arXiv:2303.01404v2 [math.AG] 3 Aug 2023

偶非常稳定向上流上的 Hitchin 映射

Miguel Gonz´alez Tam´asHausel*ICMAT*马德里 *IST Austria*mgonzalez.contacto@gmail.com tamas.hausel@ist.ac.at

2023年8月4日

摘要

我们定义了偶极稳定 Higgs 丛，并研究限制在其向上流上的 Hitchin 映射。在 GL_n 情形下，我们对类型为 (1, . . . , 1) 的例子进行了分类，并发现它们由一个由偶高度根构成的根系所支配。我们讨论了实格拉斯曼流形、四元数格拉斯曼流形、 $4n$-球面和实凯莱平面的等变上同调谱如何体现偶余极小向上流上的 Hitchin 映射。这里所讨论的偶向上流，与拟分裂内实形式的 Higgs 丛模空间中的向上流相同。后者模空间由 Oscar Garc´ıa-Prada 及其合作者率先开展研究。

1 引言

本文是第二作者在 [12] “模空间与几何结构”会议上的报告稿。该会议是为纪念 Oscar Garc´ ía-Prada 60 岁生日而举办，于 2022年9月 在 ICMATMadrid 举行。

在 [14], 受镜像对称启发的研究中，非常稳定Higgs丛这一概念应运而生。设 C 为一条光滑射影曲线。记 $\mathcal{M}$ 为秩 n 、次数 d 的半稳定Higgs丛 (E, Φ) 的模空间，其中 E 是一个秩 n 、次数为 的向量丛，而 $\Phi \in H^0(C; \mathrm{End}(E) \otimes K)$ 是一个 Higgs 场。通过缩放 Higgs 场，T 对 $\mathcal{M}$ 有一个作用，即 $\lambda \in \mathrm{T}$ 将 (E, Φ) 映为 $(E, \lambda\Phi)$。若一个不动点 $\mathcal{E} \in \mathcal{M}^{s^{\mathbb{T}}}$ 的上升流

$$W^+_{\mathcal{E}} := \{\mathcal{F} \in \mathcal{M} : \lim_{\lambda\to 0} \lambda \cdot \mathcal{F} = \mathcal{E}\} \subset \mathcal{M}$$

是闭的。在第2 节中，我们回顾一般情形下以及 Higgs 丛模空间中的极稳定向上流的基本性质 $\mathcal{M}$。

[14] 的一项主要结果是对类型为 $(E, \Phi) \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}}$的非常稳定 Higgs 丛进行分类$(1, \ldots, 1)$。不动点的类型为 $(1, \ldots, 1)$，当且仅当向量丛 $E = L_0 \oplus \cdots \oplus L_{n-1}$是线丛的直和，且 Higgs 场 $\Phi|_{L_i} : L_i \to L_{i+1}K \subset EK$，我们将其记为

$$b_i := \Phi|_{L_i} \in \mathrm{Hom}(L_i, L_{i+1}K) \cong H^0(C; L_i^{-1}L_{i+1}K).$$

那么我们有

定理1.1 ([14, 定理4。16])。 类型$(1,...,1)$ *Higgs* 丛$(E, \Phi) \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 非常稳定，当且仅当除子$\mathrm{div}(b_1)$ $+ \cdots +$ 除子$\mathrm{div}(b_{n-1})$ 是约化的。

我们在下文的定理2.11 中回顾这一分类，并在备注2.12中用$\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$的极小支配权对其进行重新表述。

Garcia-Prada 和 Ramanan 在 [9] 研究 Higgs 丛模空间上的对合。一个重要的对合 θ：$\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 由 $\theta(E,\Phi) := (E,-\Phi)$ 给出。在 [9] 中证明了，不动点 $\mathcal{M}^\theta$ 对应于 $U(p,n-p)$-Higgs 丛（包括 $p=0$ 的情形，此时$U(0,n) := U(n)$）。我们在第 3 节回顾这些概念。

本文将关注所谓的偶向上流 $W^{2+}_{\mathcal{E}}$，其中任意 $\mathcal{E} \in \mathcal{M}^{s\mathbb{T}} \subset \mathcal{M}^\theta$ 所定义的向上流 $\mathcal{E}$ 位于半射影 $\mathcal{M}^\theta$中，等价地说，它是交集 $W^{2+}_{\mathcal{E}} := W^+_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{M}^\theta$。由此，我们可以定义偶数非常稳定 Higgs 丛 $\mathcal{E} \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}}$，其偶上升流 $W^{2+}_{\mathcal{E}} \subset \mathcal{M}^\theta$ 是闭的。本文的主要结果之一如下

定理 1.2。 类型 $(1,\dots,1)$ *Higgs* 丛 $(E,\Phi) \in \mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 是偶数非常稳定的，当且仅当除子$\mathrm{div}(b_2) + \cdots + \mathrm{div}(b_{n-2})$ 以及 $\mathrm{div}(b_i) + \mathrm{div}(b_{i+2k+1})$ 对于 $1 \le i \le i+2k+1 \le n-1$ 均为约化的。

为了阐明这组看起来复杂的除子的含义，我们将在定理 3.13中通过所谓的偶极小 支配权，并借助偶高度的正权重，重新表述这一结果。

由于限制在极稳定向上流上的 Hitchin 映射是有限平坦的，并且是仿射空间之间的 $\mathbb{T}$-等变映射，具有相同维数的正 $\mathbb{T}$-作用，因此可以对其进行显式描述。在类型 $(1,\dots,1)$ 非常稳定情形下，第二作者在 [13]中根据格拉斯曼流形 Gr 的等变上同调谱给出了这样一种显式描述$_k(\mathbb{C}^n)$。我们将在下文第 4.2 节回顾这一结果。

最后，在第 4.3 节中，我们将借助齐性空间的等变上同调，研究如何对某些偶非常稳定向上流上的 Hitchin 映射建模。我们将在定理 4.3中发现，对于 GL_{2n}，四元数 Grassmann 流形的等变上同调；对于 SO_{4n+2}， $4n$-球面的等变上同调；最后对于 E_6，实凯莱平面的等变上同调，都应当能够为某些特定偶非常稳定流上的 Hitchin 映射建模。这些对称空间的出现颇有意思，部分原因在于它们并非 Hermitian 型，而且它们还是 Hodge 型准分裂实形式的 Nadler 群 [22] 的商（定义见 [9, 第2节。3] ）。

本文重点研究类型 (1, ..., 1) 的非常稳定向上流和偶非常稳定向上流。目前，关于其他类型的非常稳定或摇摆 Higgs 丛已有许多有趣成果，例如 [20] 讨论类型 (2) 的非常稳定 Higgs 丛的重数代数， [6] 讨论许多摇摆 Higgs 丛——这两篇论文均收录于本会议论文集——以及 [25] 对所有类型 (n_1,n_2) 的非常稳定分支进行分类。

致谢。 本文的大部分研究工作是在2022年第一作者以暑期实习生身份访问第二作者所在的 IST Austria 团队期间完成的。第一作者感谢访问期间所受到的款待与支持。我们感谢 Oscar Garc´ıa-Prada 为促成这次实习所做的努力，以及他一直以来给予的支持。我们还感谢 Andreas ˇ Cap、Mischa Elkner、Tim Henke、Nigel Hitchin、Friedrich Knop、Jakub L ¨owit、David Nadler、Ana Pe´on-Nieto、Kamil Rychlewicz 和 Anna Sis´ak 提供的有益讨论。第二作者获得了 FWF 资助，项目名称为“幂零锥顶端的几何”，编号为 P 35847。

2 Bialynicki-Birula分解

本节首先回顾半射影簇的定义，然后汇集与此类簇相关的 Bialynicki-Birula 分解的基础知识。

定义 2.1. 设 X 是一个配备了 $\mathbb{T} := \mathbb{C}^\times$作用的正规复拟射影簇。若不动点轨迹 $X^{\mathbb{T}}$ 是射影的，且对每个 $x \in X$，都存在一个$p \in X^{\mathbb{T}}$ 使得 $\lim_{\lambda\to 0} \lambda x = p$，则称 X 为半射影。

后者应理解为存在一个 $\mathbb{T}$-等变态射 $f\colon \mathbb{A}^1 \to X$ 使得 $f(1) = x$且 $f(0) = p$。半射影簇带有一种由仿射子簇构成的分层，称为 ***Bialynicki-Birula*分解** [3]，，下面我们将回顾这一分解。更多细节请参阅[14, 第 2] 节。

定义 2.2。 设 X 是一个半射影簇，且 $\alpha \in X^{\mathbb{T}}$。从 α 出发的上升流 定义为

$$W_\alpha^+ := \{x \in X : \lim_{\lambda\to 0} \lambda x = \alpha\}.$$

类似地，从 α 出发的下降流 为

$$W_\alpha^- := \{x \in X : \lim_{\lambda\to \infty} \lambda x = \alpha\}.$$

*Bialynicki-Birula*划分为 $X = \bigsqcup_{\alpha\in X^{\mathbb{T}}} W_\alpha^+$。 核 X定义为 $\mathcal{C} : = \bigsqcup_{\alpha\in X^{\mathbb{T}}} W_\alpha^-$.

定义 2.3。 对于不动点集的一个连通分支， $F \in \pi_0(X^{\mathbb{T}})$，我们将其吸引子定义为 $W_F^+ := \bigcup_{\alpha\in F} W_\alpha^+$，将其排斥子 定义为 $W_F^- := \bigcup_{\alpha\in F} W_\alpha^-$。***Bialynicki-Birula*分解** 为$X = \bigsqcup_{F\in\pi_0(X^{\mathbb{T}})} W_F^+$。

给定一个光滑不动点 $\alpha \in X^{s\mathbb{T}}$， X 上的 T-作用在切空间 $T_\alpha X$上诱导出 T 的一个表示。对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们将权空间记为 $(T_\alpha X)_k \subset T_\alpha X$，其中 $\lambda \in \mathbb{T}$ 通过乘以 λ^k来作用。这给出了权空间分解 $T_\alpha X = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} (T_\alpha X)_k$。我们将 $T_\alpha^+ X := \bigoplus_{k>0} (T_\alpha X)_k$ 记为正部分，将 $T_\alpha^- X := \bigoplus_{k<0}$($T_\alpha X)_k$ 记为负部分。我们有：

命题 2.4. 给定一个光滑不动点 $\alpha \in X^{s\mathbb{T}}$，上升流 W_α^+（分别地，下降流W_α^-）是 X 的一个局部闭 T-不变子簇，并且作为带有 T-作用的簇，它同构于 $T_\alpha^+ X$（分别地， $T_\alpha^- X$）。

该证明最初是在 [3] 中针对光滑完备的 X给出的。一般情形的证明见 [14,命题 2.1]。

最后，进一步假设 X^s 配备了一个辛形式 $\omega \in \Omega^2(X^s)$，并且对于 $\lambda \in \mathbb{T}$，有 $\lambda^*(\omega) = \lambda\omega$。这一假设的动机在于，我们将要研究的半射影簇——半稳定Higgs丛模空间——具有这样的形式。于是，我们有：

命题2.5。 对于光滑点 $\alpha \in X^{s\mathbb{T}}$，子空间 $T_\alpha^+ X$ 和 $T_\alpha^{\leq 0} X : = (T_\alpha X)_0 \oplus T_\alpha^- X$ 的 $T_\alpha X$ 是拉格朗日的。此外，子簇 W_α^+ 和 $W_{F_\alpha}^-$ 也是拉格朗日的。

证明见 [14, 命题2.10]。主要思路是，对于 $v \in (T_\alpha X)_k$ 和 $w \in (T_\alpha X)_l$，我们有

$$\lambda\omega(v, w) = \lambda^*(\omega)(v, w) = \omega(\lambda \cdot v, \lambda \cdot w) = \omega(\lambda^k v, \lambda^l w) = \lambda^{k+l}\omega(v, w),$$

