在，此处的比较尤其复杂。然而，当 $\mathrm{k}=0$时，单调重排论证立即表明，φ 在整个 $(0,1)$上单调。因此，通过直接比较瑞利商即可得出结论。在齐次狄利克雷边界条件下，特征函数 φ 最大值点的唯一性使我们能够处理各向异性对称化的波利亚不等式中的等号情形（见命题 5.5），从而得出结论。



(a) 各向异性情形：$a > b$。 (b) 各向同性情形：$a = b$。

图2. 定理 1.2 中给出的在一维情形下、满足狄利克雷边界条件（$k = +\infty$）时的最优权函数m，其中 Λ^+。我们将最优集合记为 D，$d_1 = \frac{(1-|D|)a}{a+b}$，$d_2 = \frac{|D|b+a}{a+b}$。在各向同性情形$a = b$下，最优集合以1/2 为中心。

我们认为，与各向同性情形一样，定理 1.2 的某个适当版本也应适用于一般的罗宾边界条件情形。

我们认为，对于齐次狄利克雷边界条件的情形，可以直接利用各向异性对称化论证并结合等周不等式来处理，而无需借助单调重排，不过，为处理非偶各向异性的情形，需要谨慎调整论证（见注 5.7）。另一方面，由于在一般的罗宾边界条件情形下，我们利用单调重排证明了 D 是一个区间，因此还可推出特征函数 φ 有唯一的最大值点。这使我们能够利用波利亚不等式等号情形的一个初等一维刚性结果（见命题 5.5），从而确定D的位置。

从负函数锥出发进行《分析》，可以证明存在一个正特征值 $\lambda^-(m)$，且对应唯一的负归一化特征函数。随后，可以针对权函数 m优化 $\lambda^-(m)$，即研究以下问题

$$\Lambda^- := \inf_{m\in\mathcal{M}} \lambda^-(m).$$

可以给出与 Λ^-相关的最优集合所对应的定理 1.2 的类似版本。此外，我们证明，在区域 Ω 满足适当的对称性假设时，有以下结果

定理 1.3. 我们假设 Ω 有一个对称中心，即存在 $x_0 \in \mathbb{R}^N$，使得$2x_0 - x \in \Omega$ 对每个 $x \in \Omega$都成立。于是，

$$\Lambda^+ = \Lambda^-.$$

我们强调，定理 1.3 的证明大量运用了与最优特征值相关联的特征函数的单调性。我们认为，对于任何 $\lambda^{\pm}(m)$，等式都不成立，因为预计其单调性不会成立。

本文结构如下。下一节将讨论 $\lambda^{+}(m)$ 作为相关非线性椭圆问题存在正解的阈值是如何出现的。在第3节中，我们针对固定权函数 m建立特征值问题，并在命题3.1和命题3.8中证明主特征值 $\lambda^{+}(m)$ 和 $\lambda^{-}(m)$ 的存在性，随后给出定理1.1的证明，以及关于 $\lambda^{-}(m)$的对应结果。定理1.2和定理1.3的证明见第4节。最后，在第5节中，我们证明有关一维各向异性重排不等式的一些必要技术工具。

2. 非线性问题

本文全文假设 H 满足 (1.3)、(1.4)。这类函数通常称为正齐次闵可夫斯基范数。显然，H满足以下增长条件

$$\underline{\alpha}\,|\xi| \leqslant H(\xi) \leqslant \overline{\alpha}\,|\xi|, \qquad \text{with } 0 < \underline{\alpha} < \overline{\alpha}. \tag{2.1}$$

在假设 (1.5) 下，还可以证明，对于任意 $p > 1$，函数 H^p 是严格凸的，并且存在正常数 γ、Γ，使得

$$(\mathrm{Hess}(H^p)(\xi))_{ij}\zeta_i\zeta_j \geq \gamma|\xi|^{p-2}|\zeta|^2, \qquad \sum_{i,j=1}^{N} \left|(\mathrm{Hess}(H^p)(\xi))_{ij}\right| \leqslant \Gamma|\xi|^{p-2} \tag{2.2}$$

对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ 和 $\zeta \in \mathbb{R}^N$，见 [13, 命题 3.1]，当维数为 $N \geq 2$ 时；而对于$N = 1$，这些估计可通过直接计算得到。

我们首先给出如下定义。

定义 2.1。设 $m \in \mathcal{M}$。记

$$\lambda^{+}(m) = \inf_{u \in \mathcal{S}^{+}_{\mathtt{k},m}} \mathcal{R}_{\mathtt{k},m}(u)$$

其中，瑞利商 $\mathcal{R}_{\mathtt{k}、m}$ 以及集合 $\mathcal{S}^{+}_{\mathtt{k}、m}$ 的定义根据 $\mathtt{k}$ 的不同而有所区别。当 $\mathtt{k} < +\infty$ 时，它们定义为

$$\mathcal{R}_{\mathtt{k},m}(u) := \frac{\int_\Omega H(\nabla u)^p dx + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}|u|^p d\sigma}{\int_\Omega m(x)|u|^p dx}$$

$$\mathcal{S}^{+}_{\mathtt{k},m} := \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega),\ u \geq 0,\ \int_\Omega m(x)|u|^p\,dx > 0 \right\},$$

而当 $\mathtt{k} = +\infty$ 时，

$$\mathcal{R}_{\infty,m}(u) := \frac{\int_\Omega H(\nabla u)^p}{\int_\Omega m(x)|u|^p dx} \qquad \mathcal{S}^{+}_{\infty,m} := \left\{ u \in W^{1,p}_0(\Omega),\ u \geq 0,\ \int_\Omega m(x)|u|^p\,dx > 0 \right\}.$$

通过选择 $\mathcal{S}^{-}_{\mathtt{k}},_m$，可以给出类似的定义（参见定义 3.7）。

在下一个定理中，我们将证明，与各向同性情形一样，$\lambda^{+}(m)$ 自然地成为以下逻辑斯蒂型非线性问题存在正解的阈值

$$\begin{cases} -\Delta_{H,p}u = \lambda|u|^{p-2}u(m - |u|^q) & \text{in } \Omega, \\ H(\nabla u)^{p-1}H_{\xi}(\nabla u)\cdot n + \mathtt{k}|u|^{p-2}u = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $q > 0$，它是各向异性情形下问题 (1.7) 的对应形式。

定理 2.2. 问题 (2.3) 存在非负非平凡有界解 u，当且仅当$\lambda > \lambda^+(m)$。此外，$u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ 是唯一的非负非平凡解。

该结果可以通过不同的方法加以证明，例如极小化适当的作用泛函。在这里，我们将通过下解—上解方法获得有界解的存在性；该方法还可用于证明相关抛物型方程解的存在性。

我们回顾一下，如果$u \in W^{1,p}(\Omega)$ 是 (2.3) 的上解，则玄机图

$$\begin{aligned} D(u,\phi) := &\int_\Omega H(\nabla u)^{p-1} H_\xi(\nabla u)\nabla\phi - \lambda\int_\Omega m(x)|u|^{p-2}u\phi \\ &+ \lambda\int_\Omega |u|^{p+q-2}u\phi + k\int_{\partial\Omega}|u|^{p-2}u\phi \geqslant 0. \end{aligned} \tag{2.4}$$

对于任意非负的 $\phi \in C^\infty(\Omega)$（当 $k \in (0,\infty)$ 时）或 $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$（当 $k = \infty$ 时）均成立，则称其为（2.3）的上解。类似地，将不等式反向即可给出（2.3）的下解定义。我们特别指出，如果 $u \in L(p^*)'/(p+q-1)(\Omega)$，则 $D(u,\cdot)$ 关于$\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ 是序贯连续的。因此，对于有界上解，当 $k \in (0,\infty)$ 时，（2.4）对任意 $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ 成立；当 $k = \infty$ 时，则对任意 $\phi \in W^{1,p}_0(\Omega)$ 成立。

我们首先证明一个存在性结果。

命题 2.3. 假设存在 *(2.3)* 的一个下解 $\underline{u}$ 和一个上解 $\overline{u}$，并且对于某些常数 c、c，有 $-\infty < c \leqslant \underline{u} \leqslant \overline{u} \leqslant c < \infty$ 几乎处处成立于 Ω。那么，存在 *(2.3)* 的一个弱解 u，使得 $\underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u}$ 在 Ω 上几乎处处成立。

证明。 证明沿用 [44, 定理 2.4] 中的经典论证。我们仅指出考虑罗宾边界条件时出现的一些不同之处，即 $k < \infty$。该方法基于对下列泛函进行极小化：

$$E(u) = \int_\Omega H(\nabla u)^p + k\int_{\partial\Omega}|u|^p - \lambda\int_\Omega m|u|^p + \lambda\int_\Omega |u|^{p+q}$$

在以下闭凸子集上$W^{1,p}(\Omega)$

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in W^{1,p}(\Omega) : \underline{u} \leqslant u \leqslant \overline{u} \text{ a.e.} \right\}.$$

首先注意到，由于 $\mathcal{M}$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中有界，并利用关于 H 的假设，不难验证，泛函 E 限制在 $\mathcal{M}$ 上，并赋予由$W^{1,p}(\Omega)$ 范数诱导的范数后，是强制的且弱下半连续。因此容易推出E 在 $\mathcal{M}$ 上达到其下确界。设$u \in \mathcal{M}$ 为E 在 $\mathcal{M}$ 上的极小点。由于$p > 1$ 意味着H^p是正齐次的（因此其一阶导数正$(p-1)$次齐次，且在原点连续），泛函E中体积分量的拉格朗日函数，即

$$f(x,u,\xi) = H^p(\xi) - \lambda m(x)|u|^p + \lambda|u|^{p+q},$$

满足所谓的 自然增长条件 （参见 [15, 条件 3.34]）。接着，可仿照 [15, 定理 3.7], 证明，泛函 E 在极小点 u 沿任意方向 $\phi = v - u$ （其中 $v \in \mathcal{M}$[1] ）的右向 Gâteaux 导数存在，且等于 $D(u,\phi)$。此外，由于 u 是一个极小化元，我们还有 $D(u,\phi) \geqslant 0$。

给定 $\varphi \in C^\infty(\Omega)$， $\varepsilon > 0$ 足够小，并定义了

$$\varphi^\varepsilon := \max\{0, u + \varepsilon\varphi - \overline{u}\} \geq 0, \quad \varphi_\varepsilon := \max\{0, \underline{u} - (u + \varepsilon\varphi)\} \geq 0,$$

[1]注意，由于 $\mathcal{M}$ 是凸的，$u + \varepsilon(v-u)$ 是泛函 E 在 $\mathcal{M}$上的容许变分。对于低阶项以及边界积分，我们同样充分利用了 $\mathcal{M}$ 在 $L^\infty(\Omega)$ 中有界这一事实，以应用控制收敛定理。

我们有 $v_\varepsilon := u + \varepsilon\varphi - \varphi^\varepsilon + \varphi_\varepsilon \in \mathcal{M}$，因此变分不等式 $D(u, v_\varepsilon - u) \geqslant 0$成立。由线性性可得

$$D(u,\varphi) \geqslant \frac{1}{\varepsilon}\big(D(u,\varphi^\varepsilon) - D(u,\varphi_\varepsilon)\big).$$

我们来证明，当 ε 趋于零时，右端项也趋于零。

下面我们将使用以下记号

$$g(x,u) = \lambda m(x)|u|^{p-2}u - \lambda|u|^{p+q-2}u, \quad \Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : u(x) + \varepsilon\varphi(x) \geq \overline{u}(x) > u(x)\}.$$

$$K_\varepsilon = \{x \in \partial\Omega : Tr\varphi^\varepsilon(x) \neq 0\}, \quad \text{where } Tr : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \text{ is the trace operator.}$$

