arXiv:2303.01426v1 [cond-mat.mes-hall] 2 Mar 2023

拓扑声子超材料

Weiwei Zhu‡
物理系，新加坡国立大学，新加坡 117542，新加坡

Weiyin Deng§
物理与光电学院，华南理工大学，广州，广东510640，中国

Yang Liu‖
苏州大学物理科学与技术学院理论与应用物理研究所与苏州纳米科技协同创新中心，中国苏州 215006

Jiuyang Lu¶
华南理工大学物理与光电学院，中国广东广州 510640

Zhi-Kang Lin
苏州大学物理科学与技术学院理论与应用物理研究所与苏州纳米科技协同创新中心，中国苏州 215006

Hai-Xiao Wang
广西师范大学物理与技术学院，中国桂林 541004 a

Xueqin Huang+
华南理工大学物理与光电学院，中国广东省广州市 510640

Jian-Hua Jiang*

‡ 这些作者贡献相同§ 这些作者贡献相同‖ 这些作者贡献相同

¶ 这些作者贡献相同+ 通讯作者：phxqhuang@scut.edu.cn
* 通讯作者：jianhuajiang@suda.edu.cn

理论与应用物理研究所，物理科学与技术学院与苏州纳米科技协同创新中心，
苏州大学，中国苏州 215006

Zhengyou Liu♯
教育部人工微纳结构重点实验室与武汉大学物理与技术学院，中国武汉 430072；
武汉大学高等研究院，中国武汉 430072

摘要。 拓扑能带的概念及其表现形式已在凝聚态物质系统中得到证实，成为探索前所未有的物理现象与性质的一种卓越范式，这些现象与性质能够抵御无序的影响。近年来，这一范式扩展至声子超材料（包括机械超材料和声学超材料），得益于声子超材料非凡的可控性与可调性，以及多样化的测量技术，人们发现了其他领域未曾观察到的显著现象。这些现象包括但不限于拓扑负折射、拓扑“声子激射器”（即激光器的声子类比）、高阶拓扑绝缘态、非阿贝尔拓扑相、高阶外尔半金属相、狄拉克涡旋结构中的类马约拉纳模式，以及具有谱流的脆弱拓扑相。本文从理论和实验两个角度回顾拓扑声子超材料领域的发展，并着重阐述其基础物理原理。为全面介绍拓扑声子学，我们还讨论其与非厄米效应的协同作用，并涵盖合成维度、人工规范场、弗洛凯拓扑声学、体拓扑输运、拓扑泵浦、拓扑活性物质，以及拓扑声子超材料的潜在应用、材料制备和测量等主题。最后，我们探讨这一引人入胜的领域所面临的挑战、机遇与未来发展，以及其对物理学和材料科学的潜在影响。

投稿至：《物理学进展报告》

♯ 通讯作者：zyliu@whu.edu.cn

目录

1 引言 tion **5**

2 基础方面 **6**

2.1 声子超材料.62.2 常规拓扑与高阶拓扑.82.3 拓扑能带理论.92.4 威尔逊环.132.5 对称性指标.142.6 Floquet拓扑绝缘体与非厄米拓扑绝缘体 . 172.7 现象学理论：Jackiw-Rebbi理论.18

3 拓扑 声子超材料 2 **2**

3.1 谷霍尔与自旋霍尔声子晶体.223.2 声学陈绝缘体与自旋陈绝缘体.303.3 Weyl声学超材料.333.4 其他Weyl声学超材料.353.5 狄拉克声学超材料.413.6 节点线与节点面声学超材料.413.7 高阶拓扑绝缘体.423.8 非阿贝尔拓扑态.493.9 拓扑缺陷与体缺陷对应关系.563.10 由投影对称性诱导的声学拓扑绝缘体 623.11 宏观尺度的机械超材料.633.12 微米和纳米尺度机械超材料.693.13 非厄米拓扑声子系统.76

4 专题 81

4.1 赝磁场.814.2 合成维度.834.3 声学 Floquet 拓扑绝缘体.854.4 声学异质结构中的体输运.874.5 拓扑泵浦.884.6 拓扑活性物质.914.7 声学斯格明子.914.8 扭转声子双层.924.9 分形拓扑声学超材料.92

5 潜在应用 **93**

5.1 狄拉克类点处的声学双零折射率介质.935.2 用于方程求解和图像处理的拓扑模拟信号处理 935.3 拓扑声能量采集和拓扑声学镊子 . . 94

5.4 拓扑声学天线.955.5 片上声子拓扑器件.975.6 拓扑声子激光器.975.7 声子拓扑逻辑门.99

6 方法 100

6.1 声子超材料的制备.1006.2 测量.100

7 总结与展望 102

1. 引言

声子超材料 [1, 2], 包括声学超材料 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]和机械超材料 [8, 9, 10], 约三十年前提出，随后在基础科学和应用领域，从理论和实验两方面都得到了全面发展。声子晶体的概念 [11, 12, 13, 14, 15],作为各种声子超材料的基础，源于将声子结构组织成周期性图案。对周期结构中的声子波应用布洛赫理论，可以得到声子能带结构。其优势在于，通过调整声子结构及其周期性图案，可以高度调控声子能带结构。这种可调控性使人们能够显著控制声波和机械波，从而产生声子带隙、负折射、非常规有效参数、对声子波的多样化控制，以及亚波长成像、俘获和波导等非凡效应。经过数十年的研究，声子超材料已发展成为一种具有卓越可控性和可靠测量技术的材料平台。

近年来，拓扑声子超材料吸引了极大的研究兴趣 [16, 17, 18, 19, 20]。自诞生以来，这一领域便迅速发展。拓扑声子超材料的研究旨在利用拓扑物理学——凝聚态物理学的一个重要分支，其中能带的拓扑性质发挥着核心作用 [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29]——探索新的现象、材料及其应用。拓扑声子超材料的发展为声子学和声学带来了许多前所未有的效应。例如，Zak相和拓扑反射、外尔声子和拓扑负折射、拓扑声子激射器（即激光器的声子类比）、非厄米拓扑声子超材料、拓扑Wannier循环、体-缺陷对应关系、声子的高阶拓扑相、声子的非阿贝尔拓扑态、声子狄拉克锥和双零有效介质，以上仅列举其中少数例子。这一领域仍在迅速发展，在基础研究和应用方面不断涌现出许多新思想。本综述旨在介绍该领域的基本概念、模型、图像和方法，以及主要进展、机遇与挑战，使不同学科背景的读者都能了解该领域的主要内容。如此一来，跨学科研究和新思想便能持续推动这一方向的发展。

在声子超材料中利用能带拓扑的动机主要来自两个方面：首先，声子超材料尤其适合用于实现和观测各种拓扑现象。得益于出色的可调性，拓扑声子超材料几乎可以被设计成任意几何形状，从而实现各种拓扑相，涵盖谷霍尔相、自旋霍尔相、外尔相、狄拉克相、节点线相、高阶拓扑相和脆弱拓扑相。此外，机械系统具有非凡的探测能力，能够以极高的

位置、波矢和频率分辨率探测体态和边界声子态（包括波函数和谱）。其次，拓扑声子超材料的发展极大地丰富了超材料研究，为声子波和机械能提供了前所未有的调控能力。这两大动机一直是推动拓扑声子超材料发展的主要动力，促成了广泛的研究，从探索难以在凝聚态物质系统中实现的极端拓扑相，到提出其他领域尚未提出的新思想和新现象，再到开发前沿应用，例如高性能机械传感器、基于集成声电系统的片上信息处理、高品质谐振器和稳健频率梳等。随着这些显著进展和浓厚的研究兴趣，拓扑声子超材料研究多年来一直在迅速发展。

本文的结构如下：第二节介绍声子超材料的基本方面、拓扑声子学的基本概念和方法，以及 Jackiw-Rebbi 理论等现象学理论。第三节详细阐述各类拓扑声子超材料，并将其分为四大类：第一类是拓扑声学超材料，包括声学谷霍尔效应、自旋霍尔效应、陈绝缘体及其推广形式、高阶拓扑相、拓扑半金属、非阿贝尔拓扑态、拓扑缺陷，以及受射影对称性保护的拓扑态；第二类是宏观尺度的机械超材料，例如弹簧质量系统；第三类是适用于片上应用的微米和纳米尺度机械超材料；第四类是具有非常规特性的非厄米拓扑声子系统。此外，我们还讨论合成维度、人工规范场、Floquet拓扑声子系统和体拓扑输运等特定主题。本文还涉及声子的Thouless泵浦、拓扑活性物质、声学斯格明子等其他主题。为求完整，第四节总结了研究拓扑声子超材料时常用的制备和测量方法。第五节讨论拓扑声子超材料的潜在应用。最后，我们在第六节展望未来的挑战和可能的发展方向。与以往综述相比， [16, 17, 18, 19, 20],本文旨在对拓扑声子超材料进行系统且最新的综述。

2. 基本原理

2.1. 声子超材料

拓扑声子超材料是由人工声子原子周期性分布形成的阵列，通常支持稳健的拓扑边缘态 [16, 17, 18, 19, 20]。它们类似于周期势中电子的拓扑态。众所周知，周期势散射电子的行为可以通过不同的物理图像来理解，例如紧束缚图像、自由电子气图像等 [30]。

作为类比，拓扑声子超材料可根据人工原子（谐振器或散射体）的类型以及耦合方式（近场耦合或远场耦合），分为对应于不同物理图像的三类，如图1所示。图1（a）展示了第一类声子超材料，其中波被限制在耦合声子腔中 [31]。不同腔体中的受限波通过半径较小的耦合管进行近场耦合。此类系统中的声子波对应于图1（d）所示周期性深势阱中的电子，可用紧束缚图像描述。在这种图像中，波被认为局域于深势阱中。电子可以通过量子隧穿在不同势阱之间跃迁，并形成通带。图1（b）是一维声子晶体，由横截面积不同的AB层组成 [32]。平面波从一层传播到另一层时会发生散射。此类系统中的声子波对应于图1（e）所示周期性浅势阱中的电子，或高能电子，这被称为自由电子气图像。在这种图像中，波被认为在势阱边缘传播并发生散射。前向波与散射波之间的相消干涉形成禁带。图1（c）是局域共振声子超材料 [1, 33]。侧支管是局域共振器。局域共振器可被主波导中的传播波激发，随后将波泄漏回主波导。此类系统对应于图1（f）所示的光物质相互作用系统，其中电子受到正离子的束缚，并通过辐射光相互作用。在这种图像中，基态电子可从波导吸收光子并跃迁到激发态，而激发态电子可将光子辐射进入波导。前向传播光子与辐射光子之间的相互作用形成了准粒子的能带结构，该准粒子是电子与光子的杂化。

这三类拓扑声子超材料各有优势。第一类耦合声子腔为实现由紧束缚模型描述的拓扑态提供了良好的平台。腔体之间通过连接管道实现耦合。最近邻耦合和长程耦合都很容易实现。改变连接管道的半径即可调节耦合强度。甚至可以将两个腔体中场相位相反的局部位置连接起来，实现负耦合 [34, 35, 36, 37]。图1（g）展示了两个具有 p_z 轨道的腔体之间的正耦合，图1（h）展示了负耦合。图1（i）展示了一个具有 p_x 轨道的腔体与另一个具有 p_y 轨道的腔体之间的负耦合。此外，还可以通过增加耦合管道 [38]的长度来实现负耦合。声子晶体为在散射（连续）系统中实现拓扑态提供了良好的平台。系统的拓扑性质由晶格对称性、单个散射体的对称性以及不同散射体之间的相对位置决定。仅通过旋转散射体 [39, 40]便可实现丰富的拓扑相，这一点已在二维系统中得到广泛验证，且可行性和可调性也已得到证明

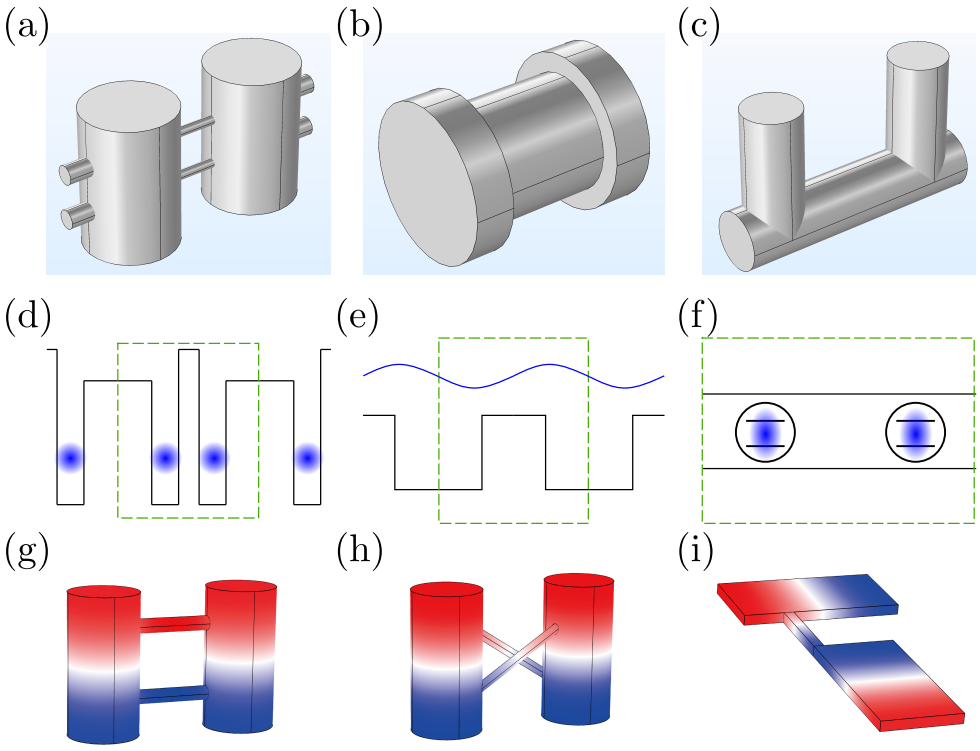

图1。 三类拓扑声子超材料。(a) 耦合声子腔的晶胞。(b) 声子晶体的晶胞。(c) 声子局域共振超材料的晶胞。(d) 深阱周期势中电子的紧束缚图像。(e) 对于浅阱周期势中的电子，或电子能量较高时的自由电子气图景。(f) 电子受原子束缚，并通过向波导中辐射光而彼此相互作用。晶胞由绿色方框标出。(g) 两个具有 p_z 轨道的腔体之间的正耦合。(h) 两个具有 p_z 轨道的腔体之间的负耦合。(i) 一个具有 p_x 轨道的腔体与另一个具有 p_y 轨道的腔体之间的负耦合。

以及三维系统。局域共振声子超材料为实现亚波长拓扑态提供了良好的平台，其尺寸更加紧凑。此外，由于腔体之间的耦合属于远场耦合，它也为研究开放系统中的拓扑态提供了良好的平台。改变腔体的共振频率或腔体之间的相对位置，可以调节系统的拓扑性质。

2.2. 常规拓扑与高阶拓扑

为介绍常规拓扑绝缘体和高阶拓扑绝缘体，我们首先介绍余维的概念，它是系统维度与拓扑边界态维度之差。常规拓扑绝缘体的余维为一，即 n维系统支持 $n-1$维无能隙边界态。陈绝缘体 [41, 42]、 Z_2 拓扑绝缘体、 [43], 谷拓扑绝缘体 [44, 45, 46, 47, 48], 等都属于常规

拓扑绝缘体。常规拓扑绝缘体的拓扑性质受体拓扑保护。高阶拓扑绝缘体是余维大于一的态 [49, 50, ? , 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58]。二维高阶拓扑绝缘体具有有隙边缘态，但支持拓扑角态。 n维系统支持 $n-m$维（$m>1$）边界态。高阶拓扑绝缘体可分为内禀和外禀两类 [59]。内禀高阶拓扑绝缘体受体拓扑保护。空间对称性在其中发挥重要作用。外禀高阶拓扑绝缘体受边界态保护。高阶拓扑可以更加普遍。无能隙态可在体连续谱中支持拓扑角态 [60]。高阶狄拉克/外尔半金属也被提出作为高阶拓扑 [61, 62]。

2.3. 拓扑能带理论

在前文中，我们大致介绍了三类拓扑声子超材料。尽管它们对应于不同的物理图像，但都具有由周期哈密顿量描述的周期结构

$$\hat{H}(\mathbf{r}) = \hat{H}(\mathbf{r}+\mathbf{R}), \tag{1}$$

ˆ其中$\mathbf{R}$ 是布拉菲格矢。对于耦合声子腔， $H(\mathbf{r})$通常ˆ可以由稀疏矩阵描述，$H_{mn} = \langle m|H(\mathbf{r})|n\rangle$。$H_{mn}$ 是 m^{th} 腔体与 n^{th} 腔体之间的近场耦合。对于声子晶体，ˆ$H(\mathbf{r})$通常由偏微分算子描述，例如 [63]， $-\rho^{-1}\kappa\nabla\cdot\nabla$，其中 ∇是纳布拉算子， ρ 是质量密度， κ是体积模量。对于局域共振声子超材料，ˆ $H(\mathbf{r})$通常可以由稠密矩阵描述 [64],$H_{mn} = \langle m|\hat{}H(\mathbf{r})|n\rangle$。 H_{mn} 是 m^{th} 腔体与 n^{th}腔体之间的远场耦合。通过求解以下特征方程，可以得到系统的谱，

$$\hat{H}(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \tag{2}$$

ˆ由于 $H(\mathbf{r})$ 在实空间中具有周期性，晶体动量是一个良好的量子数。根据布洛赫理论，系统的本征态满足以下表达式，

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \tag{3}$$

其中 $u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 是布洛赫波函数的周期部分。系统的能带可由以下方程求得，

$$H(\mathbf{k})u_n(\mathbf{k}) = E_n(\mathbf{k})u_n(\mathbf{k}). \tag{4}$$

这里 $H(\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\hat{}H(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ 由实空间哈密顿量的傅里叶变换得到。 $H(\mathbf{k})$，或等价地，其本征值 $E_n(\mathbf{k})$ 和特征向量 $u_n(\mathbf{k})$定义了能带结构。

$E_n(\mathbf{k})$也称为能带，决定了波在体中的最重要输运性质，例如，波在通带中是延展的，而在禁带中是局域化的。近期关于拓扑态的研究更加关注特征向量 $u_n(\mathbf{k})$。具有相同能带的两个系统 $E_n(\mathbf{k})$可能具有截然不同的拓扑性质，而这些性质可通过由布洛赫波全局性质决定的各种拓扑不变量加以区分。例如，通常的贝里相位 [65] of the nth 能带可根据布洛赫波函数的周期部分，通过定义得到

$$\theta_n = \oint_{\mathcal{C}} d\mathbf{k} \cdot \langle u_n(\mathbf{k}) | i \bigtriangledown_{\mathbf{k}} | u_n(\mathbf{k}) \rangle, \tag{5}$$

其中，$\mathcal{A}_n(\mathbf{k}) = \langle u_n(\mathbf{k}) | i \bigtriangledown_{\mathbf{k}} | u_n(\mathbf{k}) \rangle$ 是动量空间中对应于矢势的贝里联络，$\mathcal{C}$ 是动量空间中的一条闭合路径。$\mathcal{A}_n(\mathbf{k})$是规范相关量。可以看出，本征矢量的相位选择是任意的$|u'_n(\mathbf{k})\rangle = e^{i\phi_n(\mathbf{k})}|u_n(\mathbf{k})\rangle$，这种变换称为规范变换。变换后，相应的贝里联络变为 $\mathcal{A}'_n(\mathbf{k}) = \langle u'_n(\mathbf{k}) | i \bigtriangledown_{\mathbf{k}} | u'_n(\mathbf{k}) \rangle = \mathcal{A}_n(\mathbf{k}) - \nabla_{\mathbf{k}}\phi_n(\mathbf{k})$。然而，贝里相位 θ_n 与规范无关，具有物理意义。对于一维模型，$\mathcal{C}$ 是第一布里渊区，θ_n 是 n^{th} 能带的 Zak 相。Zak 相决定了系统的万尼尔中心，并对应于极化。特别地，当系统具有反演对称性时，Zak 相是量子化的，且仅取 0 或 π [21]。

根据贝里联络，我们可以定义贝里曲率 $\mathbf{\Omega}_n(\mathbf{k}) = \nabla \times \mathcal{A}_n(\mathbf{k})$。贝里曲率与规范选择无关，对应于动量空间中的磁场。二维系统中著名的陈数可通过在整个第一布里渊区内对贝里曲率积分得到，

$$2\pi C_n = \int_{\text{BZ}} d^2\mathbf{k} \cdot \mathbf{\Omega}_n(\mathbf{k}). \tag{6}$$

陈数 可通过以下关系与贝里相位联系起来 [66],

$$\begin{aligned} 2\pi C_n &= -\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dk_x dk_y (\partial_{k_x}\mathcal{A}_n^y - \partial_{k_y}\mathcal{A}_n^x) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} dk_y \partial_{k_y} \left(\int_{-\pi}^{\pi} dk_x \mathcal{A}_n^x \right) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_n(k_y). \end{aligned} \tag{7}$$

此处，$\theta_n(k_y) = \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \mathcal{A}_n^x$ 是沿 k_x 方向对 $\mathcal{A}_n^x(k_x, k_y)$进行一维积分，并在每个固定的 k_y下计算得到的贝里相位。我们注意到，陈数正是贝里相位 $\theta_n(k_y)$随 k_y变化的绕数。这种表达具有更明确的物理意义。我们知道，贝里相位 $\theta_n(k_y)$决定了一维系统的Wannier中心，也决定了拓扑边缘

态。 $\theta_n(k_y)$也称为Wannier能带。贝里相位的非零绕数意味着存在无能隙拓扑边缘态。根据体边对应，陈数决定了拓扑手性边缘态的数量。拓扑边缘态的一个重要性质是，它们能够抵抗无序。这一性质可用于设计稳健的拓扑器件。

