arXiv:2303.01407v1 [math.AP] 2 Mar 2023

魏尔定律的定量版本

NIKHIL SAVALE

摘要。我们证明了一个一般估计：椭圆半经典伪微分算子的魏尔余项可用其主符号的哈密顿流的回归集体积来表示。这一结果对 Volovoy [22, 23]先前的结果作了定量化。我们的结果尤其改进了紧李群和旋转曲面的魏尔余项指数，并根据测地流的最大膨胀率和拓扑熵，对 Bérard 的魏尔余项给出了定量估计。

1. 引言

设 X^n 为一个光滑紧致的 n维流形。设$P \in \Psi_{h,\mathrm{cl}}^{m}(X)$为一个自伴半经典（$h$-）伪微分算子。我们假设 P 的全符号具有经典展开

$$P = p_h^W, \tag{1.1}$$

$$p_h \sim p_0 + hp_1 + \ldots, \tag{1.2}$$

其中 $p_j \in C^\infty(T^*X)$、 $j = 0$为 1、2、.....。设 $[a,b] \subset \mathbb{R}$，并假设主符号 p_0 在此区间内椭圆，即 $p_0^{-1}[a,b] \Subset T^*X$ 是紧致的。因此，当 h 充分小时， P_h 在 $[a,b]$ 中的谱是离散的。记 $N_h[a,b]$ 为该区间内特征值的数量。此外，假设 a、 b 对主符号 p_0而言是正则值，因此能级 $\Sigma_a := p_0^{-1}(a) \subset T^*X$、 $\Sigma_b := p_0^{-1}(b) \subset T^*X$ 是定义良好的超曲面，其上的主符号哈密顿流 $e^{tH_{p_0}}$ 也定义良好。简记 $e^{tH_{p_0}^a} := e^{tH_{p_0}}\big|_{\Sigma_a}$ 为限制在给定能级上的哈密顿流；以$T_0^a > 0$表示受限哈密顿流$e^{tH_{p_0}^a}$的最短周期。这些能级还带有典范李维尔体积形式 $d\nu$，使得 $dp_0 \wedge d\nu$ 是在 T^*X中这些能级邻域内的典范辛体积形式。

接下来，定义回归集

$$S_{T,\varepsilon}^a := \left\{(x,\xi) \subset \Sigma_a | \exists t \in \left[\frac{1}{2}T_0^a, T\right] \text{ s.t. } d\left(e^{tH_{p_0}}(x,\xi),(x,\xi)\right) \leq \varepsilon\right\} \tag{1.3}$$

以及 $S^{a,}{}_{T}{}^{e}{}_{\varepsilon,} := \left\{(x,\xi) \subset \Sigma_a | d\left((x,\xi)\ S_{T,\varepsilon}^a\right) \leq \varepsilon\right\}$对每个 $T > \frac{1}{2}T_0^a$, $\varepsilon > 0$。这些集合是相对于相空间上的距离函数 d 定义的，该距离函数等价于流形距离，不过符号中省略了上述 (1.3) 对 d 的依赖。

接下来，我们进一步对每个 $\ell > 0$ 通过以下方式定义埃伦费斯特时间

$$T_E^{\ell,a}(h) := \begin{cases} \infty; & \text{if } \exists C > 0 \text{ s.t. } \left|\partial^\alpha e^{tH_{p_0}^a}\right| \lesssim |t|^C,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{2n-1}, \\ \frac{|\ln h|}{\Lambda_{\max}^a + \ell}; & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{1.4}$$

$$\text{where} \quad \Lambda_{\max}^a := \limsup_{t\to\infty} t^{-1} \sup_{x\in\Sigma_a} \ln\left|de^{tH_{p_0}}(x)\right| \tag{1.5}$$

2020 数学主题分类。58C40,81Q20, 37B20。N. S. 部分获得德国研究联合会资助的项目 CRC/TRR 191 的支持。

分别是雅可比矩阵的上确界范数以及哈密顿流在能级 Σ_a 上的最大扩张率。

我们的主要结果是关于 P 的魏尔余项的一般估计。

定理 1. 设 $P \in \Psi_{h,cl}^{m}(X)$ 是一个自伴的、 h-伪微分算子，在区间 $[a,b]$ 内椭圆，且其主符号在端点处非临界。对于每个 $\varepsilon = ch^{\delta}, \delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $c, \ell > 0$ 和 $T \leq \left(\frac{1}{2} - \delta\right) . \max \left\{ T^{\ell}{}_{,E}{}^{a}(h) \quad T^{\ell}{}_{,E}{}^{b}(h) \right\}$，该区间的 *Weyl* 计数函数满足

$$N_h[a,b] = (2\pi h)^{-n} \left[vol\ p_0^{-1}[a,b] + h\left(\int_{\Sigma_a} p_1 d\nu - \int_{\Sigma_b} p_1 d\nu \right) + hR_h \right] \tag{1.6}$$

$$with \quad |R_h| \leq (\nu(\Sigma_a) + \nu(\Sigma_b)) T^{-1} + O\left(\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{a,e}\right) + \nu\left(S_{T,\varepsilon}^{b,e}\right) + T^{-2} + h^{1-2\delta} \right) \tag{1.7}$$

当 $h \to 0$ 时。

根据回归集体积的估计，上述结果可导出一些有趣的特例。首先，它以半经典形式重现 Hörmander [10] 和 Duistermaat-Guillemin [4], 的经典结果，参见 [13, 18]。也就是说，在端点非临界的假设下，首先可由 (1.6) 得到 $N_h[a,b] = (2\pi h)^{-n} \left[\mathrm{vol} p_0^{-1}[a,b] + O(h) \right]$，这是 Hörmander 魏尔定律的半经典版本。其次，进一步假设周期哈密顿轨道集合在两个能级 Σ_a, Σ_b 上的测度为零，则有 (1.6) 中的$R_h = o(1)$。这是 Duistermaat 和 Guillemin 的魏尔定律的半经典版本。令 ε, T 相互独立即可得到这一结果。由于当 $\varepsilon \to 0$ 和 $T \to \infty$ 时，回归集体积趋近于周期哈密顿轨道集合的测度，因此可重现 Duistermaat-Guillemin 的结果。

一般估计的另一个有趣特例是哈密顿流为接触阿诺索夫流的情形。在这种情况下，可以证明回归集体积随时间满足指数估计 $\nu\left(S^{a,\ T^{e},\ \varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{2n-1} e^{(2n-1)\Lambda_{\max}^{a} T}\right)$ 且指数仍为最大膨胀率 (1.5)（见下文第 4.1 节）。在此情形下，通过适当选择 ε, T，可以在 Weyl 定律中获得对数改进。接触阿诺索夫哈密顿流的一个具体例子是负曲率流形上的测地流。因此，若特别考虑 $P_h = h^2 \Delta_g$ 为负曲率黎曼度量的半经典拉普拉斯算子（X, g），且 $a < 0, b = 1$, 便可得到以下 Bérard 的魏尔定律的定量版本。

推论 2. 设$(X^n,\ g)$ 是一个紧致负曲率黎曼流形。半经典拉普拉斯算子 $P_h : = h^2 \Delta_g$ 的 *Weyl* 计数函数具有如下渐近性质

$$N_h[0,1] = (2\pi h)^{-n} vol(S^*X)[1 + hR_h] \tag{1.8}$$

$$where \quad |R_h| \leq 4\Lambda_{max} |\ln h|^{-1} + o\left(|\ln h|^{-1}\right) \tag{1.9}$$

$$\leq \frac{16}{2n-1} \mathtt{h}_{top} |\ln h|^{-1} + o\left(|\ln h|^{-1}\right), \tag{1.10}$$

当 $h \to 0$ 时，渐近性质由最大膨胀率 Λ_{max} 和余球丛 S^*X上测地流的拓扑熵 $\mathtt{h}_{top}$ 表示。

接下来的特例涉及半经典拉普拉斯算子 $P_h = h^2 \Delta_g$，它对应于紧李群 G上的双不变度量。相应的哈密顿流再次是测地流，并且可简单地由群作用给出。在此情形下，埃伦费斯特时间 (1.4) 为无穷大。尽管单位余球丛上测地流的回归集体积

可以证明满足界 $\nu\left(S^{1}{}_{,T^{e},\varepsilon}\right)=O(\varepsilon^{p-1}T^{p})$，其中 $p=\mathrm{rk}G$ 为该李群的秩（见第 4.2 节）。由此可将下面的 Weyl 定律作为推论得到。

推论 3. 设 G 是一个配备双不变黎曼度量的紧李群。半经典拉普拉斯算子 $P_h:=h^2\Delta_g$ 的 *Weyl* 计数函数具有如下渐近性质

$$N_h[0,1]=(2\pi h)^{-n}\,vol(S^*X)\left[1+O\left(h^{1+\frac{p-1}{3p+1}}\right)\right], \tag{1.11}$$

当 $h\to 0$ 时，其中 $p=rk\ G$ 是该李群的秩。

我们最后讨论半经典拉普拉斯算子 $P_h=h^2\Delta_g$ 在旋转曲面 X 上的情形。相应的哈密顿流仍然是测地流。在这种情况下，它可以简洁地描述为底曲面上的一个常微分方程（见下文 4.3）。埃伦费斯特时间 (1.4) 仍为无穷大。假设该曲面严格凸，则它有一条赤道；这是一条长度最大的唯一旋转不变测地线 $\gamma_E\subset X$。对于任意点$x\in\gamma_E$，赤道返回映射 θ：$S_x^*X\to\gamma_E$ 都有定义。该映射将单位余向量 $\xi\in S_x^*X$ 映射为测地线 $\exp_x(t\xi)$ 与赤道γ_E的首次交点 $\theta(\xi)$。赤道返回映射的消失阶定义为

$$r_{\xi_0}:=\mathrm{ord}_{\xi_0}\left[\theta(\xi)-\theta(\xi_0)\right]=\min\left\{l|\partial_\xi^l\left[\theta(\xi)-\theta(\xi_0)\right](\xi_0)\neq 0\right\},\quad r_{\xi_0}\geq 1,$$

对每个余向量 $\xi_0\in S_x^*X$。函数 r_{ξ_0} 在 ξ_0 上是上半连续的，并且显然由于旋转不变性而与 x 无关。我们令

$$\begin{aligned} r&:=\sup_{\xi_0\in S_x^*X} r_{\xi_0}\\ &=\sup_{\xi_0\in S_x^*X}\mathrm{ord}_\xi\left[\theta(\xi)-\theta(\xi_0)\right] \end{aligned} \tag{1.12}$$

为其在 $\xi_0\in S_x^*X$ 上的上确界。有一些标准公式可以根据给定的曲面方程计算 θ 和 r（见 [2]）。对于非 Zoll 的实解析曲面，$r<\infty$ 是有限的；而对于一般曲面，有 $r=1$。

在下文所述的一些进一步假设下，可以证明单位余球丛上测地流的回归集体积满足 $\nu\left(S^{1,}{}_{T^{e},\varepsilon}\right)=O\left(\varepsilon^{\frac{1}{r}}T^{1-\frac{1}{r}}\right)$，其中 ε、T 足够小。这便给出了下面的 Weyl 定律作为推论。

推论 4. 设 $(X^2,\ g)$ 为一个紧致严格凸旋转曲面。半经典拉普拉斯算子 $P_h:=h^2\Delta_g$ 的 *Weyl* 计数函数满足以下渐近性质

$$N_h[0,1]=(2\pi h)^{-2}\,vol(S^*X)\left[1+O\left(h^{1+\frac{1}{4r-1}}\right)\right], \tag{1.13}$$

如 $h\to 0$。这里 r (1.12) 是赤道返回映射的最大消失阶 p.