考虑到 u 是一个上解，且$\overline{u} + \varepsilon\varphi - u \leqslant \varepsilon\varphi$ 于 Ω_ε中，并利用$H(\cdot)^p$ 和 $|\cdot|^p$的凸性，可得

$$\begin{aligned} D(u,\varphi^\varepsilon) \geqslant & D(u,\varphi^\varepsilon) - D(\overline{u},\varphi^\varepsilon) \\ \geqslant & \varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}\Big(H(\nabla u)^{p-1}H_\xi(\nabla u) - H(\nabla\overline{u})^{p-1}H_\xi(\nabla\overline{u})\Big)\nabla\varphi \\ & + \varepsilon\,\mathtt{k}\int_{K_\varepsilon}(|\overline{u}|^{p-2}\overline{u} - |u|^{p-2}u)\varphi - \varepsilon\int_{\Omega_\varepsilon}|g(x,u) - g(x,\overline{u})|\,|\varphi|. \end{aligned}$$

注意，$\varphi^\varepsilon \to 0$ 属于$W^{1,p}(\Omega)$，因此$Tr\varphi^\varepsilon \to 0$ 属于 $L^p(\partial\Omega)$，这得益于迹算子的连续性；因此，$|\Omega_\varepsilon| \to 0$，且 $\mathcal{H}^{n-1}(K\varepsilon) \to 0$。于是

$$D(u,\varphi^\varepsilon) \geqslant o(\varepsilon).$$

并且，按照证明 [44,定理 2.4] 的方法进行论证，即可得出结论。 □

鉴于命题 2.3，要证明方程 (2.3) 存在有界弱解，只需找到 $u \leqslant u$ 有界的下解和上解。为此，方便起见，对任意固定的 $\lambda > \overline{0}$ 引入以下特征值

$$\mu^+(\lambda,m) = \inf_{\substack{v\in W^{1,p}\\ v\geq 0,\neq 0}} \frac{\int_\Omega H(\nabla v)^p + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}|v|^p - \lambda\int_\Omega m|v|^p}{\int_\Omega |v|^p}.$$

仿照命题 3.1 的论证，可以证明 $\mu^+(\lambda,m)$ 可由一个正特征函数取到，记为 $\Phi \in \mathcal{S}^+_{\mathtt{k},m}$。特征值 $\mu^+(\lambda,m)$ 是 [5, 43] 中引入的特征值的各向异性对应物。与各向同性扩散的情形一样，我们将证明，$\mu^+(\lambda,m) < 0$ 是 (2.3) 存在正解的充要条件。

定理 *2.2* 的证明。我们只考虑 $\mathtt{k} < \infty$ 的情形；Dirichlet 边界条件的情形（$\mathtt{k} = \infty$）可以类似处理。

第一步：证明存在一个非负的非平凡解，其值高于 $\lambda^+(m)$。固定 $\lambda > \lambda^+(m)$。注意，$\mu^+(\lambda,m) < 0$，因为对于任意 $v \in \mathcal{S}^+_{\mathtt{k},m}$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\int_\Omega H^p(\nabla v) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}|v|^p - \lambda\int_\Omega m|v|^p}{\int_\Omega |v|^p}\frac{\int_\Omega |v|^p}{\int_\Omega m|v|^p} &= \frac{\int_\Omega H^p(\nabla v) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}|v|^p - \lambda\int_\Omega m|v|^p}{\int_\Omega m|v|^p} \\ &= \frac{\int_\Omega H^p(\nabla v) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}|v|^p}{\int_\Omega m|v|^p} - \lambda. \end{aligned}$$

固定 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\varepsilon < \min\left\{\left(-\frac{\mu^+(\lambda,m)}{\lambda}\right)^{\frac{1}{q}}, \|m^+\|_\infty\right\},$$

令 Φ 为与 $\mu^+(\lambda,m)$ 相对应且满足 $\|\Phi\|_\infty = 1$ 的正特征函数。显然，$u := \varepsilon\Phi > 0$ 是一个下解；此外，任意常函数 $u \equiv c \geqslant (\|m^+\|_\infty)^{\frac{1}{q}}$ 都是一个上解，并且根据 ε 的选取，有 $\overline{u} < u$。于是，由命题 2.3 可知，存在一个解 $\underline{u}$，使得 $0 < u \leqslant u \leqslant \underline{u}$。因此，$0 < u \leqslant \|m^+\|_\infty^{\frac{q}{}}$

第二步：证明不存在低于 $\lambda^+(m)$ 的非平凡非负解。假设 $0 < \lambda \leqslant \lambda^+(m)$，并采用反证法，设 u 是方程（2.3）的非负、非平凡有界解。于是，用 u 作为测试函数代入（2.3），立即得到 $\int_\Omega mu^p > 0$。因此，根据定义 2.1 可得

$$\lambda^+(m)\int_\Omega mu^p \leqslant \int_\Omega H(\nabla u)^p + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega} u^p = \lambda\int_\Omega mu^p - \lambda\int_\Omega u^{p+q} < \lambda^+(m)\int_\Omega mu^p,$$

这与反证法矛盾。

第三步：唯一性与正则性。经典椭圆正则性理论（例如参见 [45]）以及 [46] 中证明的哈纳克不等式（另见 [18]）保证 $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ 且为正。唯一性可通过反证法得到。假设 u、v 是方程（2.3）关于 $\lambda > \lambda^+(m) > 0$ 的两个正解。令 $\varepsilon > 0$，并在关于 v 的方程中取 $\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}}$ 作为测试函数。应用适当的 Picone 恒等式（[28, 引理 2.2]），可得

$$\begin{aligned}&\mathtt{k}\int_{\partial\Omega} u^p\left(1-\frac{v^{p-1}}{(v+\varepsilon)^{p-1}}\right) - \lambda\int_\Omega mu^p\left(1-\frac{v^{p-1}}{(v+\varepsilon)^{p-1}}\right) + \lambda\int_\Omega u^p\left(u^q - \frac{v^{p+q-1}}{(v+\varepsilon)^{p-1}}\right)\\ &\quad= \int_\Omega H(\nabla v)^{p-1}H_\xi(\nabla v)\nabla\left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}}\right) - \int_\Omega H^p(\nabla u) \leqslant 0.\end{aligned}$$

在由 u 满足的方程中取 $\frac{v^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}}$ 作为测试函数，写出相应的不等式，将两式相加并令 $\varepsilon \to 0$，即可得到

$$\begin{aligned}0 &\geq \lambda\int_\Omega (u^p - v^p)(u^q - v^q)\\ &= \lambda\left(\int_{\Omega\cap\{u\geq v\}} (u^p - v^p)(u^q - v^q) + \int_{\Omega\cap\{u\leqslant v\}} (u^p - v^p)(u^q - v^q)\right) \geq 0,\end{aligned}$$

矛盾。 □

3. 主特征值 $\lambda^\pm(m)$

本节将着重讨论 $\lambda^+(m)$ 的性质（参见定义 2.1）。首先注意到，对 [31] 中命题 2 的简单推广使我们可以将 $\mathtt{k} = +\infty$ 的情形视为施加齐次狄利克雷边界条件的情形。

$\lambda^+(m)$ 的存在性（见定义 2.1）将通过约束极小化来证明，如下一个命题所示。

命题 3.1. 假设 (1.3)、(1.4)、(1.5)。设 $m \in \mathcal{M}$。则有以下结论：

(1) $\lambda^+(m)$ 可由唯一的正 $\varphi \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ 乘以一个正常数得到。(2) $\lambda^+(m)$ 满足下界，

$$\lambda^+(m) \geq \frac{\underline{\alpha}c}{\max\{1,\beta\}}$$

其中 $c = c(\Omega) > 0$ 是一个正常数，β 见 (1.2)，而 $\underline{\alpha}$ 见 (2.1)。

(3) $\lambda^+(m)$ 是具有正特征函数的唯一正主特征值。

注 3.2. 我们注意到，在 $H(\xi)=|\xi|$、$k>0$ 的情况下，若不假设条件 $\int_\Omega m(x)|u|^p>0$，则存在两个主特征值 $\lambda_-<0<\lambda_+$，分别具有相应的正特征函数 φ_-、φ_+，使得 $\int_\Omega m(x)|\varphi_\pm|^p \gtrless 0$。而对于 $k=0$，$\lambda_-=0$ 是一个与常数特征函数相对应的主特征值，且当且仅当 $\int m(x)<0$ 时，$\lambda_+>0$。在这种情况下，$\int_\Omega m(x)|\varphi_+|^p>0$。这里，我们关注正主特征值，因此施加条件 $\int_\Omega m(x)|u|^p>0$。

注 3.3. 注意，如果 Ω 是一个$C^{1,\alpha}$ 域，那么根据定理 2]，特征函数 $\varphi\in C^{1,\alpha}(\Omega)$ 满足 [33,。

命题 *3.1* 的证明。我们先考虑 $k<+\infty$ 的情形。$\mathcal{R}_{k,m}(u)$ 在对 u 进行正常数倍缩放后保持不变，因此我们可以通过求解约束极小化问题来计算 $\lambda^+(m)$，即

$$\lambda_k^+(m)=\inf\left\{\int_\Omega H^p(\nabla v)+k\int_{\partial\Omega}|v|^p : v\in W^{1,p}(\Omega),\, v\geq 0,\, \int_\Omega m(x)\,|v|^p=1\right\}, \tag{3.1}$$

并注意到 $\lambda^+(m)=\lambda_k^+(m)$。注意，进行极小化的集合非空：事实上，只需取 $\psi\in C_c^\infty(\Omega)$，$\psi\geq 0$，在 $L^p(\Omega)$ 中对集合 Ω^+_m 的示性函数进行逼近，然后将其归一化，即可得到满足约束条件的函数。

因此，$\lambda^+(m)$ 是有限的，变分法的直接方法容易推出极小化元的存在。为此，取一个极小化序列 $\{u_n\}$，其能量由正常数 C 控制，从而 u_n 满足

$$\int_\Omega (H(\nabla u_n))^p+k\int_{\partial\Omega}|u_n|^p\leqslant C.$$

首先注意到，存在常数$c>0$，使得对于任意$m\in\mathcal{M}$ 和任意$u\in W^{1,p}$，满足 $\int_\Omega m(x)|v|^p>0$ 时，下述Poincaré型不等式成立

$$\int_\Omega |u|^p\leqslant c\left(\int_\Omega (H(\nabla u))^p+k\int_{\partial\Omega}|u|^p\right). \tag{3.2}$$

事实上，当 $k=0$ 时，方程 (3.2) 化为 [19, 引理 3.1]；而当 $k>0$ 时，利用反证法即可轻易证明。由 (3.2) 可推得序列 $\{u_n\}$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中有界。因此，存在 $u\in W^{1,p}(\Omega)$，$u\geq 0$，使得在取子列后，$u_n\rightharpoonup u$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中收敛，且 $u_n\to u$ 在 $L^p(\Omega)$ 中强收敛，因此 u 满足约束。最后，考虑到 H 连续且凸，并且嵌入 $W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^p(\partial\Omega)$ 是紧的，可得 $\lambda_k^+(m)$ 在 u 处取到，因为

$$\lambda_k^+(m)\leqslant\int_\Omega (H(\nabla u))^p+k\int_{\partial\Omega}|u|^p\leqslant\liminf_{n\to\infty}\left(\int_\Omega (H(\nabla u_n))^p+k\int_{\partial\Omega}|u_n|^p\right)=\lambda_k^+(m).$$