因此，只有在情形 $k + l = 1$ 下， $\omega(v, w)$ 才可能非零；若 $k, l > 0$ 或 $k, l \leq 0$，则不会出现这种情况。

定义2.6。 若 $W_\alpha^+ \cap \mathcal{C} = \{\alpha\}$，则称 $\alpha \in X^{s\mathbb{T}}$ 为非常稳定 。

这一概念在 [14, 定义 4.1], 中引入，并在 [14, 引理 4.4]中证明： $\alpha \in X^{s\mathbb{T}}$ 非常稳定，当且仅当 $W_\alpha^+ \subset X$ 是闭的。

2.1 $\mathcal{M}$中的拉格朗日上升流

本节介绍 Higgs 丛，并说明 Bialynicki-Birula 的前述理论如何应用于半稳定Higgs丛模空间。为此，我们固定一条亏格为 $g \geq 2$ 、典范线丛为 K的光滑射影曲线 C ，其定义在复数域上。

定义 2.7。一个*Higgs* 丛是一个有序对 (E, Φ)，其中 E 是 C上的全纯向量丛，且 $\Phi \in H^0(C,$ $\mathrm{End}(E) \otimes K)$。

对于实约化李群，还可以更一般地定义此类对象 G [7, 定义 3。1], 从而得到 G-Higgs 丛。令 $G = GL_n(\mathbb{C})$ ，并取 $n =$秩 E，即可还原上述定义。回顾一下，Higgs 丛 (E, Φ) 称为稳定的，如果对每个非零真向量子丛$F \subset E$ 满足 $\Phi(F) \subseteq F \otimes K$，都有

$$\mu(F) := \frac{\deg F}{\operatorname{rank} F} < \mu(E) := \frac{\deg E}{\operatorname{rank} E},$$

而对于相同的子丛，若有 $\mu(F) \leq \mu(E)$，则称其为半稳定的。我们将固定秩 n 、次数为 d的半稳定Higgs丛模空间记为 $\mathcal{M} := \mathcal{M}_n^d$。该空间通过规范理论方法在 [18] 中构造，并通过代数几何方法在 [23, 27] 中构造。它是一个正规 [28] 拟射影簇，在其光滑点（即稳定Higgs丛）处带有超 Kähler 度量。特别地，它具有辛结构 $\omega \in \Omega^2(\mathcal{M}^s)$。

该空间还带有一个由 $(E, \Phi) \mapsto (E, \lambda\Phi)$ 定义的自然 T-作用，它使该空间成为一个半射影簇，并且满足 $\lambda^*(\omega) = \lambda\omega$。因此，上一节中的 Bialynicki-Birula理论适用。不动点集 $\mathcal{M}^{\mathbb{T}}$ 可以如下识别。对于任意 $\lambda \in \mathrm{T}$，我们有一个向量丛同构 $f_\lambda \in \mathrm{Aut}(E)$，使得

$$\Phi \circ f_\lambda = f_\lambda \circ (\lambda\Phi). \tag{2.1}$$

换言之，我们有 T 在 E 上的一个作用，该作用在每个纤维上都是线性的。因此，我们可以将 $E = L_0 \oplus \cdots \oplus L_k$ 分解为权空间，其中 $f_\lambda|_{L_i} = \lambda^{w_i} \cdot \mathrm{Id}_{L_i}$。相容条件 (2.1) 表明，如果 $v_i \in L_i$，那么 $f_\lambda(\lambda \cdot \Phi(v_i)) = \Phi(f_\lambda(v_i)) = \lambda^{w_i}\Phi(v_i)$，从而 $f_\lambda(\Phi(v_i)) = \lambda^{w_i-1}\Phi(v_i)$。因此， Φ 将权重为 w_i 的空间映射到权重为 $w_i - 1$的空间。特别地，可以将权重选为 $w_i = w_0 - i$ 的形式，并且 Higgs 场具有性质$\Phi(L_i) \subseteq L_{i+1} \otimes K$。由此，我们可以为该不动点关联一个不变元 (秩 $L_0, \ldots,$ 秩 L_k)，称为类型。

前面的分解表明，事实上，由 T-作用固定的 Higgs 丛是幂零的，因为 $\Phi^{k+1} \equiv 0$。另一种理解方式是通过*Hitchin* 映射：

$$h : \mathcal{M} \to \mathcal{A} := \bigoplus_{i=1}^{n} H^0(C, K^i)$$

该映射由特征多项式 $\det(\Phi - xI_n) = x^n + \sum_{j=1}^{n} a_j x^{n-j}$ 的系数 $a_i \in H^0(C, K^i)$ 定义。它是一个真完全可积哈密顿系统 [17, 23] ，其纤维在光滑点处是拉格朗日的，且一般纤维是阿贝尔簇 [26]。此外，让 T 以权重 i 作用于 $H^0(C, K^i)$，Hitchin 映射便是 T-等变的。因此，$\mathcal{M}^{\mathbb{T}} \subseteq h^{-1}(0)$，所以不动点 (E, Φ) 的特征多项式为 x^n ，且这些不动点是幂零的。

Białynicki-Birula 分划给出的上升流和下降流已在命题 3.4 和 3.11] 中得到刻画：

命题 2.8. 设 $\mathcal{E} = (E', \Phi') \in \mathcal{M}^{s\mathbb{T}}$ 和 $(E, \Phi) \in \mathcal{M}$。当且仅当存在一个滤子时，我们有 $(E', \Phi') \in W_{\mathcal{E}}^+$

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_k = E$$

使得 $\Phi(E_i) \subseteq E_{i+1} \otimes K$，且伴随分次对象满足 $(\mathrm{Gr}E, \mathrm{Gr}(\Phi)) \simeq (E', \Phi')$。将 $W_{\mathcal{E}}^+$ 替换为 $W_{\mathcal{E}}^-$，并将递增滤过替换为递减滤过，同样成立。

向下流可以通过 Hitchin 映射得到一个具体的刻画。由于 T 在 $\mathcal{A}$ 上的作用具有正权重，核就是 $\mathcal{C}_{\mathcal{A}} = \{0\}$。因为 h 是 T-等变的，这表明 $\mathcal{C} := \mathcal{C}_{\mathcal{M}} \subset h^{-1}(0)$。另一方面， h 的真性表明 $h^{-1}(0)$ 是射影的，因此 $\mathcal{C} = h^{-1}(0)$。在此语境下，这通常称为幂零锥。注意， h 的 T-等变性意味着 $\mathcal{M}^{\mathbb{T}} \subseteq \mathcal{C}$。由此，非常稳定的概念定义如下：

定义 2.9。 若 Higgs 丛 $\mathcal{E} = (E, \Phi) \in \mathcal{M}^{s\mathbb{T}}$ 满足以下条件： $W_{\mathcal{E}}^+$ 中唯一的幂零 Higgs 丛是其自身 $\mathcal{E}$，则称其为非常稳定 。否则，它是摇摆的。

这类对象的一个有趣之处在于，Hitchin 映射在上升流 [14, 引理4。6]:

命题 2.10。如果 $\mathcal{E} \in \mathcal{M}^{s\mathbb{T}}$ 非常稳定，那么 $h: W_{\mathcal{E}}^+ \to \mathcal{A}$ 是有限、平坦、满射且一般而言为*étale*。

2.2 非常稳定 Higgs 丛的例子

本节回顾 [14] 中的一些非常稳定 Higgs 丛的例子。首先考虑类型为 (n) 的不动点分支。此类型的不动点是形如 $(E, 0)$ 的元素，其中 E 是一个半稳定 Higgs 丛。因此，这个分支就是秩为 n、次数为 d的向量丛模空间 $\mathcal{N}$。 $\mathcal{E} = (E, 0)$ 的上升流由 $W_{\mathcal{E}}^+ = \{(E, \Phi) : \Phi \in H^0(C, \mathrm{End}(E) \otimes K)\}$ 给出，因此 $\mathcal{E}$ 非常稳定，当且仅当它所容许的唯一幂零 Higgs 场$\Phi \in H^0(C, \mathrm{End}(E) \otimes K)$ 是 $\Phi \equiv 0$。这就是 Drinfeld 和 Laumon [21], 引入的非常稳定向量丛概念；他们证明了非常稳定丛构成该分支的一个开稠密子集。

接下来，我们将重点讨论类型 $(1, 1, \ldots, 1)$ 的情形。该分支中非常稳定Higgs丛的起始例子是典范一致化 *Higgs* 丛， $\mathcal{E}_0 = (E_0, \Phi_0)$，其中

$$E_0 = \mathcal{O} \oplus K^{-1} \oplus \cdots \oplus K^{1-n},$$

并且，对于给定的 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A} = H^0(C, K) \oplus \cdots \oplus H^0(C, K^n)$，Higgs 场

$$\Phi_a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a_1 \end{pmatrix}$$

由伴随矩阵给出。映射 $a \mapsto (E_0, \Phi_a)$ 给出了 Hitchin 映射的一个截面，称为 *Hitchin* 截面 [19]。由命题 2.8可知， $\{(E_0, \Phi_a) : a \in \mathcal{A}\} \subseteq W_{\mathcal{E}_0}^+$。此外，由于二者都是维数相同的仿射空间 $\dim \mathcal{M}/2$，上升流恰好就是 Hitchin 截面，因此 $\mathcal{E}_0$ 是非常稳定的。

通过从这个例子出发并进行 Hecke 变换，可以完全分类此类型的非常稳定 Higgs 丛。首先我们注意到，类型 $(1, 1, \ldots, 1)$ 的不动点数据等价于选择一个线丛 L_0 在 C 上（即一个除子 δ_0，模去主除子），以及 δ_1、 $\ldots$、 δ_{n-1}在 C上的有效除子。事实上，这样的不动点 (E, Φ) 具有 $E = L_0 \oplus \cdots \oplus L_{n-1}$的形式，其中对于所有 j，我们都有秩 $L_j = 1$，并且对于非恒定映射 b_j: $L_{j-1} \to L_j \otimes K, 1 \leq j \leq n-1$，有 $\Phi|_{L_{j-1}} = b_{j-1}$。因此， L_0 已给定，而 δ_i 则作为 b_i 的零点轨迹（带重数）得到。另一方面，给定 $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-1})$，我们通过以下方式构造 E

令 $L_i := L_0 \otimes \mathcal{O}(\delta_1 + \cdots + \delta_{i-1}) \otimes K^{-i}$，以及 $b_i := s_{\delta_i} \in \mathcal{O}(\delta_i) = \mathcal{O}(L_{j-1}^* \otimes L_j \otimes K)$ 为典范截面。我们将对应于 $\delta := (\delta_0, \ldots, \delta_{n-1})$ 的向量丛记为 $\mathcal{E}_\delta = (E_\delta, \Phi_\delta)$。

另一种便捷的标记这些点的方式，是在 C 的每个点处选取 GL(n,C) 的一个支配权，即一个映射

$$\mu : C \to \Lambda^+(\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \omega_i : a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{n-1} \times \mathbb{Z} \right\},$$

其中 ω_i 是基本权。我们要求集合 $C \setminus \{\mu = 0\}$ 是有限的。于是我们定义

$$\delta_\mu := \left(\sum_{c \in C} \langle \mu(c), \omega_n^\vee \rangle c, \left(\sum_{c \in C} \langle \mu(c), \omega_i^\vee \rangle c \right)_{i=1,\ldots,n-1} \right),$$

且 $\mathcal{E}_\mu := \mathcal{E}_{\delta_\mu}$。反过来，我们可以由 δ 恢复映射 μ，其形式为

$$\mu_\delta(c) = \delta_0(c)\omega_n + \sum_{i=1}^{n-1} \delta_i(c)\omega_i \in \Lambda^+,$$