这些推论均基于在主要定理 1 中对 ε, T 的巧妙选择。

定理 1 中的一般估计，或者说证明该估计所用的论证，似乎早已是众所周知的结果。Volovoy 的文章 [22, 23] 以及 Ivrii 最近出版的著作第 4.5 节 [13, 4] 中都阐述了该估计的精度较低的版本。然而，这些文献中似乎并未给出我们推论中各个指数和常数的具体确定。我们的研究动机源于作者最近的一篇文章 [21]，其中证明了一个关于耦合狄拉克算子的类似结果。我们的方法基于对 Dimassi-Sjöstrand 著作 [3, 第 11] 章中论证的改进。

第一个推论 2 对负曲率流形的 Bérard 的魏尔定律 [1] 进行了量化。它将最大膨胀率 (1.9) 或拓扑熵 (1.10) 确定为相关量，这似乎是一个新结果。不过，由于已有更强的猜想，这或许意义不大。例如

人们猜想，对于非算术曲面或一般曲面，余项为 $R_h = O(h^{2-})$。尽管自 Bérard 的文章发表以来，尚无已知的更好改进。

Volovoy 也研究了第二和第三个推论。他在 (1.11)、(1.13) 中证明了余项估计 $O\left(h^{1+\delta}\right)$，其中 $\delta > 0$ 取某个值。而我们的推论量化了δ 可取的值。在推论 3 中，特别研究了环面 $G = \mathbb{T}^n$ 的情形（见[7, 第 3] 章）。在这种情况下，尖锐的 Weyl 余项据推测为

$$R_h = \begin{cases} O\left(h^{\frac{3}{2}-}\right), & \text{for } n = 2, \ \text{(Gauss circle problem)} \\ O\left(h^{2-}\right), & \text{for } n = 3, 4, \\ O\left(h^2\right), & \text{for } n \geq 5. \end{cases}$$

[1]这一结论在维数 $n \geq 4$ 时已知。虽然 $R_h = O\left(h^{\frac{285}{208}-}\right), O\left(h^{\frac{5}{3}-}\right)$ 是低维情形 $n = 2$、分别为 3 时目前已知的最佳结果 [12]。我们的推论 3 对环面的结果不如这些已知结果。然而，估计式 (1.11) 对任意李群而言似乎是新的。对于一般的 G，Weyl 定律中尖锐指数的确定问题仍未解决。

最后我们指出，尽管这并非本文关注的重点，我们的方法几乎肯定也能对局部 Weyl 定律，以及特征函数的 L^2, L^∞ 范数和平均值等，给出类似的改进。

本文结构如下。第 2 节介绍半经典分析和动力系统的一些预备知识。第 3 节基于对 [3] 中论证的修改，证明本文的主要结果——定理 1 中的一般魏尔定律。第 4 节考察若干动力系统的回归集，包括阿诺索夫流 4.1、李群上的测地流 4.2，以及旋转曲面上的测地流 4.3。最后，第5节基于第 4 节得到的体积界证明推论 2、3 和 4。

2. 预备知识

本节回顾本文中用到的半经典分析和动力系统的一些预备概念。

2.1. 半经典分析。 首先，我们介绍本文将用到的一些半经典分析的必要事实， [3, 8]并提供标准参考文献。符号空间$S^m\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$定义为映射 $a : (0,1]_h \to C^\infty\left(\mathbb{R}^{2n}_x, {}_\xi\mathbb{C}\right)$ 所构成的空间，其中每个半范数

$$\|a\|_{\alpha,\beta} := \sup_{x,\xi,h} \langle\xi\rangle^{-m+|\beta|} \left|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi;h)\right|, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n,$$

均有限。更精细的类$a \in S^m_{\mathrm{cl}}\left(\mathbb{R}^{2n}; \mathbb{C}^l\right)$ 由经典符号组成，其中的符号存在一个与 h无关的序列 a_k, $k = 0, 1, \ldots,$ 满足

$$a - \left(\sum_{k=0}^{N} h^k a_k\right) \in h^{N+1} S^m\left(\mathbb{R}^{2n}\right), \ \forall N. \tag{2.1}$$

上述符号类中的任意给定 $a \in S^m\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ $S^m_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^{2n})$，都可通过魏尔量子化定义一个算子单参数族 $a^W \in \Psi^m\left(\mathbb{R}^{2n}\right)$ $\Psi^m_{\mathrm{cl}}(\mathbb{R}^{2n})$。量子化的施瓦茨核为

$$a^W := \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{i(x-y).\xi/h} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi; h\right) d\xi.$$

[1]这里， $O(h^{\alpha-})$表示一个对于每个 $\epsilon > 0$都是 $O\left(h^{\alpha-\epsilon}\right)$的项。

上述伪微分算子类在通常的复合运算和形式伴随运算下封闭。此外，这些类在坐标变换下保持不变。因此，可以在光滑紧流形 X 上不依赖坐标地定义作用于 $C^\infty(X;\mathbb{C})$ 的算子类 $\Psi^m(X)$ $\Psi^m_{\mathrm{cl}}(X)$。

经典伪微分算子 $A\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(X;E)$ 的主符号定义为 $\sigma(A)\in S^m(X)\subset C^\infty(T^*X;\mathbb{C})$ 中的一个元素。它由其完整维尔符号的符号展开式 (2.1) 中的 $\sigma(A)=a_0$ 首项给出。主符号具有乘法性，与伴随运算可交换，并构成一个符号正合列

$$\begin{aligned}\sigma(AB)&=\sigma(A)\sigma(B)\\ \sigma(A^*)&=\overline{\sigma(A)}\\ 0\to h\Psi^m_{\mathrm{cl}}(X)\to&\Psi^m_{\mathrm{cl}}(X)\xrightarrow{\sigma}S^m(X),\end{aligned}\tag{2.2}$$

其中形式伴随是相对于辅助密度定义的。量子化映射

$$\begin{aligned}&\mathrm{Op}:S^m(X)\to\Psi^m_{\mathrm{cl}}(X)\quad\text{ satisfying}\\ &\sigma(\mathrm{Op}(a))=a\in S^m(X)\end{aligned}\tag{2.3}$$

给出了主符号映射的逆映射。有时我们使用另一种记法 $\mathrm{Op}(a)=a^W$。然而，上述量子化映射并非规范映射，且取决于坐标图册的选择以及相应的单位分解。由符号的乘法性质 (2.2)，可得 $\left[a^W,b^W\right]\in h\Psi^{m-1}{}_{\mathrm{cl}}(X)$。其主符号由泊松括号给出

$$\frac{i}{h}\sigma\left(\left[a^W,b^W\right]\right)=\{a,b\}\in S^m(X).$$

每个 $A\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(X)$ 都具有一个不变定义的波前集，它是余切丛 T^*X 的纤维径向紧化的子集 $WF(A)\subset\overline{T^*X}$。其局部定义如下：$(x_0,\xi_0)\notin WF(A)$，$A=a^W$，当且仅当存在一个开邻域 $(x_0,\xi_0;0)\in U\subset\overline{T^*X}\times(0,1]_h$ 使得 $a\in h^\infty\langle\xi\rangle^{-\infty}C^k\left(U;\text{ 对于所有 }k,\ \mathbb{C}^l\right)$。波前集在加法、乘法和伴随运算下满足以下基本性质

$$\begin{aligned}WF(A+B)&\subset WF(A)\cup WF(B),\\ WF(AB)&\subset WF(A)\cap WF(B)\quad\text{ and}\\ WF(A^*)&=WF(A).\end{aligned}$$

当且仅当 $A\in h^\infty\Psi^{-\infty}(X;E)$ 时，波前集 $WF(A)=\emptyset$ 为空；我们称两个算子 $A=B$ 在 $U\subset\overline{T^*X}$ 上微局部地，如果 $WF(A-B)\cap U=\emptyset$。

若算子 $A\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(X)$ 满足 $\langle\xi\rangle^m\sigma(A)^{-1}$ 存在且在 T^*X 上一致有界，则称其为椭圆算子。若 $A\in\Psi^m_{\mathrm{cl}}(X)$，$m>0$ 形式自伴，且 $A+i$ 为椭圆算子，则它作为作用于 $L^2(X;E)$ 上的无界算子是本质自伴的（定义域为 $C_c^\infty(X;E)$）。Beals 引理进一步表明，其预解式 $(A-z)^{-1}\in\Psi^{-m}{}_{\mathrm{cl}}(X)$，$z\in\mathbb{C},\mathrm{Im}z\neq0$ 存在且为伪微分算子。现在，Helffer-Sjöstrand 公式将此类算子的函数 $f(A),f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示为其预解式的形式

$$f(A)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\bar\partial\tilde f(z)(A-z)^{-1}dzd\bar z,$$

˜其中 f 表示 f 的近解析延拓。进一步有

$$WF\left(f\left(A\right)\right)\subset\Sigma_{\mathrm{spt}(f)}^{A} \tag{2.4}$$

$$\coloneqq\bigcup_{\lambda\in\mathrm{spt}(f)}\Sigma_{\lambda}^{A} \tag{2.5}$$

$$\text{where}\quad\Sigma_{\lambda}^{A}=\{(x,\xi)\in T^{*}X|\sigma\left(A\right)\left(x,\xi\right)=\lambda\} \tag{2.6}$$

是 λ-能级的经典 A。

2.1.1. 类 $\Psi_{\delta}^{m}(X)$。我们还需要一个更奇异的标量符号类 $S_{\delta}^{m}(\mathbb{R}^{2n};\mathbb{C})$，它对每个 $0\leq\delta<\frac{1}{2}$ 都有定义。若且唯若函数 $a:(0,1]_{h}\to C^{\infty}\left(\mathbb{R}_{x,\ \xi}^{2n};\ \mathbb{C}\right)$ 满足以下条件，则称其属于此类：

$$\left\|a\right\|_{\alpha,\beta}:=\sup_{x,\xi,h}h^{(|\alpha|+|\beta|)\delta}\left|\partial_{x}^{\alpha}\partial_{\xi}^{\beta}a(x,\xi;h)\right| \tag{2.7}$$