由于u 是问题 (3.1) 的一个极小化元，因此它是相应欧拉-拉格朗日方程 (1.1) 的弱解。因此，我们可以应用经典椭圆正则性理论（例如参见[45]）以及 [46] 中证明的哈纳克不等式（另见 [18]），从而确保$u\in C^{1,\alpha}(\Omega)$ 且为正。

狄利克雷情形（对应于 $k=+\infty$）可用类似的方法处理，只需注意：

$$\lambda_\infty^+(m)=\inf\left\{\int_\Omega (H(\nabla v))^p : v\in W_0^{1,p}(\Omega),\, v\geqslant 0,\, \int_\Omega m(x)\,|v|^p=1\right\}. \tag{3.3}$$

与前文相同，利用经典庞加莱不等式即可推出极小点的存在性。

现在证明极小化元的唯一性，按照 [3] 中的方法，通过反证法并利用凸性论证。取两个正的极小化元 u 和U。对于 $t \in (0,1)$，令 $\eta = tu^p + (1-t)U^p$，以及$u_t = \eta^{1/p}$。那么，由 (1.4)、(1.5) 以及$t \mapsto t^p$ 的凸性可得：

$$\begin{aligned} H^p(\nabla u_t) &= \eta H^p\left(\frac{tu^p}{\eta}\frac{\nabla u}{u} + \frac{(1-t)U^p}{\eta}\frac{\nabla U}{U}\right) \\ &\leqslant \eta\left[\frac{tu^p}{\eta}H\left(\frac{\nabla u}{u}\right) + (1-t)\frac{U^p}{\eta}H\left(\frac{\nabla U}{U}\right)\right]^p \qquad (3.4) \\ &\leqslant \eta\left[\frac{tu^p}{\eta}H^p\left(\frac{\nabla u}{u}\right) + (1-t)\frac{U^p}{\eta}H^p\left(\frac{\nabla U}{U}\right)\right] \qquad (3.5) \\ &= tH^p(\nabla u) + (1-t)H^p(\nabla U). \end{aligned}$$

此外

$$\int_{\partial\Omega} u_t^p = t\int_{\partial\Omega} u^p + (1-t)\int_{\partial\Omega} U^p, \qquad \int_\Omega m(x)u_t^p = 1.$$

上述表达式还表明，u_t 也是一个极小化元，这意味着 (3.4) 和 (3.5) 实际上是等式。于是，由于 $p > 1$，H^p 严格凸，因此可得 $\nabla u/u = \nabla U/U$。这立即推出，u/U 几乎处处为常数；结合 (3.1) 中的约束条件，可得 $u = U$。至此，第一个结论的证明完成。

为了得到结论 (2)，可以再次使用 Poincaré型不等式 (3.2) 或经典的 Poincaré 不等式，并结合 (2.1)、(1.2)，得到

$$1 = \int_\Omega m(x)|u|^p \leqslant \|m\|_\infty \|u\|_p^p \leqslant \frac{\|m\|_\infty}{\underline{\alpha}c}\lambda^+(m) \leqslant \frac{\max\{1,\beta\}}{\underline{\alpha}c}\lambda^+(m).$$

要完成证明，还需说明：若存在一个特征值 $\lambda > 0$，其对应的特征函数非负，则 $\lambda = \lambda^+(m)$。假设 $v \geqslant 0$ 是特征值为 $\lambda \neq \lambda^+(m)$、 $\lambda > 0$的特征函数，我们先考虑 $\mathtt{k} < +\infty$ 的情形。取 $u = t\bar{u}$，其中 $t > 0$，且 $\bar{u}$ 是对应于 $\lambda^+(m)$ 的正特征函数，并按 $\int_\Omega m\bar{u}^p = 1$ 进行归一化。注意，根据 (1.4)，u 仍是 (1.1) 的特征函数，其特征值为 $\lambda^+(m)$。

在$u^p(v+\varepsilon)^{1-p}$ 作为v所满足方程的测试函数时，可得

$$\begin{aligned} \int_\Omega H(\nabla v)^{p-1}H_\xi(\nabla v)\nabla\left(\frac{u^p}{(v+\varepsilon)^{p-1}}\right) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}\frac{u^p v^{p-1}}{(v+\varepsilon)^{p-1}} &= \lambda\int m\frac{u^p v^{p-1}}{(v+\varepsilon)^{p-1}} \\ &= \lambda\int m\frac{u^p v^{p-1}}{(v+\varepsilon)^{p-1}} - \lambda^+(m)\int_\Omega mu^p \\ &\quad + \int_\Omega H^p(\nabla u) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega} u^p. \end{aligned}$$

在满足u 的方程中选取$v^p(u+\varepsilon)^{1-p}$ 作为测试函数，可得

$$\begin{aligned} \int_\Omega H(\nabla u)^{p-1}H_\xi(\nabla u)\nabla\left(\frac{v^p}{(u+\varepsilon)^{p-1}}\right) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}\frac{v^p u^{p-1}}{(u+\varepsilon)^{p-1}} &= \lambda^+(m)\int_\Omega m\frac{v^p u^{p-1}}{(u+\varepsilon)^{p-1}} \\ &\quad - \lambda\int_\Omega mv^p + \int_\Omega H^p(\nabla v) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega} v^p. \end{aligned}$$

将这两个恒等式相加并利用 Picone恒等式 [28], , 我们推得

$$\begin{aligned}\mathtt{k}\int_{\partial\Omega}\frac{u^p v^{p-1}}{(v+\varepsilon)^{p-1}}+\mathtt{k}\int_{\partial\Omega}\frac{v^p u^{p-1}}{(u+\varepsilon)^{p-1}} \geqslant & \lambda\int m\frac{u^p v^{p-1}}{(v+\varepsilon)^{p-1}}-\lambda^+(m)\int_\Omega m u^p\\ & \lambda^+(m)\int_\Omega m\frac{v^p u^{p-1}}{(u+\varepsilon)^{p-1}}-\lambda\int_\Omega m v^p\\ & +\mathtt{k}\int_{\partial\Omega}u^p+\mathtt{k}\int_{\partial\Omega}v^p.\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to 0$，可得

$$(\lambda-\lambda^+(m))\int_\Omega m(u^p-v^p)\leqslant 0.$$

由于 $\lambda>\lambda^+$（m） 当 $v\in\mathcal{S}^+_{\mathtt{k},m}$ 时，我们得出

$$t^p=\int_\Omega m u^p\leqslant\int_\Omega m v^p.$$

由于 $t>0$ 是任意的，我们得到反证，因此 $\lambda=\lambda^+$（m）。 □

注3.4。 假设 H 为偶函数，则有

$$\lambda^+(m)=\lambda(m)=\min\left\{\int_\Omega|H(\nabla u)|^p+\mathtt{k}\int_{\partial\Omega}|u|^p,\ u\in W^{1,p}(\Omega)\ :\ \int_\Omega m(x)|u|^p=1\right\}.$$

事实上，仿照命题 3.1 的论证，可以证明 λ（m）可由函数 u 取得。为证明 u 符号恒定，可以采用反证法，例如参见 [16, 定理 1.13]。假设 u 变号，因此 $u=u^+-u^-$，且 $u^\pm\not\equiv 0$ 和 $u^\pm\geq 0$ 均成立。于是，

$$\begin{aligned}\lambda(m)&=\frac{\int_\Omega H^p(\nabla u^+)+\mathtt{k}\int_{\partial\Omega}(u^+)^p+\int_\Omega H^p(-\nabla u^-)+\mathtt{k}\int_{\partial\Omega}(u^-)^p}{\int_\Omega m(u^+)^p+\int_\Omega m(u^-)^p}\\ &\geq\min\left\{\frac{\int_\Omega H^p(\nabla u^+)+\mathtt{k}\int_{\partial\Omega}(u^+)^p}{\int_\Omega m(u^+)^p},\frac{\int_\Omega H^p(-\nabla u^-)+\mathtt{k}\int_{\partial\Omega}(u^-)^p}{\int_\Omega m(u^-)^p}\right\}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

现在，若右侧的两个商相等，则 $\mathtt{u}^+$ 和 $-\mathtt{u}^-$ 都是特征函数，强最大值原理推出，在 Ω 上 $\mathtt{u}^+>0$ 且 $\mathtt{u}^->0$ 几乎处处成立，这不可能。否则，上述商不相等，此时 $\mathtt{u}=\mathtt{u}^+$ 或 $\mathtt{u}=-\mathtt{u}^-$。最后，由于 H 是偶函数，$\mathtt{H}(\nabla\mathtt{u}^-)=\mathtt{H}(-\nabla\mathtt{u}^-)$，因此我们总可以假设 $\mathtt{u}>0$，从而得到 $\lambda^+(\mathtt{m})=\lambda(\mathtt{m})$。

另一方面，由于我们仅假设了 (1.4)，因此无法事后选择 φ 的符号。这就是我们要在 $\mathcal{S}^+_{\mathtt{k},m}$ 上取最小值的原因。

在本文余下部分中，我们用 φ 表示与主特征值 $\lambda^+(m)$ 对应的正特征函数，并将其归一化为 $L^p(\Omega)$ 的单位球面上的元素。

定理*1.1*的证明。 首先注意到，通过极小化论证可以达到 (1.8) 中定义的 Λ^+；该论证考虑了 (1.2)、(1.5)，并利用了 [19, 中引理3.1]的庞加莱不等式。

此外，还可以利用所谓的浴缸原理（例如参见 [32, 定理 1.14]或 [19, 引理 3.3]），从而得出最优权函数为邦邦型，即

$$m=\mathbb{1}_D-\beta\mathbb{1}_{D^c},$$

其中 $\mathbb{1}_D:\ \Omega\mapsto\{0,1\}$ 是集合 $D\subset\Omega$ 的示性函数，使得

$$\{\varphi>t\}\subseteq D\subseteq\{\varphi\geqslant t\}\tag{3.7}$$

对于某个 $t > 0$，并且

$$|D| = \frac{(\beta - m_0)|\Omega|}{1+\beta}. \tag{3.8}$$

关于最后一个结论，我们可以在 [1] 中应用推论 1.7，得到 $D = \{\varphi > t\}$ 几乎处处成立。□

注 3.5。 [1]中的推论 1.7 仅在维数为 $N \geq 2$ 且 H 为偶函数时得到证明。尽管其证明可以推广到一维情形，并且不需要假设 H 具有对称性，我们仍将在维数为 1 的情形下给出另一种证明，说明 φ 满足单调性（见定理 4.1）。

注 3.6。 作为定理1.1的推论，我们得到 Λ^+ 也可以等价地表示为

$$\Lambda^+ := \min\left\{\lambda^+(E),\, E \subset \Omega, E \text{ is measurable and } 0 < |E| \leqslant \frac{(\beta - m_0)|\Omega|}{1+\beta}\right\} \tag{3.9}$$

其中，略微滥用记号，我们记 $\lambda^+(E) = \lambda^+(\mathbb{1}_E - \beta\mathbb{1}_{E^c})$，并且

$$\Lambda^+ = \lambda^+(D) = \lambda^+(\mathbb{1}_D - \beta\mathbb{1}_{D^c}), \quad D = \{\varphi > t\} \tag{3.10}$$

其中，D 满足 (3.8)，且 φ 是与 $\lambda^+(D)$相关联的特征函数。我们将任何满足 (3.9) 的集合 D 称为最优集合。

类比于全非线性算子（如研究主半特征值的普奇算子；参见例如 [7, 42]）的相关理论，我们可以如下定义另一个主特征值 $\lambda^-(m)$

定义 3.7。我们设

$$\lambda^-(m) = \inf_{u \in \mathcal{S}^-_{\mathrm{k},m}} \mathcal{R}_{\mathrm{k},m}(u) \tag{3.11}$$

其中

$$\mathcal{S}^-_{\mathrm{k},m} := \left\{u \in W^{1,p}(\Omega),\ u \leqslant 0,\ \int_\Omega m(x)|u|^p > 0\right\},$$

对于 $\mathrm{k} < +\infty$ 以及

$$\mathcal{S}^-_{\infty,m} := \left\{u \in W^{1,p}_0(\Omega),\ u \leqslant 0,\ \int_\Omega m(x)|u|^p > 0\right\}.$$

在 $\mathrm{k} = +\infty$的情况下。

命题 3.1 和定理1.1 的对应结论包含在以下结果中 .