虽然式5 中贝里相位的定义以及式7中的陈数定义都很清楚，但在实际计算中仍然难以求得。原因在于， $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ 对$\mathbf{k}$ 的导数要求 $|u_n(\mathbf{k})\rangle$ 关于$\mathbf{k}$连续，而这通常很难在计算中实现。多能带系统会进一步增加计算复杂度。此外，贝里联络是一个依赖规范的量，这也给数值计算带来了困难。接下来，我们将介绍一种适用于数值实现的 Wilson 环方法，用于计算拓扑不变量。对称性指标是区分拓扑态的另一种方法。在此之前，我们先介绍一个具体模型，以展示拓扑平庸态与非平庸态之间的区别。随后，我们还将利用该模型展示 Wilson 环方法和对称性指标的优势。该模型是图2(a)所示的呼吸蜂窝晶格，其哈密顿量为 [67]

$$H = \sum_{\langle i,j \rangle} c_{ij} a_i^\dagger a_j, \tag{8}$$

其中， $a_i^\dagger$ (a_i) 是位于第 i 个格点的粒子的产生（湮灭）算符， c_{ij}是最近邻耦合。每个晶胞包含六个格点。一个晶胞内的耦合为 $c_{ij} = c_{\text{int}}$ ，晶胞之间的耦合为 $c_{ij} = c_{\text{ext}}$。该模型仅包含实数最近邻耦合，因此适用于声子学实验。如下文所示，这种简单模型可根据参数描述一阶拓扑绝缘体或二阶拓扑绝缘体。该模型的拓扑性质可通过威尔逊环或对称性指标来理解，因此可将其作为介绍拓扑声子学基本概念的标准示例。

对式中实空间哈密顿量进行傅里叶变换8，可得到动量空间中的哈密顿量，写作

$$H(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} 0 & c_{\text{int}} & 0 & c_{\text{ext}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_1} & 0 & c_{\text{int}} \\ c_{\text{int}} & 0 & c_{\text{int}} & 0 & c_{\text{ext}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_2} & 0 \\ 0 & c_{\text{int}} & 0 & c_{\text{int}} & 0 & c_{\text{ext}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_3} \\ c_{\text{ext}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_1} & 0 & c_{\text{int}} & 0 & c_{\text{int}} & 0 \\ 0 & c_{\text{ext}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_2} & 0 & c_{\text{int}} & 0 & c_{\text{int}} \\ c_{\text{int}} & 0 & c_{\text{ext}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_3} & 0 & c_{\text{int}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

其中$\mathbf{k} = (k_x, k_y)$为布洛赫动量，$\mathbf{a}_1 = (0, a)$、$\mathbf{a}_2 = (\sqrt{3}a/2, a/2)$、$\mathbf{a}_3 = (\sqrt{3}a/2, -a/2)$，且 a 为晶格常数。系统的谱可通过求解本征方程得到，

$$H(k)u_n(\mathbf{k}) = E_n(\mathbf{k})u_n(\mathbf{k}), \tag{10}$$

其中 u_n(k)为布洛赫波函数的周期部分， n 为能带的指标。

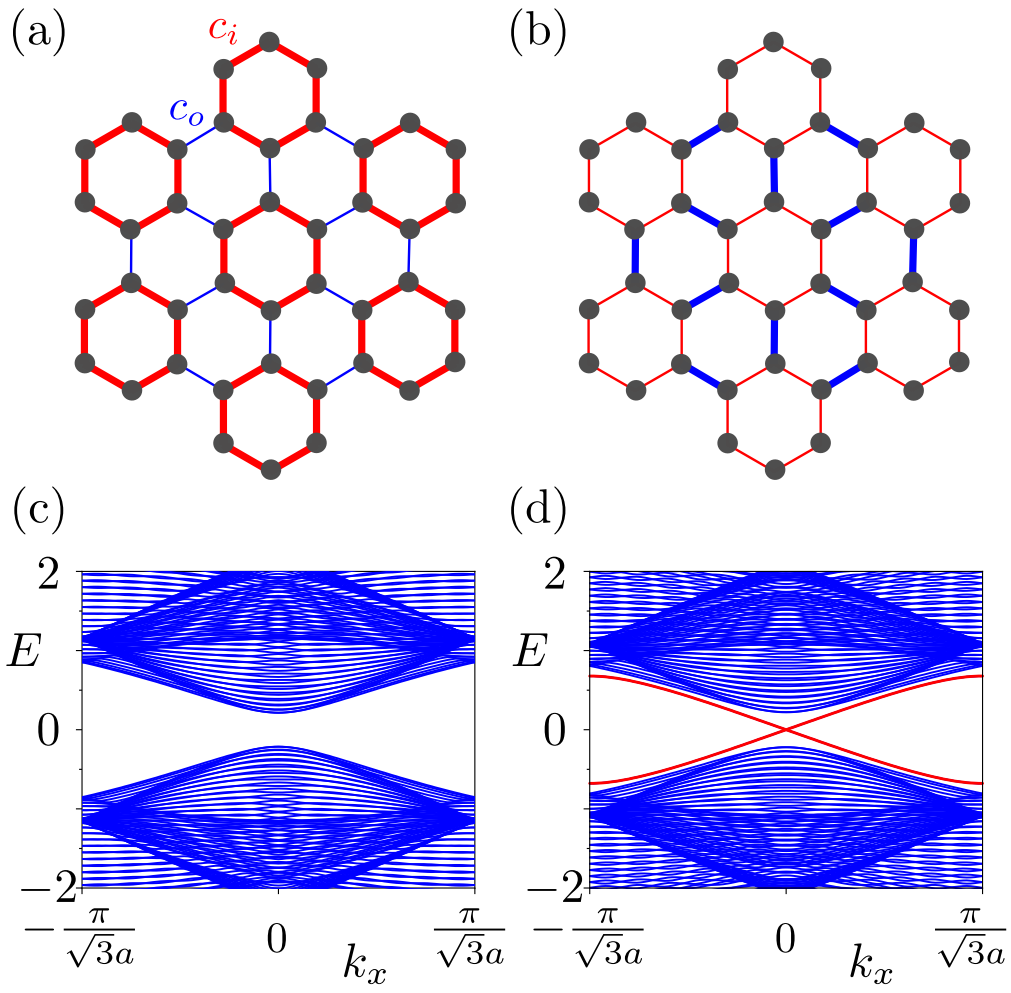

图 2. 呼吸蜂窝晶格。(a) 拓扑平庸模型，其中$c_i > c_o$。(b) 拓扑非平庸模型，其中 $c_i < c_o$。(c) 拓扑平庸模型的条带结构能带。 $c_i = 1.2$， $c_o = 1$。(d) 拓扑非平庸模型的能带。 $c_i = 1$， $c_o = 1.2$。边缘态以红色标示。

研究了两种构型：一种是拓扑平庸情形，其 $c_{\text{int}} > c_{\text{ext}}$如图 2(a) 所示；另一种是拓扑非平庸情形，其 $c_{\text{int}} < c_{\text{ext}}$ 如图 2(b) 所示。研究了沿 x 方向满足周期性边界条件、沿 y 方向满足开放边界条件的条带结构的谱。对于拓扑平庸情形，如图 2(c) 所示，带隙中没有态；而对于拓扑非平庸情形，如图 2(d) 所示，带隙中存在拓扑边缘态。值得注意的是，每条边缘都支持一对反向传播边缘态。此外，该系统是一种弱拓扑绝缘体，因为拓扑边缘态仅在锯齿形边缘上无能隙，而在其他边界上则出现带隙。

2.4. 威尔逊环

Wilson环方法是计算拓扑不变量的有效工具，具有规范不变性，并且适用于数值实现 [66]。该方法具有很强的通用性，可用于描述紧束缚模型和连续模型 [68]。此外，它也便于用于描述图 2 中所示的多带系统。在此，我们首先介绍威尔逊环的概念，然后用它来描述上述呼吸蜂窝晶格的拓扑性质。考虑一个矩阵 $M^{k_i,\ k_{i+1}}$，其元素由以下方式获得

$$M_{nn'}^{k_i,k_{i+1}} = \langle u_{n,k_i} | u_{n',k_{i+1}} \rangle, \tag{11}$$

其中， n 与 n' 是覆盖所关注带隙以下所有 N 条能带的能带指标，而 k_i 与 k_{i+1} 是布里渊区中回路上的两个相邻点。威尔逊环可由一类 $M^{k_i,\ k_{i+1}}$的矩阵乘积得到，

$$W = \prod_{i=1}^{N} M^{k_i,k_{i+1}}, \tag{12}$$

其中， k_1， k_2，……， k_N在布里渊区中构成一个闭合回路，且 $k_{i+N} = k_i$。对于一维问题，各能带的贝里相位为

$$\theta_n \equiv i \log w_n, \tag{13}$$

其中， w_n 是 n^{th} 的特征值 W。对于高维系统，我们可以考虑沿一个方向 $k_\parallel$ 的贝里相位作为 $k_\perp$的函数，即 $\theta_n(k_\perp)$。例如，二维系统中著名的陈数可以通过 $\theta_n(k_y$的绕数得到，如式 7所示。

接下来，我们采用威尔逊环方法研究呼吸蜂窝晶格的拓扑性质。呼吸蜂窝晶格的第一布里渊区是一个正六边形，如图3(a) 所示。 Γ、M、K 和 K′ 是高对称动量点。从图2可以看出，考虑沿之字形方向延伸的条带结构时，晶胞会扩大。扩大晶胞对应一个缩小的第一布里渊区，如图3(a) 中蓝色区域所示。为了描述其拓扑性质，我们需要考虑扩大晶胞的体能带。原始晶胞包含六个格点，因此有六条体能带。考虑扩大晶胞后，体能带发生折叠，总共有十二条体能带，其中六条位于零带隙以下，六条位于零带隙以上，如图3(b) 所示。我们采用威尔逊环方法计算了下方六条能带的贝里相位。拓扑平庸模型和拓扑非平庸模型的结果分别如图3(c) 和3(d) 所示。可以看出，对于拓扑平庸模型，全部六条能带的贝里相位都位于 0 或 2π附近，并且可以连续地变换到 0 或 2π，因此它只是一个原子绝缘体。然而，对于拓扑非平庸模型，两条能带的贝里相位在 π附近交叉，这对应于

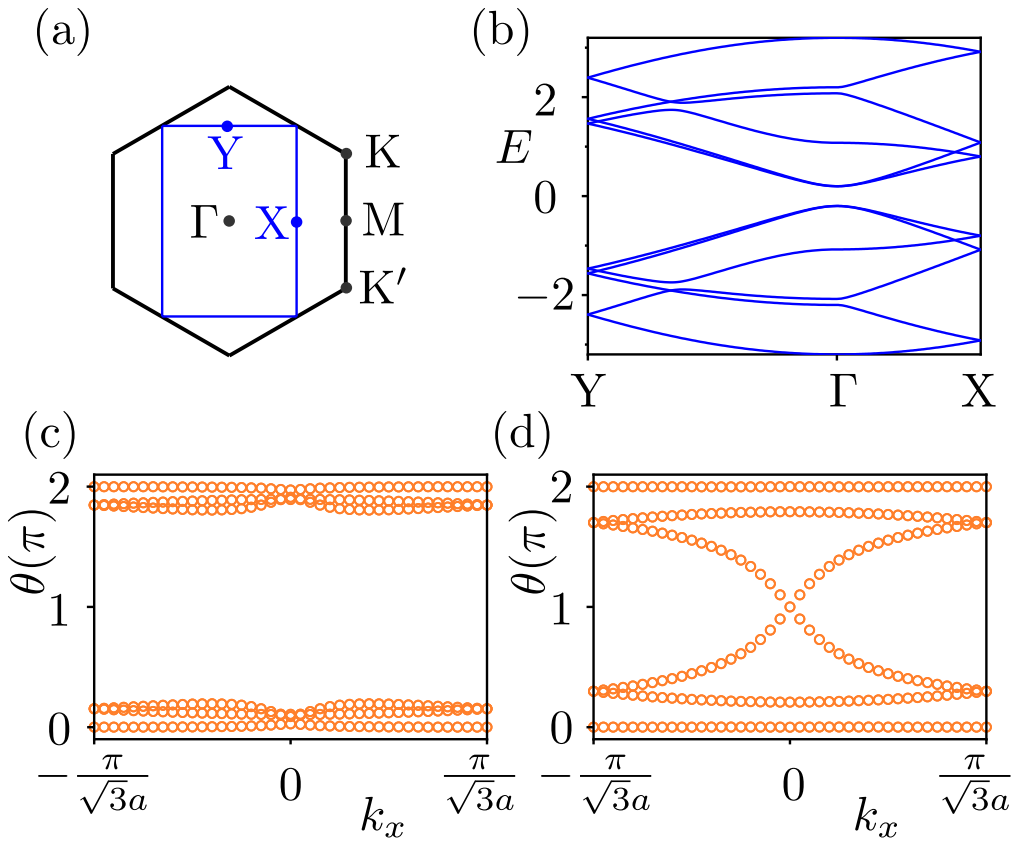

图 3. 体能带和贝里相位 $\theta_n(k_x)$ 随 k_x 的变化（也称为Wannier能带）。（a）以黑色标示的第一布里渊区和以蓝色标示的约化布里渊区。（b）约化布里渊区中的体能带。（c）拓扑平庸模型中较低的六条能带的Wannier能带。 $c_i = 1.2$， $c_o = 1$。（d）拓扑非平庸模型中较低的六条能带的Wannier能带。$c_i = 1$， $c_o = 1.2$。

非零极化，也是图2(d) 中拓扑边缘态的拓扑起源。这里的贝里相位交叉和拓扑边缘态与具有时间反演对称性的拓扑绝缘体有相似行为。图2(d) 中的拓扑边缘态是二重简并的。然而，两者并不相同。这里图3(d) 中的 Wannier能带仍有带隙，而拓扑绝缘体的 Wannier能带则无能隙。这是因为这里的拓扑呼吸蜂窝晶格是一种弱拓扑绝缘体，拓扑边缘态仅存在于特定方向。此外，图2(d) 中的拓扑边缘态并不与体态相连。

2.5. 对称性指标

上文已表明，拓扑态可以通过 Wilson 环方法计算得到的 Wannier能带来描述。然而，计算仍然不便。Fu 和 Kane 提出了一种简单的方法，用于计算

具有反演对称性的拓扑绝缘体的拓扑不变量，该方法只考虑高对称动量点处的反演对称性本征值 [69]。这一方法启发了能带拓扑对称性指标的发展，可用于处理各种对称性和不同的拓扑态 [70, 71]。对称性指标的发展使得拓扑材料的诊断成为可能 [72, 73] ，并进一步催生了高阶拓扑绝缘体和脆弱拓扑绝缘体等新概念 [74]。

具有晶体对称性的原子绝缘体具有对称且指数局域的 Wannier函数。给定一种晶体对称性，通过在不同的最大Wyckoff位置放置不同的轨道，可以得到高对称动量点处所有可能的原子绝缘体的能带表示。通过比较具有特定对称性的绝缘体与原子绝缘体在高对称动量点处的对称性本征值，可以将这些绝缘体分类为不同的拓扑相。可表示为原子绝缘体之和的绝缘体归类为普通绝缘体。能够平滑变形为原子绝缘体线性叠加、且其中某些系数为负的绝缘体，则归类为脆弱拓扑绝缘体。常规拓扑绝缘体更为稳定；若不破坏对称性或关闭带隙，它们就无法转变为原子绝缘体，因此无法表示为原子绝缘体的线性叠加。由于对称性的存在，普通绝缘体还可以进一步细分为不同的拓扑相。例如，Wannier函数位于晶胞边界的原子绝缘体，与 Wannier函数位于晶胞中心的原子绝缘体在拓扑上有所不同。从这个意义上说，尽管它们通常不支持无能隙拓扑边缘态，我们仍可将其视为拓扑非平庸态。通过检查高对称动量点 [70, 71] 处的对称性本征值，可以大致区分这些拓扑相。

我们仍以图中所示的呼吸蜂窝晶格为例。式2 中的哈密顿量9具有六重旋转对称性

$$C_6 H(\mathbf{k}) C_6^{\dagger} = H(R_6 \mathbf{k}), \tag{14}$$

其中 C_6 是一个六阶方阵，其元素为 $C_{m,\ \mathrm{mod}(m+1,\ 6)} = 1$ ，而 R_6 是一个将晶体动量旋转 $2\pi/6$ 的矩阵，其形式为

$$R_6 = \begin{pmatrix} \cos(2\pi/6) & \sin(2\pi/6) \\ -\sin(2\pi/6) & \cos(2\pi/6) \end{pmatrix}. \tag{15}$$

呼吸蜂窝晶格的最大Wyckoff位置如图4(a)所示。晶胞中心有一个轨道 $1a$ ，其小群为 C_6；位置 $2b$ 有两个轨道，其小群为 C_3；位置$3c$ 有三个轨道，其小群为 C_2。动量空间中的第一布里渊区如图4(b)所示。 Γ、M和K是三个高对称动量点。布洛赫哈密顿量在 C_6 处具有 Γ对称性， C_2 在M点具有对称性，并在 C_3 K点具有对称性。

我们考虑最低的三条能带，因此每个晶胞有三个轨道。与之等价的原子绝缘体有三种可能：第一种是在位置 $3c$放置三个轨道；第二种是在 $1a$ 放置一个轨道，并在 $2b$放置两个轨道；第三种是在 $1a$放置三个轨道。 $c_i > c_o$的 C_2 对称性本征值在 Γ 点为 -1、$+1$、$+1$，在M点为 -1、$+1$、$+1$。它等价于在 $1a$放置一个 p 轨道和两个 s 轨道。因此，电荷分布在晶胞中心，如图4(c)所示。这种相在拓扑上是平庸的。 $c_i < c_o$的 C_2对称性本征值在 Γ 点为 -1、-1、-1，在M点为 -1、$+1$、$+1$。它等价于在 $3c$放置三个 p 轨道。电荷分布如图4(d)所示。我们注意到边缘和角上存在拓扑荷。它们形成边缘态和角态。因此，具有 $c_i < c_o$ 的呼吸蜂窝晶格仍然是原子绝缘体，但其拓扑非平庸，具有 $c_i > c_o$。

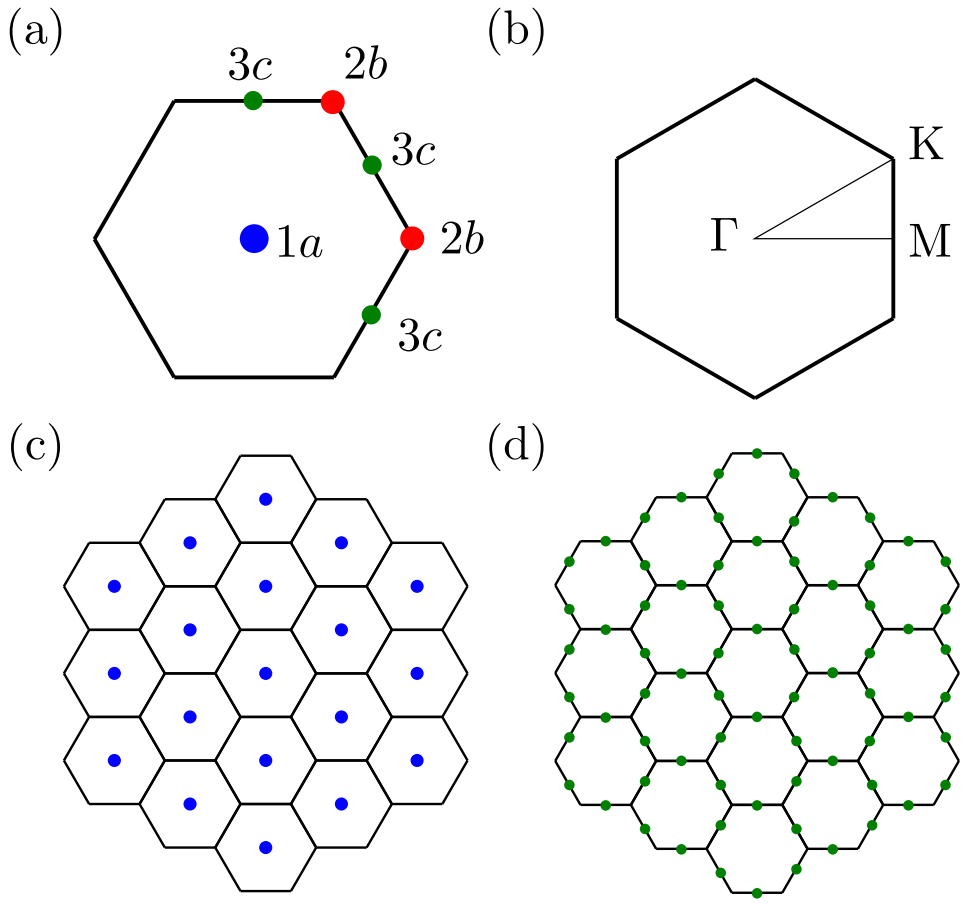

图 4. 呼吸蜂窝晶格的电荷分布。(a) 呼吸蜂窝晶格的最大Wyckoff位置。(b) 布里渊区。(c) 平庸情形下的电荷分布，其中 $c_i > c_o$。(d) 非平庸情形下的电荷分布，其中 $c_i < c_o$。

*2.6. Floquet*拓扑绝缘体与非厄米拓扑绝缘体 s

拓扑态已扩展到周期驱动系统中，这类系统称为Floquet拓扑绝缘体 [86, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85]。与静态系统不同，Floquet系统的哈密顿量随时间变化且具有时间周期性 $H(t) = H(t+T)$，其中 T 是驱动周期。尽管能量不再是守恒量，准能量仍然守恒。我们寻找具有如下形式的准定态解 $|\psi(\mathbf{k}\ t)\rangle = e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})t}|\phi(\mathbf{k}\ t)\rangle$，其中 $|\phi(\mathbf{k}\ t)\rangle$ 以 T为周期。准能带 $\varepsilon(\mathbf{k})$可由以下本征方程求得:

$$U_T(\mathbf{k})|\phi(\mathbf{k},t)\rangle = e^{-i\varepsilon(\mathbf{k})T}|\phi(\mathbf{k},t)\rangle, \tag{16}$$

其中 $U_T(\mathbf{k}) \equiv \mathcal{T}\exp[-i\int_0^T H(\mathbf{k}\ \tau)d\tau]$ 是 Floquet 算符，$\mathcal{T}$ 表示时间序算符。