是有限的 $\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}_{0}^{n}.$。该算子类在复合、伴随和坐标变换等标准运算下也封闭；因此可以在紧流形上定义相同的奇异伪微分代数 $\Psi_{\delta}^{m}(X)$。类 $S_{\delta}^{m}(X)$ 是函数族 $a:(0,1]_{h}\to C^{\infty}(T^{*}X;\mathbb{C})$，它们在每个坐标图和诱导平凡化下都满足估计式（2.7）。这样的函数族可以量子化为 $a^{W}\in\Psi_{\delta}^{m}(X)$，满足 $a^{W}b^{W}=(ab)^{W}+h^{1-2\delta}\Psi_{\delta}^{m+m'-1}\left(X\right)$，其中 $b\in S_{\delta}^{m'}\left(X\right)$ 是另一个函数族。$\Psi_{\delta}^{0}(X)$ 中的算子在 $L^{2}\left(X\right)$ 上一致有界。最后，算子 $A\in\Psi_{\delta}^{m}(X;E)$ 的波前集也以类似方式定义，并满足与之前相同的基本性质。

2.2. 动力学不变量。 这里陈述一些关于动力系统及其不变量的事实，这些事实将在本文中用到。其证明可见文献 [14, 15]。

设 $V\in C^{\infty}(TY)$ 是紧黎曼流形 $\left(Y,g^{TY}\right)$ 上的光滑向量场，其维数为 m。若存在一列数 $\lambda_{1}\left(y\right)>\ldots>\lambda_{k}\left(y\right)$ 以及切空间 $T_{y}Y=\oplus_{j=1}^{k}E_{j}\left(y\right)$ 的分解，使得.....则称点 $y\in Y$ 是 V 的流的一个正则点

$$\limsup_{t\to\infty}t^{-1}\ln\left|de^{tV}\left(y\right)u\right|=\lambda_{j}\left(y\right), \tag{2.8}$$

$\forall u\in E_{j}\left(y\right)\ 1\leq j\leq k$。正则点的集合 $R\subset Y$ 是一个满测度的博雷尔集。数 $\lambda_{j}(y)$ 和子空间 $E_{j}(y)$ 分别称为流在 $y\in Y$ 处的**李雅普诺夫指数** 和**特征子空间**。流的最大膨胀率是这些数中最大值的上确界

$$\begin{aligned}\Lambda_{\max}\left(V\right)&\coloneqq\limsup_{t\to\infty}t^{-1}\sup_{y\in Y}\ln\left|de^{tV}\left(y\right)\right|\\&=\sup_{y\in R\subset Y}\max_{j=1,\ldots,k}\lambda_{j}\left(y\right).\end{aligned} \tag{2.9}$$

众所周知，$\Lambda_{\max}(V)$ 是关于 V 的上半连续函数。

此外，将正李雅普诺夫指数之和定义为博雷尔函数也很有用

$$\begin{aligned}&\chi:R\to\mathbb{R}\\&\chi\left(y\right)\coloneqq\sum_{\lambda_{j}(y)>0}\lambda_{j}\left(y\right)\dim\ E_{j}\left(y\right).\end{aligned} \tag{2.10}$$

若不存在正的李雅普诺夫指数，则令 $\chi(y):=0$。

接下来，设 μ_Y 是 Y 上的博雷尔概率测度，并且在 V的流作用下保持不变。将 $\mathcal{P}=\{P_1,\ldots,P_N\}$把 Y划分为可测子集时，其测度论熵定义为 $H(\mathcal{P}):=-\sum_{P\in\mathcal{P}}\mu_Y(P)\ln\mu_Y(P)$。关于该划分的流的测度论熵定义为

$$H\left(\mathcal{P},V\right):=\lim_{N\to\infty}N^{-1}H\left(\bigvee_{j=0}^{N}e^{-jV}\mathcal{P}\right).$$

这里， $\mathcal{P}_1\bigvee\mathcal{P}_2$表示两个划分 $\mathcal{P}_1$、$\mathcal{P}_2$的最小公共细化。对所有有限可测划分取上述量的上确界，即为该流的测度论熵

$$h_{\mu_Y}\left(V\right)=\sup_{\mathcal{P}}H\left(\mathcal{P},V\right). \tag{2.11}$$

而拓扑熵则是对所有 V-不变博雷尔概率测度 $\mathcal{M}_V$ 取上述量的上确界

$$h_{\mathrm{top}}\left(V\right):=\sup_{\mu_Y\in\mathcal{M}_V}h_{\mu_Y}\left(V\right). \tag{2.12}$$

测度论熵与李雅普诺夫指数之间的关系由马古利斯–鲁埃勒不等式给出 [15, 定理 10.2]

$$h_{\mu_Y}\left(V\right)\leq\int_Y\chi\left(y\right)d\mu_Y. \tag{2.13}$$

若 μ_Y 关于某个光滑测度绝对连续，则佩辛公式表明上述不等式取等号。根据定义 (2.9)、(2.10) 和 (2.12)，容易看出马古利斯–鲁埃勒不等式特别推出

$$h_{\mathrm{top}}\left(V\right)\leq m.\Lambda_{\max}. \tag{2.14}$$

3. Weyl Law

现在，我们基于对 [3, 第 11] 章中证明的改写，利用波迹渐近来证明定理 1。我们的任务是使其中的论证具有定量性。

3.1. 波迹渐近。 首先，考虑能带 $\Sigma_{[a-\alpha,a+\alpha]}$，对每个 $\alpha>0$。用简写 $e^{tH_{p_0}^{[a-\alpha,a+\alpha]}}:=e^{tH_{p_0}}\big|_{\Sigma_{[a-\alpha,a+\alpha]}}$ 表示限制在给定能带上的哈密顿流。并用 $T_0^{[a-\alpha,a+\alpha]}>0$ 表示受限哈密顿流的最短周期$e^{tH_{p_0}^{[a-\alpha,a+\alpha]}}$。仿照 (1.3) 和 (1.4)，能带的回归集定义如下

$$S_{T,\varepsilon}^{[a-\alpha,a+\alpha]}:=\left\{(x,\xi)\subset\Sigma_{[a-\alpha,a+\alpha]}|\exists t\in\left[\frac{1}{2}T_0^{[a-\alpha,a+\alpha]},T\right]\text{ s.t. }d\left(e^{tH_{p_0}}\left(x,\xi\right),\left(x,\xi\right)\right)\leq\varepsilon\right\}, \tag{3.1}$$

以及 $S_{T,\varepsilon}^{[a-\alpha,a+\alpha],e}:=\left\{(x,\xi)\subset\Sigma_{[a-\alpha,a+\alpha]}|d\left((x,\xi)\ S_T^{[a-\alpha,a+\alpha]},\varepsilon\right)\leq\varepsilon\right\}$。下面还需要定义中间回归集 $S_{T,\varepsilon}^{[a-\alpha,a+\alpha],\frac{1}{2}}:=\left\{(x,\xi)\subset\Sigma_{[a-\alpha,a+\alpha]}|d\left((x,\xi)\ S_T^{[a-\alpha,a+\alpha]},\varepsilon\right)\leq\frac{\varepsilon}{2}\right\}$。同样，$d$ 表示能带上的一种相空间距离，它与该能带上的某个黎曼距离等价。

此外

$$T_E^{\ell,[a-\alpha,a+\alpha]}(h) := \begin{cases} \infty; & \text{if } \exists C>0 \text{ s.t. } \left|\partial^\alpha e^{tH_{p_0}^{[a-\alpha,a+\alpha]}}\right| \lesssim |t|^C,\ \forall \alpha \in \mathbb{N}_0^{2n-1}, \\ \frac{|\ln h|}{\Lambda_{\max}^{[a-\alpha,a+\alpha]}+\ell}; & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{3.2}$$

$$\text{and} \quad \Lambda_{\max}^{[a-\alpha,a+\alpha]} := \limsup_{t\to\infty} t^{-1} \sup_{x\in\Sigma_{[a-\alpha,a+\alpha]}} \ln\left|de^{tH_{p_0}}(x)\right| \tag{3.3}$$

是 E 分别为能带的埃伦费斯特时间和最大膨胀率 .

接下来，我们在 $\Sigma_{[a-\alpha,a+\alpha]} \subset T^*X$ 上选择如下的方形微局部单位分解 $\left\{A_j = a_j^W\right\}_{j=0}^{M_h} \in \Psi_{h,\delta}^0(X)$、$\delta \in \left[0,\frac{1}{2}\right)$,$M_h = O\left(h^{-2n\delta}\right)$, $\sum_{j=0}^{M_h} A_j^2 = 1$。其中第一个选取为满足 $a_0 \in C^\infty(T^*X;[0,1])$，且 $A_0 = a_0^W$ 自伴,

$$a_0 = \begin{cases} 1, & \text{on } S_{T,\varepsilon}^{[a-\alpha,a+\alpha],\frac{1}{2}} \\ 0, & \text{on } \left(S_{T,\varepsilon}^{[a-\alpha,a+\alpha],e}\right)^c. \end{cases}$$

通过应用 Whitney 延拓定理 [11, 第 2 节3]，可以找到一个在 $\Psi_{h,\delta}^0(X)$ 中满足正确符号估计的算子。对于 $S_{T\,\varepsilon}^{[a-\alpha,a+\alpha]\,\frac{1}{2}}{}_{,}$ 的补集中的点 p ，对每个 $d(p,p') \le \frac{\varepsilon}{4}$，都有$d\left(e^{tH_{p_0}}p', p'\right) \ge \varepsilon$。因此，它被半径为 $\frac{\varepsilon}{4}$ 的开球覆盖 U_j，使得$d\left(e^{tH_{p_0}}U_j, U_j\right) \ge \frac{\varepsilon}{4}$ 对于 $t \in \left[\frac{1}{2}T_0^{[a-\alpha,a+\alpha]}, T\right]$ 成立。应用埃伦费斯特时间 [16, 第 3 节4], 中的 Egorov 定理可知，单位分解中覆盖 $\left(S_{T,\varepsilon}^{[a-\alpha,a+\alpha],e}\right)^c$ 的其余伪微分算子 $A_1, \ldots, A_M \in \Psi_{h,\delta}^0(X)$,$\varepsilon = ch^\delta$ 可以选取得满足

$$A_{j,t} := e^{-\frac{it}{h}P_h} A_j e^{\frac{it}{h}P_h} \in \Psi_{h,\delta'}^0(X)$$

$$\text{for} \quad \delta' = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}-\delta\right)\frac{\ell}{\Lambda_{\max}^{[a-\alpha,a+\alpha]}+\ell} \tag{3.4}$$

$$\text{with} \quad WF(A_j) \cap WF(A_{j,t}) = \emptyset, \tag{3.5}$$

$j = 1$、.....、M和 $t \in \left[\frac{1}{2}T_0^{[a-\alpha,a+\alpha]}\right.$、$\left.\left(\frac{1}{2}-\delta\right)T_{,\ E}^{[a-\alpha,a+\alpha]}(h)\right]$。