命题 3.8。 对任意固定的 $m \in \mathcal{M}$, $\lambda^-(m)$ 均由一个负特征函数取得。此外，命题 *3.1* 的其他所有结论经过显而易见的修改后仍然成立。

此外，最小化问题

$$\Lambda^- := \inf_{m \in \mathcal{M}} \lambda^-(m)$$

存在一个邦邦型解 $m_- = \mathbb{1}_{D_-} - \beta\mathbb{1}_{D_-^c}$。如果 φ_- 是一个相关负特征函数，则存在 $t > 0$使得 $D_- = \{\varphi_- < -t\}$。

证明。 作为初步观察，注意到 $u < 0$ 是 (3.11) 的一个极小化元，当且仅 if

$$\widetilde{u}(x) = -u(x) > 0$$

求解

$$\inf\left\{\int_\Omega (\widetilde{H}(\nabla v))^p + \mathrm{k}\int_{\partial\Omega}|v|^p : v \in W^{1,p}(\Omega),\, v \geq 0,\, \int_\Omega m(x)\,|v|^p = 1\right\}$$

~ ~其中 $H(\xi) = H(-\xi)$。由于 H 满足 (1.3)、(1.4)、(1.5)，我们可以将命题 3.1 和定理1.1应用于 H，从而得到结论。□

若 H 是偶函数，则 $\lambda^+(m) = \lambda^-(m)$，且相应的特征函数 $\varphi_+ > 0, \varphi_- < 0$满足 $\varphi_+ = -\varphi_-$，因此总可以选取一个生成整个特征空间的正特征函数。特别地，这在例如 p-拉普拉斯算子的情形下成立，而 $\lambda^+(m) = \lambda^-(m)$ 与主特征值的通常概念一致。在我们的假设下，H 通常不是偶函数。例如，在一维情形下，$H = H$ 当且仅当 $a = b$，见（1.10）。

4. 主要结果的证明

本节将给出定理1.2和定理1.3的证明。首先，我们研究一维情形下最优集合的位置。令H取自（1.10），并考虑以下问题

$$\begin{cases} -\left((H(u'))^{p-1}H'(u')\right)' = \lambda m(x)|u|^{p-2}u & \text{in } (0,1) \\ H^{p-1}(u'(1))H'(u'(1)) + \mathtt{k}|u(1)|^{p-2}u(1) = 0 \\ -H^{p-1}(u'(0))H'(u'(0)) + \mathtt{k}|u(0)|^{p-2}u(0) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

下文中，我们用 $m = \mathbb{1}_D - \beta\mathbb{1}_{D^c}$ 表示 (1.8) 的极小化元，用 φ 表示与 $\lambda^+(m)$相对应的正特征函数，并按 L^p-范数将其归一化。回顾一下，D是 (3.9) 的极小化元，因此我们称其为最优的。

定理 4.1。 以下结论成立。

(1) 若 $k \in (0, +\infty]$，则 φ 在 $\alpha \in (0, 1)$ 中取得最大值，且 φ 在 $(0, \alpha)$ 上严格递增，在 $(\alpha,1)$ 上严格递减。*(2)* 若 $k = 0$，则 φ 单调。*(3)* 最优集合 $D = \{x \in (0,1) : \varphi(x) > t\}$ 是一个区间。*(4)* 集合 $\{x \in (0,1) : \varphi'(x) = 0\}$ 是有限集。

证明。 我们将沿用 [31, 命题 4] 的论证，并首先证明结论 (1)。注意，由椭圆正则性，$\varphi' \in C([0,1])$，因此，如果 $\mathtt{k} > 0$ 边界条件和 (1.10) 立即推出 φ 在(0,1)内取得最大值。记 φ的第一个最大值点为 α，利用单调重排（见第 5 节）可定义

$$\varphi^R = \begin{cases} \varphi^* & x \in (0,\alpha) \\ \varphi_* & x \in (\alpha,1) \end{cases}, \qquad m^R = \begin{cases} m^* & x \in (0,\alpha) \\ m_* & x \in (\alpha,1) \end{cases}$$

其中，根据注 5.3，φ^*，(φ_*) 表示函数 φ 在区间 $(0,\alpha)$ $((\alpha,1))$ 上的单调递增（递减）重排，对 m 也作类似定义。由于 α 是一个最大值点，$\varphi^R \in H^1(0,1)$。

哈代–利特尔伍德不等式（见 [29]）推出

$$\int_0^\alpha m\varphi^p = \int_0^\alpha (m+\beta)\varphi^p - \beta\int_0^\alpha \varphi^p \leqslant \int_0^\alpha (m+\beta)^*(\varphi^*)^p - \beta\int_0^\alpha (\varphi^*)^p = \int_0^\alpha m^*(\varphi^*)^p$$

并且对于 φ_* 和 m_*，也有类似的不等式。此外，

$$(\varphi^*)^p(0) = \min_{[0,\alpha]} \varphi^p \leqslant \varphi^p(0), \quad (\varphi_*)^p(1) = \min_{[\alpha,1]} \varphi^p \leqslant \varphi^p(1).$$

注意，m^R 和 φ^R 是 Λ^+ 的可行竞争者，由命题 5.1 可得

$$\Lambda^+ \leqslant \mathcal{R}_{\mathtt{k},m^R}(\varphi^R) = \frac{\int_0^\alpha H^p((\varphi^*)') + \int_\alpha^1 H^p((\varphi_*)') + \mathtt{k}(\varphi^*)^p(0) + \mathtt{k}(\varphi_*)^p(1)}{\int_0^\alpha m^*(x)(\varphi^*)^p + \int_\alpha^1 m_*(x)(\varphi_*)^p}$$
$$\leqslant \frac{\int_0^1 H(\varphi')^p + \mathtt{k}\varphi^p(0) + \mathtt{k}\varphi^p(1)}{\int_0^1 m(x)\varphi^p} = \Lambda^+,$$

这意味着

$$\frac{\int_0^\alpha H^p((\varphi^*)') + \int_\alpha^1 H((\varphi_*)')^p + \mathtt{k}(\varphi^*)^p(0) + \mathtt{k}(\varphi_*)^p(1)}{\int_0^\alpha m^*(x)(\varphi^*)^p + \int_\alpha^1 m_*(x)(\varphi_*)^p} = \frac{\int_0^1 H^p(\varphi') + \mathtt{k}\varphi^p(0) + \mathtt{k}\varphi^p(1)}{\int_0^1 m(x)\varphi^p}.$$

因此，

$$\int_0^\alpha H^p(\varphi') = \int_0^\alpha H^p((\varphi^*)'), \qquad \text{and} \qquad \int_\alpha^1 H^p(\varphi') = \int_\alpha^1 H^p((\varphi_*)').$$

于是，命题 5.2 表明 $\varphi = \varphi^R$，从而 φ 先增至其最大值，再递减。

现在证明结论 (2). 考虑递减重排 φ_* 和 m_*。然后，像之前一样推理，

$$\Lambda^+ = \frac{\int_0^1 H(\varphi')^p}{\int_0^1 m(x)\varphi^p} \geq \frac{\int_0^1 H((\varphi_*)')^p}{\int_0^1 m_*(x)\varphi_*^p} \geqslant \Lambda^+.$$

因此，等号成立，应用命题 5.2 可得 φ 是单调的 .

结论(3) 直接由前述结果得出。

现在证明结论(4)。注意，对于任意$x < y \in D$，在(x,y)上对方程 (4.1) 积分，可得

$$(H^p)'(\varphi'(x)) - (H^p)'(\varphi'(y)) = \Lambda^+ \int_x^y \varphi^{p-1} > 0.$$

考虑到函数H^p 是严格凸的，对于任意$x < y \in D$，有 $\varphi'(x) > \varphi'(y)$，即 φ' 在D上严格递减。类似地，可以证明 φ' 在D^c的每个连通分支上严格递增。这说明 φ 只有有限个临界点，因为D 是一个区间。因此，我们还可以立即得出， φ 在区间$(0,\alpha)$和$(\alpha,1)$上的单调性是严格的。□

现在我们可以证明定理 1.2。

定理 *1.2* 的证明。D 是一个区间这一事实已在定理 4.1 中证明。

我们先讨论诺伊曼情形，即 $\mathtt{k} = 0$。由定理1.1和定理 4.1可知，最优特征函数 φ 严格单调递增或递减。又由于最优区间 D 是最优权函数 m的正值集，因此有以下两种情况

$$m_{(0,c)} := \mathbb{1}_{(0,c)} - \beta\mathbb{1}_{(c,1)} \quad \text{or} \quad m_{(1-c,1)} := \mathbb{1}_{(1-c,1)} - \beta\mathbb{1}_{(0,1-c)},$$

其中 $c := |D|$。我们记作 $\lambda^+(E) = \lambda^+(\mathbb{1}_E - \beta\mathbb{1}_{E^c})$（见注 3.6）。

我们先处理$a > b$ 的情形，并用反证法假设$m_{(1-c,1)} := \mathbb{1}_{(1-c,1)} - \beta\mathbb{1}_{(0,1-c)}$ 是最优权函数。注意，定理 4.1 表明最优特征函数φ 是单调的，而反证假设直接推出 φ 必须是递增的。定义 $\psi(x) = \varphi(1-x)$，并结合 (1.10)，可得

$$\int_0^1 H^p(\psi') = \int_0^1 H^p(-\varphi'(1-x)) = b^p \int_0^1 (\varphi'(1-x))^p = b^p \int_0^1 (\varphi')^p = \frac{b^p}{a^p} \int_0^1 H^p(\varphi').$$

Also

$$\int_0^1 m_{(0,c)}\psi^p = \int_0^1 m_{(1-c,1)}\varphi^p.$$

因此

$$\lambda^+((0,c)) \leqslant \mathcal{R}_{0,m_{(0,c)}}(\psi) = \frac{b^p}{a^p}\lambda^+((1-c,1)) = \frac{b^p}{a^p}\Lambda^+ < \Lambda^+$$

这与 Λ^+ 的极小性相矛盾。情形 $a < b$ 可用类似方法证明。

现在考虑狄利克雷情形 $\mathtt{k} = \infty$。应用命题 5.5 和 [47,命题2.28] ，可得

$$\Lambda^+ \leqslant \frac{\int_I \tau_l\,(H((\varphi^\star)')^p)}{\int_I \tau_l(m^\star|\varphi^\star|^p)} \leqslant \frac{\int_{I^\star} H((\varphi^\star)')^p}{\int_{I^\star} m^\star|\varphi^\star|^p} \leqslant \frac{\int_I H(\varphi')^p}{\int_I m|\varphi|^p} = \Lambda^+,$$

其中， τ_l 表示沿方向 $l = -\frac{a}{a+b}$ 的平移算子， $\varphi^\star$ 表示关于H_0,的 φ 的各向异性重排，见第 5.2 节。利用命题 5.5 中的等号情形，我们得到 $\varphi(x + \frac{a}{a+b}) = \varphi^\star(x)$。于是，

$$\left\{\varphi\left(x+\frac{a}{a+b}\right) > t\right\} = \left(\frac{-a|D|}{a+b}, \frac{b|D|}{a+b}\right),$$