起初，弗洛凯工程被用作调节能带结构拓扑性质的方法。普通绝缘体可以通过弗洛凯工程驱动到拓扑非平庸态 [75]。大多数弗洛凯拓扑态都可以像静态情形一样，用拓扑不变量来描述。弗洛凯系统可以视为一个具有有效哈密顿量 $H_{\text{eff}}(\mathbf{k}) \equiv \frac{i}{T}\log U_T(\mathbf{k})$ 的静态系统。后续研究表明，弗洛凯系统能够支持静态系统中没有对应态的拓扑态。从公式 16 可知，$U_T(\mathbf{k})$ 是一个酉矩阵，因此 $\varepsilon(\mathbf{k})$ 在频域中以 $2\pi/\bar{T}$ 为周期。这意味着弗洛凯系统能够支持完全无能隙态 [79]。如果幺正矩阵 $U_T(\mathbf{k})$ 不能连续地变换为单位矩阵，那么它就是拓扑非平庸的。此外，弗洛凯系统还支持由时间演化算符 $U(\mathbf{k}\ t) \equiv \mathcal{T}\exp[-i\int_0^t H(\mathbf{k}\ \tau)d\tau]$ 的非平庸拓扑所描述的拓扑态。最著名的例子是反常弗洛凯拓扑绝缘体，它支持陈数为零的手性边缘态 [77]。反常弗洛凯高阶拓扑绝缘体是另一个例子，它支持偶极和四极极化均为零的拓扑角态 [87, 88, 89, 90, 91, 92]。我们注意到，Floquet 算符 $U_T(\mathbf{k})$ 是酉矩阵，这一点与散射矩阵相似。两者的本征方程彼此等价。因此，弗洛凯拓扑态可以通过散射系统来模拟 [93, 94, 95, 96, 97, 98]。声子耦合环形谐振器系统是模拟弗洛凯拓扑绝缘体的理想平台，其中散射过程起到时间的作用。此外，耦合波导系统也可用于模拟弗洛凯现象，其中沿空间特定方向的传播起到时间的作用 [99, 100, 101, 102, 103, 104, 105]。

非厄米拓扑是近年来备受关注的另一个方向。非厄米能带理论与厄米能带理论有很大不同 [106, 107, 108,109]。首先，非厄米系统的体能谱高度依赖边界条件，这打破了通常的体边对应 [110, 111]。其次，非厄米系统的体能谱通常是复数，因此可以定义不同类型的带隙：如果非厄米哈密顿量的复能带在复能量平面上不与某个参考点相交，

当且仅当其复能带在复能量平面上不与某条参考线相交时，非厄米哈密顿量才被定义为具有线隙 [112, 113]。线隙拓扑可以在不闭合带隙的情况下转化为厄米对应物，而点隙则是非厄米系统所特有的。具有非零绕数的拓扑非平庸点隙会导致非厄米趋肤效应 [114, 115], ，使所有体态在开放边界条件下局域化 [110, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 111, 122, 123, 124]。非厄米趋肤效应本身虽起源于点隙拓扑，却也会影响线隙对应的通常能带拓扑。对于具有非厄米趋肤效应的非厄米系统，通常的体边对应不再成立。非布洛赫拓扑能带理论应运而生，用以恢复非厄米系统中的体边对应 [125, 115, 126, 127, 128, 458, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138]。除非厄米趋肤效应外，其他非厄米拓扑态，例如非厄米陈能带 [125, 139, 140, 141, 142], 混合皮肤拓扑模 [143, 144, 145, 146, 147, 148], 临界非厄米皮肤效应 [149] 以及二阶非厄米趋肤效应 [150, 151, 152, 153] 也已得到广泛研究。

2.7. 现象学理论：*Jackiw-Rebbi*理论

狄拉克方程最初用于描述相对论性量子力学电子的行为，如今主要应用于凝聚态物理学，并被广泛推广用于描述低能激发。狄拉克方程的解引出了负能模的问题，因为物理电子只能具有正能量。基于这一矛盾，狄拉克推测存在反电子，这一推测后来通过在 1932 [154]发现正电子的实验得到了证实。原始狄拉克方程写作如下，

$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta m)\Psi=i\frac{\partial\Psi}{\partial t}. \tag{17}$$

这里，系数 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 β 是矩阵，这是狄拉克方程的一个重要特征。 $\boldsymbol{p}$ 是动量算符，且 $\boldsymbol{p}=i\nabla$； m 表示质量项。通常的狄拉克方程中的质量项是均匀且与位置无关的。然而，系统中的缺陷或扰动会改变恒定的质量项。这些由缺陷或扰动产生的非均匀质量项，可视作施加于系统的有效声子场。

1976年，Jackiw 和 Rebbi 在存在费米场时，基于孤子-磁单极子系统求解狄拉克方程，得到了一个零能量孤子态 [155, 156]。这意味着，非均匀且位置相关的质量项能够引发一些引人入胜的现象：当孤子态出现在具有相反质量项的不同晶格之间的畴壁上时，便会产生这些现象。作为 Jackiw-Rebbi 模型的重要特征，这些孤子态可以通过恰当的映射在声学系统中实现。

近期有多篇论文揭示了实现 Jackiw-Rebbi 模型声学类比的方法。例如，Xiao *et al.* 设计了一种夹层式圆柱形波导结构 [32]：每个声学晶胞包含两根较粗的管道（A 管），其中插入一根较细的管道（B 管）（图 5(a)）。他们要求每个晶胞的纵向长度恒定为 8.5 cm，这意味着唯一可调的参数是 A 管和 B 管之间的长度差 $\triangle d = (d_{\mathrm{A}} - d_{\mathrm{B}})/2$。通过重新分配 A 管和 B 管的长度，他们在临界点 $\triangle d$=0.49 cm 处实现了第二个带隙的能带反转；临界点两侧的晶胞具有相反的有效质量项。$\mathbb{Z}_2$ 对称几何相位，即 Zak 相 [21]——贝里联络的积分——是区分具有相反质量项的晶胞拓扑性质的有力工具。如图 5(a) 所示，他们将两个具有相反质量项、拓扑性质不同的晶胞（S1 和 S2）组合在一起，形成畴壁结构。根据 Jackiw-Rebbi 理论，畴壁上存在一个局域化的孤子态。Xiao *et al.* 在实验中成功观测到了这一孤子态，其声学响应如图 5(b) 所示。另一项研究中，Li *et al.* 提出了一种一维周期声学系统，其与 Su-Schrieffer-Heeger 模型 [157, 158], 完全类似；该模型最初用于描述聚乙烯中两种稳定的碳原子排列。该声学系统的晶胞由两个谐振器和连接它们的两根连接管组成。通过交换两根连接管的半径，可以得到相反的有效质量项，而这两根连接管控制着胞间跃迁和胞内跃迁。图 5(c) 展示了由具有相反质量项的 A、B 晶胞构成的畴壁。类似地，畴壁上存在一个局域化的带隙内孤子态（图 5(d)）。Li *etal.* 通过透射扫描验证了这一孤子态，并证实了其稳健性。对于机械系统，Vitelli *et al.* 也设计了一种类似结构，由周期排列的无质量刚性转子交替构成；这些转子被约束为绕固定枢轴点转动，在奇数格点处的平衡角为 θ，在偶数格点处的平衡角为 $\pi - \theta$ [159]。正如预期，在右倾和左倾状态的转子之间的畴壁上（对应于参考文献 [160]中的不同绕数），会出现一个孤子态。上述两项研究都聚焦于一维畴壁系统，并得出类似结论：Jackiw-Rebbi 理论预言的孤子态会出现在畴壁上。这促使我们思考：Jackiw-Rebbi 模型在二维系统中将呈现怎样的形式?

在一维系统中，Jackiw-Rebbi 模型的行为表现为：一个带隙内孤子态被限制在一个称为畴壁的零维点上，且其两侧具有相反的质量项。扩展一维系统的最简单方式，是将一维系统沿其他维度周期性排列。相应地，零维畴壁也会扩展到相应的维度。已有许多相关研究展示了 Jackiw-Rebbi 模型在二维系统中的性质。Zhang *et al.* 设计了一种周期性声学腔系统，由声学谐振器组成 [161] 并通过细圆柱形耦合波导连接，如图6（a）所示。其能谱在 K 与 K'

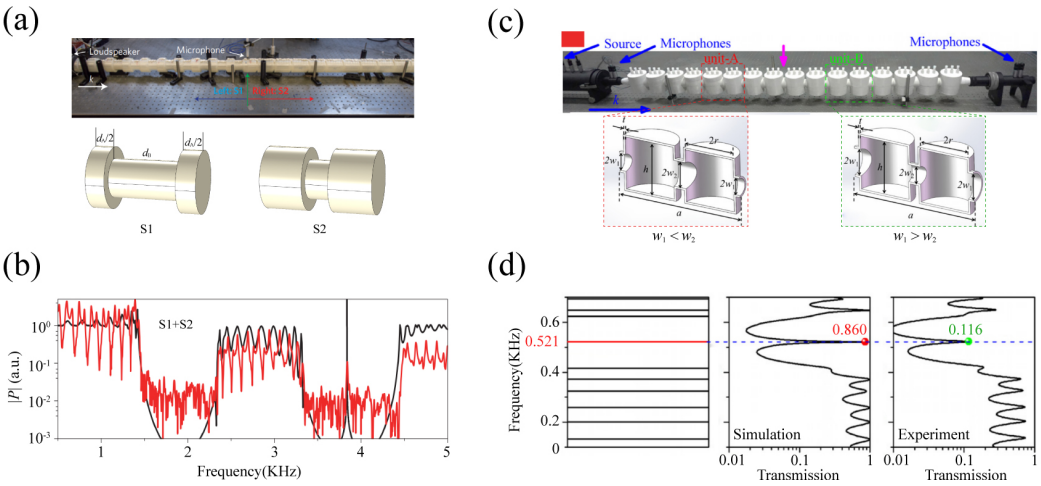

图 5. 一维声学系统中的 Jackiw-Rebbi 畴壁。(a) 畴壁结构及其组成晶胞 S1 和 S2 的构型。(a) 中的绿色箭头标示畴壁的位置。(b) (a) 中标示的畴壁处的声压响应谱。孤子态在第二个带隙处有强烈响应。(c) 实验装置。样品是由两种声子晶体组成的声学波导：晶胞 A 和晶胞 B。(c) 中的粉色箭头表示晶胞 A 和晶胞 B 之间出现孤子态的畴壁。(d) (c) 中样品的能谱及其对应的透射谱。红线标示的孤子态出现在能隙中。实验测得了一个透射峰（绿色圆圈），表明孤子态的存在。图片改编自：(a) 和 (b)，参考文献 [32]；(c) 和 (d)，参考文献 [158]

点附近呈现线性色散，可由狄拉克方程（式17）描述，称为狄拉克锥。通过调节腔体的高度差 Δh，他们打破了系统的反演对称性，并成功打开带隙，引入了一个拓扑指标——谷陈数，该指标通过对谷周围的贝里曲率积分获得。带隙的打开源于狄拉克锥 [162]交点附近产生的相反有效质量项。因此， K 和 K' 谷中的谷陈数符号相反，并且其符号会随着 Δh 符号的改变而改变。当具有不同谷霍尔相的晶胞组装形成畴壁时，Jackiw-Rebbi理论所阐述的孤子态会导致无能隙态沿边界传播，如图6（b）所示。除了直观的声学腔体构型外，声学散射体和机械结构也是实现相同物理学的出色平台。例如，Liu *et al.* 提出了两种基于三角形 [163]和圆形 [164] （图6（c））声子散射体的谷霍尔绝缘体。在三角形散射体结构中，当三角形散射体的旋转角改变超过 0°时，会发生谷霍尔拓扑相变。此外，在圆形散射体系统中，这取决于两种圆形散射体之间的半径差。因此，这两项工作都观察到了无能隙的手性边缘态，其沿着具有相反有效质量项的两个畴之间的锯齿形边界线传输。边缘模的色散如图6（d）所示。在另一项研究中，Prodan *et al.* 建立了一种机械对应物

基于磁耦合旋转器 [165]——带有六个臂槽、用于安装钕圆盘磁铁的不锈钢（图 6(e)）。他们还观察到了谷霍尔边缘模，如图 6(f) 所示，该模式源自沿畴壁局域的孤子态之间的相互作用。还有其他方法 [39, 166, 167] 可在二维系统中实现 Jackiw-Rebbi 模型。上述研究足以得出结论：Jackiw-Rebbi 模型的直观特征是形成零能孤子态，以及在低于系统维度的维度中产生铰链态，尽管在声学晶格中，这些态通常出现在有限频率处，而非零能量处。Jackiw-Rebbi 理论预言的这些态，是体性质在低维上的一种投影，称为体边对应。这种对应是刻画材料拓扑或极化性质的有用工具。

最后，我们简要讨论声学系统中马约拉纳费米子的类似物。狄拉克方程中的复场 Ψ 描述带电粒子及其具有相反电荷的反粒子，例如电子和正电子。在自然界中，也存在一些中性粒子，它们本身就是自己的反粒子，例如光子、声子和引力子等。它们全都是整数自旋玻色子，由实场 Ψ 描述。

自旋为1/2、且反粒子就是自身的中性粒子称为马约拉纳费米子，它们在超导领域发挥着极其重要的作用 [168]。关于马约拉纳费米子的讨论，需要由保护超导体的粒子-空穴对称性加以约束。在 Prodan 的研究中 *et al.*，他们设计了一种机械超材料 [169] ，由通过两根弹簧连接的二聚体构成周期阵列，如图7(a)所示。每个二聚体有两个运动自由度：一个是平移，另一个是旋转。该系统的粒子-空穴对称性源于平移和旋转自由度在反演操作下表现出的不同特性。粒子-空穴对称性与系统固有的时间反演对称性共同决定了其属于 BDI 对称性类别。在 BDI 对称性类别的一维费米子拓扑超导体中，拓扑边缘激发称为马约拉纳费米子。这些边缘模在电荷共轭下与自身镜像重合，正如马约拉纳费米子就是自身的反粒子。E. Prodan *etal.* 在图7(b)和7(c)所示的实验平台上测量了受拓扑保护的边缘模；其中，畴壁通过改变一侧晶胞中两条对角线上的弹簧数量而形成。如图7(b)所示，他们用红色和白色标示二聚体上的不同机械模块。图7(c)中测得的拓扑边缘模在电荷共轭下保持不变。例如，当平移和旋转自由度互换并随之进行时间反演操作时，这些马约拉纳边缘模的运动仍保持不变。这是将它们与普通边缘模区分开来的重要特征。这项引人入胜的研究为构造源自 BDI 拓扑类别的马约拉纳费米子机械类比系统提供了一种方法，并激发了该方向的大量研究。此外，源自 Jackiw-Rossi 机制、由狄拉克涡旋体现的类马约拉纳零模，已在 Kekul*é* 畸变机械 [170]和声学 [171]超材料中得到观测。

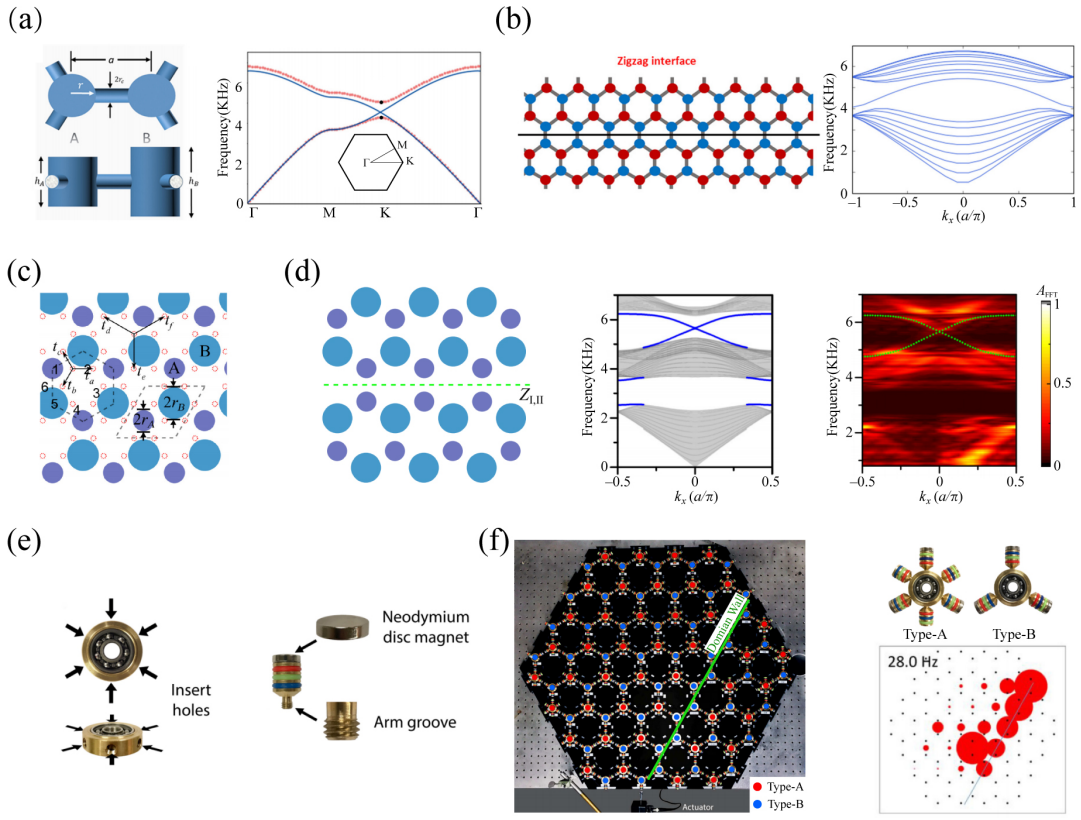

图 6. 二维声学系统中的 Jackiw-Rebbi 畴壁。(a) 蜂窝状声学晶胞的构型，以及对应的高度差为零（蓝色曲线）或非零（红色曲线）时的能谱 Δh。在高度差非零 Δh的情况下，布里渊区 K 点附近会打开一个能隙。(b) 高度差相反的两个畴之间的锯齿形畴壁 $\Delta h = \pm 0.15 h$。右侧谱的能隙中显示了局域于畴壁的无能隙边缘态。(c) 两种刚性杆嵌入空气背景中的声学晶体示意图。(d) 半径差相反的畴 I 与畴 II 之间的锯齿形畴壁示意图 $\delta r = r_{\mathrm{A}} - r_{\mathrm{B}}$。右侧面板为计算所得的谱和测得的谱，其中绿色曲线表示边缘色散。(e) 旋转器示意图，其上有六个插孔，用于安装钕圆盘磁铁。(f) 晶格构型，其中畴壁（绿色线）将系统分为两个不同的畴。右侧面板展示了 28Hz 时束缚于畴壁的边缘模的场分布。图片引自：(a) 和 (b)，参考文献 [161]；(c) 和 (d)，参考文献 [164]；(e) 和 (f)，参考文献 [165]

3. 拓扑声子超材料

3.1. 谷霍尔与自旋霍尔声子晶体

我们首先介绍基于谷和赝自旋自由度构建的拓扑声子晶体，其中时间反演对称性保持不变。由于这类声子晶体不需要时间反演对称性破缺相互作用（例如对外部磁场或环流的可测响应），因此易于通过实验实现，并在早期便引起了广泛关注



图 7. 机械系统中的马约拉纳边缘模。(a) 二聚体链示意图。(b) 实验装置。实验模型由红色和白色二聚体组成，它们通过弹簧相连。一条对角线上有一根弹簧，另一条对角线上则有两根弹簧。红色和白色二聚体之间的弹簧配置互换。如右侧插图所示，每个二聚体由两个封装在塑料外壳中的黄铜球组成。(c) 测得的声子响应。边缘模信号的分裂是由系统的非线性和轻微的对称性破缺造成的。图片改编自参考文献 [169]

探索拓扑声子晶体的历程已有数日 [172, 39, 173, 174, 163, 175, 176]。不同于近期提出的各种用于模拟量子自旋霍尔效应的赝自旋 [23, 177, 178]，，谷是固体能带理论中的一个长期概念 [179]，最初用于指示能带结构中出现的局部极值。鉴于拓扑的实现主要取决于贝里曲率聚集所在的能带，而贝里曲率通常与带隙宽度成反比，因此谷正是可能出现非平庸拓扑的位置。由于周期系统中的波运动以布洛赫动量为标记，谷也被用于标记拓扑态。在二维系统中，获得谷态的一种可行方法是打破狄拉克锥简并 [180]。二维系统中的狄拉克锥通常表示为 $k_x\sigma_x + k_y\sigma_y$，其中狄拉克速度在不失一般性的前提下设为 1，且 $\sigma_{i=x,\ y,\ z}$ 为泡利矩阵。由于哈密顿量只用到三个泡利矩阵中的两个，要在狄拉克锥中打开带隙，我们可以引入剩余泡利矩阵对应的微扰项 $m\sigma_z$，其中 m 是质量项，用于调节上、下谷态之间的带隙。尽管狄拉克锥可以出现在布里渊区中不受任何对称性保护的任意位置 [63]，，但位于布里渊区高对称位置的狄拉克锥更适合用于构建谷态，这既便于计算（无需搜索布里渊区中的任意位置），也能使各谷在布里渊区中尽可能远离彼此（为调控谷拓扑留出足够空间）。对一个谷区域内（局域于谷点周围）的贝里曲率进行积分，会得到一个非零拓扑量，称为谷陈数。由于时间反演对称性保持不变，对整个能带的贝里曲率积分始终为零，因此同一能带中总存在另一个携带相反谷陈数的谷。

谷声子晶体最初构建于一种六角晶格中，该晶格由规则的三角形杆作为散射体组成 [39]，，其中晶格和散射体分别具有

点群 C_{6v} 和 C_{3v}的对称性。图 8(a) 中以 α 表示的散射体旋转会导致晶格与散射体之间的镜像对称性不匹配，从而降低声子晶体的对称性。具体而言，六角形第一布里渊区的角点（K 和 K'）所对应的点群，对于 $\alpha = 0°$ 而言由点群 C_{3v} 降为对于 $\alpha = 10°$ 而言的点群C_3 ，对应着从狄拉克锥色散到开隙谷色散的转变 [图 8(a)]。这里重点关注 K 点处的谷态，而不等价 K 点处的谷态可由时间反演对称性推导得出。声场的相位分布 ϕ和时间平均坡印廷矢量 $\langle \boldsymbol{S} \rangle \propto \bigtriangledown \phi$（图 8(b) 上、下两排图）表明，谷态具有独特的涡旋特征：低频和高频谷态（K_1 和 K_2）的涡旋具有相反的手性，并分别空间分离于晶胞的角上（P_1 和 P_2）。因此，源自点群 C_3的一维不可约表示的谷涡旋特征，提供了一个明显且可测量的信号，可用于探测谷态。为了表征涡旋态的品质，可以建立一个量$Q = \int_{\text{Cell}} (\bigtriangledown \times \langle \boldsymbol{S} \rangle)_z \mathrm{d}^2 r$ [39]。该量与局域在一个晶胞内的声学角动量成正比，$J_z = \int_{\text{Cell}} \langle \mathrm{u} \times \rho_0 \mathrm{u}' \rangle_z \mathrm{d}^2 r$，其中 u 是声场振动的位移， ρ_0 是背景介质的质量密度。 J_z和 Q都可视为原子晶体中声子赝自旋角动量的连续形式 [181, 182]。谷态中非零 Q 的存在意味着谷态具有内禀角动量，并能够通过传递角动量来旋转物体。在声子晶体中激发单个谷态，对声学操控的潜在应用至关重要。图 8(c) 展示了高斯波束入射可以激发 K 谷态，入射角的选择满足横向动量匹配。此外，时间反演对称性相关的 K 和 K' 谷态在相同频率下具有相反的手性，可用于实现类似谷霍尔效应的谷手性锁定分束 [39, 183] [184]。如图 8(d) 所示，在窄高斯波束激发下，声子晶体中的声波在空间上分裂为两支，每支均具有手性相反的涡旋特征。基于此，我们将具有谷态的声子晶体归类为处于声学谷霍尔相。