接下来选取 h–相互独立的函数 f、$\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$，使得 f、$\check{}\theta = \mathcal{F}^{-1}\theta \ge 0$ 以及 s pt (θ)包含于原点的一个充分小的邻域中。相对于流形上的辅助密度计算正自伴算子的迹范数和迹，二者均等于一，因此有

$$\left\|A_0 f(P)\left(\mathcal{F}_h^{-1}\theta\right)(\lambda - P)A_0\right\|_{\mathrm{tr}} = \mathrm{tr}\left[A_0^2 f(P)\left(\mathcal{F}_{h_n}^{-1}\theta\right)(\lambda - P)\right] \tag{3.6}$$

$$= f(\lambda)\,\theta(0)\,(2\pi h)^{-n}\left[\int_\Sigma a_0^2 d\nu + O\left(h^{1-2\delta}\right)\right] \tag{3.7}$$

$$\le f(\lambda)\,\theta(0)\,(2\pi h)^{-n}\left[\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{\lambda,e}\right) + O\left(h^{1-2\delta}\right)\right] \tag{3.8}$$

对每个 $\lambda \in \mathbb{R}$。这里，利用标准的傅里叶积分算子拟参数，并按照 [3, 第 10] 章中的驻相公式，对上文式 (3.7) 中迹的渐近性质进行计算。$h^{1-2\delta}$ 中的指数来自驻相公式中每个 h-项对应的振幅 $a_0^2 \in S_\delta^0$的两个导数。最后一个方程 (3.8) 可对任意 $\check{}\ \theta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ 声称成立。条件 $\theta \ge 0$ 可按照 [3, 式 11.5] 中的做法去除。

接下来，对于 $\theta_c(t) := \theta(t-c)$，有 $\mathcal{F}_h^{-1}\theta_c(x) = e^{i\frac{xc}{h}}\mathcal{F}_h^{-1}\theta(x)$。此外，由于 $e^{ic(\lambda-P)}$是一个酉算子，(3.6) 左端的迹范数因此在以下操作下保持不变:

对 θ 作平移。将任意一个支撑可能依赖于 h 的紧支撑函数 $\theta \in C_c^\infty(-T,T)$，表示为若干个 $O(T)$ 平移后的函数之和，其中这些函数的紧支撑位于原点附近且与 h 无关，我们便得到

$$\left\|A_0 f(P)\left(\mathcal{F}_h^{-1}\theta\right)(\lambda-P)A_0\right\|_{\mathrm{tr}} = f(\lambda)\|\theta\|_{C^0}(2\pi h)^{-n} O\left(T\left[\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{\lambda,e}\right)+O\left(h^{1-2\delta}\right)\right]\right).$$

此外，埃伦费斯特时间内的 Egorov 定理给出

$$\mathrm{tr}\left[A_j^2 e^{\frac{it}{h}P}\right] = \mathrm{tr}\left[e^{\frac{it}{h}P}A_{j,t}A_j\right] = O\left(h^\infty\right) \tag{3.9}$$

对于 $\theta \in C_c^\infty\left(\frac{1}{2}T_0^{[a-\alpha,a+\alpha]},T\right)$，$T \le \left(\frac{1}{2}-\delta\right)T^{\ell,}{}_E{}^{[a-\alpha,a+\alpha]}(h)$，根据 (3.5)。现在注意到，$A_j$ 被选取为带 $\Sigma_{[a-\alpha,a+\alpha]}$ 上的平方单位分解。虽然 $WF(f(P)) \subset \Sigma_{[a-\alpha,a+\alpha]}$ 对于 $f \in C_c^\infty(a-\alpha,a+\alpha)$，由 (2.4) 可知。因此，结合最后两个等式可得

$$\left|\mathrm{tr}\left[f(P)\left(\mathcal{F}_h^{-1}\theta\right)(\lambda-P)\right]\right| = f(\lambda)\|\theta\|_{C^0}(2\pi h)^{-n} O\left(T\left[\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{\lambda,e}\right)+O\left(h^{1-2\delta}\right)\right]\right) \tag{3.10}$$

对于 $f \in C_c^\infty(a-\alpha,a+\alpha)$ 和 $\theta \in C_c^\infty(-T,T)$，其中 $T \le \left(\frac{1}{2}-\delta\right)T^{\ell,}{}_E{}^{[a-\alpha,a+\alpha]}(h)$。

最后，我们将任意的 $\theta \in C_c^\infty(-T,T)$ 写成 $\theta = \theta_1+\theta_2$ 的和：一个在原点附近充分小的区域内有支撑、与 h 无关的函数 θ_1，以及一个在远离原点处有支撑的函数 θ_2。对 θ_2 应用估计式 (3.10)，同时再次利用针对与 h 无关的函数 θ_1 的傅里叶积分算子拟参数，可得

$$\mathrm{tr}\left[f(P)\left(\mathcal{F}_h^{-1}\theta\right)(\lambda-P)\right] = f(\lambda)\theta(0)(2\pi h)^{-n}\left[\int_{\Sigma_\lambda} d\nu + \|\theta\|_{C^0} O\left(T\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{\lambda,e}\right)+Th^{1-2\delta}\right)\right] \tag{3.11}$$

对于 $f \in C_c^\infty(a-\alpha,a+\alpha)$ 和 $\theta \in C_c^\infty(-T,T)$，其中 $T \le \left(\frac{1}{2}-\delta\right)T^{\ell,}{}_E{}^{[a-\alpha,a+\alpha]}(h)$。

3.2. 陶伯论证。接续上一个等式 (3.11)，定理 1 的证明余下部分采用标准的陶伯论证，参见 [3, 第 11] 章或 [20, 附录 B]。为完整起见，我们在下文给出详细证明。

首先，选取一个偶的、h–无关的施瓦茨函数 $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，使得 $\check{\theta} \ge \frac{1}{1+\epsilon}$，$\epsilon > 0$，在 $[0,1]$ 上，且 $1 = \theta(0) = \int d\xi \check{\theta}(\xi)$。令 $\theta_T(x) = \theta(T^{-1}x)$，满足 $\check{\theta}_T(\xi) = T\check{\theta}(T\xi)$，并选取满足 $f(\lambda) = 1$ 的 $f \in C_c^\infty(a-\alpha,a+\alpha)$，迹展开 (3.11) 现在给出

$$\begin{aligned}\frac{T}{(1+\epsilon)h}N\left(\lambda,\lambda+T^{-1}h\right) \le& \mathrm{tr}\left[f(P)\left(\mathcal{F}_h^{-1}\theta_T\right)(\lambda-P)\right]\\ =&(2\pi h)^{-n}\left[\int_{\Sigma_\lambda} d\nu + O\left(T\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{\lambda,e}\right)+Th^{1-2\delta}\right)\right]\end{aligned}$$

对每个 $\epsilon > 0$, $\lambda \in [a-\alpha,a+\alpha]$ 和 $T \le \left(\frac{1}{2}-\delta\right)T^{\ell,}{}_E{}^{[a-\alpha,a+\alpha]}(h)$。因此

$$N\left(\lambda,\lambda+T^{-1}h\right) \le (2\pi h)^{-n}\left[T^{-1}\int_{\Sigma_\lambda} d\nu + O\left(\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{\lambda,e}\right)+h^{1-2\delta}\right)\right] \tag{3.12}$$

对每个 $\ell > 0$, $\lambda \in [a-\alpha,a+\alpha]$ 和 $T \le \left(\frac{1}{2}-\delta\right)T^{\ell,}{}_E{}^{[a-\alpha,a+\alpha]}(h)$。

接下来，将 P 的谱测度定义为 $\mu_f(\lambda') := \sum_{\lambda\in\text{谱}(P)} f(\lambda)\,\delta(\lambda-\lambda')$。现在选取另一个偶函数 $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，使其变换满足 $\mathrm{spt}\left(\check{\theta}\right) \subset [-1,1]$,

$1 \geq \check{\theta}(\xi) \geq 0$ 和 $\int \check{\theta}(\xi) d\xi = 1$。现在由 [3, 第 10] 章给出的波迹的两项渐近性质可得

$$\mu_f * \left(\mathcal{F}_h^{-1}\theta\right)(\lambda) = f(\lambda)\theta(0)(2\pi h)^{-n}\left[\underbrace{\int_{\Sigma_\lambda} d\nu}_{=:c_0(\lambda)} + h\underbrace{\int_{\Sigma_\lambda} p_1 d\nu}_{=:c_1(\lambda)} + O\left(h^2\right)\right],$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$，其中第二项涉及算子 P 的次主符号 p_1。

上式两边都涉及 λ 中的施瓦茨函数，因此上面的余项可以替换为$O\left(\frac{h^2}{\langle\lambda\rangle^2}\right)$。进一步积分得到

$$\int_{-\infty}^{a} d\lambda \int d\lambda' \left(\mathcal{F}_h^{-1}\theta\right)(\lambda - \lambda')\mu_f(\lambda') \tag{3.13}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} d\lambda \int d\lambda'' \left(\mathcal{F}_h^{-1}\theta\right)(\lambda - \lambda'')\mu_f(\lambda'' + a) \tag{3.14}$$

$$= \theta(0)(2\pi h)^{-n}\left[\int_{-\infty}^{a} d\lambda f(\lambda) c_0(\lambda) + h\int_{-\infty}^{a} d\lambda f(\lambda) c_1(\lambda) + O\left(h^2\right)\right].$$

现在注意到

$$\int_{-\infty}^{0} d\lambda \left(\mathcal{F}_h^{-1}\theta\right)(\lambda - \lambda'') = 1_{(-\infty,0]}(\lambda'') + \phi_0\left(\frac{\lambda''}{h}\right) \tag{3.15}$$

其中 $\phi_0(x) := \int_{-\infty}^{0} dt \check{\theta}(t - x) - 1_{(-\infty,0]}(x)$ 是一个关于所有导数都快速衰减的函数，是奇函数，在 $\mathbb{R}_x \setminus \{0\}$ 上光滑，并且对于 $x \neq 0$ 满足 $\phi_0'(x) = \check{\theta}(-x)$。

接下来利用 $x \geq 0$，我们计算

$$\begin{aligned}
&\left|\phi_0(x) - \phi_0 * \check{\theta}_T(x)\right| \\
=&\left|\int dy \left[\phi_0(x) - \phi_0\left(x - T^{-1}y\right)\right]\check{\theta}(y)\right| \\
\leq&\int_{y \leq xT} dy \left|\phi_0'(c(x,y))\right| T^{-1}|y|\check{\theta}(y) + 2\int_{y \geq xT} dy\check{\theta}(y) \\
\leq&T^{-1}\underbrace{\int_{-\infty}^{xT} dy|y|\check{\theta}(y)}_{=\theta_1(xT)} + 2\underbrace{\int_{y \geq xT} dy\check{\theta}(y)}_{=\theta_2(xT)}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

其中 $c(x,y) \in [x - T^{-1}y, x]$。对 $x \leq 0$ 也有类似的估计。

现在将 (3.16) 的第二项与 $\mu_f(\lambda'' + a)$ 配对，得到

$$\int d\lambda'' \theta_2\left(\frac{\lambda'' T}{h}\right)\mu_f(\lambda'' + a) \leq (2\pi h)^{-n}\left[T^{-1}\|f\|_{C^0}\left(\int_{\Sigma_a} d\nu\right) + O\left(\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{a,e}\right) + h^{1-2\delta}\right)\right] \tag{3.17}$$