完成证明。 □

注 4.2. 注意，各向异性的存在决定了最优区间 D 的位置。事实上，在诺伊曼情形下，当 $a > b$ 或$b > a$ 时， D 位于 $(0,1)$ 的左侧或右侧；而在狄利克雷情形下，定理 1.2 中给出的最优区间的中心

$$x_0 = \frac{|D|(b-a)+2a}{2(a+b)}.$$

并且当$x_0 < 1/2$ 满足$b > a$时；而当$x_0 > 1/2$ 满足$b < a$时。在这两种情况下，若$a = b$ ，则可得到文献 [9, 34, 19]中的已知结果。

现在证明定理 1.3。

定理 1.3 的证明。 不失一般性，我们可以假设原点是 Ω的对称中心。令 φ_+ 为对应于 $\lambda^+(m_+) = \Lambda^+$ 的正特征函数，于是

$$\lambda^+(m_+) = \frac{\int_\Omega H^p(\nabla\varphi_+) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}\varphi_+^p}{\int_\Omega m_+\varphi_+^p}.$$

现在定义

$$v(x) = -\varphi_+(-x) < 0,$$

因此 $\nabla v(x) = (\nabla\varphi_+)(-x)$。因此，

$$\begin{aligned}\Lambda^+ = \lambda^+(m_+) &= \frac{\int_\Omega H^p(\nabla v)(-x) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}|v|^p(-x)}{\int_\Omega m_+(x)|v|^p(-x)} = \frac{\int_\Omega H^p(\nabla v)(x) + \mathtt{k}\int_{\partial\Omega}|v|^p(x)}{\int_\Omega m_+(-x)|v|^p(x)} \\ &\geq \lambda^-(m_+(-x)) \geq \Lambda^-,\end{aligned}$$

这里用到了$m_+(-x) \in \mathcal{M}$ 以及$v \in \mathcal{S}^-_{\mathtt{k},m}$。

同理，取 φ_- 特征函数，使得 $\lambda^-(m_-) = \Lambda^-$。于是

$$\Lambda^- = \lambda^-(m_-) \geq \lambda^+(m_-(-x)) \geq \Lambda^+,$$

由此我们立即推出 $\Lambda^+ = \Lambda^-$。 □

注 4.3. 定理 1.3 的论证实际上表明，若 $\Omega = -\Omega$ 且 $m(x) = m(-x)$，则 $\lambda^+(m) = \lambda^-(m)$，对应的特征函数为 $\varphi_+(x) = -\varphi_-(-x)$。事实上，设 m 满足 $m(x) = m(-x)$。若令 $v(x) := -\varphi_+(-x)$，则得到

$$\lambda^+(m) = \frac{\int_\Omega H^p(\nabla\varphi_+) + k\int_{\partial\Omega}\varphi_+^p}{\int_\Omega m(x)\varphi_+^p} = \frac{\int_\Omega H^p(\nabla v) + k\int_{\partial\Omega}|v|^p}{\int_\Omega m(x)|v|^p} \geq \lambda^-(m).$$

同样，我们证明反向不等式。因此 $\lambda^+(m) = \lambda^-(m)$，且 $-\varphi_+(-x)$ 是 $\lambda^-(m)$的极小化元，由此我们根据正特征函数的唯一性（见命题 3.1）推得 $\varphi_+(x) = -\varphi_-(-x)$ 。

由上述证明还可推知，若 u,m 是 $\Lambda^+ = \Lambda^-$ 的极小化元，则 $-u(-x),m(-x)$ 仍是极小化元。

现在考虑 $N = 1$ 且 $\Omega = [0,1]$ 的情形。注意，此时上文中的反射变为 $x \mapsto 1-x$。因此，目前为止证明的内容可以表述如下：若 u,m 是 $\Lambda^+ = \Lambda^-$ 的极小化元，则 $-u(1-x),m(1-x)$ 仍是极小化元。根据定理 1.2，我们实际上可以进一步指出，这些是 $\Lambda^+ = \Lambda^-$ 的唯一极小化元，至少在采用狄利克雷或诺伊曼边界条件时。

命题 4.4。设 $N = 1$，并考虑 $k = +\infty$（狄利克雷情形），或 $k = 0$（诺伊曼情形），其中 $\neq b$。记 m_+ 为权函数，使得 $\Lambda^+ = \lambda^+(m_+)$，且 $\varphi_+ > 0$ 为相应的特征函数；类似地，记 m_- 为权函数，使得 $\Lambda^- = \lambda^-(m_-)$，其特征函数为 $\varphi_- < 0$。那么

$$m_+(x) = m_-(1-x)$$

and

$$\varphi_+(x) = -\varphi_-(1-x).$$

~ ~我们先说明，记 $H(x) := H(-x)$，则 H 的极函数（例如参见 [2]）为

$$\widetilde{H}_0(x) := \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\langle t,x\rangle}{\widetilde{H}(x)} = H_0(-x) = \begin{cases} \frac{x}{b} & \text{if } x \geq 0 \\ -\frac{x}{a} & \text{if } x < 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

证明。狄利克雷情形。设 φ_+ 为对应于 $\lambda^+(m_+) = \Lambda^+$ 的正特征函数，使得相应的最优集合 D_+ 满足 (1.11)。

现在考虑 φ_- 对应于 $\lambda^-(m_-) = \Lambda^-$ 的负特征函数（见命题 3.8）。由推论 5.8，按照定理 1.2 中的推理，我们得到$m_- = \mathbb{1}_{D_-} - \beta\mathbb{1}_{D_-^c}$，其中 D_- 定义为

$$D_- = \left(\frac{(1-c)b}{a+b}, \frac{ca+b}{a+b}\right), \quad \text{with } c := |D_-| \text{ given by (3.8)},$$

由此，结合 (1.11)，可得

$$m_+(x) = m_-(1-x).$$

现在注意到

$$-\Delta_{H,p}\varphi_+ = \Lambda^+ m_+ \varphi_+^{p-1},$$

and

$$-\Delta_{H,p}v = \Lambda^+ m_+ v^{p-1}, \quad \text{where } v(x) := -\varphi_-(1-x).$$

因此，利用命题 3.1 的结论 (1)，可得

$$\varphi_+(x) = -\varphi_-(1-x).$$

诺伊曼情形。考虑情形 $a > b$。根据定理 1.2，我们知道 φ_+ 是递减的，且 $m_+ = \mathbb{1}_{D_+} - \beta\mathbb{1}_{D_+^c}$，其中 D_+ 属于 $(0, |D_+|)$。完全沿用相同的论证，可以

证明 φ_- 也是递减的，且 $m_- = \mathbb{1}_{D_-} - \beta \mathbb{1}_{D_-^c}$，其中 $D_- = (1-|D_-|,\ 1)$。这立即推出 $m_+(x) = m_-(1-x)$。如上所述，我们得到 $\varphi_+(x) = -\varphi_-(1-x)$。如果 $a < b$，则可以类似地论证。□

5. 各向异性重排不等式

在 $\mathbb{R}$ 中。

本节中，我们证明了所有用于获得一维情形下最优集合 D 定性性质的重排不等式。下一小节讨论单调重排，而第 5.2 小节讨论各向异性对称化。

5.1. 单调重排。 给定一个函数 $u:\ [0,1] \to \mathbb{R}^+$，我们将 u 的单调递减重排定义为函数 $u_*:\ [0,1] \to \mathbb{R}^+$，使得

$$u_*(x) = \begin{cases} \sup u & \text{if } x = 0 \\ \inf\{t:\ \mu_u(t) < x\} & \text{if } x \in (0,1], \end{cases}$$

其中

$$\mu_u(t) := |\{x \in [0,1]:\ u(x) > t\}| \tag{5.1}$$

是u的分布函数。u^* 的单调递增重排类似地定义。

我们的首要目标是证明如下结果中所述的波利亚型不等式。

命题 5.1。 设 H 如(1.10) 所定义，且 $u \in W^{1,p}(0,1)$。则

$$\int_0^1 H^p(u') \geq \int_0^1 H^p((u_*)'). \tag{5.2}$$

证明。 证明过程与 [29, 第二节3] 中的论证十分相似（特别参见引理 2.4、引理 2.6），因此我们仅说明本情形中的不同之处。根据 [29, 注 2.20], , 不妨设$u > 0$为分片仿射函数，且其最大值在原点处取得。

考虑u 在所有不可微点处的取值，以及$u(0)$和$u(1)$，将它们记为 $\{a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k\}$，并令

$$D_i = \{x \in [0,1] : a_i < u(x) < a_{i+1}\}\ ,\quad E_i = \{x \in [0,1] : a_i < u_*(x) < a_{i+1}\}\,.$$

注意，E_i 总是连通的，而D_i 可能不连通。仿照 [29, 引理 2.4], , 对每个$i = 1, \ldots, k$进行论证，可得

$$D_i = \bigcup_{j=1}^{N(i)} Y_{ij}, \tag{5.3}$$

其中u 在每个Y^{ij}中均可微且非恒定。不失一般性，假设对于每个i，Y^{ij} 按照它们到原点的距离排序。此外，由于$H(0) = 0$，只需证明

$$\int_{D_i} H^p(u') \geq \int_{E_i} H^p\left((u_*)'\right), \qquad \text{for } i = 1, \ldots, k. \tag{5.4}$$

由于u 在每个Y^{ij}中都是单射，对于每个 $\lambda \in (a_i, a_{i+1})$，方程$u(x) = \lambda$ 有唯一解，因此我们可以定义可微函数$\rho_j : (a_i, a_{i+1}) \mapsto Y^{ij}$，使得

$$u(x) = \lambda, \quad \text{if and only if} \quad x = \rho_j(\lambda)\ ,\ u'(\rho_j(\lambda)) = \left(\rho_j'(\lambda)\right)^{-1}. \tag{5.5}$$

因此

$$\int_{D_i} H^p(u'(x))dx = \sum_{j=1}^{N(i)} \int_{a_i}^{a_{i+1}} H^p\left[\left(\rho_j'(\lambda)\right)^{-1}\right] \left|\rho_j'(\lambda)\right| \, d\lambda, \tag{5.6}$$

其中，我们注意到 ρ'_j 的符号，从而可以得到从 a_i 到 a_{i+1} 的积分。同时，由于 u_* 是单调的，我们可以定义 $\rho_* : (a_i, a_{i+1}) \mapsto E_i$，使得

$$u_*(x) = \lambda \quad \text{if and only if} \quad x = \rho_*(\lambda) \quad \text{and} \quad (u_*)'(\rho_*(\lambda)) = \left[(\rho_*)'(\lambda)\right]^{-1}. \tag{5.7}$$

因此，再利用 u 在原点处取得最大值这一假设，可得

$$\operatorname{sign} \rho_j'(\lambda) = \operatorname{sign} u'(x) = (-1)^j, \text{ in } Y_{ij}, \quad \text{for } j = 1, \dots, N(i) \text{ and } i = 1, \dots, k,$$

从而

$$\left|\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \rho_j'(\lambda)\right| = \left|\sum_{j=1}^{N(i)} \left(-\left|\rho_j'(\lambda)\right|\right)\right| = \sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'(\lambda)\right|. \tag{5.8}$$

此外，根据 u_* 的定义，可得

$$\rho_*(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \rho_j(\lambda) & \text{if } N(i) \text{ is odd,} \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \rho_j(\lambda) + 1 & \text{if } N(i) \text{ is even.} \end{cases} \tag{5.9}$$