其中，对于除子 D， $D(c)$ 表示 D 中 c 的系数。

2.3 Hecke 变换

现在我们解释 Higgs 丛的 Hecke 变换。它们发挥着关键作用，因为它们可以将类型 (1, 1, . . . , 1) 分支中不同不动点的向上流联系起来。为了定义 (E, Φ) 的 Hecke 变换，我们先选取一点 $c \in C$ 和一个子空间 $V \in \mathrm{Gr}(k, E|_c)$，使其为 $\Phi|_c$-不变，即 $\Phi|_c(V) \subset V \otimes K|_c$。Hecke 变换 $\mathcal{H}_V(E, \Phi) := (E', \Phi')$ 由如下图表定义

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & E' & \to & E & \to & E|_c/V & \to 0 \\ & \Phi' \downarrow & & \Phi \downarrow & & \overline{\Phi}_c \downarrow & \\ 0 \to & E' \otimes K & \to & E \otimes K & \to & E|_c/V \otimes K & \to 0 \end{array},$$

其中 $E|_c/V$ 应视为支撑于 c 的摩天大楼层。关于该图表构造的更多细节，参见 [14, 定义 4。10]。

从 $\mathcal{E}_0$ 出发，经过一系列 Hecke 变换，就可以到达任意 $\mathcal{E}_\mu$。这归功于以下基本操作：从 $\mathcal{E}_0$ 出发，选取自然的不变子空间 $V_k = (L_k \oplus \cdots \oplus L_{n-1})|_c$，所得的 Hecke 变换给出 $\mathcal{E}_{\mu_{c,\,k}}$，其中 $\mu_{c,\,k}(c) = \omega_k$，其他情况下为零。[14, 例 4.13]对此作了说明。对于任意 μ，只需针对每个 $c \in C$，在 $\mu(c)$ 所指示的 ω_k 处迭代上述操作即可。[14] 的主要结果之一是，上升流也通过 Hecke 变换彼此关联，由此可以推导出以下分类：

定理 2.11 ([14, 定理 4.16]). 类型为 $(1, 1, \ldots, 1)$、$(E_\delta, \Phi_\delta) \in \mathcal{M}^{s\mathbb{T}}$ 的稳定不动点非常稳定，当且仅当除子 $\delta_1 + \cdots + \delta_{n-1}$ 是约化的。

注记2.12。前面的陈述可以改述为：(E_μ, Φ_μ) 非常稳定，当且仅当对每个 $c \in C$，要么 $\mu(c) = a_n\omega_n$，要么 $\mu(c) = a_n\omega_n + \omega_k$，其中 $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ 和 $a_n \in \mathbb{Z}$。换言之，该点非常稳定，当且仅当对每个 $c \in C$，权重 $\mu(c)$ 都是极小的，也就是说，相对于 $\Lambda^+(\mathrm{GL}(n,\mathbb{C}))$ 中由 $\mu_1 \geq \mu_2 \iff \mu_1 - \mu_2 \in \Phi^+ = \{\sum_{\alpha \in \Delta^+} a_\alpha \alpha$ 给出的偏序而言是最小的：$a_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$，其中 Δ^+ 表示正根集。

3 偶数非常稳定上升流

本节将上文概述的结果推广到由子群 $\mathcal{M}^\theta \subset \mathcal{M}$ 的不动点所定义的模空间子空间 $C_2 = \{1, -1\} \subseteq \mathbb{T}$，其作用为对合$\theta : (E, \Phi) \mapsto (E, -\Phi)$。显然，该子空间包含所有由 $\mathbb{T}$ 作用的不动点，因此前述概念可以自然地推广。此外，根据[9, 定理 6.3]，，空间 $\mathcal{M}^\theta$ 包含由结构群扩张给出的映射 $\mathcal{M}_{U(p,q)} \to \mathcal{M}$的像；这些映射将 $U(p,q)$-Higgs 丛的模空间（对于满足 $p + q = n, p \leq q$ 的不同 $U(p,q)$）映入 GL(n, C)-Higgs 丛的模空间。稳定部分 $\mathcal{M}^{\theta,\ s}$ 由这些像覆盖；这些像对应的正是我们将要考虑的 Higgs 丛。

我们首先回顾 [4, 定义 3.3]中的以下定义。

定义 3.1. 一个 $U(p,q)$-*Higgs* 丛 (E, Φ)是一个形如 $E = V \oplus W$ 的全纯向量丛 E，其中 V和 W分别是秩为 p和 q的向量丛，并且 $\Phi \in H^0(\mathrm{End}(E) \otimes K)$ 是满足 $\Phi(V) \subset W \otimes K, \Phi(W) \subset V \otimes K$ 的截面。

我们用 $\mathcal{M}^s_{U(p,q)}$ 表示稳定 $U(p,q)$-Higgs 丛的模空间，其中稳定性的定义与 GL(n,C)-Higgs 丛相同。如前所述，该空间位于 $\mathcal{M}$ 内，是对合 θ 的不动点轨迹；也就是说，稳定Higgs丛 (E, Φ) 是一个 $U(p,q)$-Higgs 丛（对于某些 p和 q）当且仅当 $(E, \Phi) \simeq (E, -\Phi)$ [9, 定理 6.3]。我们经常交替使用模空间 $\mathcal{M}_{U(p,q)}$ 及其在 $\mathcal{M}$ 中的像。

注意，T-作用的每个不动点 $\mathcal{E} = (E, \Phi)$ 特别地也被 -1 固定，因此它是某个 p 和 q 对应的 $U(p,q)$-Higgs 丛。更明确地说，在分解 $E = E_0 \oplus \cdots \oplus E_{k-1}$ 中，若 $\Phi(E_i) \subset E_{i+1} \otimes K$，则 Higgs 场 Φ 将奇数指标的直和项映到偶数指标的直和项。特别地，类型 (1, 1, . . . , 1) 的不动点是准分裂群 $U(p,p)$ 或 $U(p,p+1)$ 的 Higgs 丛。

此外，回顾第 2 节中比亚乌尼基-比鲁拉理论可知，上升流 $W^+_{\mathcal{E}}$ 是一个与正权重子空间同构的仿射空间 $T^+_{\mathcal{E}}\mathcal{M} \subset T_{\mathcal{E}}\mathcal{M}$。很容易识别 $U(p,\ q)$-Higgs 丛的子空间。

注记3.2。 $U(p,q)$-Higgs 丛在 $W^+_{\mathcal{E}}$ 中，即 $\mathcal{M}_{U(p,q)} \cap W^+_{\mathcal{E}}$，通过同构 $W^+_{\mathcal{E}} \simeq T^+_{\mathcal{E}}\mathcal{M}$ 对应于正偶数权重 $T^{2+}_{\mathcal{E}}\mathcal{M} \subset T_{\mathcal{E}}\mathcal{M}$的向量子空间。
这是因为偶数权重恰好是被–1的乘法作用固定的向量子空间，而前述同构是 T-等变的。换句话说，我们可以将固定点的上升流中的$U(p,q)$-Higgs 丛轨迹视为一个子空间：

定义3.3。 $\mathcal{E}$处的偶上升流是 $W^+_{\mathcal{E}}$ 中对应于 $T^{2+}_{\mathcal{E}}\mathcal{M}$ 的子空间，记作 $W^{2+}_{\mathcal{E}}$ 。

请注意，当在 $\mathcal{M}^\theta$ 而非 $\mathcal{M}$中定义时，这与标准上升流一致。因此，我们还有以下关于非常稳定点的自然定义：

定义3.4。 我们称 $\mathcal{E}$是偶数非常稳定，若 $W^{2+}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{C} = \{\mathcal{E}\}$，其中 $\mathcal{C} = h^{-1}(0) \subseteq \mathcal{M}$表示幂零 Higgs 丛的轨迹。否则，称其为偶数摇摆。

我们指出，作为本研究的主要关注点之一，我们所考虑的偶数权重子空间$T^2_{\mathcal{E}}\mathcal{M} \subset T_{\mathcal{E}}\mathcal{M}$是拉格朗日的，因为辛形式 ω将权重为 k的子空间与权重为 $1-k$的子空间配对，正如第 2节末尾所解释的那样，因此偶数权重子空间与奇数权重子空间相配对。事实上，子簇 $\mathcal{M}^\theta \subset \mathcal{M}$ 本身是拉格朗日的，正如 [9, 定理810]中所解释的那样。

显然，非常稳定的不动点也是偶数非常稳定的。然而，摇摆不动点$\mathcal{E}$既可能仍然是偶数摇摆的，也可能变为偶数非常稳定，这取决于非平凡交集 $(W^+_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{C}) \setminus \{\mathcal{E}\}$ 是否发生在偶数权重上。我们将对偶数非常

类型为 (1， 1，....., 1) 的稳定 Higgs 丛进行分类，并指出这两种情况在此情形下都已出现。我们沿用第 2.2 小节中的记号。

命题 3.5。 设 $\mathcal{E}=(E,\ \Phi)$ 是类型为 (1，1，.....，1) 的光滑不动点。假设存在某个点 $c\in C$，使得 $b_i(c)\ =b_j(c)\ =0$，其中 $i,\ j$ 的奇偶性不同。那么 $\mathcal{E}$ 是偶数摇摆的。

证明。 证明沿用了定理 [14, 416]证明中通过 Hecke 变换构造曲线的方法。我们将看到，在这种情况下，可以沿着偶数权重构造曲线。我们有 $b_k(c)\ =b_{k+l}(c)\ =0$ 其中 $l>0$ 为奇数。我们先在 Φ_c- 不变子空间 $(L_0\oplus\cdots\oplus L_{k-1})|_c\subset E|_c$ 上进行 Hecke 变换，得到

$$E'=L_0\oplus\cdots\oplus L_{k-1}\oplus L_k(-c)\oplus\cdots\oplus L_{n-1}(-c),$$

$$\Phi'=\begin{pmatrix}0&0&\dots&0&\dots&0&0\\ b_1&0&\dots&0&\dots&0&0\\ 0&b_2&\dots&0&\dots&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\dots&\frac{b_k}{s_c}&\dots&0&0\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ 0&0&\dots&0&\dots&b_{n-1}&0\end{pmatrix},$$

其中 $s_c\in H^0(\mathcal{O}(c))$ 是典范截面。根据[14, 引理 4.17]，这个向量丛仍然稳定。我们有， $V_0=(L_k(-c)\oplus\cdots\oplus L_{n-1}(-c))|_c\subset E'|_c$ 是一个维数为（$n-k$）的 Φ'_c-不变子空间，它将（E'，Φ'）变换回（$E(-c)\ \Phi$）。现在设 $\{v_0,\dots,v_{n-1}\}$ 为 $E'|_c$的一组基，其中每个 v_j都取自相应的分量。我们定义如下的（$n-k$）维子空间:

$$V:=\langle v_{k-1}+v_{k+l},v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+l-1},v_{k+l+1},v_{n-1}\rangle\subset E'|_c$$

这是另一个 Φ'_c-不变子空间，因为对于 $m\in\{k,\dots,k+l-2\}\cup\{k+l+1,\dots,n-1\}$， $\Phi'_c(v_{k-1}+v_{k+l})\in\langle v_k,v_{k+l+1}\rangle$, $\Phi'_c(v_m)\in\langle v_{m+1}\rangle$，并且 $\Phi'_c(v_{k+l-1})\ =0$（在此分析中，我们对任意 $j>n-1$ 取 $v_j=0$ ）。现在回想一下，在 E' 的第 i 个直和项上，权重为 $-i$ 的 E' 上的 T-作用诱导出了 $Gr_{n-k}(E'|_c)$ 上的 T-作用。由此，给定 $\lambda\in\mathrm{T}$，我们定义$V_\lambda:=\lambda V$，即:

$$V_\lambda=\left\langle\lambda^{l+1}v_{k-1}+v_{k+l},v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+l-1},v_{k+l+1},v_{n-1}\right\rangle.$$