将 $\mathbb{R}_{\lambda''}$ 用大小为 $O(T^{-1}h)$ 的区间覆盖，并使用维尔估计 (3.12)。类似的估计

$$\int d\lambda'' T^{-1}\theta_1\left(\frac{\lambda'' T}{h}\right)\mu_f(\lambda'' + a) = O\left(h^{-n}T^{-1}\left[T^{-1} + \nu\left(S_{T,\varepsilon}^{a,e}\right) + h^{1-2\delta}\right]\right) \tag{3.18}$$

于是得到

$$\begin{aligned}(3.19)\qquad &\int d\lambda''\left[\phi_0\left(\frac{\lambda''}{h}\right)-\phi_0*\check{\theta}_T\left(\frac{\lambda''}{h}\right)\right]\mu_f\left(\lambda''+a\right)\\ &\leq(2\pi h)^{-n}\left[T^{-1}\left\|f\right\|_{C^0}\left(\int_{\Sigma_a}d\nu\right)+O\left(T^{-2}+\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{a,e}\right)+h^{1-2\delta}\right)\right].\end{aligned}$$

结合(3.16)、(3.17)和(3.18)可得。

上式(3.19)中的第二项通过将(3.11)与 ϕ_0 相乘并积分估计为

$$\begin{aligned}\int d\lambda''\phi_0*\check{\theta}_T\left(\frac{\lambda''}{h}\right)\mu_f\left(\lambda''+a\right)&=(2\pi h)^{-n}\left[\int d\lambda\phi_0\left(\lambda\right)f\left(0\right)\theta\left(0\right)c_0\left(0\right)+O\left(\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{\lambda,e}\right)+h^{1-2\delta}\right)\right]\\ (3.20)\qquad &=O\left(\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{\lambda,e}\right)h^{-n}+h^{-n+1-2\delta}\right).\end{aligned}$$

因为 ϕ_0 是奇函数。

最后，s et $f_a^-=1_{(-\infty,a]}(x)$ $f(x)$。结合(3.13)、(3.15)、(3.19)和(3.20)可得 s

$$\begin{aligned}\operatorname{tr} f_a^-\left(P\right)&=\int d\lambda' 1_{(-\infty,a]}\left(\lambda'\right)\mu_f\left(\lambda'\right)\\ &=(2\pi h)^{-n}\left(\int_{-\infty}^a d\lambda f\left(\lambda\right)c_0\left(\lambda\right)+h\int_{-\infty}^a d\lambda f\left(\lambda\right)c_1\left(\lambda\right)+O\left(h^2\right)\right)\\ &\quad+\int d\lambda''\phi_0\left(\frac{\lambda''}{\sqrt{h}}\right)\mu_f\left(\lambda''+a\right)\\ &=(2\pi h)^{-n}\left(\int_{-\infty}^a d\lambda f\left(\lambda\right)c_0\left(\lambda\right)+h\int_{-\infty}^a d\lambda f\left(\lambda\right)c_1\left(\lambda\right)\right)+R\left(h\right),\\ \text{with}\quad R\left(h\right)&\leq(2\pi h)^{-n+1}\left[T^{-1}\left\|f\right\|_{C^0}\left(\int_{\Sigma_a}d\nu\right)+O\left(T^{-2}+\nu\left(S_{T,\varepsilon}^{a,e}\right)+h^{1-2\delta}\right)\right],\end{aligned}$$

对于每个 $\ell>0$和 $T\leq\left(\frac{1}{2}-\delta\right)T^{\ell,\ {}^{[a-\alpha,a+\alpha]}_{E}}(h)$。令 $\alpha\to0$，并利用 $\Lambda_{\max}$的上半连续性，可得上述结论对每个 $\ell>0$和 $T\leq\left(\frac{1}{2}-\delta\right)T^{\ell,\ {}^{a}_{E}}(h)$均成立。

对于 $f_b^+(x)=1_{[b,\infty)}(x)$ $f(x)$的泛函迹，也可以证明类似的估计。将计数函数写成两个此类泛函迹之差，即可得到定理 1 的 Weyl 定律。

4. 回归的例子

本节将估计各种流的回归集体积。这些估计将在下一节（第5节）中用于证明引言中陈述的推论。

4.1. 阿诺索夫流。首先考虑紧流形 Y^m 上维数为 m的阿诺索夫向量场 V的回归集。回顾一下，若存在常数 $c_1>0$ 和一个连续分裂，则称向量场 V为阿诺索夫向量场

$$\begin{aligned}TY&=\mathbb{R}\left[V\right]\oplus E^u\oplus E^s\quad\text{ such that}\\ \left\|e^{tV}\big|_{E^s}\right\|&\leq e^{-c_1t},\\ (4.1)\qquad \left\|e^{-tV}\big|_{E^u}\right\|&\leq e^{-c_1t},\end{aligned}$$

$\forall t>0$，即在 V 的流作用下保持不变。这里的范数是相对于流形上的某个黎曼度量 g^{TY} 而取的。对于这样的向量场，其回归集 $S_{T,\ \varepsilon}$ (1.3),

李雅普诺夫指数 $\lambda_j(y)$ (2.8)、最大膨胀率 $\Lambda_{\max}$ (2.9) 和拓扑熵$\mathrm{h}_{\mathrm{top}}$ (2.12) 也可以类似地定义。

令 $\lambda > \Lambda_{\max}$ 大于最大膨胀率。根据最大膨胀率的定义以及流的半群性质，存在 $c > 0$，使得

$$\begin{aligned} \left\| \left(e^{tV}\right)^* f \right\|_{C^2} &\leq c e^{\lambda t} \|f\|_{C^2} \quad \text{and} \\ d^{g^{TY}}\left(e^{tV} x_1, e^{tV} x_2\right) &\leq c e^{\lambda t} d^{g^{TY}}(x_1, x_2) \end{aligned} \tag{4.2}$$

对所有 $t > 0$、x_1、$x_2 \in Y$ 和 $f \in C^\infty(Y)$ 均成立。由此可以

$$\nu\left(S_{T,\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^m e^{m\lambda T}\right) \tag{4.3}$$

$$\nu\left(S^e_{T,\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^m e^{m\lambda T}\right), \tag{4.4}$$

按照 [5] 中给出的论证，证明回归集体积的指数界。也就是说，上述回归集有一个显然的提升

$$\tilde{S}_{T,\varepsilon} \coloneqq \left\{ (y,t) \,|\, t \in \left[\frac{1}{2}T_0, T\right] \text{ s.t. } d^{g^{TY}}\left(e^{tV}x, x\right) \leq \varepsilon \right\} \subset Y \times \mathbb{R} \tag{4.5}$$

在投影到第一个 Y 因子下满足 $\pi_Y\left(\tilde{S}_{T,\varepsilon}\right) = S_{T,\ \varepsilon}$。

体积界 (4.3)、(4.4) 随即由以下命题得出 .

命题 5. 对于每个 $\lambda > \Lambda_{max}$，提升 $\tilde{S}_{T,\varepsilon}$ (4.5) 满足体积估计

$$\nu_{Y\times\mathbb{R}}\left(\tilde{S}_{T,\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^m e^{m\lambda T}\right) \tag{4.6}$$

相对于 $Y \times \mathbb{R}$ 上的黎曼乘积测度。

证明。 首先，我们断言存在具有以下意义的 $C, \delta > 0$： 对于每个 $\varepsilon > 0$ 以及每一对 $(x,t), (x',t') \in \tilde{S}_{T,\varepsilon}$，满足 $|t - t'| \leq \delta$, $d^{g^{TY}}(x, x') \leq \delta e^{-\lambda t}$ 的情形，均有

$$|t - t'| \leq C\varepsilon, \quad d^{g^{TY}}\left(x, \cup_{t\in[-1,1]} e^{tV} x'\right) \leq C\varepsilon. \tag{4.7}$$

取 δ 足够小，并利用 (4.2)，我们可在一个足够小的测地坐标图中进行讨论。由于 V 方向与 $E^u \oplus E^s$ 横截，我们可以用 $e^{tV}(x')$,$t \in [-1,1]$ 替换 x'，从而令 $x - x' \in E^u(x) \oplus E^s(x)$。利用 (4.2) 并对 x, t 作泰勒展开，我们得到

$$\begin{aligned} \left| e^{tV}(x) - e^{t'V}(x') - de^{tV}(x)(x - x') - V\left(e^{tV}(x')\right)(t - t') \right| &\leq c_3 e^{\lambda t} |x - x'|^2 + c_3 |t - t'|^2 \\ &\leq c_3\delta |x - x'| + c_3\delta |t - t'|. \end{aligned}$$

由于 $(x,t), (x',t') \in S_{T,\varepsilon}$ 上述结果可得

$$\begin{aligned} c_3\delta |x - x'| + c_3\delta |t - t'| + 2\varepsilon &\geq \left| \left(I - de^{tV}(x)\right)(x - x') - V\left(e^{tV}(x')\right)(t - t') \right| \\ &\geq c_4 |x - x'| + c_4 |t - t'| \end{aligned}$$

上面的第二行由阿诺索夫性质推出。接下来只需选择相对于 c_3, c_4 足够小的 δ，即可得到 (4.7)。

最后，设 x_j、$j = 1$、$\ldots N$ 是满足 $d^{g^{TY}}(x_i$、$x_j) \geq \delta e^{-\lambda T}$ 的极大点集。由于以这些点为中心的球 $\left\{ B_{\frac{\delta e^{-\lambda T}}{2}}(x_j) \right\}_{j=1}^N$ 两两不相交，由总

体积的计算可得界 {v11}。此外，这些集合

$$B_{j,k} \coloneqq B_{2\delta e^{-\lambda T}}\left(x_j\right) \times \left[\frac{1}{2}T_0 + k\delta, \frac{1}{2}T_0 + (k+1)\,\delta\right],$$

$$S_{j,k} \coloneqq \tilde{S}_{T,\varepsilon} \cap B_{j,k}, \qquad j = 1, \ldots N, \quad k = 0, \ldots, 1 + \left[\delta^{-1}T\right],$$

分别覆盖 $Y \times \left[\frac{1}{2}T_0, T\right]$ 和 $S_{T,\ \varepsilon}$。根据 (4.7)，轨道的邻域尺寸较小 $O(\varepsilon)$

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2}T_0 + \left(k + \frac{1}{2}\right)\delta}_{=:t_k}, \cup_{t\in[-1,1]} e^{(t_k+t)V}\left(x_j\right)\right)$$

˜体积为 $O(\varepsilon^m)$，然后覆盖 $S_{T,\ \varepsilon}$ 从而证明 (4.6)。 □

4.1.1. Λ_{max} 与 $\mathtt{h}_{top}$。 在第 2.2 节中，我们说明了不等式 $h_{\mathrm{top}}(V) \leq m.\Lambda_{\max}$ (2.14) 如何由紧流形m维流形 Y上的向量场 V的一般流的马古利斯-鲁埃勒公式推出。本节将证明，当进一步假设该向量场为阿诺索夫向量场时，这两个不变量之间存在反向不等式。具体而言，我们将证明以下结论。