因此，进行变量替换 $x = \rho_*(\lambda)$ 并利用（5.7）

$$\begin{aligned} \int_{E_i} H^p((u_*(x))')dx &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} H^p\left[\left(\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \rho_j'(\lambda)\right)^{-1}\right] \left|\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \rho_j'(\lambda)\right| d\lambda \\ &= \int_{a_i}^{a_{i+1}} H^p\left[\left(\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \rho_j'(\lambda)\right)^{-1}\right] \sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'(\lambda)\right| d\lambda. \end{aligned}$$

接着，回顾（5.6），为得到（5.4），只需证明

$$\sum_{j=1}^{N(i)} \int_{a_i}^{a_{i+1}} H^p\left[\left(\rho_j'(\lambda)\right)^{-1}\right] \left|\rho_j'(\lambda)\right| d\lambda \geq \int_{a_i}^{a_{i+1}} H^p\left[\left(\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \rho_j'(\lambda)\right]^{-1}\right) \sum_{k=1}^{N(i)} \left|\rho_k'(\lambda)\right| d\lambda.$$

进而，只需证明以下逐点不等式成立

$$\sum_{j=1}^{N(i)} \alpha_j H^p\left[\left(\rho_j'(\lambda)\right)^{-1}\right] \geq H^p\left[\left(\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \rho_j'(\lambda)\right)^{-1}\right], \tag{5.10}$$

其中

$$\alpha_j = \left|\rho_j'(\lambda)\right| \left(\sum_{k=1}^{N(i)} \left|\rho_k'(\lambda)\right|\right)^{-1}.$$

为证明 (5.10)，首先注意到，由于$u(0) = \max_{[0,1]} u$，表达式 (1.10) 得出 s

$$\sum_{j=1}^{N(i)} \alpha_j H^p\left[\left(\rho_j'(\lambda)\right)^{-1}\right] = a^p \sum_{j \text{ even}} \alpha_j \left|\rho_j'(\lambda)\right|^{-p} + b^p \sum_{j \text{ odd}} \alpha_j \left|\rho_j'(\lambda)\right|^{-p}$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{N(i)} \left|\rho_k'(\lambda)\right|\right)^{-1} \left[a^p \sum_{j \text{ even}} \left|\rho_j'(\lambda)\right|^{1-p} + b^p \sum_{j \text{ odd}} \left|\rho_j'(\lambda)\right|^{1-p}\right].$$

另一方面，根据 (5.8)，我们有

$$H^p\left[\left(\sum_{j=1}^{N(i)} (-1)^{j+1} \rho_j'(\lambda)\right)^{-1}\right] = H^p\left[-\left(\sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'(\lambda)\right|\right)^{-1}\right] = b^p \left(\sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'(\lambda)\right|\right)^{-p}.$$

于是，若满足以下条件，则
(5.10) 成立

$$a^p \sum_{j \text{ even}} \left|\rho_j'(\lambda)\right|^{1-p} + b^p \sum_{j \text{ odd}} \left|\rho_j'(\lambda)\right|^{1-p} \geq b^p \left(\sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'(\lambda)\right|\right)^{1-p}. \tag{5.11}$$

注意，由于 $p > 1$，对于任意 $j = 1, \ldots, N(i)$ 以及 $i = 1, \ldots, k$，有

$$\left|\rho_j'(\lambda)\right|^{1-p} \geq \left(\sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'(\lambda)\right|\right)^{1-p}.$$

因此，若满足以下条件，则证明了
(5.11)

$$a^p \sum_{j \text{ even}} \left|\rho_j'(\lambda)\right|^{1-p} + b^p \sum_{j \text{ odd}} \left|\rho_j'(\lambda)\right|^{1-p} \geq b^p \left|\rho_1'(\lambda)\right|^{1-p},$$

这显然成立。 □

在下面的命题中，我们分析 (5.2) 中的等号情形。

命题 5.2. 假设 (1.10)成立。若 $u \in W^{1,\,p}(0,1)$ 满足

$$\int_0^1 H^p(u') = \int_0^1 H^p((u_*)'), \tag{5.12}$$

那么 u 是单调的。

注意，若u 是分段仿射函数，则通过检查上述证明即可得到结论。事实上，若我们采用反证法，并假设u 不是单调的，那么存在一个指标i 使得$N(i) \geq 2$。因此，不等式 (5.11) 中的严格不等号成立，因为$p > 1$。回溯至命题 5.1 证明的开头，可以发现不等式 (5.2) 中也会出现严格不等号，这与假设矛盾。因此，等号迫使$N(i) = 1$ 对任意$i = 1, \ldots, k$均成立，也就是说u 是递减的。现在我们考虑$u \in W^{1,p}(0, 1)$的情形，采用与各向同性情形类似的论证（例如参见 [6, 34]）。

命题 *5.2* 的证明。 首先注意到，由于 $u \in W^{1,p}(0, 1)$，u 是连续的。下面采用反证法，假设存在 $t_1 \neq t_2 \in (0, 1)$，使得 $u(t_1) = u(t_2)$，且 t_1, t_2 既不是局部最大值点，也不是局部极小点。于是

$$\min_{(0,k)} u < \max_{(k,1)} u, \quad \text{and} \quad \max_{(0,k)} u > \min_{(k,1)} u \quad \text{for all } k \in (t_1, t_2). \tag{5.13}$$

定义 $u_1:(0,k)\mapsto\mathbb{R}$，满足 $u_1(t)=u(t)$；并定义 $u_2:(0,1-k)\mapsto\mathbb{R}$，满足 $u_2(t)=u(k+t)$。于是我们可以考虑

$$v(t)=\begin{cases}(u_1)_*(t) & t\in(0,k)\\ (u_2)_*(t-k) & t\in(k,1).\end{cases}$$

注意到 $v_*=u_{*}$。因此，由假设 (5.12) 和命题 5.1 可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 H^p(u') &= \int_0^1 H^p((u_*)') = \int_0^1 H^p((v_*)') \leqslant \int_0^1 H^p(v')\\ &= \int_0^k H^p(((u_1)_*)') + \int_0^{1-k} H^p(((u_2)_*)') \leqslant \int_0^k H^p(u_1') + \int_0^{1-k} H^p(u_2')\\ &= \int_0^k H^p(u'(t))dt + \int_0^{1-k} H^p(u'(k+t))dt = \int_0^1 H^p(u').\end{aligned}$$

特别地，

$$\begin{aligned}\int_0^1 H^p((u_*)') - \int_0^k H^p(((u_1)_*)') - \int_0^{1-k} H^p(((u_2)_*)')\\ = \int_0^1 H^p((v_*)') - \int_0^1 H^p(v') = 0.\end{aligned}\tag{5.14}$$

定义 $\sigma=\min v_*, \Sigma=\max v_*$，并类似地为 $(u_i)_*$ 定义 σ_i,Σ_i。于是 (5.13) 给出

$$\sigma_1<\Sigma_2,\quad \sigma_2<\Sigma_1.$$

记 μ 为 v 的分布函数，见 (5.1)，于是 $(v_*)'(t)=1/\mu'(v_*(t))$ and$\mathcal{E}\subset(0,1)$，使得 $(v_*)'\equiv 0$ 在 $\mu(\mathcal{E})$ 上。类似地，为 u_i 定义 μ_i 和 $\mathcal{E}_i$。注意到 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$。由于 v_* 不是递增的，进行变量替换可得

$$\int_0^1 H^p((v_*)') = -\int_{(\sigma,\Sigma)\setminus\mathcal{E}} H^p\left(\frac{1}{\mu'(s)}\right)\mu'(s)\,ds.\tag{5.15}$$

因此，(5.14) 变为

$$\int_{(\sigma_1,\Sigma_1)\setminus\mathcal{E}_1} H^p\left(\frac{1}{\mu_1'(s)}\right)\mu_1'(s) + \int_{(\sigma_2,\Sigma_2)\setminus\mathcal{E}_2} H^p\left(\frac{1}{\mu_2'(s)}\right)\mu_2'(s) - \int_{(\sigma,\Sigma)\setminus\mathcal{E}} H^p\left(\frac{1}{\mu'(s)}\right)\mu'(s) = 0.$$

注意到 $\sigma=\min\{\sigma_1,\sigma_2\}$ 以及 $\Sigma=\max\{\Sigma_1,\Sigma_2\}$。此外，令 $\bar{\sigma}=\max\{\sigma_1,\sigma_2\}$ 且 $\underline{\Sigma}=\min\{\Sigma_1,\Sigma_2\}$，可得 $\sigma\leqslant\bar{\sigma}<\underline{\Sigma}\leqslant\Sigma$。在$(\sigma,\bar{\sigma})$和$(\underline{\Sigma},\Sigma)$上，$\mu_i$之一为常数；例如，若这一情况发生在 μ_1上，则 $\mu'=\mu_2'$；而在区间$(\bar{\sigma},\underline{\Sigma})$内，有 $\mu'=\mu_1'+\mu_2'$。因此，上述等式变为

$$\int_{(\bar{\sigma},\underline{\Sigma})\setminus(\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)}\left[H^p\left(\frac{1}{\mu_1'}\right)\mu_1' + H^p\left(\frac{1}{\mu_2'}\right)\mu_2' - H^p\left(\frac{1}{\mu_1'+\mu_2'}\right)(\mu_1'+\mu_2')\right]=0.\tag{5.16}$$

现在利用H 的正齐次性以及 $\mu'_i<0$ 这一事实，可知被积函数等于

$$H^p(-1)\left(-|\mu_1'|^{1-p}-|\mu_2'|^{1-p}+|\mu_1'+\mu_2'|^{1-p}\right)>0.$$

于是，由 (5.16)，并回想 $\mathcal{E}=\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2$，可得

$$|(\bar{\sigma},\underline{\Sigma})\setminus(\mathcal{E}_1\cup\mathcal{E}_2)| = |(\bar{\sigma},\underline{\Sigma})\setminus\mathcal{E}| = 0.$$

现在，对式 (5.15) 中进行的同一变量替换给出

$$\int_{\{t:\bar{\sigma}<v_*(t)<\underline{\Sigma}\}} H^p((v_*)') = -\int_{(\bar{\sigma},\underline{\Sigma})\setminus\mathcal{E}} H^p\left(\frac{1}{\mu'(s)}\right)\mu'(s) = 0.$$

由于根据反证假设，我们有 $\sigma < \Sigma$，并且，$H(t) = 0$ 当且仅当 $t = 0$，因此我们得出 v_* 为常数，故有 $\sigma = \Sigma$，这与假设矛盾。□

注 5.3。注意，本节的所有结果都可以轻易推广到定义在任意区间 $I \subset \mathbb{R}$ 上的函数 u_*，其中 u 定义在同一区间上。

5.2. **各向异性对称化**。我们再次考虑形如 (1.10) 的 H，并回忆一下，H_0 的极函数 H 定义为

$$H_0(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{tx}{H(t)},$$

我们有

$$H_0(x) = \begin{cases} \frac{x}{a} & \text{if } x \geq 0 \\ -\frac{x}{b} & \text{if } x < 0. \end{cases}$$

设 $I := [0,1]$，且 $u : I \to [0,+\infty)$，定义

$$I^\star = \left\{ x \in \mathbb{R} : H_0(-x) < \frac{1}{a+b} \right\} = \left(-\frac{a}{a+b}, \frac{b}{a+b} \right)$$

并将 $u^\star : I^\star \to [0,+\infty)$ 定义为

$$\begin{aligned} u^\star(x) &= \sup\{t \in \overline{\mathbb{R}} : |\{y : u(y) > t\}| > H_0(-x)(a+b)\} \\ &= \begin{cases} \sup\{t : |\{y : u(y) > t\}| > \frac{a+b}{b} x\} & \text{if } x \geq 0 \\ \\ \sup\{t : |\{y : u(y) > t\}| > -\frac{a+b}{a} x\} & \text{if } x < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