拓扑保护声学边缘态随后在两个不同谷霍尔相之间的界面中被观测到 [163]。声学谷态的涡旋手性可以通过旋转三角形散射体的朝向来切换。考虑由散射体构成的两个声子晶体，其中散射体分别顺时针和逆时针旋转相同的角度（$\pm\alpha$），它们具有相同的点群对称性 C_3 ，并且互为水平镜像操作的结果，因此二者具有相同的谷色散，但谷涡旋的手性和位置相反。若关注谷涡旋的这些性质，就会发现这导致了谷能带的反转。因此，这些声子晶体具有两个质量项相反的不同谷霍尔相，即谷霍尔相 I 和谷霍尔相 II，对应的旋转角度 α 分别属于

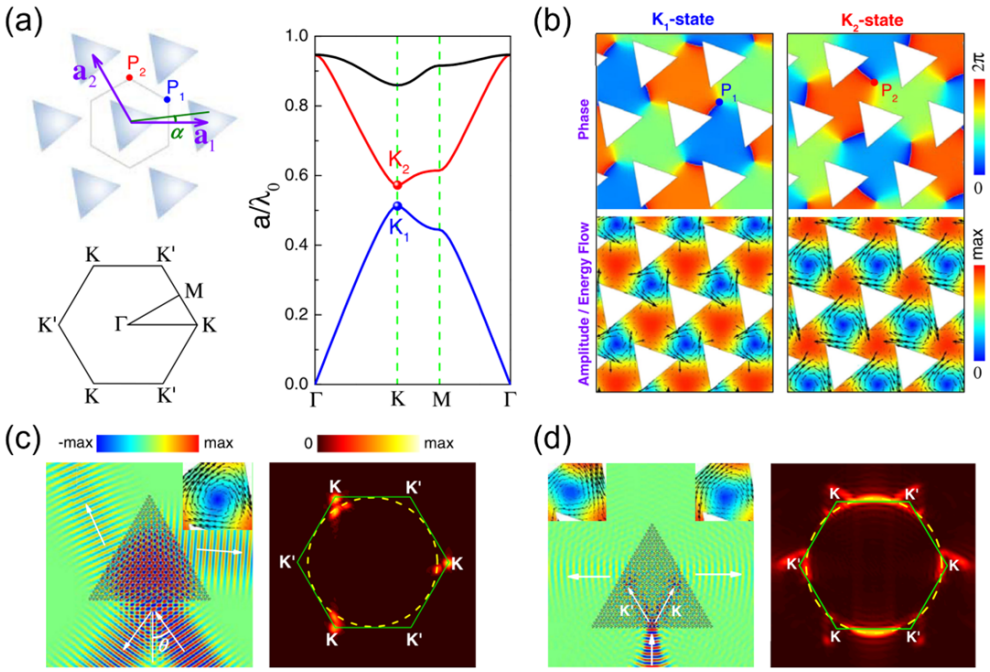

图8. (a) 由规则三角形杆构成的六角形声子晶体示意图。 P_1 和 P_2 表示具有 C_3 对称性的位置。旋转角度为 $\alpha = 10°$时对应的能带结构。(b) 谷态 K_1 和 K_2的压力场分布，其中上、下两幅图分别以颜色显示相位和振幅图样。下图中的附加箭头表示相应的时间平均坡印廷矢量。(c) 以 K_2 谷态为例说明选择定则：该谷态由高斯波束斜向入射到有限尺寸的声子晶体上产生。插图放大显示了声子晶体内部的一个涡旋。(d) 从下方入射窄高斯波束激发的压力分布，插图放大显示了从声子晶体内部左行和右行波束中提取的逆时针和顺时针涡旋。(c)和(d)右侧的图显示了相应的动量空间傅里叶谱，其中绿色实线和黄色虚线分别表示六角形第一布里渊区和自由空间的等频线。图改编自 [39]。

$(-60°, 0)$ 和 $(0, 60°)$， [163]。这两个谷霍尔相的谷陈数分别为 $C^K = 1/2$ 和 $-1/2$，其中上标表示 K谷 [185]。因此，谷霍尔相 I 与谷霍尔相 II 之间界面两侧的 C^K 之差为 ± 1；根据体边对应，这会在 K 谷的投影附近产生一个谷诱导边缘态（群速度为正或负）。对于 K'也会出现类似情况，但 $C^{K'} = -C^K$ 对于K' 谷 [39]则不同。图 9(a) 所示的装置在实验中构造了这类边缘态。在界面处，预期会出现一对反向传播的谷边缘态 [（图 9(b) 上图中的绿色线条）]，其中边缘态 $\phi^{\pm}$ (I,II) 和 $\phi^{\pm}$ (II,I) 分别表示由界面 I-II 和 II-I 支持的无能隙模式，沿着 $\pm x$方向传播。以ϕ^{+} (II,I) 为例，其解析表达式与一个旋量 $(1, 1)^T$ 成正比，该旋量对应于谷态（K_1 和 K_2），并呈指数衰减

远离界面处的情况，可通过将谷霍尔相 I 和谷霍尔相 II 视为由具有相反质量项的 K 谷哈密顿量 [163]表征的连续介质来求解。图 9(b) 下图展示了沿界面扫描声压分布并进行傅里叶变换后测得的界面态谱，与仿真结果吻合良好。谷边缘态不仅可以存在于水平界面，也可以存在于沿任意方向的界面上（该方向与 $+x$ 方向的夹角为 θ ）。当界面左右两侧分别为谷霍尔相 II 和谷霍尔相 I 时，边缘态 ϕ^+ (II,I) 的旋量因子变为 $(1, e^{i\theta})^T$。图 9(c) 展示了一个垂直界面（ $\theta = \pi/2$ ）。要通过外部高斯波束激发该界面上的谷边缘态，入射角应满足与图 8(c) 中类似的选择定则。激发选择定则表明，谷边缘态本质上由位于 K 或 K' 处的体谷态构成。为验证这一现象，我们测量了透射率，以验证斜入射激发。需要注意的是，谷边缘态的一个关键特征是其振幅随远离界面而呈指数衰减，且衰减长度仅与质量项差成正比，即与体性质相关的一个常数。如图 9(c) 下图所示，测得的透射率确实与频率无关，这与基于有效哈密顿量 [163] 的预测非常吻合。图 9(d) 所示的典型之字形弯曲通道展示了谷霍尔相边缘态极弱的反向散射；尽管声波经过两个尖角，仍能沿弯曲路径平滑传播。与长度相同的直通道的透射率相比，实验验证了这些不受反射影响的边缘态，如图 9(e) 所示。通过调整散射体，谷霍尔边缘态可以更加局域于界面 [186, 161] ，并可用于声学定向天线 [187] 和激光模式 [188]。谷霍尔边缘态已扩展至方形晶格 [189, 190], 的声子晶体，并进一步扩展至将狄拉克材料插入界面的异质结构 [191]。

由于声波缺乏自旋和极化等内禀自由度，因此在声子晶体中利用层自由度 [192, 162, 193] 具有重要意义，并取得了丰硕成果。先进三维打印技术的发展使这一方法更易实现。除了单层结构外，研究者还提出了双层谷声子晶体 [175]。如图 10(a)所示，双层声子晶体由两层声子晶体构成，中间以一块穿有蜂窝阵列圆孔的板隔开；三角形杆的取向由相对角 α 和公共角 β表征。这些角度的组合使双层声子晶体能够呈现多种能带结构，如图10(b)所示，位于 K谷附近。这些能带结构及其拓扑性质可由有效哈密顿量描述。除单层声子晶体中的谷项外，该哈密顿量还包含与层相关的项 $\eta(\alpha s_z + \beta)\sigma_z - \triangle_c s_x$ [175]。参数 η 取决于散射杆的空间填充比，而 $\triangle_c$ 则取决于连接双层结构的孔的具体几何形状；这两个参数均可

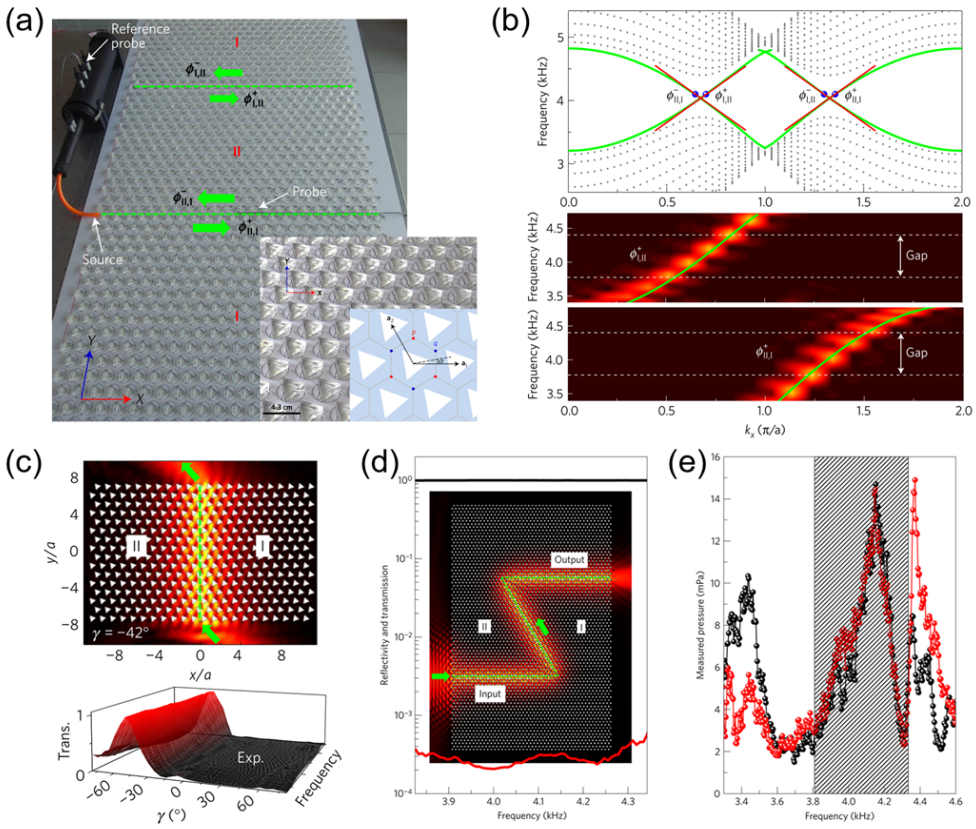

图9。 (a) 用于观测拓扑谷霍尔边缘模的实验装置。畴 I 和 II 分别表示具有 $\alpha = -10^\circ$ 与 10°的声子晶体。(b) 在拓扑性质不同的谷霍尔相分隔界面处，边缘模色散的模拟结果（上图）和测量结果（下图）。模拟采用包含两个不同水平界面的超晶格结构。每个界面均支持一对时间反演无隙谷边缘态。(c) 谷霍尔边缘模的谷选择性激发。图中为垂直 SC 界面 II–I 样品的模拟场分布，该样品由入射角为 $\gamma = -42^\circ$、频率为 4.06 kHz 的高斯光束激发。下图：频率相关的角度谱显示，在整个体能隙范围内均具有角度选择性。(d) 和 (e) 谷霍尔边缘模在尖角处的抗反射能力。(d) 中的黑线和红线分别表示沿之字形路径经过两个急转弯时计算得到的功率透射与反射谱。插图：4.06 kHz 时模拟得到的场分布。(e) 中的黑色圆圈和红色圆圈分别表示之字形路径和直通道样品的实测透射声压；在体能隙（阴影区域）内，两者吻合良好。图引自 [163]。

通过数值模拟提取。对于固定参数 η 和 $\triangle_c$，角度 α 和 β 的所有可能组合均对应于一个简化的相图，如图 10(c) 所示。相图由直线和曲线分隔，它们分别对应环简并和点简并。分隔出的相区对应于非平庸谷霍尔相（阴影区域）或非平庸声学层-谷霍尔相（非阴影区域），两者由量子化的拓扑不变量 C_V^K和 C_L^K [175]加以区分。前者是对单层系统中相关谷陈数 [163, 194, 195], 的自然双层扩展，后者则表征层信息，类似于为量子自旋霍尔系统 [196, 197]提出的拓扑不变量。这些拓扑非平庸相之间的界面支持声学边缘态，其波运动行为各不相同。图 3(d) 展示了两种情况。一种是 rod 角度为 $\alpha = 0°$ 和 $\beta = \pm 10°$的两个谷霍尔相之间的界面。穿过界面 $\triangle C_V^K = 2$ 时，K 谷附近会出现两个携带正群速度的边缘模（红色曲线）；它们的本征场分布于两层，表明层赝自旋发生混合。对于 rod 角度为 $\alpha = \pm 10°$ 和 $\beta = 3°$的两个层-谷霍尔相之间的界面，$\triangle C_L^K = 2$ 与谷霍尔情形不同，两个边缘模具有不同的群速度。具体而言，本征场主要集中在上层或下层，即实现了层赝自旋极化输运。因此，借助额外的层信息，谷边缘模既可以是层混合的，也可以是层极化的；基于此，人们还构想了一种层间转换器，以供潜在应用 [175]。双层设计随后推动了方形晶格 [198], 和范德华超材料 [199]领域的相关研究。

另一种增加经典波可调自由度的方法，是利用具有更高简并度的简并态（例如双狄拉克锥）来获得拓扑非平庸带隙。沿用这一思路，人们提出了类比量子自旋霍尔效应的超材料，用于微波 [200, 201] 和兰姆波 [202], ，并利用这些矢量场的混合极化构造类费米子赝自旋 [203]。相比之下，对于标量声波，双狄拉克锥的四重简并无法通过内禀极化自由度实现。为了在声子晶体中实现赝自旋态和双狄拉克锥，人们利用具有六角晶格对称性的系统的不可约表示，构造了各种布洛赫模的偶然简并 [174, 204]。首先要通过改变填充比，在布里渊区中心实现双狄拉克锥。如图 11(a) 所示，声子晶体采用石墨烯晶格，其填充比由散射体半径 r 决定。在临界填充比 $r/a = 0.3928$ (a （为晶格常数）处，布里渊区中心出现偶然双狄拉克锥 [图11(b)], ，其色散可由基 (p_x, p_y) 和 ($d_{x^2-y^2}, d_{2xy}$) 张成的偶然有效哈密顿量预言；这两组基是点群C_{6v} [205, 206] 的二维不可约表示。在较小或较大的填充比下，双狄拉克锥会因两个二重简并而打开带隙，其能带模分别为 (p_x, p_y) 或 ($d_{x^2-y^2}, d_{2xy}$)，其中

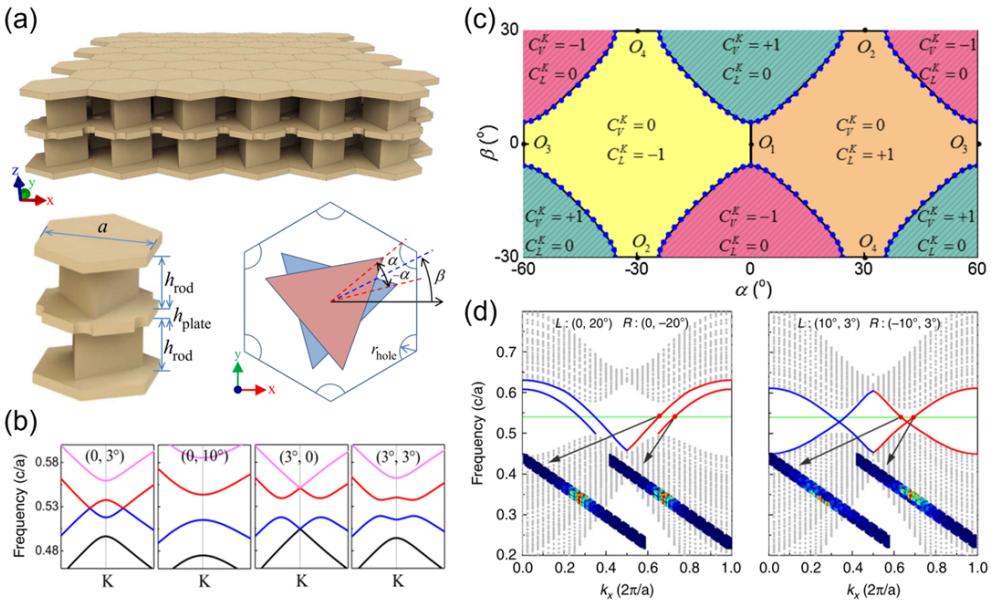

图1。 (a) 六角晶格双层声子晶体的耦合示意图。角度 α 和 β 共同表征两层中三角形散射体的取向。(b) 给定杆件取向的双层声子晶体数值色散局部视图。(c) 以角度α 和 β为参数的简化相图。不同相由两类拓扑不变量 C_V^K和C_L^K标记，分别对应谷极化和层极化。(d) 沿分隔拓扑性质不同的谷霍尔相（左图）和层-谷霍尔相（右图）的界面得到的投影色散，其中红色和蓝色曲线分别对应由 K 和 K' 谷投影的边缘模。图改编自 [175]。

体态的赝自旋可通过这些模的杂化实现，如$p_\pm = p_x \pm ip_y$ 和 $d_\pm = d_{x^2-y^2} \pm id_{2xy}$（+ 和 – 分别代表自旋向上和向下）。因此，通过调节填充比，会发生能带反转 [图 11(b)]，，从而使具有 p/d 赝自旋的声子晶体发生拓扑相变。相应地，在由反转能带的声子晶体构成的界面处，预期会出现一对边缘态并贯穿重叠带隙，如图 11(c) 所示。这些边缘态局域于界面处，表示为 $(S+iA)/(S-iA)$，其中 S和 A是相对于中线呈对称和反对称的模 [图 11(d) 中的虚线]。它们也可与体态的赝自旋关联起来，表示为 $(S + iA)/(S - iA) = (p_+ + d_+)/(p_- - d_-)$；其中，对称分量 S可表示为 $S = (p_x + d_{x^2-y^2})/\sqrt{2}$，反对称分量 A则表示为 $A = (p_y + d_{2xy})/\sqrt{2}$，如图 11(d) 所示。因此，两个声学赝自旋边缘态具有相反的赝自旋特性，并沿相反方向传播，这意味着单向自旋依赖传播能够抵抗各种缺陷的影响，例如腔体、无序和弯折 [174]。在上述研究中，双狄拉克锥的构造基于偶然简并，而通过能带折叠可以以更确定的方式实现这一点 [207, 176, 208]。具体而言，如图 12(a) 所示，通过扩展声子晶体的原胞

由石墨烯晶格构成、包围六根杆的晶体，其布里渊区缩小为一个新的布里渊区，面积为原布里渊区的三分之一；原布里渊区角上的狄拉克锥折叠至 Γ 新布里渊区中的该点，形成双狄拉克锥。为了在双狄拉克锥中打开带隙，通过聚拢或分散六根杆来收缩或扩张超分子，从而构造出新的声子晶体构型。带隙打开后的色散关系如图12（b）所示，超分子的压力场分布见图12（c）。由于超分子内部的多重散射，产生了一对偶极共振态和一对四极共振态，与基$p_{x/y}$ 和$d_{(x^2-y^2)\ /2xy}$相呼应。再次，在一个晶胞中收缩和扩张杆所引起的能带反转，使具有相反赝自旋特性的边缘态反向传播。值得注意的是，六重旋转对称性在声子晶体的设计中发挥着重要作用，因为它使两种不等价的二维模式得以作为构建赝自旋的基石。采用类似的设计方案，机械波中实现了量子自旋霍尔效应的声学模拟 [209, 210], 机械系统 [211], ，并且近期通过层堆叠结构将其扩展到三维声子晶体 [212, 213]。

3.2. 声学陈绝缘体与自旋陈绝缘体

根据时间反演对称性，二维拓扑绝缘体通常分为两类。第一类打破时间反演对称性，并具有无能隙手性边缘态。它表现出量子反常霍尔效应，通常称为陈绝缘体，因为其拓扑不变量由陈数描述 [41, 66]。对于声波，研究者引入环流以打破时间反演对称性 [214]。受此启发，人们提出了包含环流的声学超材料中的声学陈绝缘体 [215, 216, 217], ，随后又在带有手性结构转子的谐振器阵列中实现了这一设计 [218]。图13（a）展示了样品，即由环形谐振器构成的蜂窝晶格。每个谐振器中都有一个由电机驱动旋转的转子，可产生稳定的气流并打破时间反演对称性，如图13（b）所示。此时，体能带具有非平庸拓扑，陈数非零；在开放边界条件下会产生手性边缘态，如图13（c）的计算结果所示。图13（d）测得的压力场表明，逆时针手性边缘模可以绕过循环器停止转动处的缺陷继续传播，证明了边缘态的鲁棒性。

第二类二维拓扑绝缘体保持时间反演对称性，并具有一对螺旋边缘态。它在电子系统中展现量子自旋霍尔效应 [23, 177], ，其体能带拓扑可以用 Z_2 指标 [43] 或自旋陈数等价地描述 [197, 219]。螺旋边缘态的无能隙特征由源自自旋 1/2 时间反演对称性的克莱默简并所保证。与 Z_2 指标不同，自旋陈数在不存在任何对称性的情况下也有明确定义 [220], ，因此被采用