注意，这个子空间总是 $n-k$ 维的。这在纤维 $E'|_c$ 的向量子空间中给出了曲线，该曲线位于连通子簇 $S_{n-k}(\Phi'|_c)\ \subset Gr_{n-k}(E'|_c)$ 内，并且这些向量子空间在 $\Phi'|_c$ 的作用下是不变的。正如 [14, 定理 4.16], 的证明中所论证的，这转化为 Higgs 丛模空间中的一条曲线，该曲线由 $\mathcal{H}_{V_\lambda}(E',\Phi')\ \simeq\ \lambda\mathcal{H}_V(E',\Phi')$ 定义。这条曲线将 $\mathcal{H}_{V_0}(E',\Phi')\ =(E(-c)\ \Phi)$ 与另一个不动点 $\mathcal{H}_{V_\infty}(E',\Phi')$ 连接起来，其中 $V_\infty=\langle v_{k-1},v_k,v_{k+1},\dots,v_{k+l-1},v_{k+l+1},v_{n-1}\rangle$。根据 [14, 引理 4.18], 这个不动点也是稳定的。

此外，由于 l 为奇数，因此 $l+1$ 为偶数，并且有 $V_\lambda=V_{-\lambda}$，所以 $\lambda\mathcal{H}_V(E',\Phi')\ \simeq-\lambda\mathcal{H}_V(E',\Phi')$，从而该曲线在 -1 的作用下保持不变，因此它属于 $W^{2+}{}_{(E(-c)\ \Phi)}$。这表明 $(E(-c)\ \Phi)$ 是偶数摇摆的，因此 (E,Φ) 也是如此。 □

还有更多类型为 (1, 1, . . ., 1) 的偶数摇摆稳定 Higgs 丛的例子，以下命题将对此进行说明。

命题 3.6. 设 $\mathcal{E}=(E,\Phi)$ 是秩为 $n\geq4$ 的光滑不动点。假设 $b:=b_{n-2}\circ\cdots\circ b_2$在 $c\in C$ 处有一个重零点。那么 $\mathcal{E}$ 是偶数摇摆的。

证明。 证明与命题 3.5的证明完全相同，唯一的区别在于不变子空间的构造 $V \in S_{n-k}(\Phi'|_c)$。

令 $1 < i_1 < i_2 < \cdots < i_m < n-1$ 为除1和 $n-1$ 之外的所有指标，满足 $b_{i_k}(c) = 0$。我们可以假设它们都具有相同奇偶性，否则应用前一个命题。我们再次从在 $(L_0 \oplus L_1 \cdots \oplus L_{i_m-1})|_c$ 处进行 Hecke 变换开始。这得到 (E', Φ')，其形式与命题3.5的证明中相同。

现在我们将按如下方式构造 $E'|_c$ 的一组基 $\{v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}\}$。我们从任意一个非零 $v_0 \in L'_0|_c$ 开始，然后反复应用 $\Phi'|_c$，直到得到零向量。这将产生一条链：$v_1 = \Phi'|_c(v_0), v_2 = \Phi'|_c(v_1) \ldots$ 一直到 v_{i_1-1}，若 $b_1(c) \neq 0$；或者仅有 v_0，若 $b_1(c) = 0$。随后重复这一过程：在相应直和项中选取一个非零的 v_{i_1}（若 $b_1(c) = 0$，则选取 v_1），并重复上述操作，直到 v_{n-1}。按照构造，基被划分为若干条链，每条链中的每个元素都映射到下一个元素，而最后一个元素映射到零。此外，每个 v_i 都属于相应直和项 $L'_i|_c$。令 $V_0 = \langle v_{i_m}, \ldots, v_{n-1} \rangle$。

现在回顾一下，$i_m < n-1$ 和 $i_1 \geq 2$。注意，若 $m = 1$，则可能出现 $i_1 = i_m$，也就是说，b_{i_1} 在 c 处有一个重零点。无论如何，我们定义如下（$n - i_m$）维子空间：

$$V = \langle v_{i_m} + v_{i_1-2}, v_{i_m+1} + v_{i_1-1}, v_{i_m+2}, \ldots, v_{i_m+i_1-1}, v_{i_m+i_1}, \ldots, v_{n-1} \rangle .$$

它是 $\Phi'|_c$-不变的：每个生成元都映到下一个生成元，而最后一个映到零。请注意，$i_m < n-1$ 这一点很重要；否则我们会得到一个不起作用的一维空间，因为 $\langle v_{i_m} + v_{i_1-2} \rangle \mapsto \langle v_{i_1-1} \rangle$。还要注意，若 $b_{n-1}(c) = 0$，那么第二个生成元可能映到零而不是 v_{i_m+2}，但这并不影响不变性。我们计算 λV：

$$V = \left\langle v_{i_m} + \lambda^{i_m - i_1 + 2} v_{i_1-2}, v_{i_m+1} + \lambda^{i_m-i_1+2} v_{i_1-1}, v_{i_m+2}, \ldots, v_{i_m+i_1-1}, v_{i_m+i_1}, \ldots, v_{n-1} \right\rangle .$$

这再次给出了 $S_{n-k}(\Phi'|_c)$ 中的一条曲线，它连接 V_0 与另一个不同的 V_∞，使得 Hecke 变换是不动点；又因为 $i_m - i_1 + 2$ 是偶数，所以可得 $\lambda V = -\lambda V$，正如所期望的那样。 □

现在我们证明这些构成了所有偶数摇摆情形。

命题 3.7。 设 $\mathcal{E}_\delta = (E, \Phi)$ 是一个类型为 $(1, 1, \ldots, 1)$ 的光滑不动点。假设对于每个 $c \in C$，若有 $b_i(c) = b_j(c) = 0$，则 $i \equiv j \bmod 2$；并且 $b_{n-2} \circ \cdots \circ b_2$ 在 c 至多有一个零点。那么，$\mathcal{E}$ 是偶数非常稳定的。

证明。 我们对 $\deg(\delta_{n-1} + \cdots + \delta_1)$ 作归纳，因为我们已从第 2.2 节得知，次数0 的情形（即典范一致化 Higgs 丛）是偶数非常稳定的。设 $(E', \Phi') \in W^+_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{E}$ 上升流中的一个幂零元素，其完整滤过

$$0 = W_0 \subset W_1 \subset \cdots \subset W_{n-1} \subset W_n = E'$$

由命题 2.8 给出。取一个点 $c \in C$，满足 $\mu_\delta(c) \neq 0$，并首先假设 $b_{n-1}(c) = 0$。这意味着 $V' := (W_{n-1})|_c$ 是 $\Phi'|_c$-不变的；并且，如[14, 第4], 节所述，Hecke 变换 $(E'_1, \Phi'_1) = \mathcal{H}_{V'}(E', \Phi')$ 是稳定、幂零的，且属于 $(E_1, \Phi_1) := \mathcal{H}_V(E, \Phi)$ 的上升流，其中 $V = (L_0 \oplus \cdots \oplus L_{n-2})|_c \subseteq E|_c$。我们知道，$(E_1, \Phi_1)$ 是另一个类型为 $(1, 1, \ldots, 1)$ 的点，由 $\delta^1 = (\delta^1_0, \ldots, \delta^1_{n-1})$ 给出，唯一的区别在于 $\delta^1_{n-1} = \delta_{n-1} - c$。因此，根据归纳假设，$(E_1, \Phi_1)$ 是偶数非常稳定的，从而有以下两种可能：

- 若 $(E'_1, \Phi'_1) \not\simeq (E_1, \Phi_1)$，由于后者是偶数非常稳定的，我们可知 (E'_1, Φ'_1) 属于 $T_{(E_1,\Phi_1)}\mathcal{M}$ 的一个奇权空间；并且利用不变子空间 $V'_1 \subseteq E'_1|_c$ 和 $V_1 \subseteq E_1|_c$，使得 $\mathcal{H}_{V'_1}(E'_1, \Phi'_1) = (E', \Phi')$ 且 $\mathcal{H}_{V_1}(E_1, \Phi_1) = (E, \Phi)$（至多差一个固定线丛的扭转），可推出 (E', Φ') 在 (E, Φ) 的上升流中也具有奇权，因此 $(E', \Phi') \notin W^{2+}_{\mathcal{E}_\delta}$。

• 若 $(E_1', \Phi_1') \simeq (E_1, \Phi_1)$，那么满足 $\mathcal{H}_{V_1'}(E_1', \Phi_1') = (E', \Phi')$ 的一维子空间 $V_1' \subseteq E_1'|_c$，是配对 (E_1, Φ_1) 中一个 $\Phi_1|_c$-不变子空间；我们对此很熟悉，因为它来自对起始对象 (E, Φ) 作 Hecke 变换。事实上，我们有：

$$E_1 = L_0 \oplus \cdots \oplus L_{n-2} \oplus L_{n-1}(-c),$$

$$\Phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{b_{n-1}}{s_c} & 0 \end{pmatrix}.$$

设 $V = \{v_0, \dots, v_{n-1}\}$ 是 $E_1|_c$ 的一组基。根据关于 (E, Φ) 的初始假设，可能通过 $\Phi_1|_c$ 消失的基向量只有 $\{v_0, v_{j-1}, v_{n-2}, v_{n-1}\}$，其中 j 是唯一满足 $2 \le j \le n-2$ 且使 $b_j(c) = 0$ 的指标（如果存在）。必然有 $j \equiv n-1 \bmod 2$。此外，若 v_0 消失，则 $b_1(c) = 0$，因此 $n \equiv 0 \bmod 2$。最后，v_{n-2} 消失，当且仅当 b_{n-1} 在 c 处有一个重零点。

由于 Φ_1 是幂零的，所需的不变一维子空间必为 $V_1' = \langle v \rangle$，其中 $\Phi_1|_c(v) = 0$，也就是说，$v = \alpha v_0 + \beta v_{j-1} + \gamma v_{n-2} + \delta v_{n-1}$。此外，

$$\lambda \cdot V_1' = \left\langle \alpha \lambda^{n-1} v_0 + \beta \lambda^{n-j} v_{j-1} + \gamma \lambda v_{n-2} + \delta v_{n-1} \right\rangle$$

必须验证 $\lim_{\lambda \to 0} \lambda V_1' = V_1 = \langle v_{n-1} \rangle$，这意味着 $\delta \neq 0$。因此，由于表达式 $\lambda \cdot V_1'$ 中出现的 λ 的指数具有奇偶性，如果 $(E', \Phi') = \mathcal{H}_{V_1'}(E_1', \Phi_1')$ 属于偶权空间，也就是说，如果 $\lambda \cdot V_1' = -\lambda \cdot V_1'$，就必须有 $\alpha = \beta = \gamma = 0$，从而 $V_1' = V_1$，这意味着 $(E', \Phi') \simeq (E, \Phi)$。

至此，$b_{n-1}(c) = 0$ 情形的分析告一段落。现在，若 $b_{n-1}(c) \neq 0$，我们也可以假设 $b_1(c) \neq 0$。这是因为 $\mathcal{M}$ 上的对合 $(E, \Phi) \mapsto (E^*, \Phi^t)$ 自然地在不动点与上升流之间建立双射，将满足 $b_1(c) = 0$ 的点映到满足 $b_{n-1}(c) = 0$ 的点。因此，剩下的情形是：唯一的 $b_j(c) = 0$ 发生在一个满足 $2 \le j \le n-2$ 的单独 j 上，且重数为一。此情形的处理与 [14, Theorem 4.16], 的证明完全相同，下面我们将回顾该证明。

我们有一个 $\Phi'|_c$-不变的 j 维子空间 $V' := (W_{j-1})|_c$，它给出了一个幂零的 $(E_1', \Phi_1') = \mathcal{H}_{V'}(E', \Phi')$，位于 $(E_1, \Phi_1) = (E_1, \Phi_1)$ 的上升流中：$= \mathcal{H}_V(E, \Phi)$，其中 $V = (L_0 \oplus \cdots \oplus L_{j-1})|_c \subseteq E|_c$。与之前完全一样，如果 $(E_1', \Phi_1') \not\simeq (E_1, \Phi_1)$，则归纳假设给出 $(E', \Phi') \notin W_{\mathcal{E}_\delta}^{2+}$。否则，注意到 $\Phi_1'|_c$ 现在是一个正则幂零元，因此唯一的 $\Phi_1'|_c$-不变 $(n-j)$ 维子空间是 $V_1' = V_1 = (L_j \oplus \cdots \oplus L_{n-1})|_c$。因此（将所有对象张量积一个固定线丛后）我们有 $(E', \Phi') = \mathcal{H}_{V_1}(E_1, \Phi_1) = (E, \Phi)$。 □