并称 $u^\star$ 为 u 关于 H_0 的各向异性重排。

注记 5.4。对于任意集合 $E \subset \mathbb{R}$，$E^\star$ 是与 E 测度相同且满足 $\omega_1 = -\frac{a}{b}\omega_2$ 的区间 (ω_1, ω_2)；也就是说，它是与 E 测度相同的 $H_0(-\cdot)$ 次水平集。任何满足 $E = E^\star$ 的区间都称为各向异性球。

现在我们引入适用于本文背景的各向异性波利亚不等式。

命题 5.5。设 $u \in W^{1,p}_0(I, [0,+\infty))$，则

$$\int_I H^p(u') \geq \int_{I^\star} H^p((u^\star)'). \tag{5.17}$$

此外，假设 $u \in C^1(I, [0,+\infty))$，且集合 $\{u'(x) = 0\}$ 是有限的。那么，等号 (5.17) 成立当且仅当 $u\left(x + \frac{a}{a+b}\right) = u^\star(x)$。

注记 5.6. 各向异性波利亚不等式及等号情形的研究，最初已在 [2] 中针对任意维数得到了证明（另见 [22]），其假设为 $H(t\xi) = |t|H(\xi)$。遗憾的是，由 (1.10) 给出的函数 H 不具备这一性质。文献 [47] 给出了 (5.17) 的推广，但未研究等号情形。由于我们处理的是一种相当简单的情形，因此给出一种直接的方法，以证明该不等式并刻画适用于我们情形的等号情形。

证明. 我们先证明不等式 (5.17)。假设 u 是分片仿射函数；情形 $W^{1,p}$ 由稠密性可得。我们将改编 [29, 定理 2.9]。

设 $\{a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k\}$ 是 u 在不可微点处的取值，令 $a_0 = 0$，并令

$$D_i = \{x \in [0,1] : a_i < u(x) < a_{i+1}\} \qquad E_i = \{x \in I^\star : a_i < u^\star(x) < a_{i+1}\} = E_i^- \cup E_i^+$$

$$E_i^- = \left\{ x \in \left[-\frac{a}{a+b}, 0 \right] : a_i < u^\star(x) < a_{i+1} \right\}, \quad E_i^+ = \left\{ x \in \left[0, \frac{b}{a+b} \right] : a_i < u^\star(x) < a_{i+1} \right\}.$$

考虑到 $H(0) = 0$，只需证明

$$\int_{D_i} H^p(u') \geq \int_{E_i} H^p\left((u^\star)'\right), \qquad \text{for } i = 0, \dots, k-1. \tag{5.18}$$

回顾分解 (5.3)，我们可以考虑单调且可微的函数$\rho_j : (a_i, a_{i+1}) \mapsto Y_{ij}$，如命题 5.1 的证明中所述，使得 (5.5) 成立。我们注意到，由于 $u(0) = u(1) = 0$,

$$\operatorname{sign} u'(\rho_j) = (-1)^{j+1}.$$

根据定义，$u^\star$ 在$E^-{}_i$ 上严格递增，在$E^+{}_i$ 上严格递减，因此我们可以定义 $\rho^\star_\pm : (a_i, a_{i+1}) \to E^\pm{}_i$，使得 $\rho^\star_-(\lambda)$ 是唯一的负值，满足$u^\star(\rho^\star_-) = \lambda$；而 $\rho^\star_+(\lambda)$ 是唯一的正值，满足$u^\star(\rho^\star_+) = \lambda$。此外，我们有

$$(u^\star)'\left(\rho^\star_-(\lambda)\right) = \left((\rho^\star_-)'(\lambda)\right)^{-1} \text{ in } E_i^-, \quad (u^\star)'\left(\rho^\star_+(\lambda)\right) = \left((\rho^\star_+)'(\lambda)\right)^{-1} \text{ in } E_i^+.$$

因此可得

$$\begin{aligned} \rho^\star_-(\lambda) = \frac{a}{a+b}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j+1}\rho_j(\lambda) \quad &\Longrightarrow \quad (\rho^\star_-)'(\lambda) = \frac{a}{a+b}\sum_{j=1}^{N}\left|\rho_j'(\lambda)\right| \\ \rho^\star_+(\lambda) = \frac{b}{a+b}\sum_{j=1}^{N}(-1)^{j}\rho_j(\lambda) \quad &\Longrightarrow \quad (\rho^\star_+)'(\lambda) = -\frac{b}{a+b}\sum_{j=1}^{N}\left|\rho_j'(\lambda)\right|. \end{aligned} \tag{5.19}$$

然后，由于证明（5.18）等价于证明

$$\sum_{j=1}^{N(i)}\int_{Y_{ij}} H^p(u') \geq \int_{E_i^+} H^p((u^\star)') + \int_{E_i^-} H^p((u^\star)'),$$

我们可以进行变量替换，从而得到以下不等式

$$\sum_{j=1}^{N(i)}\int_{a_i}^{a_{i+1}} H^p\left[\left(\rho_j'\right)^{-1}\right]\left|\rho_j'\right| \geq \int_{a_i}^{a_{i+1}} H^p\left[\left((\rho^\star_-)'\right)^{-1}\right]\left|(\rho^\star_-)'\right| + \int_{a_i}^{a_{i+1}} H^p\left[\left((\rho^\star_+)'\right)^{-1}\right]\left|(\rho^\star_+)'\right|,$$

鉴于（5.19），这等价于

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(i)}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \alpha_j H^p\left[\left(\rho_j'\right)^{-1}\right] \geq &\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{a}{a+b} H^p\left[\left(\frac{a}{a+b}\sum_{j=1}^{N(i)}\left|\rho_j'\right|\right)^{-1}\right] \\ &+ \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{b}{a+b} H^p\left[\left(-\frac{b}{a+b}\sum_{j=1}^{N(i)}\left|\rho_j'\right|\right)^{-1}\right], \end{aligned}$$

其中

$$\alpha_j = \left|\rho_j'\right|\left(\sum_{j=1}^{N(i)}\left|\rho_j'\right|\right)^{-1}, \quad \text{so that } \sum_{j=1}^{N(i)}\alpha_j = 1. \tag{5.20}$$

那么，只需证明

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N(i)} \alpha_j H^p\left[\left(\rho_j'\right)^{-1}\right] \geq &\frac{a}{a+b} H^p\left[\left(\frac{a}{a+b}\sum_{j=1}^{N(i)}\left|\rho_j'\right|\right)^{-1}\right] \\ &+ \frac{b}{a+b} H^p\left[\left(-\frac{b}{a+b}\sum_{j=1}^{N(i)}\left|\rho_j'\right|\right)^{-1}\right], \end{aligned} \tag{5.21}$$

对于 $\lambda \in (a_i, a_{i+1})$。

考虑到 (5.20)、实函数t^p 的凸性以及 (1.10)，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N(i)} \alpha_j H^p\left[\left(\rho_j'\right)^{-1}\right] &\geqslant \left\{\sum_{j=1}^{N(i)} \alpha_j H\left[\left(\rho_j'\right)^{-1}\right]\right\}^p = \left[\sum_{j \text{ even}} -\alpha_j b\left(\rho_j'\right)^{-1} + \sum_{j \text{ odd}} \alpha_j a\left(\rho_j'\right)^{-1}\right]^p \\ &= \left[\frac{N(i)}{2}(a+b)\right]^p \left(\sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'\right|\right)^{-p},\end{aligned} \tag{5.22}$$

其中我们还考虑到$N(i)$ 是偶数。另一方面，在 (5.21) 的右端，我们有

$$\begin{aligned}H^p\left[\left(-\frac{b}{a+b}\sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'\right|\right)^{-1}\right] &= b^p\left(\frac{b}{a+b}\right)^{-p}\left(\sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'\right|\right)^{-p}, \\ H^p\left[\left(\frac{a}{a+b}\sum_{j} \left|\rho_j'\right|\right)^{-1}\right] &= a^p\left(\frac{a}{a+b}\right)^{-p}\left(\sum_{j=1}^{N(i)} \left|\rho_j'\right|\right)^{-p}.\end{aligned}$$

由此结合 (5.22) 可知，(5.21) 等价于

$$\left[\frac{N(i)}{2}(a+b)\right]^p \geq (a+b)^p \tag{5.23}$$

由于$N(i) \geq 2$，该式成立。

现在我们来研究等号情形。首先注意到，上述论证对于函数$u \in C^1(I)$ 同样成立，只要集合 $\{u'(x) = 0\}$ 是有限集，并且我们在这些点处取u 的值为$\{a_0 \leqslant a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_k\}$。

通过这一选择，函数 $\rho_j : (a_i、a_{i+1}) \mapsto Y_{ij}$ 是定义良好且可微的；此外，根据连续性，我们还可以对任意 $j = 1、\ldots、N(i)$ 以及任意 $i = 0、\ldots、k-1$定义 $\rho_{j(a_i)}$。

特别地，(5.22) 和 (5.23) 成立。

因此，实函数 t^p 的严格凸性意味着等式在以下表达式中成立

(5.17) 当且仅当 $N(i) = 2$ 对任意 i 成立，并且等式在 (5.22) 中成立。于是，由 (1.10) 得

$$a\left(\rho_1'\right)^{-1} = H\left(\left(\rho_1'\right)^{-1}\right) = H\left[\left(\rho_2'\right)^{-1}\right] = -b\left(\rho_2'\right)^{-1} \qquad \text{in } (a_i, a_{i+1}).$$

也就是说，

$$b\rho_1'(\lambda) = -a\rho_2'(\lambda) \quad \text{ for all } \lambda \in (a_i, a_{i+1}),\ i = 0, \ldots, k-1. \tag{5.24}$$

在 (0,t) 上对该表达式积分，其中 $t \leqslant a_1$，，可得

$$\rho_2(\lambda) = -\frac{b}{a}\rho_1(\lambda) + \frac{b}{a}\rho_1(0) + \rho_2(0) = -\frac{b}{a}\rho_1(\lambda) + 1,$$

特别是

$$\rho_2(a_1) = -\frac{b}{a}\rho_1(a_1) + 1.$$

在每个区间（a_i,a_{i+1}）上重复这一论证，我们得出

$$\rho_2(\lambda) = -\frac{b}{a}\rho_1(\lambda) + 1, \qquad \text{for any } \lambda \in [0, \|u\|_\infty).$$

由于 $\rho_1(\|u\|_\infty) = \rho_2(\|u\|_\infty)$，我们还可以推出，$u$ 在 $x = \frac{a}{a+b}$ 处取得最大值。 ——

我们断言，$u\left(x + \frac{a}{a+b}\right)$ 的超水平集是各向异性球。事实上，固定 $t \in (0, \|u\|_\infty)$，并令 $x_1 \in [-\frac{a}{a+b}, 0]$ 满足 $u(x_1 + \frac{a}{a+b}) = t$，且 $x_2 \in [0, \frac{b}{a+b}]$ 满足 $u(x_2 + \frac{a}{a+b}) = t$。因此，

$$x_1 + \frac{a}{a+b} = \rho_1(\lambda) = -\frac{a}{b}\rho_2(\lambda) + \frac{a}{b} = -\frac{a}{b}\left(x_2 + \frac{a}{a+b}\right) + \frac{a}{b},$$

这立即推出 $x_1 = -\frac{a}{b}x_2$。也就是说，$u\left(x + \frac{a}{a+b}\right)$ 在 t 处的超水平集是一个各向异性球。因此，$u\left(x + \frac{a}{a+b}\right) = u^\star(x)$。□