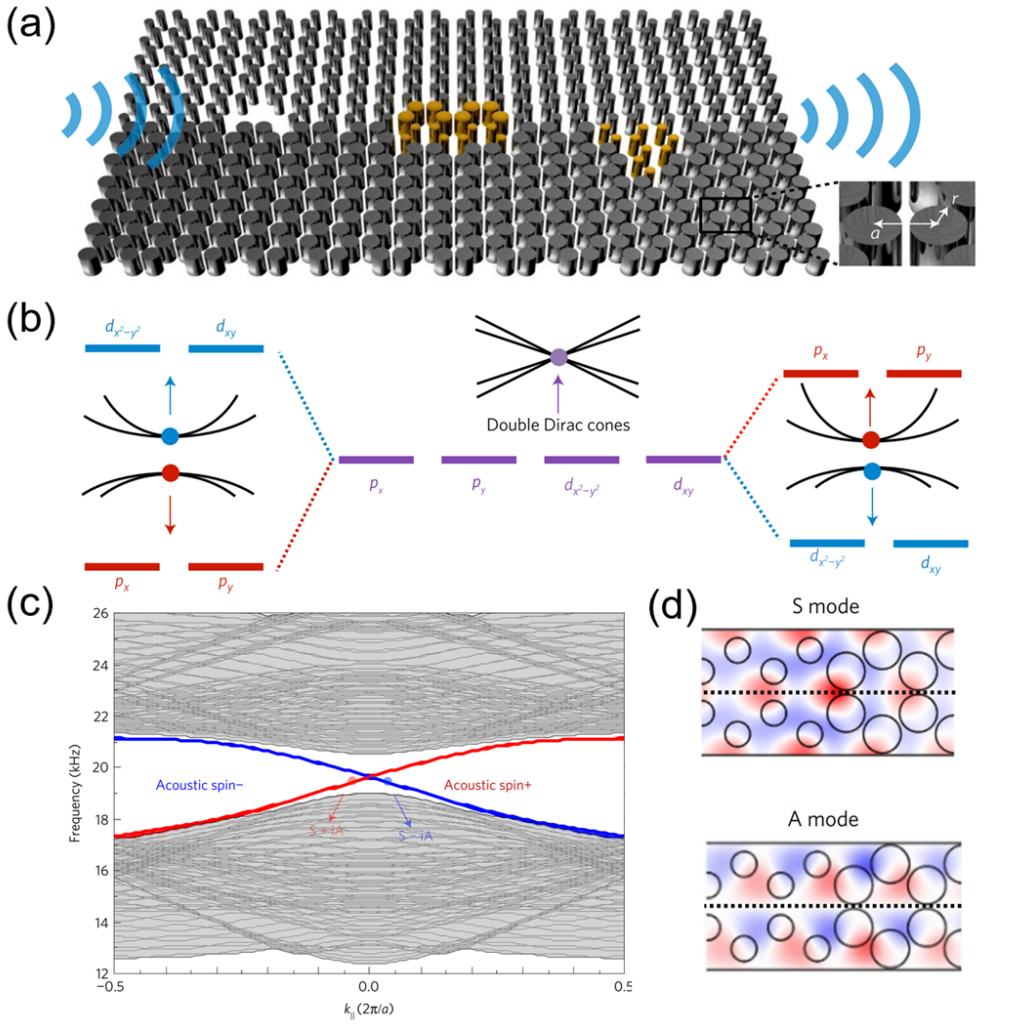

图11。(a) 由半径为 r 的不锈钢杆石墨烯阵列构成的声子晶体示意图。在填充比不同的两种杆状声子晶体之间的界面处，可以引入腔体、无序和弯折等缺陷，以验证界面态传播的鲁棒性。插图展示了声子晶体中杆的放大图。(b) 通过调节填充比实现能带反转过程的示意图。在填充比较大和较小时，由能带模（p 和 d）表征的声子晶体能带发生反转。带隙闭合与重开表明发生了拓扑相变；在临界点处，会形成具有四重简并的偶然双狄拉克锥。(c) 由两种具有反转能带的声子晶体构成的超胞的计算投影能带。红线和蓝线分别表示声学赝自旋向上和向下的边缘态。阴影区域表示体能带。(d) 对称模和反对称模杂化形成边缘态。图片引自 [174]。

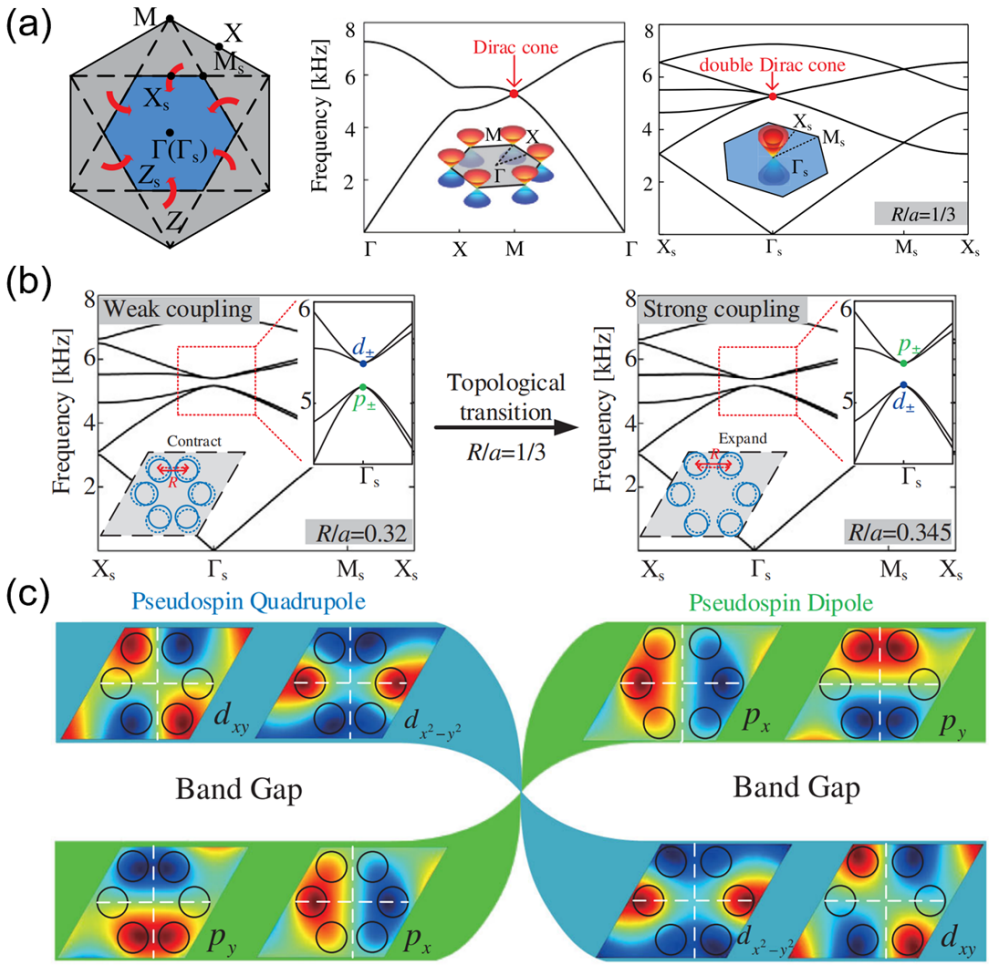

图12. (a) 通过扩大原胞并将原布里渊区角处的两个狄拉克锥折叠，在布里渊区中心构建双狄拉克锥的折叠过程。中间图：基于原晶胞的晶格色散关系。（插图：布里渊区角处的单个狄拉克锥）。右图：基于扩大晶胞的晶格最终色散关系（插图：布里渊区中心的双狄拉克锥）。（b）通过收缩和扩张一个晶胞中的六根杆来调节耦合强度时的拓扑相变。临界耦合出现在 $R = a/3$，此时存在双狄拉克锥。（c）构成该相变基础的拓扑模式反转，其中偶极模和四极模充当赝自旋。图片引自 [176]。

用于识别赝自旋拓扑绝缘体 [221]，，由此形成自旋陈绝缘体的概念 [219, 220, 221, 222, 223, 224, 225]。自旋陈绝缘体中的螺旋边缘态是否无能隙，与系统的对称性和样品边界的微结构有关 [224]。图 13(e) 展示了声学自旋陈绝缘体的样品 [225]，，它是具有层赝自旋自由度的双层结构。如图 13(f) 所示，手性层间管引发赝自旋轨道耦合，产生由非零自旋陈数描述的非平庸能带拓扑。计算并观测到了无能隙螺旋边缘态

见图 13(g)。由于赝自旋-动量锁定，这些边缘态能够抵御缺陷引发的反向散射，如图 13(h) 所示。

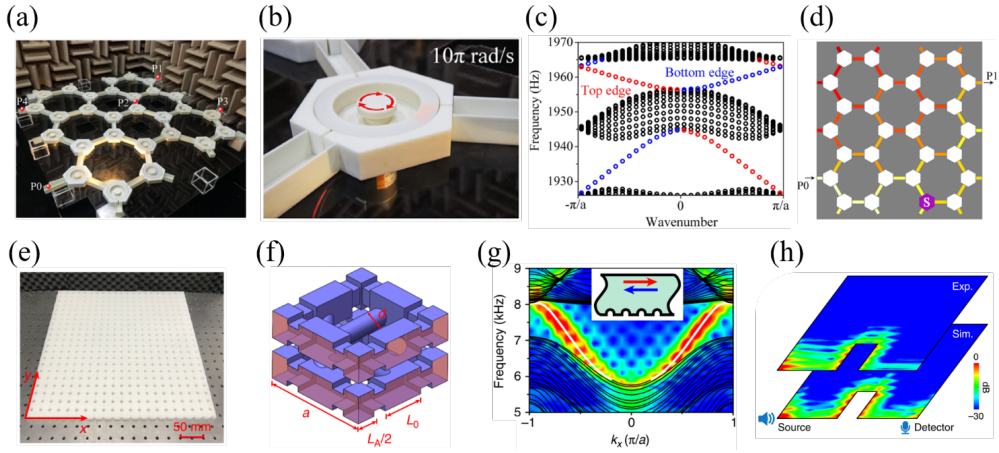

图13. 声学陈绝缘体和自旋陈绝缘体。(a) 声学陈绝缘体的样品。(b) 带有手性结构转子的旋转三端口环形谐振器样品。旋转转子有助于产生稳定的气流，从而打破系统的时间反演对称性。(c) 带状结构的手性边缘态能带色散（红色）；圆圈表示底部（顶部）边界处的无能隙手性边缘模。(d) 存在缺陷时测得的逆时针手性边缘模压力场；循环器（标记为 S）可阻止运动。声波从端口 P0 输入，并从端口 P1 输出。(e) 声学自旋陈绝缘体的样品。(f) 样品的侧视放大图。绿色虚线框表示样品的晶胞。(g) 测得的带状结构螺旋边缘态能带色散。颜色映射表示测量数据，白线（黑线）表示计算得到的边缘态（投影体态）色散。插图显示相应的一对边缘态沿顶部边界反向传播。(h) 具有矩形缺陷的样品压力场，证明了声学边缘模具有抗反向散射能力。(a)–(d) 改编自参考文献 [218]，，(e)–(h) 改编自参考文献 [225]。

*3.3. Weyl*声学超材料

与拓扑绝缘体不同，拓扑半金属的特征是在动量空间中存在能带接触，包括零维离散点、一维连续线或二维曲面 [29, 226]。能带接触具有非平庸拓扑，并会产生边界态。传统外尔半金属是含有 I 型外尔点的晶体——这类外尔点是在动量空间中未发生过度倾斜的二重线性交叉点。I 型外尔点附近的准粒子激发满足魏尔方程，因此表现得像魏尔费米子。晶格系统中魏尔费米子的实现，已从电子系统推广至原子系统（例如参见 [227, 228]），随后又推广至光子学系统（例如参见 [229,230, 231]）和声子系统。在声子晶体中，传统外尔半金属通过层堆叠构造被提出 [232] 并得到实现 [233, 234]。石墨烯中很容易获得二维线性色散。将石墨烯堆叠起来

沿着 z 方向进行手性交错层耦合，如图 14(a) 所示，沿 z 方向也会出现线性色散，从而产生 Weyl 点。Weyl 点的有效哈密顿量形式为 $H_{\mathrm{W}} = A_x k_x \sigma_x + A_y k_y \sigma_y + A_z k_z \sigma_z$，其中$\boldsymbol{k}$是波矢，$\boldsymbol{\sigma}$是 Pauli矩阵，而 A_i满足 $i = x,\ y,\ z$是系数。图14(b) 展示了该声学超材料对应的晶胞。第一布里渊区中存在四个 Weyl 点，如图 14(c) 所示。图 k_z 14 (d) 计算了沿该方向的线性色散。Weyl 点的稳健性体现在两个方面：首先，由于其描述涉及全部三个泡利矩阵，因此 Weyl 点能够抵抗微弱扰动而保持稳定；其次，它具有由陈数 $C = \mathrm{sgn}(A_x A_y A_z) = \pm 1$描述的非平庸拓扑荷，表现为贝里通量的接收端或声源。

由于具有拓扑性质，Weyl 点总是成对出现，且其拓扑荷之和为零，从而产生费米弧表面态和手性反常。与拓扑绝缘体中的费米圆表面态不同，费米弧表面态并不闭合，而是连接拓扑荷相反的外尔点。图 14(e) 和 14(f) 分别展示了实验中外尔声学超材料的样品和晶胞 [233]。图 14(g) 中观测到了费米弧，即表面色散的等频轮廓。对于固定的 k_z，表面色散也能揭示费米弧表面态，如图 14(h) 所示。这些表面色散具有手性表面态，这归因于依赖于 k_z的陈数，而陈数与外尔点的拓扑荷有关。表面色散的等频截面形成一条连接一对拓扑荷相反的外尔点的轨迹，即费米弧。因此，在存在缺陷时，外尔声学超材料中的费米弧表面态表现出声波受拓扑保护的单向传播。

费米弧表面态可产生拓扑负折射 [235]，从而为费米弧提供了实际应用。图 15(a) 展示了两个相邻表面的费米弧，它们构成一个界面（黑色竖线）。考虑沿红色箭头（标记为 1）方向传播的入射波，由于波矢在界面平行方向上守恒，折射波将沿蓝色箭头（标记为 3）方向传播。如图 15(b) 所示，这种折射为负折射，因为折射波与入射波位于法线（虚线水平线）的同一侧。更重要的是，由于费米弧并非闭合曲线，不存在反射波的模式，因此反射（标记为 2 的虚线箭头）被禁止。图 15(c) 展示了在外尔声学超材料表面测得的压力场，证实了费米弧表面态的负折射且无反射现象。

在强磁场作用下，Weyl 点支持手性零阶朗道能级，其中存在与 Weyl 点拓扑荷相关的单向传播 [236]。施加平行电场后，外尔准粒子可通过零阶朗道能级在拓扑荷相反的 Weyl 点之间泵浦，从而导致手性流不守恒，即手性反常——这是外尔半金属的另一项标志性特征。由于声波对外部磁场不敏感，构建

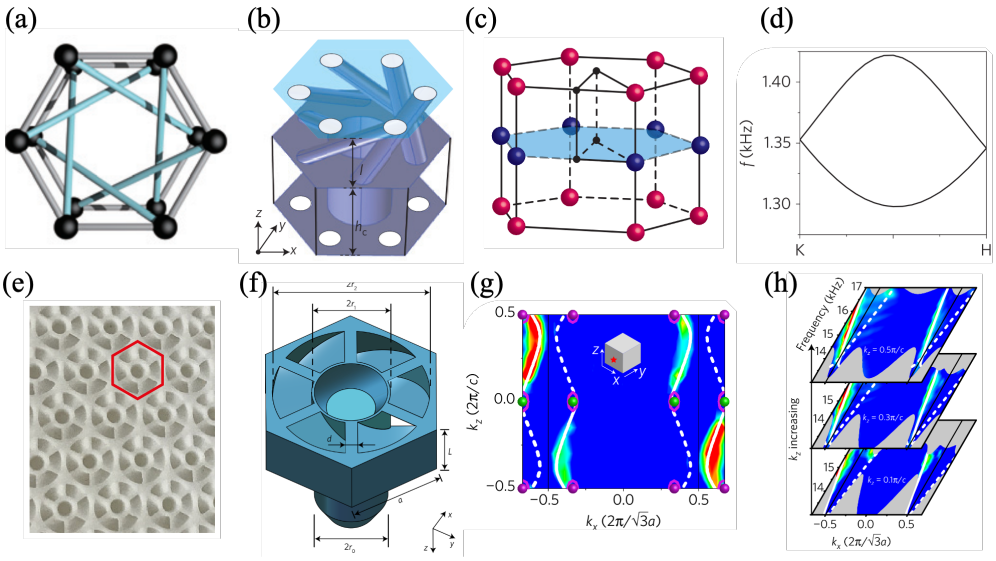

图14。 具有 I 型外尔点和费米弧表面态的外尔声学超材料。(a) 基于层堆叠策略并采用手性交错层耦合的紧束缚模型，在动量空间中产生外尔点。(b) 声学超材料中对应的晶胞。(c) 第一布里渊区中外尔点的分布。红色（蓝色）球体表示拓扑荷为 $+1(-1)$ 的外尔点。(d) 外尔点沿 k_z 方向的线性色散。I 型外尔点的特征是不具有过度倾斜的色散。(e) 声学超材料的实验样品。(f) 样品的晶胞，对应于(e)中的红色六边形。(g) 费米弧表面态的等频轮廓。插图显示了探测到的XZ表面。(h) 三个固定 k_z下表面态的色散。(f)和(g)中，颜色图表示实验数据，白色实线和虚线分别表示XZ表面及其相对表面上的模拟结果。(a)-(d)改编自参考文献 [232], ，(e)-(h)改编自参考文献 [233]。

赝磁场在声学超材料中具有重要意义。通过沿 x 方向设计空间依赖的亚晶格势，Weyl 点会沿 k_z 或 $-k_z$ 方向移动。如图15(d)所示，外尔声学超材料中沿 y 方向产生了轴向赝磁场。位于 H和 K' 的 Weyl 点感受到的磁场方向与位于 H' 和 K的 Weyl 点相反。与真实磁场不同，声学超材料在存在赝磁场时仍保持时间反演对称性，从而产生图15(e)所示的手性零阶朗道能级。例如，由于作用于位于 H 和 H'的 Weyl 点上的赝磁场方向相反，它们周围的手性朗道能级具有相反的群速度，尽管它们具有相同的拓扑荷 $+1$，如图15(f)所示。

3.4. 其他*Weyl*声学超材料

不同于高能物理学中的魏尔费米子，晶体中的准粒子激发不受庞加莱对称性的限制，因此在动量空间中呈现出具有非平庸拓扑的丰富构型。典型的一类是 II 型 Weyl 点，

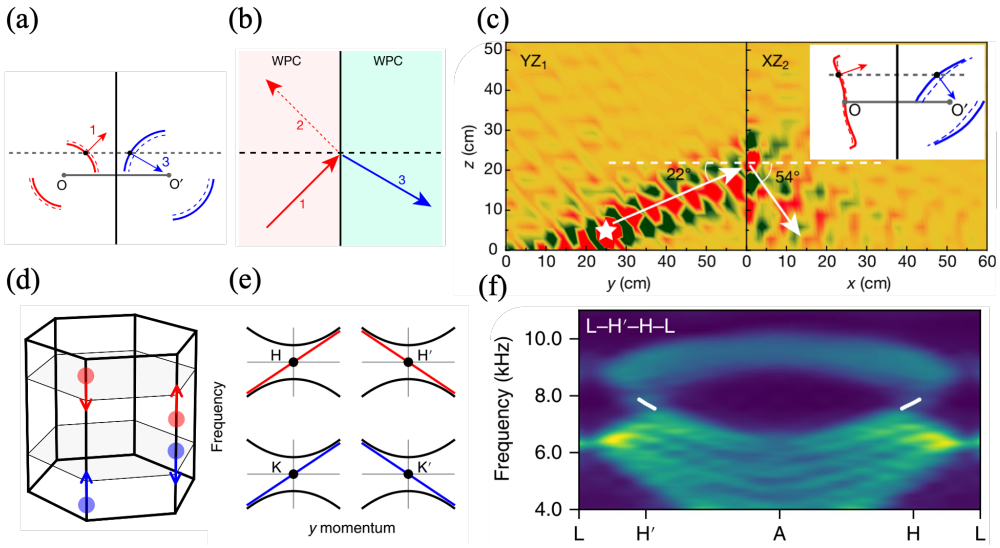

图15. 外尔声学超材料中费米弧表面态和零阶朗道能级的拓扑折射。(a) 两个相邻表面的费米弧。虚线曲线表示频率略高于实线曲线所对应频率时的费米弧。箭头表示群速度的方向。(b) 两个相邻表面之间界面处的拓扑负折射。由于费米弧的非闭合特性，表面态的反射被禁止。(c) 外尔声学超材料中费米弧表面态拓扑负折射的观测。插图为两个相邻表面上费米弧的构型。(d) 通过在动量空间中移动外尔点来构建轴向赝磁场。(e) 由于轴向赝磁场，四个外尔点的零阶手性朗道能级。红色（蓝色）表示外尔点的拓扑荷 $+1$ (-1)。(f) 对H'和H处外尔点周围手性朗道能级的观测。同样，色彩图表示实验数据，白点表示模拟结果。(a)-(c) 改编自参考文献 [235], ，(d)-(f) 改编自参考文献 [236]。

其特征是过倾斜锥形色散 [237]。尽管 Weyl 点的拓扑荷与过倾斜色散无关，但这一特征带来了不同于 I 型外尔点的独特性质，例如反手性零阶朗道能级和各向异性手性反常。II 型 Weyl 点已在具有堆叠六边形和正方形结构的声学超材料中得到预测 [232, 31], ，随后在实验中得到观测。图16（a）和16（b）分别展示了声学超材料中的晶胞和 II 型 Weyl 点的观测结果 [238]。由于缺乏对称性所建立的关联，这些 Weyl 点处于不同的频率。随后，在声学超材料中实现了理想的 II 型 Weyl 点；它们由镜像对称性和时间反演对称性关联，因此处于相同的能量 [239]，如图16（c）和16（d）所示。通过在这种理想的 II 型外尔声学超材料中构造赝磁场，观测到了反手性零阶朗道能级 [240]。

该 se　概括而言，推广常规外尔点的一种方法是改变其

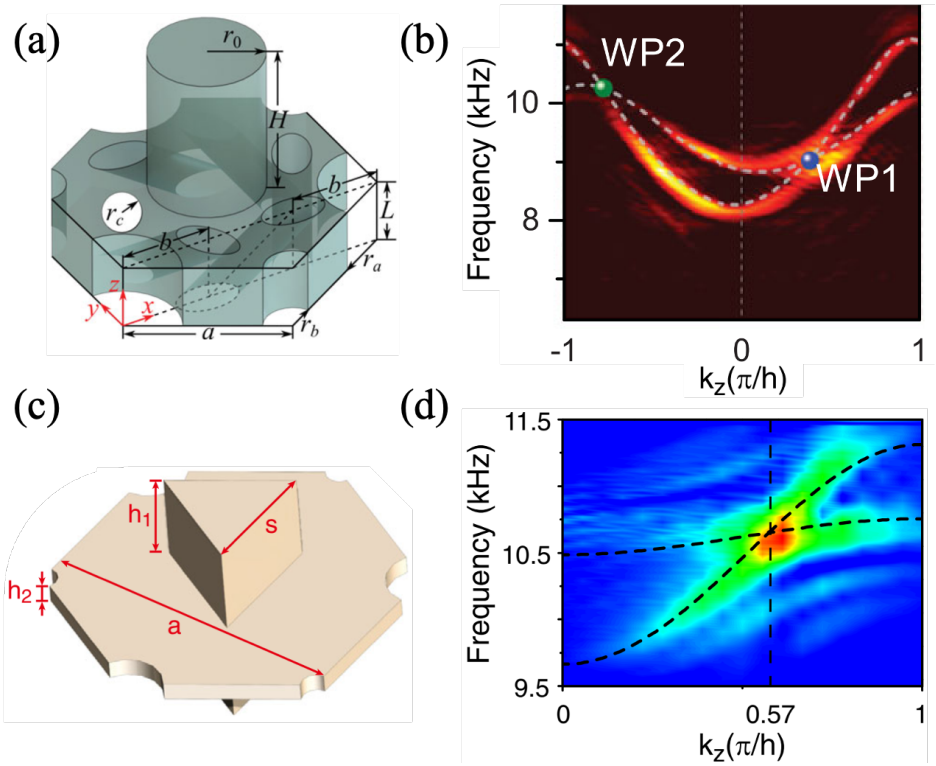

图16。 具有 II 型外尔点的外尔声学超材料。(a) II 型外尔声学超材料的晶胞。(b) 对 II 型外尔点的观测，这些点的频率并不相同。(c) 具有理想 II 型外尔点的声学超材料晶胞。(d) 对理想 II 型外尔点的观测。镜面对称性和时间反演对称性确保四个 II 型外尔点位于相同频率。(a) 和 (b) 改编自参考文献 [238], ，(c) 和 (d) 改编自参考文献 [239]。

二重简并点的拓扑荷，使其不再在所有方向上呈线性色散，例如二次外尔点和四次外尔点 [241,242, 243]。具有高拓扑荷的外尔点通常受空间对称性的保护，从而消除线性色散。图17(a)展示了具有一对二次外尔点的声学超材料样品，这对外尔点位于 Γ 和 A 处，此外还有常规外尔点 [242]。二次外尔点具有拓扑荷 ± 2，其特点是在两个方向上呈二次色散，在另一个方向上呈线性色散。图17(b)展示了测得的投影体能带色散，体现出二次外尔点的非线性特征。图1717(c)所示，沿着以Γ为中心的闭合回路，表面色散中存在两个群速度为正的手性表面态，这证明二次外尔点在 $+2$ 处具有拓扑荷 Γ。携带拓扑荷为 4 的二重简并点中最高拓扑荷的四重外尔点，也已在具有空间群对称性 $P432$ [243]的声学超材料中被观测到。图17(d)和17(e)展示了样品和体能带色散。四重外尔点在 (111) 方向呈三次色散，在另外两个方向呈二次色散。同样，如图17(f)所示，四个手性表面态

with 正群速度揭示了四重 Weyl 点的拓扑荷为 4 .