3.1 $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$中的偶极小权重

现在我们将看到，先前得到的条件如何自然地出现在 E 的结构群 GL(n, C) 的根系背景下。我们有 $\omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n \in \Lambda^+$ 基本权。回顾一下，根的高度是其分解中单根的数量。用基本权表示时，高度为 $k \in \{1, \dots, n-1\}$ 的正根可由 $p \in \{1, \dots, n-k\}$ 索引，并表示为：

$$\alpha_{k,p} := -\omega_{p-1} + \omega_p + \omega_{p+k-1} - \omega_{p+k},$$

其中 ω_0 视为 0。特别地，单根是高度为 1、形式为 $\alpha_{1,\ p} = -\omega_{p-1} + 2\omega_p - \omega_{p+1}$ 的正根，其中 $p = 1, \ldots, n-1$。最高根 $\alpha_{n-1,\ 1} = \omega_1 + \omega_{n-1} - \omega_n$ 的高度为 $n-1$。

定义 3.8. 对于支配权 λ, μ，我们将偶偏序 定义为

$$\lambda \geq_2 \mu \iff \lambda - \mu \in \Phi^{2+},$$

其中

$$\Phi^{2+} = \left\{ \sum_{\substack{k \text{ even}, \\ 1 \leq p \leq n-k}} c_{k,p} \alpha_{k,p} : c_{k,p} \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

是偶正根的正线性组合所成的集合。该偏序下的极小元素称为偶极小。

对于权重 λ，我们称其第 i 个坐标/项 λ_i 为以下情形中的 ω_i 的系数：将 λ 写在基 $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ 下。第 i 个坐标的位置 就是 i。现在我们将刻画偶极小权重，并看到这些条件与偶数非常稳定 Higgs 丛的条件完全一致。该刻画将完全通过组合论论证来完成。

命题 3.9. 设 λ 是一个支配权，且满足以下条件之一：

1. 权重 λ 在两个位置 $1 \leq i < j \leq n-1$ 处的坐标非零，且 $i \not\equiv j$ 模 2。
2. 权重 λ 满足 $\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-2} \geq 2$。

那么 λ 不是偶极小。

证明。对于第一种情况，若 λ 在 i 和 j 处有非零坐标，其中 $j - i := k$ 是一个奇正数，则考虑 $\mu := \lambda - \alpha_{i,\ k+1}$。由于在 i 和 j 处有非零坐标，因此 μ 是支配的。根据构造，$\mu < \lambda$。

若 $\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-2} \geq 2$，选取指标 i、j，使得 $2 \leq i \leq j \leq n-2$ 满足以下条件之一：$i \neq j$ 和 $\lambda_i, \lambda_j \geq 1$，或 $i = j$ 和 $\lambda_i \geq 2$。我们可以假设这些位置具有相同奇偶性，否则就应用前面的结果。因此，写作 $k := j - i$，这是一个非负偶数。定义 $\mu := \lambda - (\alpha_{k+2,\ i} + \alpha_{k+2,\ i-1})$，与之前一样可行，因为 $\alpha_{k+2,\ i} + \alpha_{k+2,\ i-1} = -\omega_{i-1} + \omega_i + \omega_{j+1} - \omega_{j+2} - \omega_{i-2} + \omega_{i-1} + \omega_j - \omega_{j+1} = -\omega_{i-2} + \omega_i + \omega_j - \omega_{j+2}$。

□

注记 3.10. 请注意，前一个证明的最后部分表明，确实需要 $2 \leq i, j \leq n-2$：例如，如果 $i = 1$，我们就不能取 $p = i - 1 = 0$。类似地，为了使 $\alpha_{k+2,i}$ 有意义，我们需要 $i \leq n - (k-2) = n - k + 2$，这等价于 $j \leq n - 2$。

作为该证明的一个例子，取 $n = 9$ 和 $\lambda = (0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$。依照证明，我们可以考虑 $\alpha_{6,\ 2} + \alpha_{6,1} = (-1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0) + (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 0, 0) = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0, -1, 0)$，因此 $\mu = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ 低于 λ。

对于互反的情形，若不再将 ω_0 视为零，而是将其视为一个额外的线性无关向量，组合论论证会更容易。也就是说，我们将权空间 $\sim W := \langle \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n \rangle$ 视为新向量空间 $W := \langle \omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}, \omega_n \rangle$ 的子空间，后者的维数 $\widetilde{\ }$ 高一维。我们有一个投影

$$\pi \quad W \to W \qquad \widetilde{\alpha}_{k\ p} = -\omega_{p-1} + \omega_p + \omega_{p+k-1} - : 。我们像之前一样定义 :\omega_{p+k},$$

但现在是在 W 中定义（也就是说，在该表达式中不再考虑 $\omega_0 = 0$），于是 $\pi(\widetilde{\alpha}_{k,p}) = \alpha_{k,p}$。我们还将偶正格提升为：

$$\widetilde{\Phi}^{2+} = \left\{ \sum_{\substack{k \text{ even}, \\ 1 \le p \le n-k}} c_{k,p} \widetilde{\alpha}_{k,p} : c_{k,p} \in \mathbb{Z}_{\ge 0} \right\},$$

使得 $\pi(\widetilde{\Phi}^{2+}) = \Phi^{2+}$。

例如，在这个新的向量空间中，简单正根具有如下提升： $\widetilde{\alpha}_1 = (-1, 2, -1, 0, 0, \dots)$， $\widetilde{\alpha}_2 = (0, -1, 2, -1, 0, 0, \dots)$，等等。可以看出，这避免了负坐标在开头被截断的情况。在这种设定下，我们有关于 $\widetilde{\Phi}^{2+}$ 的以下事实，这些正是证明中唯一需要用到的：

引理 3.11. 取一个非零的 $\widetilde{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \widetilde{\Phi}^{2+}$。我们有：

1. x_0 和 x_n 的值不是正数。*2.* $\sum_{j \text{ 偶}} x_j$、$\sum_{j \text{ 奇}} x_j$ 和 $\sum_{j=0}^{n-2} x_j$ 的值全为零。*3.* $\sum_{j=2}^{n-2} x_j$ 的值不是负数。*4.* $\widetilde{x}$ 的第一个和最后一个非零坐标为负数。

证明。 显然，对 $\widetilde{x}$分解成的正偶根数量进行归纳即可。首先，显然任何 $\widetilde{\alpha}_{k,p}$ 对偶数 k 都具有这些性质。其次，容易验证，任意两个具有这些性质的向量之和仍满足这些性质。因此结论成立。 □

命题3.12。 设 λ 是一个非偶极小的支配权。那么以下至少有一项成立：

1. 权重 λ 在两个位置 $1 \le i < j \le n-1$ 上有非零坐标，且 $i \not\equiv j$ 模 2。*2.* 权重 λ 满足 $\lambda_2 + \cdots + \lambda_{n-2} \ge 2$。

证明。 取 $\mu < \lambda$。记 $x := \lambda - \mu \in \Lambda^{2+}$。由于 $\lambda = x + \mu$ 且 μ 在位置 1 到 $n-1$ 之间的坐标均非负，只需验证：要么 x 在位置 1 到 $n-1$ 之间具有奇偶性不同的正坐标，要么 x在位置 $\{2, \dots, n-2\}$ 上的正坐标之和（以下记作 S）满足 $S \ge 2$。

为此，我们可以通过提升 $\widetilde{x} \in \widetilde{\Lambda}^{2+}$ 的方式来处理，即 x 在某个分解中的每个正偶根。我们将证明 $\widetilde{x}$ 至少具有所需的两个性质之一；由于 x_0， $x_n \le 0$ 根据引理 3.11，那么 $x = \pi(\widetilde{x})$ 也将具有这两个性质，证明即告完成。

假设 $\tilde{x}$ 在偶数位置上的每个正坐标都介于 1 和 $n-1$ 之间。我们将证明 $S \ne 0$ 和 $S \ne 1$，从而证明 $S \ge 2$。

如果 $S = 0$，这意味着在位置 $\{2, \dots, n-2\}$上没有正项。根据引理 3.11 的第 3 部分，也没有负项。因此我们有 $\tilde{x} := (x_0, x_1, 0, \dots, 0, x_{n-1}, x_n)$。现在，如果 n 为偶数，那么根据引理 3.11 的第 2 部分，我们有 $x_0 + x_n = 0$，从而有 $x_0 = x_n = 0$，后者由引理 3.11 的第 1 部分得到。但是，由于 $x_1 = -x_{n-1}$，这与引理 3.11 的第 4 部分矛盾，因而得到矛盾。如果 n 为奇数，那么 $x_0 + x_{n-1} = 0$ 且 $x_1 + x_n = 0$。根据正项位于偶数位置这一假设，我们有 $x_1 = x_n = 0$，从而得到同样的矛盾。

如果 $S = 1$ 在 $\{2, \dots, n-2\}$ 中的位置上恰好有一个值为1的正项，设其为第i项。根据假设，i 是偶数。根据引理3.11的第3部分，从位置2 到 $n-2$ 之间，可能没有负项，也可能有一个值为 -1 的负项，位于位置 j。现在进行逐一情形分析。

- 如果 n 是奇数，则 j 为奇数的情形被排除，因为对各奇数项求和可得$x_1 + x_n - 1 = 0$，而且我们有 x_1，$x_n \leq 0$前者由假设得出，后者由引理3.11的第1部分得出。因此，我们有 $x_1 = x_n = 0$，并且 j 要么是偶数，要么根本不存在 j。无论哪种情况，对各偶数项求和可得 $x_0 + x_{n-1} \in \{0, -1\}$，由此不可能二者均为负数，这与引理3.11的第4部分矛盾。

- 如果 n 是偶数，那么 j 为奇数的情况同样可以排除：将奇数项相加，得到 $x_1 + x_{n-1} - 1 = 0$，但根据假设，x_1 和 x_{n-1} 都不是正数。因此，$x_1 = x_{n-1} = 0$和 j 是偶数，或者根本不存在 j。在这种情况下，我们需要区分：如果不存在 j，那么$x_0 + x_n = -1$，所以两者不可能同时为负数；而且由于唯一其他的非零项是位于第 i 个位置的 1，这与引理 3.11 的第 4 部分矛盾。如果存在 j，那么$x_0 + x_n = 0$，因此 $x_0 = x_n = 0$，我们再次得到与引理 3.11 第 4 部分相矛盾的结论。

完成证明的唯一剩余任务，是考察 $\tilde{x}$ 的所有正项都位于奇数位置而非偶数位置的情况。在 $\tilde{\Phi}^{2+}$ 中存在一个通过 $\omega_k \mapsto \omega_{n-k}$ 实现的对称性：如果 n 是奇数，它会交换奇数位置和偶数位置。因此，唯一剩下的情况是 n 为偶数时的情形，可完全按之前的方法处理：

- 如果 $S = 0$，那么前面关于偶数 n 的论证并未用到正项的位置为偶数这一条件，因此当它们的位置为奇数时，论证仍然成立。
- 如果 $S = 1$ 现在我们有 i 为奇数。如果 j 为偶数，对偶数项求和可得$x_0 + x_n - 1 = 0$ 这不可能（x_0，$x_n \leq 0$），因此 j 要么为奇数，要么不存在。如果它为奇数，对奇数项求和可得 $x_1 + x_{n-1} = 0$，这与引理 3.11第 4 部分矛盾。如果它不存在，则得到 $x_1 + x_{n-1} = -1$，由此可知它们不可能同时为负，从而得到同样的矛盾。