定理6。 对于紧 m维流形 Y上的阿诺索夫向量场 V，有

$$\frac{m}{4}.\Lambda_{max} \leq h_{top}\left(V\right). \tag{4.8}$$

我们将在本小节末尾经过一些准备后证明上述结论。具体来说，为证明上述结论，我们将使用拓扑熵的等价鲍恩-马古利斯定义。对于每个 $T > 0$，在 Y上定义鲍恩距离如下:

$$d_T^{g^{TY}}\left(y_1, y_2\right) \coloneqq \sup_{t\in[0,T]} d^{g^{TY}}\left(e^{tR}y_1, e^{tR}y_2\right),$$

其中， $d^{g^{TY}}$表示流形Y上某个黎曼度量 g^{TY}所对应的黎曼距离。(T,ϵ) 分离子集 $S \subset Y$是一个有限集合，其中任意两个不同的点相对于上述 d_T的距离至少为 ϵ。用 $N(T,\epsilon)$表示 Y中(T,ϵ)分离集的最大基数。流(2.12)的拓扑熵现在等价地定义为

$$\mathtt{h}_{\mathrm{top}} = \mathtt{h}_{\mathrm{top}}\left(V\right) \coloneqq \lim_{\epsilon\to 0}\left(\limsup_{T\to\infty} \frac{\ln N\left(T,\epsilon\right)}{T}\right). \tag{4.9}$$

接下来，对于每个 $s \in (0,1],$，令 $\mathcal{D}_s(Y)$、 $\mathcal{D}_{s-}(Y)$分别表示流形上满足以下条件的相容扭曲距离函数 d 的集合

$$d^{g^{TY}} \lesssim d \lesssim \left(d^{g^{TY}}\right)^s$$

$$d^{g^{TY}} \lesssim d \lesssim \left(d^{g^{TY}}\right)^{s-\epsilon}, \quad \text{for some } \epsilon > 0,$$

分别。以下包含关系显然成立

$$\mathcal{D}_s\left(Y\right) \subset \mathcal{D}_{s'}\left(Y\right),$$

$$\mathcal{D}_{s-}\left(Y\right) \subset \mathcal{D}_{s'-}\left(Y\right), \quad s' < s.$$

此外， $\mathcal{D}_s(Y)$、 $\mathcal{D}_{s-}(Y)$中的所有距离都定义相同的流形拓扑，而 $\mathcal{D}_1(Y)$是所有与 $d^{g^{TY}}$ 等价的距离的集合，因此包含所有黎曼距离。

对于每个距离 $d \in \mathcal{D}_s(Y)$ $\mathcal{D}_{s-}(Y)$，我们都可以将其时间一流的利普希茨常数与之关联。

$$L_d = L_d\left(e^V\right) \coloneqq \sup_{x_1 \neq x_2} \frac{d\left(e^V y_1, e^V y_2\right)}{d\left(y_1, y_2\right)}. \tag{4.10}$$

以下关于时间一映射的局部偏斜度的概念也很有用。它定义为

$$SL_d\left(e^V\right) \coloneqq \sup_{\varepsilon>0} \inf_{0<d(x_1,x_2)<\varepsilon} \frac{d\left(e^V y_1, e^V y_2\right)}{d\left(y_1, y_2\right)}.$$

现在我们有以下关于拓扑熵的不等式。

引理 7. T 阿诺索夫向量场的拓扑熵(2.12) 满足以下不等式

$$\frac{m}{2}\left(\inf_{d \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}-}(Y)} \ln L_d\right) \leq \mathtt{h}_{top} \leq m\left(\inf_{d \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}-}(Y)} \ln L_d\right)$$

与 $\mathcal{D}_{\frac{1}{2}-}(Y)$ 中利普希茨常数的对数的下确界(4.10) 相关。

证明。 令 HD(d) 表示流形相对于距离$d \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}-}(Y)$的豪斯多夫维数。不等式

$$\mathrm{HD}(d) \ln SL_d \leq \mathtt{h}_{\mathrm{top}} \leq \mathrm{HD}(d) \ln L_d \tag{4.11}$$

是众所周知的（见 [6, 19] 或 [24, 定理 7.15]）。此外，$\frac{m}{2} \leq \mathrm{HD}(d) \leq m$ 由定义可得。这就证明了引理的一半

$$\mathtt{h}_{\mathrm{top}} \leq m\left(\inf_{d \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}-}(Y)} \ln L_d\right). \tag{4.12}$$

现在只需构造一个距离序列 $d_k \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}-}(Y)$，$k = 1, 2, \ldots$，使得 $m \ln L_{d_k}$ 当 $k \to \infty$时趋近于 $2\mathtt{h}_{\mathrm{top}}$。对于扩张映射 [6, 19]，，可以构造这样的距离序列 d_k（另见 Hamenstädt 距离的构造 [9]）。然而，时间一映射 e^V 在流方向上并不具有扩张性。尽管如此，流 e^V [17]满足以下不稳定性，可以弥补扩张性的缺失：存在一个正常数 $c_2 > 0$，使得有如下蕴含

$$y \neq e^{tV}x,\ \forall t \in \mathbb{R} \implies d^{g^{TY}}\left(e^{jV}x, e^{jV}y\right) > c_2 \ \text{ for some } j \in \mathbb{Z}. \tag{4.13}$$

事实上，上述证明还给出了以下更强的结论：对于任意 $\epsilon > 0$，存在正数常量 $c > 0$、 $\alpha > 1$，使得当 $\alpha_\epsilon \coloneqq \alpha + \epsilon$ 时，有如下更强的推论

$$\begin{aligned} &y \neq e^{tV}x,\ \forall t \in \mathbb{R},\ d^{g^{TY}}(x, y) < c_2, \\ \implies &\alpha d^{g^{TY}}(x, y) \leq \max\left\{d^{g^{TY}}\left(e^V x, e^V y\right), d^{g^{TY}}\left(e^{-V}x, e^{-V}y\right)\right\} \leq \alpha_\epsilon d^{g^{TY}}(x, y). \end{aligned}$$

常量 α 可以与阿诺索夫条件定义（4.1）中的指数 c_1 联系起来。现在我们定义

$$N(x, y) \coloneqq \begin{cases} \infty, & x = y, \\ \inf\left\{N \in \mathbb{N}_0 | \max_{j \in [-N, N]} d^{g^{TY}}\left(e^{jV}x, e^{jV}y\right) > c_2 \alpha^{-|j|}\right\}, & x \neq y. \end{cases}$$

以下界限是直接的

$$\max\left\{0, \frac{\ln \frac{c_2}{d(x,y)}}{\ln \alpha \alpha_\epsilon}\right\} \leq N(x, y) \leq \max\left\{0, \frac{\ln \frac{c_2}{d(x,y)}}{\ln \alpha}\right\}. \tag{4.14}$$

现在我们令

$$\rho(x,y) := \alpha^{-N(x,y)}, \quad \text{satisfying} \tag{4.15}$$

$$\frac{d^{g^{TY}}(x,y)}{c_2} \le \rho(x,y) \le \left[\frac{d^{g^{TY}}(x,y)}{c_2}\right]^{\ln\alpha/\ln(\alpha\alpha_\epsilon)} \quad \text{for } d^{g^{TY}}(x,y) \le c_2. \tag{4.16}$$

因此可知，ρ 定义了与 $d^{g^{TY}}$相同的流形拓扑，但它并未完全定义出一个距离。不等式 (4.14) 进一步给出 $d^{g^{TY}}(x,y) \ge \frac{c_2}{2} \implies N(x,y) \le \ln^2\alpha \implies \alpha^N \le \ln\alpha_{\ln 2\ln\alpha} = 2$。对 $d^{g^{TY}}$应用三角不等式可得

$$\min\{N(x,y), N(y,z)\} \le M + N(x,z) \quad \text{and}$$
$$\rho(x,z) \le 2\max\{\rho(x,y), \rho(y,z)\} \quad \forall x,y,z \in Y$$

作为 ρ的三角不等式的一个较弱版本。现在应用 Frink 度量化定理，得到 Y 上存在一个度量 D，满足

$$D(x,y) \le \rho(x,y) \le 4D(x,y). \tag{4.17}$$

因此，D定义了与 $d^{g^{TY}}$相同的拓扑。此外，根据 (4.16) 和 (4.17)，我们还有 $D \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}-}(Y)$。

现在只需证明：$\rho\left(e^{jV}x, e^{jV}y\right) \le \alpha^j\rho(x,y)$ 在积中的对角线某个邻域 $V_j \subset Y \times Y$ 上取等号。由 (4.17) 可得

$$D\left(e^{jV}x, e^{jV}y\right) \le 4\alpha^j D(x,y), \quad \forall x,y \in Y,$$
$$D\left(e^{jV}x, e^{jV}y\right) \ge \frac{1}{4}\alpha^j D(x,y), \quad \forall (x,y) \in V_j. \tag{4.18}$$

因此

$$L_D\left(e^{jV}\right) \le 4\alpha^j \le 16SL_D\left(e^{jV}\right). \tag{4.19}$$

最后，我们定义以下距离序列

$$d_k(x,y) := \max_{0\le j\le k-1} \frac{D\left(e^{jV}x, e^{jV}y\right)}{L_D^{j/n}} \tag{4.20}$$

$k \in \mathbb{N}$，它们都与 D等价。可以看出，它们的利普希茨常数 $L_{d_k}\left(e^V\right) = \left[L_D\left(e^{kV}\right)\right]^{1/k}$可用时间 k 映射的 D-利普希茨常数表示。利用（4.11）、（4.19）和 $\mathtt{h}_{\mathrm{top}}\left(e^{kV}\right) = k\mathtt{h}_{\mathrm{top}}\left(e^V\right)$，可得

$$\begin{aligned}
m\left(\frac{\ln\alpha}{\ln(\alpha\alpha_\epsilon)}\right)\ln L_{d_k}\left(e^V\right) &\le \mathrm{HD}(d_k)\ln L_{d_k}\left(e^V\right) \\
&\le \frac{\mathrm{HD}(d_k)}{k}\ln L_D\left(e^{kV}\right) \\
&\le \frac{\mathrm{HD}(d_k)}{k}\left[\ln 16 + \ln SL_D\left(e^{kV}\right)\right] \\
&\le \frac{\mathrm{HD}(d_k)}{k}\ln 16 + \frac{1}{k}\mathtt{h}_{\mathrm{top}}\left(e^{kV}\right) \\
&= \frac{\mathrm{HD}(d_k)}{k}\ln 16 + \mathtt{h}_{\mathrm{top}}\left(e^V\right) \\
&\le \frac{m}{k}\ln 16 + \mathtt{h}_{\mathrm{top}}\left(e^V\right).
\end{aligned}$$

令 $k \to \infty$，并注意到当 $\epsilon \to 0$时，$\left(\frac{}{\ln \alpha \ln(\alpha\alpha_\epsilon)}\right) \to \frac{1}{2}$，即可得到该定理。