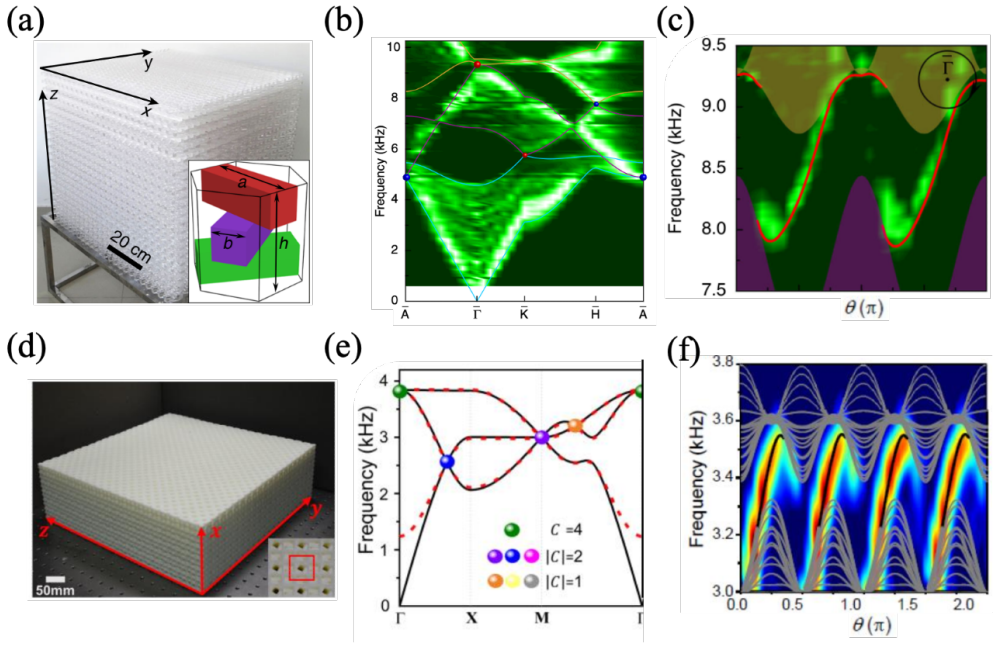

图17. 二次和四重Weyl声学超材料。(a) 具有二次Weyl点的声学超材料样品。插图显示了晶胞。(b) 沿高对称线的投影体能带色散。拓扑荷为 $+2$ （红色球体）和 -2（蓝色球体）的投影二次Weyl点分别位于Γ 和 A 点。(c) 以 Γ 点为中心的环路上的表面色散。二次Weyl点的拓扑荷 $+2$产生了两个具有正群速度的手性表面态。(d) 具有四重Weyl点的声学超材料样品。插图显示了带有一个晶胞（红框）的表面边界放大图。(e) 沿高对称线的体能带色散。蓝色球体表示四重 Weyl 点。(f) 以四重 Weyl 点的位置为中心的环路上的表面色散。四个具有正群速度的手性表面态揭示了四重 Weyl 点的拓扑荷 $+4$ 。(a)-(c) 改编自参考文献 [242], ，(d)-(f) 改编自参考文献 [243]。

第三种方式是将低能激发从自旋1/2准粒子变为另一种自旋准粒子，同时改变接触点的简并度。自旋1 Weyl点是典型例子，它是一个三重简并点，由两条线性色散和一条额外的平带相交形成，并携带拓扑荷（-2,0,2）或（2,0,-2），对应三个体能带。低能激发的形式为 $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{S}$，其中$\boldsymbol{S}$ 是自旋1 Gell-Mann矩阵的矢量，而非自旋1/2 Pauli矩阵，因此表现为自旋1准粒子。由于其描述仅使用部分 Gell-Mann 矩阵，自旋1 Weyl点通常受到外部对称性的保护。图18（a）为具有空间群对称性 $P213$ [244] 的声学超材料晶胞。如图 18（b）所示，该声学超材料具有一个与电荷-2 狄拉克点共存的自旋1 Weyl点。这两个点的拓扑荷均为 2，因此在表面布里渊区中形成双费米弧，如图 18（c）和 18（d）中的计算和测量结果所示，

分别。通过堆叠 Lieb 晶格层 [245], ，可以在声学超材料中实现仅具有自旋-1 Weyl点的自旋-1 外尔半金属，其晶胞如图 18（e）所示。如图 18（f）的体能带色散所示，一对自旋-1 Weyl点由手征对称性连接。三个体能带的拓扑荷（−2,0,2）和（2,0,−2）形成了图 18（g）所示的表面态，以及图 18（h）所示的双费米弧；它们出现在第一与第二能带之间，以及第二与第三能带之间。沿着这一推广思路，还可以在声学超材料中探索自旋-3/2和自旋-5/2准粒子。

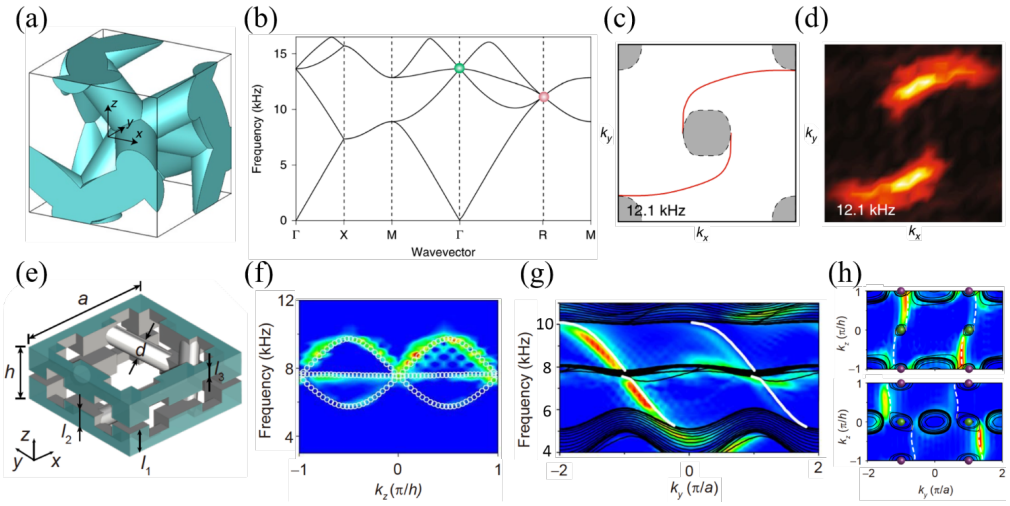

图18. 自旋-1 外尔声学超材料。(a) 具有自旋-1 Weyl点和电荷-2 狄拉克点的声学超材料晶胞。(b) 相应声学超材料的体能带色散。具有三重简并的自旋-1 Weyl点（蓝色球体）和具有四重简并的电荷-2 狄拉克点（红色球体）分别位于 Γ和 R。(c) 和 (d) 计算和测得的双螺旋面费米弧，连接投影后的自旋-1 Weyl点和电荷-2 狄拉克点。(e) 含有一对自旋-1 Weyl点的声学超材料晶胞。(f) 在体能带色散中观测到的一对自旋-1 Weyl点。(g) 观测到的表面色散，其中 $k_z = 0.5\pi/h$。表面态出现在第一与第二条能带之间，以及第二与第三条能带之间的带隙中。(h) 在 $f = 7$kHz 时观测到的第一与第二条能带之间的双费米弧（上图），以及在 $f = 9$kHz 时观测到的第二与第三条能带之间的双费米弧（下图）。(a)-(d) 改编自参考文献 [244], ，(e)-(h) 改编自参考文献 [245]。

最近，在声学超材料中实现了高阶 Weyl 半金属。作为一项重要扩展，高阶外尔点不仅像一阶特征一样具有非零拓扑荷，还可以被视为二阶拓扑绝缘体与陈绝缘体或拓扑平庸绝缘体之间的转变点 [246, 62]。除二维费米弧表面态外，高阶 Weyl 半金属还表现出连接高阶外尔点的一维铰链态。通过堆叠 kagome 晶格层，在声学超材料中实现了高阶 Weyl 半金属 [247], ，其晶胞如图所示 19（a）。该系统具有四个纯高阶外尔点，如图所示。19（b）。在此

情况下，陈数作为 k_z 的函数始终为零，但作为高阶拓扑不变量的体极化呈现出一定分布，如图所示。19（c）。非零的 k_z依赖体极化导致了铰链态，其测量结果和计算结果如图所示。19（d）。具有手性螺旋对称性的声学超材料中也可以实现高阶Weyl 半金属 S_{4z} [248]。图19（e）展示了晶胞。该声学超材料具有两个拓扑荷为 -1 的高阶外尔点，以及一个拓扑荷为 $+2$的二次Weyl点，如图所示。19（f）。通过将 k_z 作为参数，可以利用二维拓扑指标——作为一阶拓扑不变量的陈数和四极矩指标，揭示该声学超材料的拓扑性质。如图所示。19（g），陈数和四极矩指标的转变点均为高阶外尔点。图19（h）展示了测量得到的压力场，证明了源于高阶拓扑的铰链态。

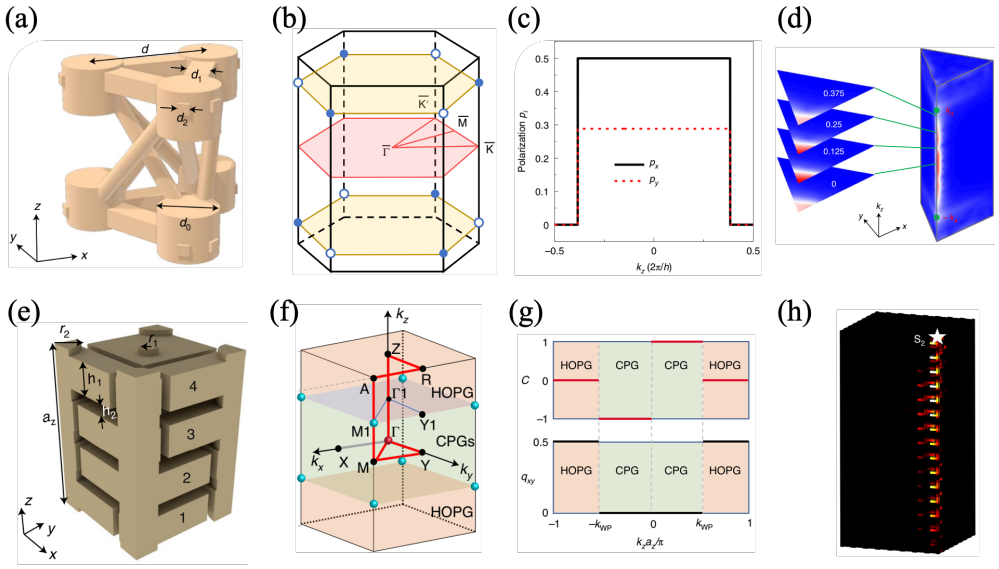

图19。 高阶外尔声学超材料。（a）含有两对高阶外尔点的声学超材料晶胞。（b）第二阶外尔点在第一布里渊区中的分布。实心（空心）球表示拓扑荷为 $+1$ (-1) 的外尔点。（c）最低能带的体极化随 k_z 的变化。（d）测量（左图）和模拟（右图）得到的压力场，显示了由非零 k_z 依赖体极化所产生的铰链态。（e）含有两个高阶外尔点和一个二次Weyl点的声学超材料晶胞。（f）外尔点在第一布里渊区中的分布。蓝色球表示高阶外尔点，红色球表示二次Weyl点。（g）陈数（上图）和四极矩指标（下图）随 k_z 的变化。（h）测量得到的铰链态压力场，归因于非零 k_z 依赖四极矩指标。（a）—（d）改编自参考文献 [247], ，（e）—（h）改编自参考文献 [248]。

3.5. 狄拉克声学超材料

常规三维狄拉克点是一个四重线性交叉点，其中准粒子激发表现为狄拉克费米子。狄拉克点由一对拓扑荷相反的 Weyl 点构成，因此具有由 Z_2 或自旋陈数描述的拓扑荷。偶然狄拉克点可通过能带反转形成 [249]，而对称性强制狄拉克点通常出现在具有非对称空间群 [250, 251]的声学超材料中。图20(a) 展示了一个具有空间群对称性 $Ia3$ 的声学超材料晶胞，其中存在一对狄拉克点 [250, 251]。图 20(b) 是计算得到的体能带色散，显示在 P 点处存在一个狄拉克点。另一个由对称性关联的狄拉克点位于 $-$P 点。尽管费米弧表面态通常在狄拉克半金属中并不稳定 [252]，但如图 20(c) 所示，这里的费米弧表面态受到格点与时间反演对称性共同保护，因而具有稳健性。自然地，也存在高阶狄拉克点，它们也已在声学超材料中得到研究 [253, 254]。图 20(d) 和 20(e) 分别展示了高阶狄拉克声学超材料的样品和体能带色散。与外尔情形类似，这里的高阶拓扑可由二维高阶拓扑指标揭示，如图 20(e) 的插图所示。非平庸的高阶拓扑会产生铰链色散，如图 20(f) 所示。此外，声学超材料中还观察到了电荷-2 狄拉克点，它由两个具有相同拓扑荷的 Weyl 点构成 [244]。

3.6. 节点线与节点面声学超材料

节线半金属具有一维连续线的能带接触。不同于具有非零拓扑荷、可由二维拓扑不变量描述的节点（例如 Weyl 点的陈数），节点线通常具有非平庸的 π Zak 相（一维拓扑不变量），并产生鼓膜表面态 [255]。Xiong 等人首次从理论上研究了声子系统中节点线的实现 [256]，利用非对称晶体对称性生成受对称性保护且不可避免的声子节线。此后，研究者在各种平台上对声子节线展开了研究。图21(a) 展示了一个在第一布里渊区中具有节点环的声学超材料样品 [257]，该节点环受到镜面对称性的保护。图21(b) 展示了节点环在倒易空间中的分布。图21(c) 为测得的等频轮廓，证明了节点环的存在。通过将 k_x 和 k_y参数化，沿 k_z 方向计算得到的 Zak 相等于 π 或 0，并在投影节环处发生跃迁。考虑沿 z 方向的开放边界，由π Zak 相产生的端态形成平坦鼓面表面态，如图21(d) 所示。其他几何构型，例如直线 [258] 和链 [259]，也已在声学超材料中实现。

当能带接触为二维表面，即节点面时，其拓扑性质又回到了节点的情形 [260, 261]。节点面携带

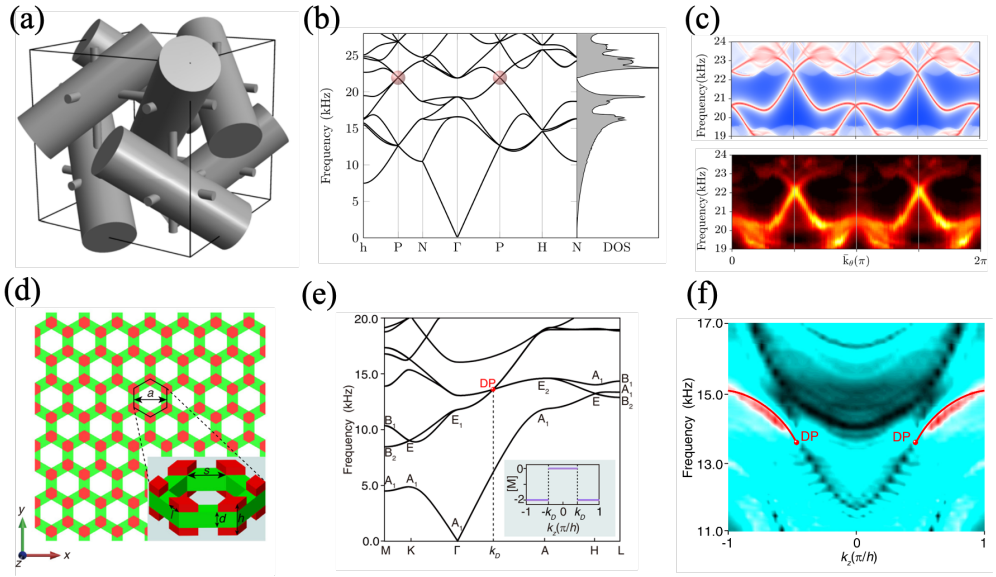

图 20. 狄拉克声学超材料。（a）承载一对具有 Z_2 拓扑荷的狄拉克点的声学超材料晶胞。（b）沿高对称线的体色散。位于 P 点的狄拉克点呈现四重简并。（c）沿围绕投影狄拉克点的环路计算得到的（上图）和测量得到的（下图）表面色散。（d）具有一对高阶狄拉克点的声学超材料的面内结构和晶胞（插图）。（e）沿高对称线的体能带色散。红色球表示高阶狄拉克点。插图显示了高阶拓扑指标随 k_z的变化。（f）测量结果（彩色）和计算结果（红线）显示的铰链色散，该色散源于非零的高阶拓扑指标。（a）—（c）改编自参考文献 [251]，，（d）—（f）改编自参考文献 [253]。

非零拓扑荷，因此其行为类似于携带相同拓扑荷的节点，也类似于携带非零拓扑荷的节点线。图21(e) 展示了一个声学超材料的晶胞，该材料结合了时间反演对称性和沿 z 方向的二重螺旋对称性。如图21(f) 所示，该系统具有一个拓扑荷为 -2 的节点面，以及两个拓扑荷相同的 Weyl 点 $+1$。图21(g) 计算了呈现节点面的体能带色散。如预期所示，图21(h) 测得两条连接节点面与 Weyl 点的费米弧。沿着这一思路，声学超材料中的节点可以扩展为携带相同拓扑荷的节点线简并 [262]。

3.7. 高阶拓扑绝缘体

自2018年起，一类引人注目的拓扑绝缘相——高阶拓扑绝缘体——因超越了传统的体边对应而受到广泛关注 [263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272,273, 274, 275, 276, 277, 53, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 34, 286, 287, 288, 36, 289, 290, 291, 292]。一般而言， n 维

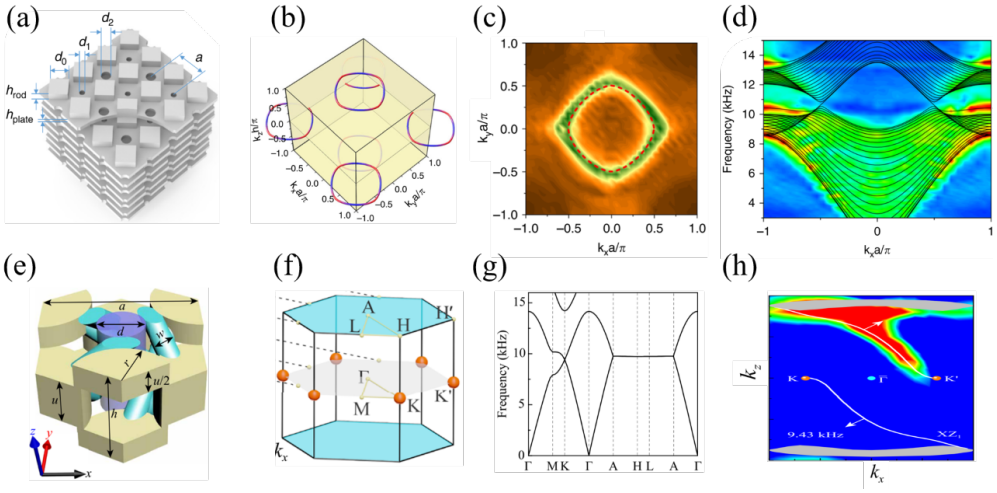

图 21. 节点线与节点面声学超材料。(a) 含有节点环的声学超材料样品示意图。(b) 动量空间中模拟得到的节点环分布。(c) 在平面 $k_z h = \pi$上测得的节点环。红色虚线为计算结果。(d) $k_y a = 0$的实测（彩色）与计算（线条）表面色散。红线表示鼓膜表面态，其起源于由 π Zak 相描述的节点环的非平庸拓扑。(e) 含有带拓扑荷 -2 的带荷节点面和一对具有相同拓扑荷的 Weyl 点的声学超材料晶胞 $+1$。(f) 第一布里渊区中节点面（蓝色）和 Weyl 点（橙色球体）的分布。(g) 沿高对称线的体能带色散，显示平面 $k_z h = \pi$上的节点面。(h) 连接节点面与 Weyl 点的费米弧。亮色表示实测数据，白色曲线和灰色区域分别表示计算得到的费米弧和投影体能带。(a)–(d) 改编自参考文献 [257], ，(e)–(h) 改编自参考文献 [261]。