□

因此，我们可以将偶摇摆性的条件改述如下：

定理 3.13。设 $\mu\colon C \to \Lambda^+$。那么，$\mathcal{E}_\mu \in \mathcal{M}^{s\mathbb{T}}$ 是偶数非常稳定的，当且仅当对每个 $c \in C$，支配权 $\mu(c)$ 都是偶极小。

例如，与 $\mu(c) = \omega_1 + \omega_3$ 和 $\mu(d) \neq 0$ 对应的秩为 $n = 4$ 的不动点对于 $d \neq c$ 而言是偶数非常稳定的，但按通常意义来说却是摇摆的。在秩为 $n = 2$ 的情形中，每个不动点都是偶数非常稳定的；从下降流中不存在偶数权重这一点，可以更容易地推导出这一结论。这是因为秩为 $n = 2$ 时，上升流中出现的权重只有 Hitchin 基中出现的权重，即 1 和 2。于是我们知道，负权重 k 通过辛形式 ω与一个非负权重 $1 - k$配对，因此唯一可能的负权重是 $k = -1$。

最后补充一点，我们也可以研究由 $(E, \Phi) \mapsto (E, \zeta_r \Phi)$ 定义的高阶自同构，其中 ζ_r 是一个本原的 r 次单位根，从而得到子空间 $\mathcal{M}^r \subset \mathcal{M}$ 以及相应的 r-非常稳定向量丛这一概念。本文的大多数结果自然可以推广到这种情形（通过使用 r-极小权），但在这种情况下，不再有相应的实群，而且所考虑的子空间也不是拉格朗日的。

4 上升流上的 Hitchin 映射

考虑 [14] 上的非常稳定上升流的一个重要动机，是观察到 Hitchin 映射

$$h_{\mathcal{E}} := h|_{W^+_{\mathcal{E}}} : W^+_{\mathcal{E}} \to \mathcal{A}$$

限制在这些流上是真映射。此外，$W_{\mathcal{E}}^{+} \cong T_{\mathcal{E}}^{+}\mathcal{M}$ 作为$\mathbb{T}$-簇。因此，在非常稳定的情形下，$h_{\mathcal{E}}$ 是一个真映射，甚至是有限平坦的 [14, 引理 4.6],$\mathbb{T}$-等变态射，连接同维的半射影仿射空间。因此，它适合进行显式描述。

4.1 齐性空间的等变上同调

我们将用等变上同调来显式描述若干极稳定向上流上的 Hitchin 映射。首先回顾等变上同调的一些基本性质，更多详情参见 [1] 。

设 G 是连通复仿射群（或紧李群）。考虑分类 G-向量丛 $EG \to BG$，其中 EG 是可缩的。BG 称为分类空间，其上同调环可按如下方式计算：

$$H_{G}^{*} := H^{*}(BG;\mathbb{C}) \cong H^{*}(BT;\mathbb{C})^{W_G} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{t}]^{W_G},$$

其中 $\mathfrak{t} = \mathrm{Lie}(T)$ 是极大环面 $T \subset G$ 的李代数，而 W_G 是 G 的魏尔群 .

现在设 G 作用于一个簇（或流形） X。我们可以构造 Borel 商（或同伦商）$X_G := (EG \times X)/G$，它由 G 的对角作用得到，是一个 X-向量丛，底空间为 BG。其上同调环即定义为其等变上同调

$$H_{G}^{*}(X;\mathbb{C}) := H^{*}(X_G;\mathbb{C}).$$

由于 X_G 是 XG 上的一个向量丛，我们得到一个环映射 $H_G^* \to H_G^*(X;\mathbb{C})$，使 $H_G^*(X;\mathbb{C})$ 成为一个 H_G^*代数。

现在设 $T < H < G$ 是一个包含 G 的极大环面 T 的连通闭子群。由于 EG 是可缩的，我们有 $EG/H \sim EH/H$，因此可以如下计算齐性空间 G/H 的 G-等变上同调：

$$H_{G}^{*}(G/H;\mathbb{C}) \cong H^{*}((EG \times G/H)/G;\mathbb{C}) \cong H^{*}(EG/H;\mathbb{C}) \cong H_{H}^{*},$$

其环映射 $H_G^* \to H_H^*$ 来自自然映射 $BH \to BG$，该映射由嵌入 $H \subset G$ 诱导。这样，我们就可以像下图所示，通过分次代数的图示，直接计算齐性空间的等变上同调：

$$\begin{array}{ccc} H_{G}^{*}(G/H;\mathbb{C}) & \cong & \mathbb{C}[\mathfrak{t}]^{W_H} \\ \uparrow & & \uparrow \\ H_{G}^{*} & \cong & \mathbb{C}[\mathfrak{t}]^{W_G}. \end{array} \tag{4.1}$$

请注意，上述结构映射是有限自由的，这意味着它们定义了有限自由模。这是因为秩相同的齐性空间的等变上同调是等变形式的 [10, (1.2)],，例如，这是因为它们没有奇次上同调 [11, 定理 VII，第 467] 页。

我们将在下文看到，在某些极稳定向上流上，Hitchin 映射可以由适当齐性空间的等变上同调谱来建模。因此，我们也取（4.1）的谱，并记录相应的图表：

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Spec}(H_{G}^{*}(G/H;\mathbb{C})) & \cong & \mathfrak{t}/\!\!/W_H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(H_{G}^{*}) & \cong & \mathfrak{t}/\!\!/W_G. \end{array} \tag{4.2}$$

我们注意到，上同调分次的一半将在 $\mathfrak{t}/\!\!/W_H$ 上诱导 T-作用，这与由 $\mathfrak{t}$ 上的权一作用所诱导的 T-作用一致。图中的向下箭头因此变为 T-等变有限平坦态射（最终原因是等变形式性），特别是真态射。

由于我们还将考察某些对合如何作用于齐性空间的等变上同调，现记录以下引理。为表述该引理，请回忆：对于一个含有可逆元 2 且带有对合 $\theta\colon\ R \to R$ 的含幺交换环 R，余不变环 定义为

$$R_\theta := R/(r-\theta(r))_{r\in R} \cong R/(r\in R : \theta(r) = -r).$$

而如果 A 是一个交换的 R-代数，且 $\theta\colon\ A \to A$ 也作用于 A，并与其在 R上的作用相容，那么 A_θ 自然是一个 R_θ-代数，称为 余不变代数。它们与在对合 $\mathrm{Spec}(\theta) : \mathrm{Spec}(A) \to \mathrm{Spec}(A)$（我们也记作 θ）作用下构造仿射 R-概形 $\mathrm{Spec}(A)$ 的不动点概形有关。我们得到不动点概形

$$\mathrm{Spec}(A)^\theta \cong \mathrm{Spec}(A_\theta) \tag{4.3}$$

是一个仿射 R_θ-概形。利用 [24] 中的论证，我们有如下

引理 4.1。 设 G 是一个连通复约化群（或连通紧李群），且$\tau : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ 是一个复代数（光滑）对合，其中 $\mathrm{T} \subset \mathrm{G}$ 是一个 τ-稳定环面。令 G_0^τ 表示不动点群 G^τ的单位连通分支。假设

$$H^*_{\mathrm{G}} \twoheadrightarrow H^*_{\mathrm{G}_0^\tau} \tag{4.4}$$

是满射。令 $\theta := \tau^*\colon\ H^*_{\mathrm{G}} \to H^*_{\mathrm{G}}$ 表示诱导在 $B\mathrm{G}$的上同调上的作用。那么我们有余不变代数

$$(H^*_{\mathrm{G}})_\theta \cong H^*_{\mathrm{G}_0^\tau}.$$

此外，若$\mathrm{T} \subset \mathrm{H} \subset \mathrm{G}$ 是一个 τ-不变的闭连通子群，且$H^*_{\mathrm{H}} \twoheadrightarrow H^*_{\mathrm{H}_0^\tau}$ 是满射，则有如下交换图：

$$\begin{array}{ccccccc}
H^*_{\mathrm{G}}(\mathrm{G}/\mathrm{H};\mathbb{C})_\theta & \cong & (H^*_{\mathrm{H}})_\theta & \cong & H^*_{\mathrm{H}_0^\tau} & \cong & H^*_{\mathrm{G}_0^\tau}(\mathrm{G}_0^\tau/\mathrm{H}_0^\tau;\mathbb{C}) \\
\uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
(H^*_{\mathrm{G}})_\theta & \cong & (H^*_{\mathrm{G}})_\theta & \cong & H^*_{\mathrm{G}_0^\tau} & \cong & H^*_{\mathrm{G}_0^\tau}
\end{array}$$

证明。 我们知道，$H^*_{\mathrm{G}} \cong \mathsf{C}[\mathfrak{t}]^{\mathrm{W}}$是 $\mathfrak{t}$ 上的不变多项式代数，其中不变性由 $\mathfrak{t}$ 上的魏尔群 W（G 的魏尔群）给出。根据 [29,引理 6.1]，我们可以选取代数生成元 p_1、.....、p_r，它们属于 $\mathsf{C}[\mathfrak{t}]^{\mathrm{W}}$，且满足 $\tau(p_i) = \epsilon_i p_i$，其中 $\epsilon_i = \pm 1$。根据 [29,引理 6.5]，具有 $\epsilon_i = 1$的生成元给出 $\mathsf{C}[\mathfrak{t}^\tau]^{\mathrm{W}^\tau}$的生成元，其中 W^τ是 W中由 τ固定的子群，而 τ本身是 $\mathfrak{t}^\tau$上的一个反射群。因此，具有 $\epsilon_i = 1$的p_i的个数恰好等于 $\mathfrak{t}^\tau$的维数，而这又等于 G_0^τ的秩。

最后，所有 p_i 中带有 $\epsilon_i = -1$ 的项在 $\mathfrak{t}^\tau$ 上的限制都为零。因此，根据假设（4.4），带有 $\epsilon_i = 1$ 的项的限制生成 $\mathbb{C}[\mathfrak{t}^\tau]^{\mathrm{W}_{\mathrm{G}_0^\tau}} \cong H^*_{\mathrm{G}_0^\tau}$。由于这样的项有 秩$(\mathsf{G}_0^\tau)$ 个，它们的限制应当代数无关。因此，该满射的核由反不变生成元生成，从而证明了断言 $(H^*_{\mathrm{G}})_\theta \cong H^*_{\mathrm{G}_0^\tau}$。

第二个结论由第一个结论和（4.1）得出。 □

注 4.2。 满射假设（4.4）限制相当严格。对于简单的 G，只有在[24,（4.1）之后]对称对的情形下才会出现

$$(\mathrm{G},\mathrm{G}_0^\tau) \cong (\mathrm{SL}_{2n+1},\mathrm{SO}_{2n+1}), (\mathrm{SL}_{2n},\mathrm{Sp}_n), (\mathrm{SO}_{2n},\mathrm{SO}_{2n-1}),\ \text{and}\ (\mathrm{E}_6,\mathrm{F}_4).$$

所有这些例子都将在下文 §4.3 中出现。

4.2 非常稳定上升流上的显式 Hitchin 映射

首先，我们回顾 [13]如何描述 $h_k := h_{\mathcal{E}_k}$对于极稳定向上流 $W_k^+ := W^+_{\mathcal{E}_k}$明确地，其中 $\mathcal{E}_k := \mathcal{E}_{\mu_c^k}$，$c \in C$固定且 $\mu_c^k\colon\ C \to \Lambda^+$定义为 $\mu_c^k(c) = \omega_k$，并且0否则。

让我们定义在 $c \in C$ 处的求值映射

$$\mathrm{ev}_c : \mathcal{A} \to \mathbb{C}^n$$

将特征多项式 $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{A}$ 映射到

$$(a_1(c), \ldots, a_n(c)) \in K_c^1 \times \cdots \times K_c^n \cong \mathbb{C}^n$$