□

上述引理现在推出本小节的主要结果——定理6。定理*6*的证明

· 正如前面的引理 7 所示，对于每个 $\lambda > \frac{2}{m}\mathrm{h}_{\mathrm{top}}$ 我们有

$$L_d \leq e^{\lambda}, \quad \text{for some } d \in \mathcal{D}_{\frac{1}{2}-}(Y).$$

利用该 由流的半群性质可得一个正常数 $c > 0$，使得

$$d\left(e^{tV}x_1, e^{tV}x_2\right) \leq ce^{\lambda t} d\left(x_1, x_2\right).$$

由 $d^{g^{TY}} \lesssim d \lesssim \left(d^{g^{TY}}\right)^{\frac{1}{2}-\epsilon}$，进一步可得

$$d^{g^{TY}}\left(e^{tV}x_1, e^{tV}x_2\right) \leq ce^{2\lambda t} d^{g^{TY}}\left(x_1, x_2\right)$$

$$\left\|\left(e^{tV}\right)^* f\right\|_{C^2} \leq ce^{2\lambda t}\|f\|_{C^2} \tag{4.21}$$

$\forall x_1, x_2 \in Y$, $f \in C^2(Y)$。由最后一个等式和最大膨胀率的定义，很容易推出不等式 $\Lambda_{\max} \leq 2\lambda$。

□

4.2. 紧李群。 接下来，我们考虑紧李群上与双不变度量相关的测地流。在这种情况下，回归集的体积界如下所示。Volovoy 在 [23, 命题 4] 中基本证明了这一结果，我们沿用他的思路并改进了该界。

定理 8。 设 G 为一个配备双不变度量 g的紧李群。其测地流的回归集满足以下体积界

$$\nu\left(S^1_{T,\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{p-1}T^p\right) \tag{4.22}$$

$$\nu\left(S^{1,e}_{T,\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{p-1}T^p\right), \tag{4.23}$$

其中 $p = rkG$ 是该李群的秩。

证明。 设 $\mathfrak{g}$ 为其李代数，令 $\exp : \mathfrak{g} \to G$ 表示该李群的指数映射。对于双不变度量，路径 $A\exp tb$, $b \in \mathfrak{g} = T_IG$给出了经过点 $A \in G$、方向为 $dL_A(b) \in T_AG$ 的测地线（此处 L_A 表示由 A定义的左乘）。

由李群的紧致性可知，存在一个一致的利普希茨常数 $C > 0$，使得

$$d^g\left(A\exp tb, A\right) \leq Cd^g\left(\exp tb, I\right), \quad \forall A \in G,\, b \in \mathfrak{g},\, t > 0. \tag{4.24}$$

这给出了一个常数 C_1，使得

$$\nu\left(S^1_{T,\varepsilon}\right) \leq C_1\nu_I \underbrace{\left\{a \in S^*_IG | \exists t \in \left[\frac{1}{2}T_0, T\right] \text{ s.t. } d^g\left(\exp ta, I\right) \leq \varepsilon\right\}}_{=S^1_{T,\varepsilon,I}} \tag{4.25}$$

$$\nu\left(S^{1,e}_{T,\varepsilon}\right) \leq C_1\nu_I \underbrace{\left\{a \in S^*_IG | d^g\left(a, S^1_{T,\varepsilon,I}\right) \leq \varepsilon\right\}}_{=S^{1,e}_{T,\varepsilon,I}} \tag{4.26}$$

对每个 $\varepsilon > 0$ 和 $T > \frac{1}{2}T_0$均成立。此处 ν_I 表示对偶李代数 $\mathfrak{g}^* = S^*_IG$. 中单位球面上诱导的测度。因此，只需估计上文（4.25）右侧以单位元为底的回归集的测度 $S^1_{T,\ \varepsilon,\ I}$。

现在令 $H = \mathbb{T}^p \subset G$, $p = \mathrm{rk}G$ 为一个极大环面。类似于 (4.25)、(4.26) 的回归集 $S^{1,H}_{T\ \varepsilon\ I}$，$S^{1,\ e\ H}_{T\ \varepsilon\ I}$也可以定义为以极大环面中的单位元 $I \in H$ 为基点的回归集。在

[23, 命题 3] 证明了任意环面内基点回归集的测度界 $\nu\left(S^{1,H}_{T,\varepsilon,I}\right) = O(\varepsilon^{p-1}T^p)$。事实上，[23, 推论 3] 表明，$S^1_{T,\varepsilon,I} \subset S^*_I H$，因而 $S^1_{T,\varepsilon,I}$，也可以用一族半径为 ε 的球 $\{B_\varepsilon(h_j) | h_j \in S^*_I H\}_{j=1}^M$ 覆盖，其中 $M = O(T^p)$。对于一般群，任意元素 $a \in S^1_{T,\varepsilon,I} \subset S^*_I G$ 都共轭于环面 $\exp(t\mathrm{ad}_P a) = P(\exp ta) P^{-1} \in H$ 中的某个元素，其中 $P \in G$。由 (4.24) 可知，共轭元 $\mathrm{ad}_P a \in S^1_{T,C\varepsilon,I}$、$\mathrm{ad}_P b \in S^1_{T,C\varepsilon,I}$ 分别属于环面的基点回归集，对应于 $a, b \in S^1_{T,\varepsilon,I}$，因此它们分别位于半径为 $C\varepsilon$ 的 $M = O(T^p)$ 球 $B_\varepsilon(h_j)$ 中。于是，只需证明这些球的共轭元 $S_j := G.B_\varepsilon(h_j).G^{-1}$, $j = 1, 2, \ldots, M$ 的体积满足估计 $\nu(S_j) = O(\varepsilon^{p-1})$。Volovoy 也在 [23, 第 134-135] 页证明了这一点。□

4.3. 旋转曲面。 现在我们考虑紧旋转曲面上的测地流。

也就是说，流形现在定义为

$$X = \{(\rho(z)\cos\phi, \rho(z)\sin\phi, z) | \phi \in [0, 2\pi], z \in [a_-, a_+]\} \subset \mathbb{R}^3. \tag{4.27}$$

这里，$\rho: (a_-, a_+) \to (0, \infty)$ 是一个光滑函数，满足 $\lim_{z\to a_\pm} \rho(z) = 0$，$\lim_{z\to a_\pm} \rho'(z) = \mp\infty$。因此，曲面 (4.27) 是将曲线 $(\rho(z) 0, z)$，$a \le z \le b$ 绕 z 轴旋转而得到的（见第 18 页的图 4.1）。我们还假设该曲面严格凸。也就是说，函数 $-\rho$ 严格凸，且满足 $-\rho''(z) > 0$。因此，ρ 在唯一的 $z_0 \in [a_-, a_+]$ 处取得最大值。曲线 $\gamma_E := \{(x, y, z) \in X | z = z_0\}$ 称为赤道。点 $(0, 0, a_\pm)$ 分别称为北极和南极。

X 上的度量选取为由欧氏嵌入诱导的度量。旋转曲面上的测地流已有充分研究。首先，可以用柱坐标计算哈密顿函数

$$H(\xi_z, \xi_\phi) = \frac{1}{2}\left[\frac{\xi_\phi^2}{\rho^2} + \frac{\xi_z^2}{1+\rho_z^2}\right]$$

(z, ϕ)表示。角动量函数 ξ_ϕ 与上述哈密顿函数泊松对易，因此在测地流下保持不变。这条守恒律可以在底空间上改写为更明确的形式。测地线 $\gamma = (z(t) \ \phi(t))$是哈密顿轨道的投影

$$\left(z(t), \phi(t); \underbrace{\xi_z(t)}_{=(1+\rho_z^2)\dot z}, \underbrace{\xi_\phi(t)}_{=\rho^2\dot\phi}\right),$$

因此，函数 $\rho^2\dot\phi = \xi_\phi(t) = c$ 沿流保持常数。设 α 为测地线上一点 $\gamma(t)$处的速度向量 $\dot\gamma(t)$ 与经过该点的纬线之间的夹角。容易计算得 $\rho\dot\phi = |\dot\gamma|\cos\alpha$。哈密顿量/长度 $\frac{1}{2}|\dot\gamma|^2 = H(\gamma(t))$沿流保持不变。因此，$\xi_\varphi$ 的守恒律也可以表述为

$$\rho\cos\alpha = c \ (\text{constant}) \tag{4.28}$$

沿着流运动。给定初始点和速度向量后，上述方程很容易积分。反过来，由测地线解的存在唯一性可知，任何满足上述关系式 (4.28) 的单位速度（非纬线）曲线都是测地线。唯一的纬线测地线是赤道 γ_E。最后三行构成了克莱罗定理的陈述。

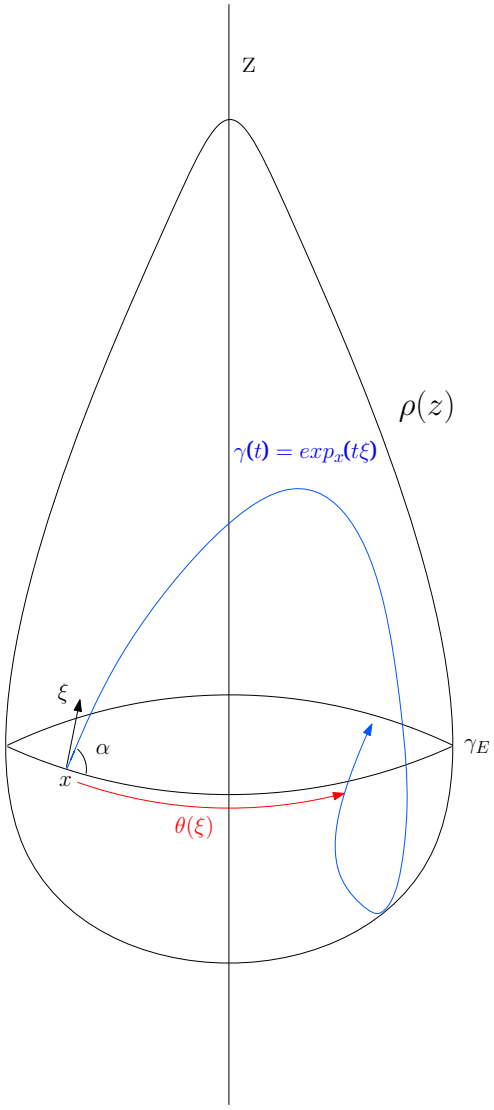


图 4.1. 旋转曲面

定理 9. 设(X^2, g) 为一个紧致严格凸旋转曲面。那么，测地流(1.3) 的回归集体积满足以下估计

$$\nu\left(S^1_{T,\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{r}} T^{1-\frac{1}{r}}\right) \tag{4.29}$$

$$\nu\left(S^{1,e}_{T,\varepsilon}\right) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{r}} T^{1-\frac{1}{r}}\right), \tag{4.30}$$