注 5.7. 我们认为，命题 5.5 中刚性结果的证明可按 [22, 21], 中的方法进行，同时注意偶性缺失对各向异性造成的影响。事实上，可以仿照 [22] 中的论证证明，(5.17) 中的等号成立意味着 u 的超水平集是区间；然后，在附加假设 $|\{u'(x) = 0\}| = 0$下，可以按照 [21], 中的方法证明这些区间以同一点为中心。这里我们给出了一个适用于当前情形的初等证明。

我们以如下关于负函数的命题 5.5 类比结果结束本节。回忆 $H(x) := H(-x)$，且其极函数见式 (4.2)。

推论 5.8。 设 $v : I := [0,1] \to (-\infty, 0]$，使得 $v \in W^{1,p}_0(0,1)$。定义 $v^\# := -(-v)^\star : \tilde{I}^\star \to (-\infty, 0]$，其中 $(\cdot)^\star$ 是关于 $H_0(x)$的各向异性重排，即

$$(-v)^\star(x) = \begin{cases} \sup\{t : |\{y : -v(y) > t\}| \geq \frac{a+b}{a}x\} & \text{if } x \geq 0 \\ \sup\{t : |\{y : -v(y) > t\}| \geq -\frac{a+b}{b}x\} & \text{if } x < 0, \end{cases}$$

其中 $\tilde{I}^\star = (-\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$。于是

$$\int_I H^p(v') \geq \int_{\tilde{I}^\star} H^p((v^\#)'). \tag{5.25}$$

此外，如果 $v \in C^1(I)$，且集合 $\{x : v'(x) = 0\}$ 是有限集，则当且仅当 $v\left(x + \frac{b}{a+b}\right) = v^\#(x)$ 时，式 (5.25) 中等号成立。

证明。 只需注意，根据命题 5.5

$$\int_I H^p(v') = \int_I \widetilde{H}^p(-v') \geqslant \int_{\tilde{I}^\star} \widetilde{H}^p((-v^\star)') = \int_{\tilde{I}^\star} H^p((v^\#)').$$

关于等号情形的结论同样由命题 5.5 得出。 □

致谢

本研究部分经由 PRIN-2017-JPCAPN 项目资助：“非线性偏微分方程”；经 VALERE 计划下的 Vain-Hopes 项目（VAnviteLli pEr la RicErca）资助；并获 INdAM-GNAMPA 小组以及葡萄牙政府通过 FCT——科学与技术基金会资助，项目编号为 UID/MAT/04459/2020 和 PTDC/MAT-PUR/1788/2020；符合条件时，亦获 COMPETE 2020 欧洲区域发展基金资助，资助类别为科学就业激励计划——个人项目申请（CEEC 个人项目）——2020.02540.CEECIND/CP1587/CT0008。

参考文献

[1] Antonini C.A., Ciraolo G., Farina A.，非齐次各向异性拟线性方程的内部正则性结果，《数学年刊》，2022年。[2] Alvino A., Ferone V., Trombetti G., Lions P.L.，凸对称化及其应用。《庞加莱研究所年刊 C辑：非线性分析》14，2：275–293，1997。[3] Belloni M., Ferone V., Kawohl B.，强非线性椭圆算子的等周不等式、沃尔夫形状及相关问题。献给 Lawrence E. Payne 的专辑。《应用数学与物理学杂志》54，5：783，2003，771：–。[4] Berestycki H., Coville J., Vo H.-H.，非局部扩散种群的持续存在判据。《数学生物学杂志》72(7)：1693–1745，2016年。[5] Berestycki H., Hamel F., Roques L.，周期性破碎环境模型的分析。I. 物种持续存在。《数学生物学杂志》51，1：75–113，2005年。[6] Berestycki H., Lachand-Robert T.，单调重排的若干性质及其在圆柱体椭圆方程中的应用。《数学新闻》266：3–19，2004年。[7] Birindelli I., Demengel F.，全非线性奇异算子的第一特征值与最大值原理，《微分方程进展》11，1：91–119，2006年。[8] Bouin E., Legendre G., Lou Y., Slover N.，二维异质环境中各向异性扩散的演化。《数学生物学杂志》82，36，2021年。[9] Cantrell R.S., Cosner C.，不定权函数下的扩散逻辑斯蒂方程：受扰环境中的种群模型。《爱丁堡皇家学会学报 A辑》112，3–4：293–318，1989年。[10] Cantrell R. S., Cosner C.，空间异质性对种群动力学的影响。《数学生物学杂志》29，4：338，1991年，315：–。[11] Caffarelli L., Dipierro S., Valdinoci E.，具有非局部相互作用的逻辑斯蒂方程。《动力学及相关模型》10（2017）141–170。[12] Chanillo S., Grieser D., Imai M., Kurata K.a.，复合膜特征值优化中的对称性破缺及其他现象。《数学物理通讯》，(2)：315–337，2000年。[13] Cozzi M., Farina A., Valdinoci E.，奇异、退化、各向异性偏微分方程的单调性公式与分类结果。《数学进展》293：343–381，2016年。[14] Cozzi M., Farina A., Valdinoci E.，奇异、退化、各向异性偏微分方程的梯度界与刚性结果。《数学物理通讯》331，189–214，2014年。

[15] 2008 Dacorogna B.，《变分法直

[16] 接方法》，Springer，纽约；de Figueiredo D.G.，半线性椭圆问题的正解。载于《微分方程》（圣保罗，1981），第34–87页，《数学讲义》第957卷，Springer，柏林—纽约，1982年。[17] Della Pietra F., di Blasio G., Gavitone N.，通过最大值原理对非线性椭圆算子的第一狄利克雷特征值进行最佳估计。《非线性分析进展》9，1：278–291，2020年。[18] Della Pietra F., Gavitone N.，具有罗宾边界条件的各向异性特征值问题的法贝尔 – 克拉恩不等式。《势分析》41.4：1147–1166，2014年。[19] Derlet A., Gossez J.-P., Taká˘c P.，不定权函数下拟线性椭圆诺伊曼问题的特征值极小化。《数学分析及其应用杂志》371，1：69–79，2010年。[20] Dipierro S., Proietti Lippi E., Valdinoci E.，带诺伊曼条件的（非）局部逻辑斯蒂方程。《亨利·庞加莱研究所非线性分析年刊》（2022年）。[21] Esposito, L.; Trombetti, C.，施泰纳对称化：波利亚–塞格ő原理的加权版本。《非线性微分方程及其应用》14，1-2：219–231，2007年。[22] Ferone A., Volpicelli R.，凸重排：波利亚–塞格ő不等式的等号情形。《变分法与偏微分方程》21，3：259–272，2004年。[23] Ferreri L., Verzini G.，具有球形权函数和狄利克雷边界条件的最优主特征值的渐近性质。《非线性分析》224：论文编号113103，共25页，2022年。[24] Fisher R.，有利基因的扩散。《优生学年刊》7：335–369，1937年。[25] Gavitone N. Trani L.，一类各向异性算子的第一罗宾特征值。《米兰数学杂志》86，2：223，2018年，201：–。[26] Henrot A..《椭圆算子特征值的极值问题》。《数学前沿》。Birkhäuser出版社，巴塞尔，2006年。[27] Hintermüller M., Kao C.-Y., Laurain A.，具有不定权函数和罗宾边界条件的椭圆问题的主特征值极小化。（英文摘要）《应用数学与优化》65，1：111–146，2012年。[28] Jaroš J.，通过各向异性 Picone 恒等式得到的卡恰波利估计。《美国数学会会刊》143，3：1144，2015年，1137：–。[29] Kawohl, B.，《偏微分方程中的重排与水平集凸性》。《数学讲义》第1150卷。施普林格出版社，柏林，1985年。 iv+136 页。

[30] Kolmogorov A., Petrovsky I., Piskunov N. 研究含物质数量增长的扩散方程及其在生物学问题中的应用。莫斯科国立大学学报（莫斯科国立大学通报），国际系列 *A*，1:1–26，1937年。[31] Lamboley J., Laurain A., Nadin G., Privat Y. 不定权函数及罗宾边界条件下主特征值优化器的性质。《变分法与偏微分方程》55，6，文章编号 144，共 37 页，2016年。[32] Lieb, E.H., Loss, M.《分析》。第 14 卷。美国数学学会，2001年。[33] Lieberman, G. M. 退化椭圆方程解的边界正则性。《非线性分析》12，11:1203–1219，1988年。[34] Lou Y., Yanagida E. 不定权函数椭圆边值问题主特征值的最小化及其在种群动力学中的应用。《日本工业与应用数学杂志》23:275–292，2006年。[35] Mazari I. 通过双尺度渐近展开研究若干抛物型双线性最优控制问题中的邦邦性质。《泛函分析杂志》第 *284* 卷，第 *10* 期，*2023*年。[36] Mazari, Idriss; Nadin, Grégoire; Privat, Yannick 在逻辑斯蒂模型中使总种群规模最大化的资源最优配置位置。《纯粹与应用数学杂志》（第 9 辑）134 (2020年)，1–35。[37] Mazari I., Nadin G., Privat Y. 逻辑斯蒂扩散方程中的若干挑战性优化问题及其数值建模。载于 E. Trélat 和 E. Zuazua 编，《数值控制：A 部分》，《数值分析手册》第 23 卷，第 401–426 页。爱思唯尔，2022年。[38] Mazari, Idriss; Nadin, Grégoire; Privat, Yannick 加权两相狄利克雷特征值的形状优化。《理性力学与分析文档》243 (2022年)，第 1 期，95–137。[39] Mazzoleni D., Pellacci B., Verzini G. 若干谱优化问题中的渐近球形。《纯粹与应用数学杂志》（第 9 辑），135:256–283，2020年。[40] Mazzoleni D., Pellacci B., Verzini G. 不定权诺伊曼问题中主特征值优化器的奇异分析。预印本 arXiv:2111.01491，即将在《工业与应用数学学会数学分析杂志》发表。[41] Pellacci B., Verzini G. 空间异质环境中的最佳扩散策略：不定权分数阶诺伊曼问题的主特征值优化。《数学生物学杂志》76(6):1357–1386，2018年。[42] Quaas A., Sirakov B. 全非线性椭圆算子的主特征值与狄利克雷问题。《数学进展》218.1:105–135，2008年。[43] Roques L., Hamel F. 物种存续最优栖息地配置的数学分析。《数学生物科学》210，1:34–59，2007年。[44] Struwe, M. 变分方法：在非线性偏微分方程与哈密顿系统中的应用。施普林格出版社，柏林，1990年。xiv+244 页。[45] Tolksdorf, P. 更一般一类拟线性椭圆方程的正则性。《微分方程杂志》51，1:126–150，1984年。[46] Trudinger, N. S. 关于 Harnack 型不等式及其在拟线性椭圆方程中的应用。《纯粹与应用数学通讯》

4, 20 721 747, 1967 : – Van Schaftingen, J. 各向异性对称化。《亨利·庞加莱[47]研究所非线性分析年刊》23，4:539–565，2006年。(B. Pellacci) 坎帕尼亚“路易吉·万维特利”大学数学与物理系，A. Lincoln 路 5 号，81100 卡塞塔，意大利。电子邮箱，B. Pellacci：benedetta.pellacci@unicampania.it (G. Pisante) 坎帕尼亚“路易吉·万维特利”大学数学与物理系，A. Lincoln 路 5 号，81100 卡塞塔，意大利。电子邮箱，G. Pisante：giovanni.pisante@unicampania.it (D. Schiera) 里斯本大学高等技术学院数学系，Av. Rovisco Pais, 1049-001 里斯本，葡萄牙。电子邮箱，D. Schiera：delia.schiera@tecnico.ulisboa.pt