在将纤维 $K \cong \mathsf{C}$ 识别之后。我们还可以进一步识别

$$\mathbb{C}^n \cong \mathfrak{gl}_n /\!\!/ \mathrm{GL}_n \cong \mathfrak{t}_n /\!\!/ S_n \cong \mathrm{Spec}(H^*(B\mathrm{GL}_n, \mathbb{C})),$$

其中 $\mathfrak{gl}_n = \mathsf{Lie(GL}_n\mathsf{)}$，而 $\mathfrak{t}_n = \mathsf{Lie(T}_n\mathsf{)}$ 是极大环面 $\mathsf{T}_n \subset \mathsf{GL}_n$ 的李代数，对称群 S_n 是 GL_n 的魏尔群。接着，采用记号 $H^*_{\mathrm{GL}_n} := H^*(B\mathsf{GL}_n;\mathsf{C})$ 表示分类空间 $B\mathsf{GL}_n$ 的上同调环，我们有如下来自 [13] 的拉回图

$$\begin{array}{ccc} W_k^+ & \twoheadrightarrow & \mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}(\mathrm{Gr_k}(\mathbb{C}^n), \mathbb{C})) \\ h_k \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{A} & \overset{\mathrm{ev}_c}{\twoheadrightarrow} & \mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}) \end{array},$$

其中 $\mathsf{Gr}_k\mathsf{(C}^n\mathsf{)}$ 是 C^n 中 k 维子空间所构成的格拉斯曼流形，并带有 GL_n 的通常作用。此外，所有映射均关于 $W_k^+ \subset \mathcal{M}$ 和 $\mathcal{A}$ 上的通常 T-作用，以及由 $H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}\mathsf{(Gr}_k\mathsf{(C}^n\mathsf{);\,C)}$ 和 $H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}$ 上的分次诱导的作用，保持 T-等变。换言之，Hitchin 映射 h_k 可以由格拉斯曼流形 $\mathsf{Gr}_k\mathsf{(C}^n\mathsf{)}$ 的等变上同调来建模。

4.3 偶数非常稳定上升流上的显式 Hitchin 映射

于是我们可以询问什么刻画了偶 Hitchin 映射 $h_k^\theta : \mathsf{W}_k^{2+} \to \mathcal{A}^\theta$。注意，在自然的 T-作用下，$\theta$ 在$\mathcal{M}$ 上的作用为 $-1 \in \mathsf{T}$，因此我们可以在 $H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}\mathsf{(Gr}_k\mathsf{(C}^n\mathsf{);\,C)}$ 上诱导出 θ 的作用，并且$H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}$ 为 $-1 \in \mathsf{T}$。因此我们有

$$\begin{array}{ccc} W_k^{2+} & \twoheadrightarrow & \mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}(\mathrm{Gr_k}(\mathbb{C}^n), \mathbb{C}))^\theta \\ h_k^\theta \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{A}^\theta & \overset{\mathrm{ev}_c}{\twoheadrightarrow} & \mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{GL}_n})^\theta \end{array}, \tag{4.5}$$

因此，偶 Hitchin 映射 h_k^θ 可以由 θ-不动点概形来刻画

$$\mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}(\mathrm{Gr_k}(\mathbb{C}^n), \mathbb{C}))^\theta.$$

为简单起见，我们先从 GL_{2n} 和一个偶数 $0 < 2k < 2n$开始。为了理解不动点概形 $\mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}(\mathrm{Gr_{2k}}(\mathbb{C}^{2n}), \mathbb{C}))^\theta$，我们回顾一下格拉斯曼流形的等变上同调的一个表示。实际操作中，可以通过追踪（4.1）中的不变多项式的限制映射来完成。

设 $e_1, \ldots, e_{2k}, f_1, \ldots, f_{2n-2k}, c_1, \ldots, c_{2n}$ 为次数由其指标给出的变量。那么，分次环 $H^{2*}_{\mathrm{GL}_n}\mathsf{(Gr}_{2k}\mathsf{(C}^{2n}\mathsf{),\,C)} \cong$ 有如下表示

$$\frac{\mathbb{C}[e_1, \ldots, e_{2k}, f_1, \ldots, f_{2n-2k}, c_1, \ldots, c_{2n}]}{((t^{2k} + e_1 t^{2k-1} + \cdots + e_{2k})(t^{2n-2k} + f_1 t^{2n-2k-1} + \cdots + f_{2n-2k}) - (t^{2n} + c_1 t^{2n-1} + \cdots + c_{2n}))},$$

其中，理想由给定多项式在 t 中的系数生成。它自然是一个 $H^*_{\mathrm{GL}_{2n}} \cong \mathsf{C}[c_1, \ldots, c_{2n}]$ 代数。在这种表示下，θ的作用很容易确定，即所有次数为 i 的元素都会乘以 $(-1)^i$。为了计算不动点概形

(4.3)，我们需要确定这个 θ作用下的余不变代数。为构造余不变代数，我们将受 θ 作用后变为 -1 的代数元素加入理想中，也就是说，将奇次生成元加入理想。由此得到余不变代数的如下表示： $H^{2*}_{\mathrm{GL}_{2n}}(\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{C}^{2n}),\ \mathbb{C}))_\theta \cong$

$$\frac{\mathbb{C}[e_2,\dots,e_{2k},f_2,\dots,f_{2n-2k},c_2,\dots,c_{2n}]}{((t^{2k}+e_2t^{2k-2}+\cdots+e_{2k})(t^{2n-2k}+f_2t^{2n-2k-2}+\cdots+f_{2n-2k})-(t^{2n}+c_2t^{2n-2}+\cdots+c_{2n}))},$$

其中所有生成元的次数均为偶数，而理想由 t^2 中所示多项式的系数生成。这是一个 $\mathsf{C}[c_2,\dots,c_{2n}]$ 上的代数，我们可以且将其识别为 $H^*_{\mathrm{Sp}(n)} := H^*(B\mathsf{Sp}(n),\mathsf{C})$，即紧致酉辛群分类空间的上同调环。进而，我们可以将 $H^{2*}_{\mathrm{GL}_{2n}}(\mathsf{Gr}_{2k}(\mathsf{C}^{2n}),\mathsf{C}))_\theta$ 识别为四元数格拉斯曼流形 $\mathsf{Gr}_k(\mathsf{H}^n)$ 的等变上同调 $H^*_{\mathrm{Sp}(n)}$，其中该流形为 $\mathsf{Gr}_k(\mathsf{H}^n)$，由 H^n 中的 k 维 H-子空间构成。它是一个非厄米紧致齐性空间，同构于 $\mathsf{Sp}(n)/\mathsf{Sp}(k)\times\mathsf{Sp}(n-k)$。

我们可以用以下图示概括这一观察：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{GL}_{2n}}(\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{C}^{2n}),\mathbb{C}))^\theta & \cong & \mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{Sp}(n)}(\mathrm{Gr}_k(\mathbb{H}^n),\mathbb{C})) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{GL}_{2n}})^\theta & \cong & \mathrm{Spec}(H^{2*}_{\mathrm{Sp}(n)})\end{array} \tag{4.6}$$

因此，结合（4.5），偶上升流上的 Hitchin 映射 h^θ_{2k} W^{2+}_{2k} 可由四元数格拉斯曼流形 Gr 的等变上同调的谱来建模$_k(\mathbb{H}^n)$。

事实上，在其他一些类型中，我们也能发现余极小旗簇等变上同调的余不变代数之间类似的巧合。余极小旗簇对应于与极小余权相关的极大抛物子群，或者等价地，对应于在最高根中的系数为 1 的单根（更多背景见 [14, §8]）。例如，我们可以考虑 θ 的作用

$$H^{2*}_{\mathrm{SO}(4n+2)}(\mathrm{SO}(4n+2)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(4n),\mathbb{C}) \tag{4.7}$$

由 $(-1)^{deg}$给出，其中 $deg=*$ 是（4.7）上分次的次数。厄米对称空间 $\mathrm{SO}(4n+2)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(4n)$ 是一个偶维二次超曲面，也是特殊正交群 SO_{4n+2}的余极小旗簇。相应的余不变代数

$$H^{2*}_{\mathrm{SO}(4n+2)}(\mathrm{SO}(4n+2)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(4n),\mathbb{C})_\theta \cong H^{2*}_{\mathrm{SO}(4n+1)}(\mathrm{SO}(4n+1)/\mathrm{SO}(4n),\mathbb{C}),$$

可以识别为球面的 $\mathsf{SO}(4n+1)$-等变上同调环

$$S^{4n}\cong \mathrm{SO}(4n+1)/\mathrm{SO}(4n).$$

事实上，我们有如下图示

$$\begin{array}{ccc}H^{2*}_{\mathrm{SO}(4n+2)}(\mathrm{SO}(4n+2)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(4n),\mathbb{C})_\theta & \cong & H^{2*}_{\mathrm{SO}(4n+1)}(\mathrm{SO}(4n+1)/\mathrm{SO}(4n),\mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \left(H^{2*}_{\mathrm{SO}(4n+2)}\right)_\theta & \cong & H^{2*}_{\mathrm{SO}(4n+1)}\end{array}. \tag{4.8}$$

换言之，我们可以预期，SO_{4n+2} Higgs 模空间上的偶余极小向上流的 Hitchin 映射——等价地，$\mathsf{SO}(2n+2,2n)$-Higgs 模空间上的余极小向上流的 Hitchin 映射——可由球面 S^{4n}的等变上同调的谱来刻画。

作为最后一个例子，我们可以考虑例外型 E_6 的唯一余极小旗簇。它是复凯莱平面 $\mathrm{E}_6/\mathrm{Spin}(10)\times\mathrm{U}(1)$，这是一个紧 Hermitian 对称空间。我们可以识别其等变上同调环上 $\theta=(-1)^{deg}$ 作用的余不变代数：

$$\begin{array}{ccc} H^{2*}_{\mathrm{E}_6}(\mathrm{E}_6/\mathrm{Spin}(10)\times\mathrm{U}(1),\mathbb{C})_\theta & \cong & H^{2*}_{\mathrm{F}_4}(\mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9),\mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \left(H^{2*}_{\mathrm{E}_6}\right)_\theta & \cong & H^{2*}_{\mathrm{F}_4} \end{array}. \tag{4.9}$$

因此，我们预期可以通过实凯莱平面 $\mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9)$ 的等变上同调谱，来刻画 E_6 Higgs 模空间中偶余极小向上流上的 Hitchin 映射——等价地，刻画 $E_{6(2)}$-Higgs 模空间中余极小向上流上的 Hitchin 映射。

令人费解的是，在上述例子中，我们发现其等变上同调给出余极小旗簇的等变上同调的 θ-余不变代数的对称空间，都是 Nadler 群 [22, 表 1] 中相应 Hodge 型准分裂实形式的齐性空间。也就是说

$$\mathrm{U}(n,n)^\vee\cong\mathrm{Sp}_n,\mathrm{SO}(2n+2,2n)^\vee\cong\mathrm{SO}_{4n+1},\text{ and }\mathrm{E}_{6(2)}^\vee\cong\mathrm{F}_4.$$

据猜想， [2, §7]Nadler 群的 Higgs 丛模空间应当给出镜像的支撑；该镜像是由附属于某个实形式的 Higgs 模空间所定义的拉格朗日膜。然而，Nadler 群的这些出现仍有待理解。

更令人惊讶的是，在上述例子中，Nadler 群恰好是不动点子群，它们来自环境 Langlands 对偶群上的一个对合。相应的反全纯对合可用于在上述例子的余极小旗簇中构造[5] 一个反全纯对合，并证明拉格朗日不动点流形同构于我们上文发现的相应非厄米紧致对称空间。因此，将这个反全纯对合统一记为 τ，我们得到

$$\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{C}^{2n})^\tau\cong\mathrm{Gr}_k(\mathbb{H}^n)$$

$$(\mathrm{SO}(4n+2)/\mathrm{SO}(2)\times\mathrm{SO}(4n))^\tau\cong\mathrm{SO}(4n+1)/\mathrm{SO}(4n)$$

and

$$(\mathrm{E}_6/\mathrm{Spin}(10)\times\mathrm{U}(1))^\tau\cong\mathrm{F}_4/\mathrm{Spin}(9).$$