系统在 $n-l$ 维边界上具有受拓扑保护的边界态。例如，二维高阶拓扑绝缘体在带隙中具有有隙的一维边缘态和零维角态。本节将讨论声子高阶拓扑绝缘体的最新进展。

高阶拓扑绝缘体的研究源于多个方面。首先，随着人们逐步深入理解拓扑晶体绝缘体（即由晶体对称性保护的拓扑绝缘相），人们逐渐认识到，由于边缘边界的对称性低于体对称性，所预言的拓扑边缘态往往会变得有隙——这与电子 Z_2拓扑绝缘体中时间反演对称性破缺时的有隙边缘态 [293]类似。令人惊讶的是，有隙边缘态本身可能有效地成为低维拓扑绝缘体，并支持受拓扑保护的非平庸角态或铰链态，从而形成拓扑边界态的维度层级 [40, 213, 265, 266, 267, 268, 269, 294, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277]。图22（a）示意性地展示了一个例子：二维高阶拓扑绝缘体同时具有有隙边缘态和带隙内角态。有隙边缘态源自体拓扑晶体相以及保护性晶体对称性的破缺

在边缘边界处。这些有隙边缘态可以由具有质量的一维狄拉克方程描述。相邻边缘边界处狄拉克质量符号的切换，根据 Jackiw-Rebbi 机制，进而导致拓扑角态。

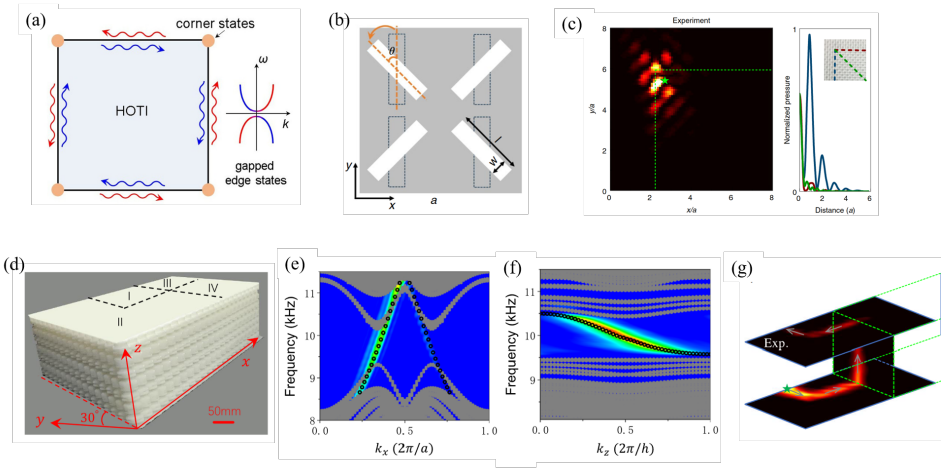

图 22. 基于拓扑晶体绝缘体的高阶拓扑绝缘体。(a) 通过 Jackiw-Rebbi机制实现的二维高阶拓扑绝缘体示意图。(b) 具有非对称空间群对称性的二阶拓扑声学超材料晶胞。(c) 作为 Jackiw-Rebbi 孤子涌现的角态。(d) 采用 L 形设计的 3D 打印声子晶体样品照片。(e,f) 顶表面沿 (e) k_x 和 (f) k_z方向的投影能带色散。(h) 测得的铰链输运声压场分布。(a) 改编自参考文献 [265], (b)-(c) 改编自参考文献 [40], , (d)-(g) 改编自参考文献 [267]。

图22(b) 展示了此类二维高阶拓扑绝缘体声学实现的一个具体实例。在这种声学超材料中，可通过调节单一几何参数 θ，独立触发体和边缘的拓扑相变。为展示角模，构建了一个盒状超胞，其中由具有不同高阶拓扑的声学超材料组成，其场分布如图22(c) 所示。这一方案为可调拓扑超材料开辟了新途径，随后已在机械系统中实现 [274, 273]。另一种常见的由 Jackiew-Rebbi 机制诱导的高阶拓扑绝缘体是声学拓扑晶体绝缘体（又称量子自旋霍尔绝缘体的声学类比），其中体拓扑指标和体诱导角拓扑指标可通过布洛赫函数在高对称点处的对称本征值定义[295]。当声学拓扑晶体绝缘体和普通绝缘体以特定对称性置于超胞中时，非平庸的角指标差会产生具有赝自旋-动量锁定特征的角态，从而实现高阶拓扑量子自旋霍尔效应 [266, 294, 271]。此外，为克服诱导的拓扑角模仅出现在极少数几何结构中的局限

，还提出了一种基于非周期 Kekul´e 调制所产生的狄拉克涡旋的一般方案 [296]。进一步推广至三维后，可以实现拓扑绝缘体和狄拉克点的层级结构 [213, 272, 267, 275] 与狄拉克点 [268, 269]。例如，三维拓扑绝缘体的声学类比同时呈现二维无能隙表面狄拉克锥（作为一阶拓扑绝缘体）和一维无能隙铰链狄拉克色散（作为二阶拓扑绝缘体），支持稳健的表面或铰链声传输 [213]。这一思路还可进一步推广，实现沿三个不同方向的铰链传播 [272, 267, 275]。如图22(d) 所示，研究人员制备了由三维拓扑声子晶体组成的三维样品，以展示沿三个不同方向传输的铰链态。通过精心设计格点内势以及胞内和胞间层耦合，可在堆叠双层六角晶格中获得不同的拓扑相，进而实现界面态。如图22(e) 和22(f) 所示，实验测得沿 k_x 和 k_z 方向的投影能带色散，表明铰链传输分别沿 x 和 z 方向进行。通过进一步制备由不同相组成的样品，研究人员展示了从一个铰链到另一个铰链的单向传输，其测得的声压场分布如图22(g) 所示。

高阶拓扑绝缘体的第二个起源是晶体绝缘体的极化与 Wannier 中心。在极化现代理论中，体偶极矩通过贝里相位来表述，而贝里相位与 Wannier 中心相关。晶体对称性（如镜面对称性和旋转对称性）可以使偶极矩量子化，从而使其成为拓扑不变量。具有量子化偶极矩的典型例子是著名的 Su-Schrieffer-Heeger 模型[见图 23(a)], 的上图，该模型描述了链中具有交错跃迁振幅 [21] 的一维无自旋电子系统。当 Su-Schrieffier-Heeger 模型具有非平庸偶极矩时，也就是说，该模型的 Wannier 中心构型与其晶格位点构型不同，边界处便会出现无法通过任何扰动消除的分数电荷，如图 23(a) 的下图所示。尽管上述极化理论最初是为固体物理学提出的，但仍可用于理解声学中的拓扑行为。需要注意的是，偶极极化应由 Wannier 中心这一概念取代，而分数边界电荷可理解为体的填充反常及其在边界处的表现 [297]。我们指出，这一图景不仅适用于紧束缚模型，也适用于无法用紧束缚模型描述的声子系统，相关总结见参考文献 [292]。

受 Su-Schrieffer-Heeger 模型启发，声学领域中首次展示非平庸拓扑是在一维声子晶体中实现的 [32]。当两个偶极矩不同的声子晶体并置时，界面处会出现界面态 [见图23(b)]。从一维系统中量子化的偶极矩出发，可以将其推广至高维系统，这些系统的

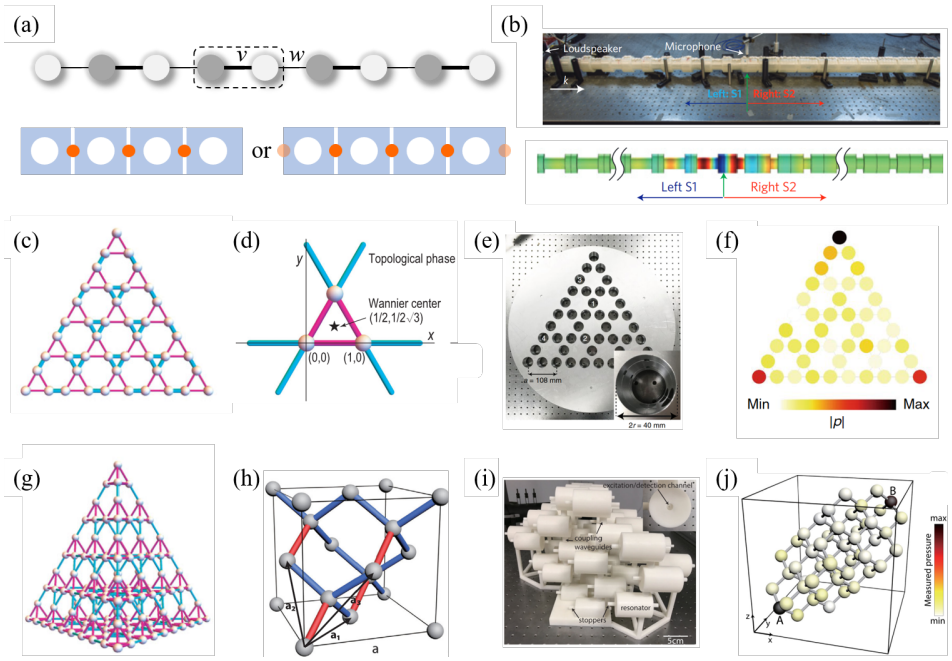

图 23. 具有偶极矩的 Wannier 型拓扑绝缘体。(a) Su-Schrieffer-Heeger 模型示意图（上图），以及具有非平庸偶极矩的 Su-Schrieffer-Heeger 模型的 Wannier 中心可能构型（下图）。(b) 由一个非平庸晶格和若干平庸晶格组成的一维声子晶体（上图），以及拓扑模型的模拟场分布，该模型局域于非平庸晶格与平庸晶格之间的界面处。(c) 具有二聚化耦合的呼吸型 kagome 晶格示意图。(d) 具有非平庸偶极矩的呼吸型 kagome 晶格的 Wannier 中心构型，其中 Wannier 中心与晶格位点不匹配。(e) kagome 晶格样品，以及 (f) 实验态密度，显示出角处的局域化。(g) 焦绿石晶格示意图，它是三阶 Wannier 型拓扑绝缘体的原型。(h) 三阶 Wannier 型拓扑绝缘体示意图。(i) 制备样品的照片。(j) 频率为 2900Hz 时测得的压力分布图，对应于角态。(b) 改编自参考文献 [32]。(c)-(d) 和 (g) 改编自参考文献 [53]。(e)-(f) 改编自参考文献 [278]。(h)- (j) 改编自参考文献 [282]。

极化形式与一维中的偶极矩类似。在文献中，以非平庸偶极动量为特征的拓扑晶体绝缘体称为 Wannier型高阶拓扑绝缘体 [53, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 298, 299, 284, 285, 300, 291, 301, 302, 303]。Wannier型高阶拓扑绝缘体的典型范例是具有二聚化耦合的 kagome晶格[见图 23(c,d)]，，该结构最初是在紧束缚模型中从理论上提出的 [53]，随后在声学系统中通过实验得到验证 [278, 279][另见图 23(e,f)]。这些拓扑相由一个拓扑不变量表征，该不变量定义为贝里势在整个布里渊区上的积分。由于偶极极化等同于 Wannier中心的位置 [见图 23(c)],因此，通过描绘 Wannier中心来辨别拓扑相是直观的

构型 [280]。晶格位点与Wannier中心之间的不匹配会产生高阶拓扑角态。结合谷自由度后，角态的出现便与特定的角相关联[见图23(g-i)]，从而产生谷选择性角态 [281]。进一步而言，可以将二维二阶拓扑绝缘体扩展为三维三阶拓扑绝缘体 [见图23(g)]。如图23(h)所示，提出了一种具有立方晶胞的各向异性金刚石晶格，用以模拟三阶Wannier型拓扑绝缘体。实验上，通过立体光刻三维打印精心设计了一种具有类菱面体结构、包含六个菱形表面的三阶拓扑绝缘体 [见图23(i)]。由于三阶拓扑绝缘体的特征是在有限三维样品的特定角处存在拓扑角态，图23(j)还展示了一个典型角态，该角态通过测量两个角谐振器处的局域声学响应获得。其他实现三阶拓扑绝缘体的方案还可借助声学烧绿石晶格 [300] 和受Su-Schrieffer-Heeger模型启发的立方晶格 [291, 301]。

尽管 Jackiw-Rebbi机制的维度层级是理解和构建高阶拓扑绝缘体的一种简便方式，但从历史上看，高阶拓扑绝缘体最初是在研究晶体绝缘体中的多极矩时发现的。在极化现代理论中，体偶极矩通过贝里相位来表述。然而，将其推广到多极矩会导致更复杂的表述。与 Wannier 型高阶拓扑绝缘体不同，多极拓扑绝缘体的偶极矩为零，但具有量子化的多极矩 [264, 297, 34, 286, 36, 289] ，这可通过嵌套Wannier能带 [264, 297, 288, 287] 和量子算符表述 [304, 305, 306]来描述。例如，四极拓扑绝缘体的偶极极化为零，但具有有限的四极矩，并由特定对称性保护，如图24（a）所示。图24（b）展示了四极矩拓扑绝缘体的紧束缚模型。这是一个方形晶格模型，每个晶胞包含四个格点，并同时具有正、负最近邻耦合 [264, 297]。正、负耦合使得每个晶格面（即一个晶胞的面积）上的 π–磁通量非零，从而产生两个非对易反射对称性，这是出现非平庸四极拓扑所必需的。为此，人们引入了一种基于对称性的方法来实现四极矩拓扑绝缘体 [286], ，其中四极拓扑由两个非对易滑移对称性保护（见图24（c））。实现声学四极拓扑绝缘体的另一种方法，是依据声学谐振器的场分布形态，将声学腔体以不同的连接方式相连，从而直接产生正、负跃迁 [36]（另见图24（d））。

与具有量子化四极矩的四极矩拓扑绝缘体类似，八极矩绝缘体的偶极极化和四极矩均为零，但具有有限的八极矩（见图24(e)）。八极矩拓扑绝缘体的紧束缚模型采用立方晶格模型，每个晶胞包含八个格点，同时存在正、负最近邻跃迁 [另见图24(f)] [264, 297]。由于其复杂的

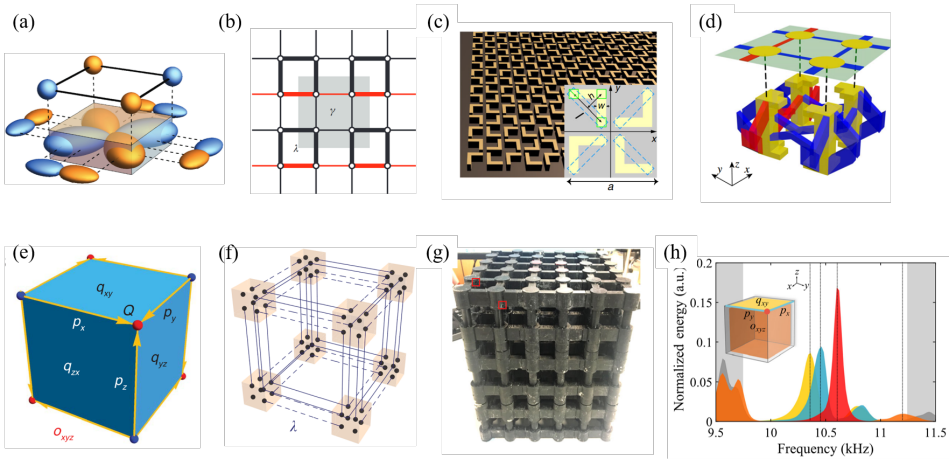

图 24. 四极矩和八极矩拓扑绝缘体。(a) 体四极矩及其伴随的边缘偶极子和角电荷。(b) 四极矩拓扑绝缘体的紧束缚模型。细线（粗线）表示跃迁强度较弱（较强）的跃迁，其强度为 $\gamma(\lambda)$，红线（黑线）表示负（正）跃迁振幅。(c) 一种基于对称性方法实现四极矩拓扑绝缘体的二维声学超材料。插图展示了晶胞。(d) 由连接方式不同的耦合声学谐振器构成的声学四极拓扑绝缘体。(e) 体八极矩O_{xyz} 及其边界极化。(f) 八极矩拓扑绝缘体的紧束缚模型。(g) 由耦合谐振器构成的声学八极拓扑绝缘体。(h) 有限结构中选定的体（橙色）、曲面（黄色）、边缘（蓝色）和角位点（红色）的归一化声学频率响应谱。(a)-(b) 改编自参考文献 [34]。(e)-(f) 改编自参考文献 [264]。(c) 改编自参考文献 [286],(d) 改编自参考文献 [36], ，(g)-(h) 改编自参考文献 [289]。

紧束缚构型，三维八极拓扑的实现更具挑战性。迄今为止，实现声学八极拓扑绝缘体的唯一方法是通过不同构型的谐振器相互连接来产生正、负跃迁 [289, 307]。典型的制备样品如图24(g)所示。八极矩拓扑绝缘体的表现可分别通过曲面态、边缘态和角态的出现来识别。如图24(h)所示，对有限结构中选定的体（橙色）、曲面（黄色）、边缘（蓝色）和角位点（红色）测得的声学频率响应谱，为声学八极矩拓扑绝缘体提供了直接证据。

此外，还值得注意的是一些与高阶拓扑绝缘体相关的新概念。例如，利用高阶拓扑的丰富类别，可以在单个声学系统中将常规拓扑与高阶拓扑相结合，从而形成混合（或层级）拓扑绝缘体 [290, 291]。此外，声学平方根拓扑绝缘体的拓扑性质继承自哈密顿量的平方，也被证明能够承载高阶拓扑 [308]。最后但同样重要的是，也有人提出在声子晶体中实现增益与损耗诱导的高阶拓扑绝缘体

声子晶体中 [309]。随后，通过刻意引入损耗而诱导的高阶拓扑绝缘体，在声子晶体中得以实验实现 [37]。

3.8. 非阿贝尔拓扑态

本节将简要介绍非阿贝尔能带拓扑，并简要回顾其在声子超材料中的近期实验实现。非阿贝尔能带拓扑最早由 Wu等人于 2019 [310],在某种程度上提出，它补充并拓展了传统的阿贝尔拓扑能带理论。在继续讨论之前，我们先回顾一下阿贝尔能带拓扑。正如其他章节所阐述的那样，能带绝缘体或简并能带节点的拓扑性质通常可由陈数、量子化 Zak 相以及各种绕数等来刻画，这些量通常定义在由“占据”能带和“未占据”能带张成的两个子空间中。这些拓扑不变量或节点荷由阿贝尔群分类，因此满足加法性和乘法交换性。一个典型例子是，具有相反陈荷的两个 Weyl 点在碰撞时趋于湮灭。

超越上述范式，顾名思义，非阿贝尔能带拓扑体现了多条能带的非阿贝尔拓扑荷，其中多能带构型的出现及其稳健性无法用传统的阿贝尔拓扑不变量来解释。迄今为止，非阿贝尔能带拓扑的应用始终需要具备两个关键要素。首先，系统的哈密顿量应具有时空反演对称性 $I_{ST} = I_S T$，其中 I_S 表示空间反演 P（或二维无自旋系统中的 π 旋转），而 T 表示时间反演。其次，必须同时考虑多条能带或多个带隙，而不能简单地将其分流为两个子空间。组合反幺正对称性 I_{ST} 作为一种位点对称性，因为它使动量空间中的每个 k 点保持不变。更重要的是，$I_{ST}^2 = 1$ 使我们能够选取一个合适的基，使得 I_{ST} 可表示为复共轭 K，由此得到

$$I_{ST} H(k) I_{ST}^{-1} = H^*(k) = H(k); \quad I_{ST}|u(k)\rangle = |u(k)\rangle^* = |u(k)\rangle. \tag{18}$$

在这种情况下，哈密顿量以及每个 k 点处对应的本征态均为实数。本征态的规范自由度缩减为 ± 1。于是，每个 k 处的哈密顿量都由一个正交归一旋转标架 $\{u_i(k)\}$编码，它表示本征态的局部几何量。哈密顿量随 k 演化时，标架平滑旋转的方式会影响 I_{ST} 对称系统中的能带拓扑。例如，根据实本征态的扭转定义的第一斯蒂费尔–惠特尼数，等价于基于复本征态平行输运导出的量子化 Zak 相 [311]。

当涉及哈密顿量的序参量空间时，多能隙视角的力量便得以彰显。如图25所示，当我们考虑一个 PT-对称的三能带无自旋系统，并将三条能带分为一条

占据能带和两条未占据能带时，哈密顿量对应的序参量空间在不存在简并的情况下为 $M_{1,\,2} = O(3)/O(1) \times O(2)$，这是一个实格拉斯曼流形，其中 $O(N)$是 N维正交群 {v24>。根据同伦群理论，实格拉斯曼流形$M_{1,\,2}$ 的第一同伦群为 $\pi_1(M_{1,\,2}) = Z_2$，这对应于阿贝尔能带拓扑中使用的 Z_2 量子化 Zak 相 [313, 314, 315]。