当 ε, T 充分小时。这里 r (1.12) 是赤道返回映射的最大消失阶。

证明。由克莱罗关系 **(4.28)** 可知，每条测地线必定会在一个有统一上界的有限时间内与赤道 γ_E 相交。由紧致性，只需估计基点回归集的测度

$$S^1_{T,\varepsilon,x} \coloneqq \left\{\xi \in S^*_x X | \exists t \in \left[\frac{1}{2}T_0, T\right] \text{ s.t. } d\left(\exp_x\left(t\xi\right), x\right) \leq \varepsilon,\ \exp_x\left(t\xi\right) \in \gamma_E\right\}$$

$$S^{1,e}_{T,\varepsilon,x} \coloneqq \left\{\xi \in S^*_x X | d\left(\xi, S^1_{T,\varepsilon,x}\right) \leq \varepsilon\right\}$$

对于 $x \in \gamma_E$。

接下来，对赤道上的每个 $x \in \gamma_E$，我们定义

$$\tau : S_x^* X \to \mathbb{R}_{>0} \tag{4.31}$$

$$\theta : S_x^* X \to S^1 = [0, 2\pi] \tag{4.32}$$

作为定义在上方余球面 $\xi \in S_x^* X$ 中各元素上的函数。第一个函数将 ξ 映射为测地线 $\gamma(t) = \exp_x(t\xi)$ 返回赤道的首次返回时间 $\tau(\xi)$。第二个函数则将 ξ 映射为赤道所需的旋转角 $\theta(\xi)$，以便将 x 带到首次返回点 $\exp_x(\tau(\xi)\xi)$（见第 18 页图 4.1）。根据曲面的定义函数 ρ，有关于 θ 的标准公式（参见 [2, 第 4B 章]）。现在，根据克莱罗方程 (4.28)，测地线与赤道之间的角 α 在 $\exp_x(\tau(\xi)\xi)$ 处将保持不变。因此，由旋转对称性可得以下关系

$$\gamma(t + \tau(\xi)) = R_{\theta(\xi)}\gamma(t)$$

后续各次返回时间分别为 $2\tau(\xi)$ $3\tau(\xi)\ldots$。由 τ 的连续性，可找到一个正的 $C > 0$，使得对于每个 $t > 0$，都存在 $|s| \le C$ 和 $p \in \mathbb{Z}, |p| \le Ct$，满足 $\exp_x(t\xi) = R_{p\theta(\xi)}\gamma(s)$。

因此，只需估计该集合的测度

$$\tilde{S}_{T,\varepsilon,x} = \left\{ \xi \in S_x^* X | \exists p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{Z},\ |p|, |q| \le CT \text{ s.t. } \left| 2\pi\theta(\xi) - \frac{q}{p} \right| \le \frac{\varepsilon}{p} \right\}. \tag{4.33}$$

根据 r (1.12) 是最大消失阶数的定义，对于每一对充分接近的 $\xi, \xi_0 \in S_x^* X$，都有 $|\theta(\xi) - \theta(\xi_0)| \ge C|\xi - \xi_0|^r$。于是，上述集合的体积很容易估计为

$$\nu_x\left(\tilde{S}_{T,\varepsilon,x}\right) = O\left(\sum_{p=1}^{CT} \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^{\frac{1}{r}}\right) = O\left(\varepsilon^{\frac{1}{r}} T^{1-\frac{1}{r}}\right)$$

这正是所需的。 □

5. 推论的证明

本节证明主要定理 1 的三个推论。证明将基于第 4 节中关于回归集的体积界。

推论 *2*、*3*、*4* 的证明。所有推论中的伪微分算子均为半经典拉普拉斯算子 $P_h = h^2\Delta_g$，所取区间为 $[a, 1]$，其中 $a < 0$。拉普拉斯算子的主符号 $p_0 = |\xi|^2 \in C^\infty(T^*X)$ 是余切丛上的范数平方函数，而其次主符号为零 $p_1 = 0$。相关能级为 $\Sigma_1 = S^*X$，即流形的单位余球丛。其上带有接触形式 $\alpha_g \in \Omega^1(S^*X)$，这是余切空间上典范一形式的限制 $\alpha_g = \alpha|_{S^*X}$。众所周知，主符号的哈密顿向量场 $R_g = H_{|\xi|^2}$ 就是该接触形式的 Reeb向量场。

对于推论 2，流形取为负曲率黎曼流形。在这种情况下，已知测地流是阿诺索夫 Reeb 流。因此，回归集体积界 (4.3)、(4.4) 适用。现在我们可以在定理 1 中令 $\varepsilon = h^\delta$，其中 $\delta = \frac{1}{4}$，且 $T = \frac{1}{4}T^{\ell,\ E^1}(h) = \frac{1}{4}\left|\ln\frac{h}{\Lambda^1_{\max}+\ell}\right|$。于是 (1.7) 变为

$$|R_h| \le \mathrm{vol}(S^*X)\, 4\left(\Lambda^1_{\max} + \ell\right)|\ln h|^{-1} + O\left(h^{\frac{1}{4}\cdot(2n-1)\cdot\frac{\ell}{\Lambda^1_{\max}+\ell}} + |\ln h|^{-2} + h^{\frac{1}{2}}\right)$$

利用体积界 (4.3)、(4.4)。由于 $\ell > 0$ 是任意的，等式 (1.9) 得证。第二个估计 (1.10) 现在由定理6中的不等式 $\Lambda^1_{\max} \le \frac{4}{n} h_{\mathrm{top}}$ 得出。

对于推论 3，流形 $X = G$ 是一个配备双不变黎曼度量的紧李群。现在我们可以令 $\varepsilon = h^{\delta}$，并在定理 1 中取 $\left[0, \frac{1}{2}\right) \ni \delta = \begin{cases} 0, & p = 1, \\ \frac{p+1}{3p+1}, & p > 1, \end{cases}$ 和 $T = h^{-\frac{p-1}{3p+1}}$。于是 (1.7) 变为

$$\begin{aligned} R_h &= O\left(T^{-1} + \varepsilon^{p-1} T^{p} + h^{1-2\delta}\right) \\ &= O\left(h^{\frac{p-1}{3p+1}}\right) \end{aligned}$$

按要求使用体积界 (4.22)、(4.23)。

最后，对于推论 4，流形是一个旋转曲面。这里我们令 $\varepsilon = h^{\delta}$，并在定理 1 中取 $\delta = \frac{2r-1}{4r-1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ 和 $T = h^{-\frac{1}{4r-1}}$。于是 (1.7) 变为

$$\begin{aligned} R_h &= O\left(\varepsilon^{\frac{1}{r}} T^{1-\frac{1}{r}} + T^{-1} + h^{1-2\delta}\right) \\ &= O\left(h^{\frac{1}{4r-1}}\right) \end{aligned}$$

按要求使用 (4.29)。

我们指出，根据各情形下回归集体积的相应界，我们对 ε 和 T 的选择是最优的。□

参考文献

[1] P. H. Bérard，无共轭点紧黎曼流形上的波动方程，《数学杂志》，155 (1977)，第 249–276 页。1[2] A. L. Besse，所有测地线均为闭曲线的流形，数学及其边界领域成果第 93 卷， [数学及相关领域成果], 施普林格出版社，柏林—纽约，1978。附录由 D. B. A. Epstein、J.-P. Bourguignon、L. Bérard-Bergery、M. Berger 和 J. L. Kazdan 撰写。1, 4.3[3] M. Dimassi 和 J. Sjöstrand，半经典极限下的谱渐近，伦敦数学会讲义系列第 268 卷，剑桥大学出版社，剑桥，1999。1, 2.1, 3, 3.1, 3.2, 3.2[4] J. J. Duistermaat 和 V. W. Guillemin，正椭圆算子的谱与周期双特征线，《数学发明》，29 (1975)，第 39–79 页。1[5] S. Dyatlov 和 M. Zworski，通过微局部分析研究阿诺索夫流的动力学ζ函数，《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑），49 (2016)，第 543–577 页。4.1[6] A. Fathi，扩张性、双曲性与豪斯多夫维数，《数学物理通讯》，126(1989)，第 249–262 页。4.1.1, 4.1.1[7] F. Fricker，格点论导论，精密科学领域教科书与专著第 73 卷（LMW）。数学系列 [精密科学领域教科书与专著。数学系列], 比克霍伊泽出版社，巴塞尔—波士顿，马萨诸塞州，1982。1[8] V. Guillemin 和 S. Sternberg，半经典分析，波士顿国际出版社，2013。2.1[9] U. Hamenstädt，鲍恩—马古利斯测度的新描述，《遍历理论与动力系统》，9 (1989)，第 455–464 页。4.1.1[10] L. Hörmander，椭圆算子的谱函数，《数学学报》，121 (1968)，第 193–218 页。1[11] ——，线性偏微分算子分析。*I*，施普林格学习版，施普林格出版社，柏林，第 2 版，1990。分布理论与傅里叶分析。3.1[12] M. N. Huxley，整数点、指数和与黎曼ζ函数，载于《千禧年数论》第二卷（伊利诺伊州厄巴纳，2000），A K Peters，马萨诸塞州纳蒂克，2002，第 275–290 页。1[13] V. Ivrii，微局部分析、尖锐谱渐近及其应用。*I*，施普林格，查姆，2019。半经典微局部分析与局部及微局部半经典渐近。1, 1

[14] F. Ledrappier，特征指数的若干性质，载于《圣弗卢尔概率暑期学校》第 XII 卷—1982，数学讲义第 1097 卷，施普林格，柏林，1984，第 305–396 页。2.2[15] R. Mañé，遍历理论与微分动力系统，数学及其边界领域成果（第 3 辑）第 8 卷，[数学及相关领域成果（第 3 辑）], 施普林格出版社，柏林，1987。葡萄牙语原著由 Silvio Levy 翻译。2.2, 2.2[16] S. Nonnenmacher，“混沌本征态的熵”短期课程笔记，载于《谱与动力学》，CRM会议论文集讲义第 52 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2010，第 1–41 页。3.1[17] V. Norton 和 T. O’Brien，阿诺索夫流与扩张性，美国数学会会刊，40 (1973)，第 625–628 页。4.1.1[18] V. Petkov 和 D. Robert，量子哈密顿算子谱的半经典渐近与经典周期轨道，偏微分方程通讯，10 (1985)，第 365–390 页。1[19] S. Roth 和 Z. Roth，熵、豪斯多夫维数与利普希茨常数的不等式，数学研究，250 (2020)，第 253–264 页。4.1.1, 4.1.1[20] Y. Safarov 和 D. Vassiliev，偏微分算子特征值的渐近分布，数学专著译丛第 155 卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997。由作者根据俄语手稿译出。3.2[21] N. Savale，双曲性、无理性指数与η不变量，偏微分方程通讯，47 (2022)，第 989–1023 页。1[22] A. V. Volovoy，紧流形上椭圆算子的特征值分布函数的改进两项渐近展开，偏微分方程通讯，15 (1990)，第 1509–1563 页。（文档），1[23] ——，魏尔猜想相关哈密顿流条件的验证，全球分析与几何年刊，8 (1990)，第 127–136 页。（文档），1, 4.2, 4.2[24] P. Walters，遍历理论导论，数学研究生教材第 79 卷，施普林格出版社，纽约—柏林，1982。4.1.1

科隆大学，数学研究所，韦耶塔尔街86-90号，科隆50931，德国电子邮件地址：nsavale@math.uni-koeln.de