利用引理4.1可以证明——观察到不变多项式中恰好只有偶次生成元在 τ不动点群中保留下来——在上述每种情形下，τ 诱导出我们的

$$\tau^*=\theta=(-1)^{deg} \tag{4.10}$$

在等变上同调上，其中同样有 deg 是齐次上同调类次数的一半。反过来，这一观察以及引理4.1又可用于从几何上证明我们最终的

定理 4.3。图表(4.6)、(4.8)、(4.9) 可交换，且由对合 τ诱导。

注 4.4. 根据（4.10），由 Lefschetz 不动点定理可推得，我们的厄米对称空间的签名 $X=\mathrm{G}/\mathrm{H}$ 相同

$$\mathrm{sign}(X)=\mathrm{tr}(\theta:H^*(X)\to H^*(X))=\chi(X^\tau) \tag{4.11}$$

与相应非厄米对称空间的欧拉示性数 X^τ。量 sign(X) 与我们的讨论相关，因为它等于余不变

代数 $H^*_{\mathrm{G}}(X)_\theta$ 的秩，而后者应当计算偶 Hitchin 映射在相应偶余极小向上流上的重数。

值得注意的是，文献 [16, 第 337] 页的注释（1）研究了与式（4.11）非常相似的方法，用 X^σ 的欧拉示性数来确定我们的厄米对称空间的符号差；该方法采用由分裂实形式诱导的对合 $\sigma : X \to X$，而非由 Nadler 群给出的实形式。两者的不动点集有所不同：在 A 型情形下，前者是不动点实格拉斯曼流形，后者则是我们的四元数格拉斯曼流形；但它们在上同调上的诱导作用 $\sigma^* = \tau^* = \theta$ 一致，因为实形式 σ 与 τ 彼此内共轭。

注 4.5。对合 σ 不过为我们提供了一种思路，可以在最后一族具有非零符号差的余极小旗簇的等变上同调中构造偶 Hitchin 系统。具体而言，我们可以考虑 σ 在 $\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{C}^{2n+1})$ 上的反全纯作用，其不动点集为 $\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{C}^{2n+1})^\sigma \cong \mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{R}^{2n+1})$。于是，我们似乎有 σ，它诱导出

$$\begin{array}{ccc} H^{2*}_{\mathrm{SL}_{2n+1}}(\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{C}^{2n+1}),\mathbb{C})_\theta & \cong & H^{2*}_{\mathrm{SO}_{2n+1}}(\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{R}^{2n+1}),\mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \left(H^{2*}_{\mathrm{SL}_{2n+1}}\right)_\theta & \cong & H^{2*}_{\mathrm{SO}_{2n+1}} \end{array} . \tag{4.12}$$

这一情形的微妙之处在于，$\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{R}^{2n+1})$ 不再是单连通的，因此通常计算其等变上同调的方法（4.1）并不适用。我们可以先根据（4.1）确定其万有双重覆盖——定向格拉斯曼流形——的等变上同调环，再取覆盖映射下的不变部分。事实上，最近 [15, Theorem 5.23], 计算了 $\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{R}^{2n+1})$ 的等变上同调，结果与余不变代数$H^{2*}_{\mathrm{SL}_{2n+1}}(\mathrm{Gr}_{2k}(\mathbb{C}^{2n+1}),\mathbb{C})_\theta$ 相符。我们注意到，在这个例子中，群 SO_{2n+1} 是我们 Hodge 型准分裂实形式 $\mathrm{SU}(n, n+1)$ 的 Nadler 群 Sp_n 的朗兰兹对偶。特别是，它们的分类空间具有同构的上同调

$$H^*_{\mathrm{SO}_{2n+1}} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{t}_{\mathrm{SO}_{2n+1}}]^{\mathrm{W}_{\mathrm{SO}_{2n+1}}} \cong \mathbb{C}[\mathfrak{t}_{\mathrm{Sp}_n}]^{\mathrm{W}_{\mathrm{Sp}_n}} \cong H^*_{\mathrm{Sp}_n}, \tag{4.13}$$

因为 $\mathrm{W}_{\mathrm{SO}_{2n+1}} \cong \mathrm{W}^{\mathrm{Sp}_n}$，$\mathfrak{t}_{\mathrm{SO}_{2n+1}} \cong \mathfrak{t}^*_{\mathrm{Sp}_n}$ 且（4.13）中的两个表示可通过基林形式加以识别。

注 4.6。注 4.2 中尚未讨论的对称对最后一个例子是（SO_{4n}，SO_{4n-1}）。在此情形下，τ 将在我们的余极小旗簇的上同调上诱导一个对合

$$\theta_\tau := \tau^* : H^*_{\mathrm{SO}_{4n}}(\mathrm{SO}_{4n}/\mathrm{SO}_2 \times \mathrm{SO}_{4n-2};\mathbb{C}) \to H^*_{\mathrm{SO}_{4n}}(\mathrm{SO}_{4n}/\mathrm{SO}_2 \times \mathrm{SO}_{4n-2};\mathbb{C}),$$

它不同于通常的 Hodge 型 $(-1)^{deg}$，这不同于前面的情形（4.10）。事实上，我们预期这个 θ_τ 将是与（唯一的）准分裂实形式相对应的对合SO（$2n+1$，$2n-1$），该实形式既不是分裂实形式，也不是 Hodge 型。因此，我们预期由引理 4.1 得到的图的谱

$$\begin{array}{ccc} H^{2*}_{\mathrm{SO}_{4n}}(\mathrm{SO}_{4n}/\mathrm{SO}_2 \times \mathrm{SO}_{4n-2};\mathbb{C})_{\theta_\tau} & \cong & H^{2*}_{\mathrm{SO}_{4n-1}}(\mathrm{SO}_{4n-1}/\mathrm{SO}_{4n-2};\mathbb{C}) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \left(H^{2*}_{\mathrm{SO}_{4n}}\right)_{\theta_\tau} & \cong & H^{2*}_{\mathrm{SO}_{4n-1}} \end{array} \tag{4.14}$$

刻画了 $\mathrm{SO}(2n+1, 2n-1)$-Higgs 模空间中余极小上升流上的 Hitchin 映射。

注记 4.7。Oscar Garc´ıa-Prada 指出，注记 4.2中的对称对恰好对应于 [8, 表 1，第 2914]中的非分裂拟分裂实形式的极大分裂子群的复化。它们被用于 [8, 定理 6.13.(1)]，以构造拟分裂实形式情形中的 Hitchin-Kostant-Rallis 截面。这也解释了为何它们会出现在上文图（4.6）、（4.8）、（4.9）、（4.12）和（4.14）中关于拟分裂 Higgs 模空间的余极小向上流上的 Hitchin 映射的描述中。

参考文献

[1] Michael F. Atiyah 和 Raoul Bott。动量映射与等变上同调。《拓扑学：国际数学杂志》，23(1):1–28，1984年。[2] David Baraglia 和 Laura P. Schaposnik。Higgs 丛模空间上的实结构。《理论与数学物理进展》，20(3):525–551，2016年。[3] Andrzej Bialynicki-Birula。关于代数群作用的一些定理。《数学年刊》，98(3):480–497，1973年。[4] Steven B. Bradlow、Oscar Garc´ıa-Prada 和 Peter B. Gothen。曲面群表示与 U(p, q)-希格斯丛。《微分几何杂志》，64(1)，2003年1月。[5] Mischa Elkner。关于由等变上同调联系的对称空间对。（ISTA 轮转项目 2023）。[6] Emilio Franco、Peter B. Gothen、Andr´e G. Oliveira 和 Ana Pe´on-Nieto。Narasimhan–Ramanan 膜与摇摆Higgs丛。arXiv:2302.02736。[7] Oscar Garc´ıa-Prada、Peter B. Gothen 和 Ignasi Mundet i Riera。Hitchin-Kobayashi 对应、希格斯对与曲面群表示。2009年。arXiv:0909.4487。[8] Oscar Garc´ıa-Prada、Ana Pe´on-Nieto 和 S. Ramanan。实群的 Higgs 丛与 Hitchin-Kostant-Rallis 截面。《美国数学会汇刊》，370(4):2907–2953，2018年。[9] Oscar Garc´ıa-Prada 和 Sundararaman Ramanan。Higgs 丛模空间的对合与高阶自同构。伦敦数学会会刊，119(3):681–732，2019年9月。[10] Mark Goresky、Robert Kottwitz 和 Robert MacPherson。等变上同调、Koszul 对偶与局部化定理。《数学创见》，131(1):25–83，1998年。[11] Werner Greub、Stephen Halperin 和 Ray Vanstone。联络、曲率与上同调。《纯粹与应用数学》，第47-III卷。Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich，出版社], 纽约—伦敦，1976年。第三卷：主丛与齐性空间的上同调。[12]Tam´as Hausel。非常稳定与偶数非常稳定向上流上的 Hitchin 映射。https://www.youtube.com/watch?v=hWykyKDAWrU，2022年9月。[13] Tam´as Hausel。作为等变上同调谱与 Kirillov 代数的 Hitchin 映射。（撰写中）。[14] Tam´as Hausel 和 Nigel J. Hitchin。非常稳定Higgs丛、等变重数与镜像对称。《数学创见》，228(2):893–989，2022年5月。[15]Chen He。实格拉斯曼流形等变上同调环的局部化。arXiv:1609.06243。[16] Friedrich Hirzebruch 和 Peter Slodowy。椭圆亏格、对合与齐性自旋流形。《奉献几何》，35(1-3):309–343，1990年。[17] Nigel J. Hitchin。稳定丛与可积系统。《杜克数学杂志》，54(1):91–114，1987年。

[18] Nigel J. Hitchin。《style id='2'>伦敦数学会会刊上的《自对偶方程》，s3-55(1):59–126，1987年。[19] Nigel J. Hitchin。李群与 Teichm¨uller 空间。《style id='6'>Topology》，31(3):449–473，1992年。[20] Nigel J. Hitchin。小亏格曲线上秩二丛的重数代数。arXiv:2203.03424。[21] G´erard Laumon。幂零锥的一个整体类比。《style id='11'>杜克数学杂志》，57(2):647 – 671，1988年。[22] David Nadler。实环格拉斯曼簇上的构造层。《style id='14'>数学创见》，159(1):1–73，2005年。[23] Nitin Nitsure。曲线上半稳定对的模空间。《style id='17'>伦敦数学会会刊，s3-62(2):275–300，1991年。[24] Dmitri I. Panyushev 和 Oksana S. Yakimova。有限阶自同构、周期收缩以及 $S(\mathfrak{g})$ 的泊松交换子代数。《style id='22'>数学杂志》，303(2):论文编号 51，30，2023年。[25] Ana Pe´on-Nieto。链的摇摆模空间、等变重数与 U(n_0, n_1)-Higgs 丛。[26] Sundararaman Ramanan、Mudumbai S. Narasimhan 和 Arnaud Beauville。谱曲线与广义塞塔除子。《style id='29'>数学与应用纯粹研究杂志¨数学与应用纯粹研究杂志，398:169–179，1989年。[27] Carlos T. Simpson。光滑射影簇基本群的表示模空间 I。《style id='35'>高等科学研究所数学出版物´高等科学研究所数学出版物 ´高等科学研究所数学出版物，79(1):47– 129，1994年。[28] Carlos T. Simpson。光滑射影簇基本群的表示模空间 II。《style id='44'>高等科学研究所数学出版物´高等科学研究所数学出版物 ´高等科学研究所数学出版物，80:5–79，1994年。

[29] T. A. Springer. 有限反射群的正则元素。《数学新进展》，25:159–198，1974年。