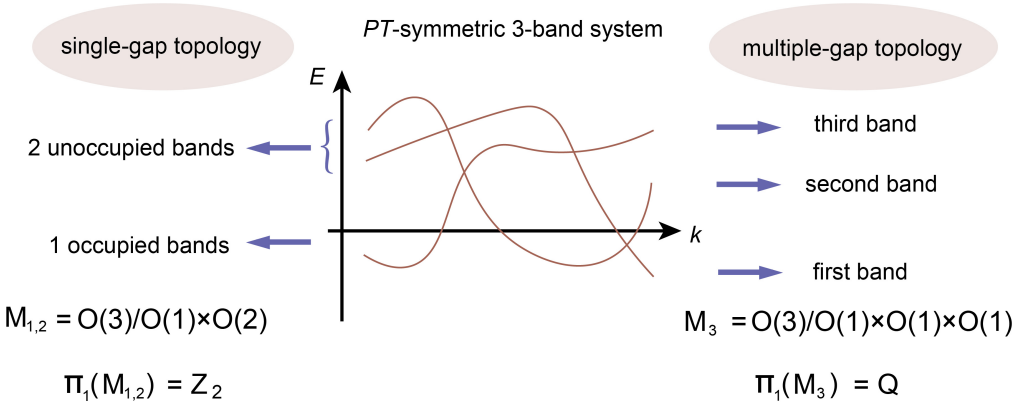

图 25. 对一个具有 PT 对称性的三能带系统进行单能隙和多能隙分流，分别产生阿贝尔和非阿贝尔能带拓扑。$M_{1,\,2}$ 和 M_3 是哈密顿量空间，而 Z_2 和 Q 是它们对应的第一阶同伦群。

相比之下，当我们同时考虑多个带隙时（见图 25右图），哈密顿量的序参量空间随之变为实旗流形 [312]

$$M_3 = O(3)/O(1) \times O(1) \times O(1). \tag{19}$$

实旗流形 M_3 的第一同伦群为

$$\pi_1(M_3) = Q = \{\pm i, \pm j, \pm k, +1, -1\}, \tag{20}$$

它不过就是在非阿贝尔能带拓扑中发挥主导作用的非阿贝尔四元数群。四元数群相关的非阿贝尔群乘法以图示形式呈现在图 26(a) 中，图中显示 i、 j 和 k 满足 $ij = k$、 $jk = i$、 $ki = j$ 和 $i^2 = j^2 = k^2 = -1$。PT对称的三能带无自旋系统中的带隙或能带节点的拓扑荷可由这些非阿贝尔群元素表征。以一维的 PT对称三能带绝缘体系统为例，四元数荷定义为：当 k 在第一布里渊区内从 $-\pi$ 移动到 π 时，3本征态标架所发生的旋转，如图 26(b)–26(e) 所示。具体而言，标架绕第一、第二和第三个本征态的 π 旋转，分别使全局三条能带具有非阿贝尔拓扑荷 $+i$、 $+j$ 和 $+k$。标架绕任一单个本征态的 2π 旋转构成 -1的非阿贝尔拓扑荷。单位荷 1 表示没有旋转，因此对应于平庸相。共轭

伙伴 $-i$、 $-j$ 和 $-k$ 表示逆旋转。值得注意的是， Q 中的元素只能在共轭类意义下观测，这是由实值本征态 ± 1 的符号自由度 [316]导致的。 PT对称的三能带无自旋系统是能够编码非阿贝尔能带拓扑的最简模型。

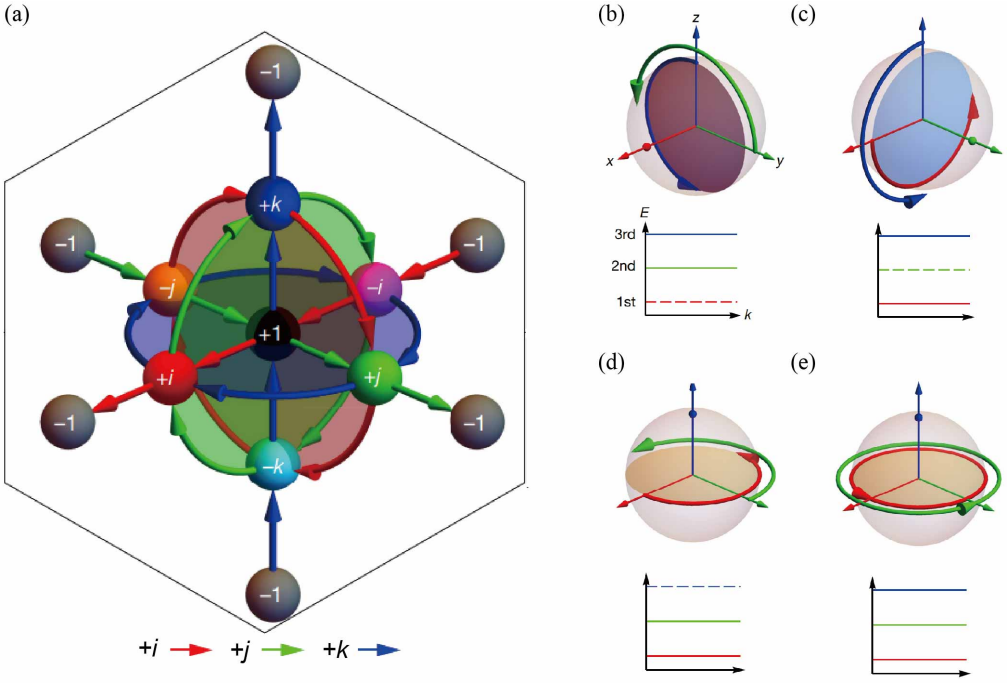

图 26. 四元数群的图示。(a) 非阿贝尔荷的乘法规则。(b)-(d) i、 j 和 k的非阿贝尔荷，分别由本征态标架绕第一、第二和第三条能带旋转 π 表示。(e) 非阿贝尔荷 -1 由单一本征态的旋转 2π 表示。图片取自参考文献 [317]。

在 Wu 的开创性工作之后 [310], ， 多项理论 [318, 319, 320, 321, 322, 323, 316, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331] 研究相继涌现，并见证了非阿贝尔能带拓扑的兴起。例如，研究预测层状硅酸盐中的声子谱可能呈现非阿贝尔物理 [323]。迄今为止，得益于人工材料的可设计性，非阿贝尔能带拓扑已在多种超材料中被提出、操控和探测，例如传输线网络 [317, 332]，声子晶体 [333, 334, 335] 全介质 [336] 和双轴光子晶体 [337, 338, 332, 339, 340] 以及弹簧-质量系统 [341]。其中，Guo 等人 [317] 利用传输线网络超材料，在一维 PT-对称三能带绝缘体系统中，首次直接观测到非阿贝尔拓扑荷。如图26(b)-26(e)所示，不同的非阿贝尔四元数荷是通过实验获得的本征态标架球提取出来的。与此同时，大多数关于非阿贝尔能带拓扑的研究聚焦于二维或三维的三带半金属系统，其中存在纠缠能带节点，例如 Weyl 点、节点线和节点链。可能的

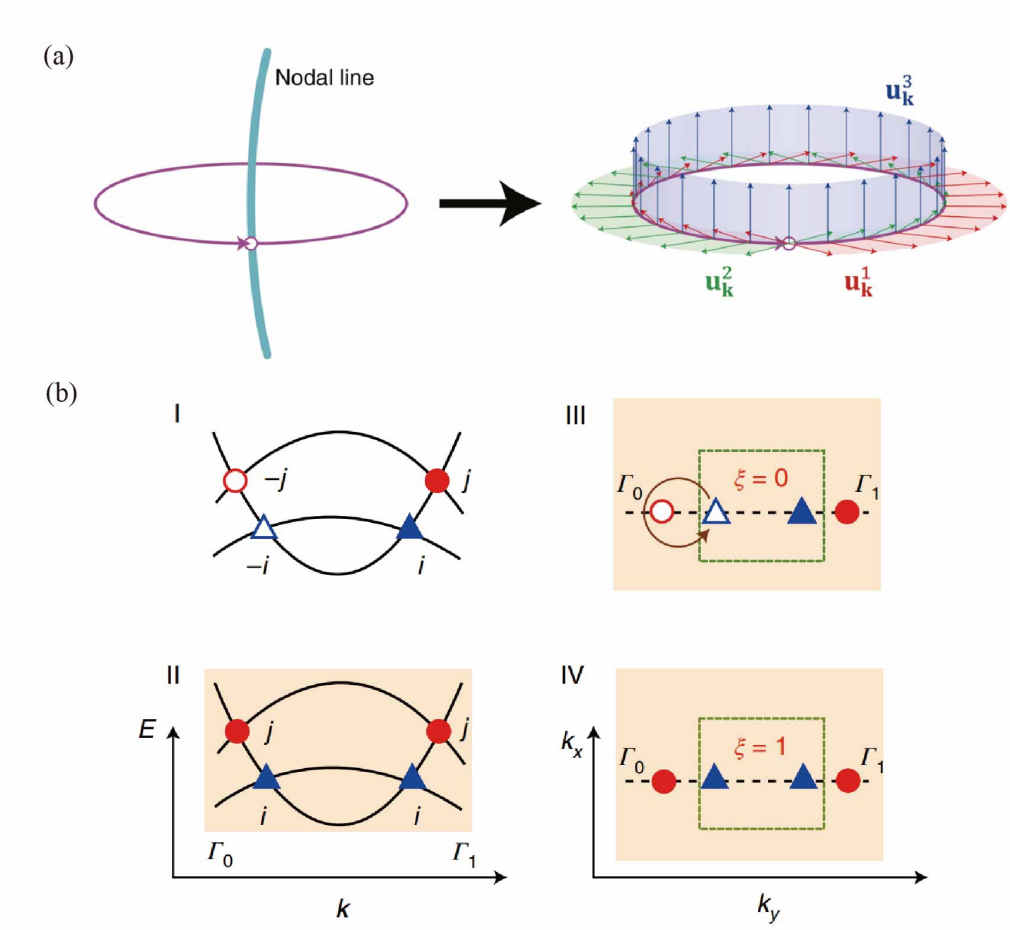

图 27. 节点系统的非阿贝尔表征。(a) 由环绕节点线的本征态标架旋转定义的非阿贝尔荷。(b) 节点结构中的非阿贝尔编织与拓扑欧拉类示意图。图 (a) 改编自参考文献 [342]。图 (b) 改编自参考文献 [333]。

半金属构型受到非阿贝尔荷的严格约束。非阿贝尔荷的定义依据是在动量空间中沿包围能带节点的闭合回路旋转三本征态标架，如图27(a)所示。不同的构型为探索一维中不存在的新颖非阿贝尔现象提供了绝佳平台，例如拓扑荷的非阿贝尔编织及其多路径相变。如图 27(b)所示，将第一带隙中拓扑荷为 $-i$ 的能带节点绕第二带隙（III）中拓扑荷为 $-j$ 的节点进行编织，会使它们的拓扑荷乘以 -1，这是非阿贝尔编织的非平庸表现，即 $(-j)\ (-i)\ (-j)^{-1} = i$ 和 $(-i)\ (-j)\ (-i)^{-1} = j$。编织后，每个带隙中的两个能带节点具有相同的拓扑荷（II）。由于总拓扑荷为 $i^2 = j^2 - 1$，这两个节点受到拓扑阻碍而无法湮灭。非零整数值斑块欧拉类 ξ 积分

over 一个包围这对能带节点的布里渊区局部区域，定义如下 ，

$$\int_{k\in Brillouin\,zone\,patch} \langle \nabla u_1(k)| \times |\nabla u_2(k)\rangle, \tag{21}$$

随后可以量化它们的稳定性 [333]。

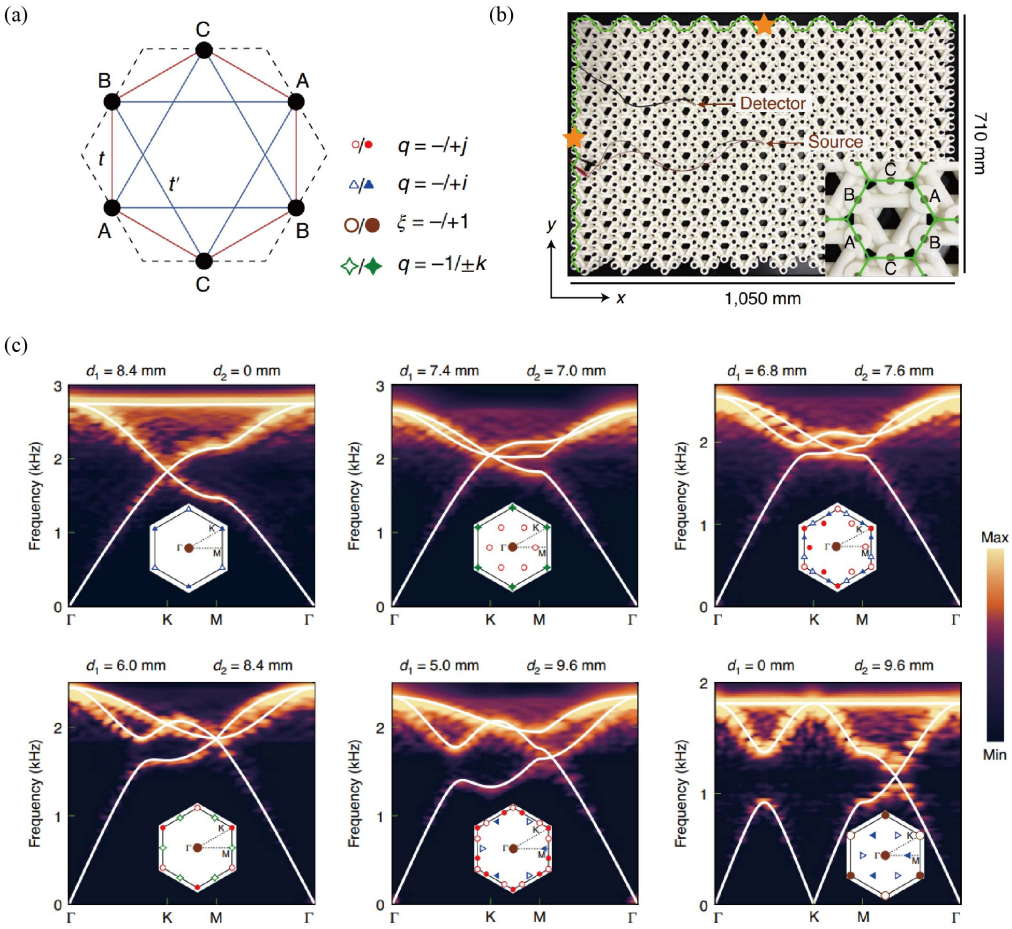

图 28。 (a) 一个最近邻和次近邻耦合可调的笼目紧束缚模型。(b) 用于测量的实验装置照片。(c) 六种几何参数对应的测得声学能带结构，其节点结构各不相同，并由不同的非阿贝尔荷表征。图片改编自参考文献 [333]。

非阿贝尔带电能带节点的编织和相变最早由 Jiang 等人利用基于笼目模型的可调声学半金属 [333]观测到。仅包含最近邻和次近邻耦合的笼目模型 [见图28(a)] 形成了二维 PT对称的三能带半金属。在实验中，声学笼目晶格采用光敏树脂进行 3D 打印 [见图28(b)]。笼目模型的格点由圆柱形声学谐振器构成。最近邻和次近邻耦合则通过连接谐振器、直径各异的水平管实现。相应地，声学笼目晶格的前三条 s轨道能带始终

交织在一起，非阿贝尔拓扑荷可以定义在这些能带节点上。通过调整超材料的几何参数，换言之，通过调节最近邻和次近邻耦合，非阿贝尔节点荷会在相邻带隙中经由节点编织而转换，也会经历生成、湮灭、合并、转移和分裂。正如图 28(c) 中实验测得的能带色散演化所示，这些细致的色散特征对应着不同的非阿贝尔拓扑荷。每个面板中，节点荷的演化趋势由插图中的箭头标示。不同拓扑荷的标签见图 28(a)，以供参考。具体而言，当次近邻耦合消失时 [见图 28(c) 的第一个面板], ，狄拉克点出现在两个K 点，且在第一带隙中带有拓扑荷 $\pm i$ ；同时，一个带有拓扑荷 -1的二次节点出现在 Γ 点。该二次节点产生非零的斑块欧拉类 $\xi = 1$，并在调节过程中保持不变，证明了非阿贝尔拓扑荷的拓扑稳健性 -1。随后，通过持续减小最近邻耦合强度并增大次近邻耦合强度，会出现丰富的非阿贝尔拓扑相变。首先，第二带隙中的 ΓK 线和 ΓM 线上“凭空”生成六对拓扑荷为 $\pm j$的狄拉克节点，其总拓扑荷为 1。与此同时，其中一半节点分别朝 K 点和 M 点移动。当六个狄拉克节点到达 K 点时，会出现拓扑荷为 $\pm k$ 的线性色三重简并点，因为（$\pm i$）（$-j$）$= \mp k$ [见图 28(c) 的第二个面板]。继续调节会使三重简并点分裂，并在第一带隙的 K点产生带有 $\pm j$ 拓扑荷的狄拉克节点，同时在第二带隙的 KM 线上产生带有 $\pm i$ 拓扑荷的狄拉克节点[见图 28(c) 的第三个面板]。带有 $\pm i$ 拓扑荷的狄拉克节点继续移动，并在第二带隙的三个 M点与其余六个带有 $-j$ 拓扑荷的狄拉克节点相遇，从而形成带有 -1 拓扑荷的线性色三重简并点 [见图 28(c) 的第四个面板]。之后，线性色三重简并点再次分裂，在第一带隙的 ΓM 线上产生六个带有 $\pm i$ （$\pm j$）拓扑荷的狄拉克节点，在第二带隙的 KM线上产生六个带有$\pm j$（ $\pm i$ ）拓扑荷的狄拉克节点。最后，在 K 点生成带有拓扑荷 -1 的二次节点，形成非零斑块欧拉类 $\xi = \pm 1$。值得注意的是，线性色三重简并点是相邻带隙中两个拓扑荷发生编织时不可避免出现的节点。非阿贝尔能带拓扑诞生之前和之后，这类三重简并点都得到了广泛研究 [343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350]。实验还研究了具有锯齿形和扶手椅形边界的多带隙体-边界对应关系，这为能带节点编织提供了间接证据，因为穿过奇数个狄拉克节点时 Zak 相会发生切换。

不久之后，Wang 等人首次通过实验观测到以非阿贝尔四元数荷 -1 [338]表征的耳环状节点链。他们基于精心设计的 PT对称哈密顿量，制造了一种三维 $k \cdot p$声子晶体。该声子晶体沿 z方向逐层构建，每个晶胞由两个扭曲长方体堆叠而成 [，见图 29(a)]。这种几何结构具有两种镜像对称性和反演对称性，因此有机会产生一个

非平庸的偶然三重简并节点可出现在最低能带上方的三条能带中 [，见图29(b)]。沿着环绕该节点的闭合回路，在单位球面上旋转三本征态标架，可见三个本征态都绕 2π z 轴旋转 [，见图29(c)], 这体现了非阿贝尔四元数荷的关键特征 -1。经过微小微扰，三重简并节点可分裂为两种耳环状节点链，其链无法完全打开带隙，这表明四元数荷受到拓扑保护 -1。通过对扫描场进行三维傅里叶变换，在不同频率下的能带色散中实验验证了耳环状节点链。与 Jiang 的工作相比，Qiu 等人基于方形晶格模型，在声学超材料中实现了类似的非平庸能带节点非阿贝尔编织过程 [334]。然而，他们更进一步，首次提供了非阿贝尔荷成对节点稳定性的实验证据 [，见图29(d)]。此外，他们测量了镜面对称本征值，以表征编织过程。

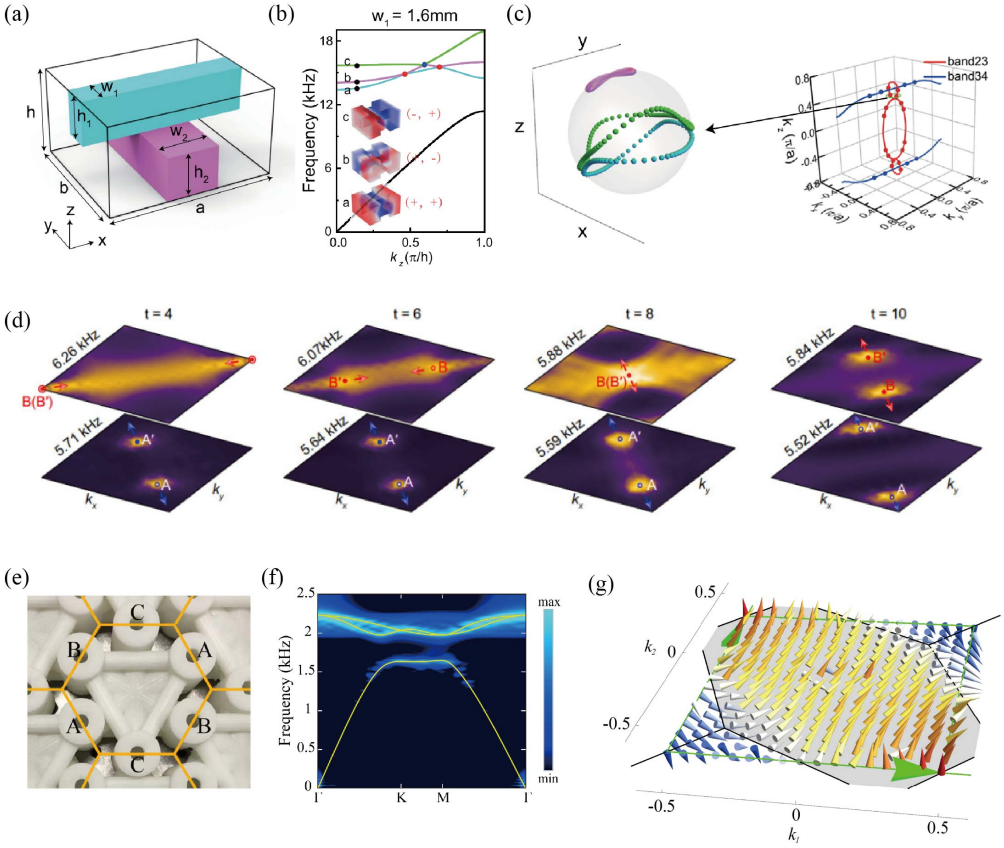

图 29. (a) 声子晶体的晶胞。(b) 三条能带相互纠缠的对应能带结构。(c) 非阿贝尔拓扑荷 -1，通过参考系的旋转揭示了节点链。图 (a)–(c) 改编自参考文献 [338]。 (d) 能带节点非阿贝尔编织的实验观测。图 (d) 改编自参考文献 [334]。 (e) 具有第三近邻耦合的声学 Kagome 晶格。(f) 开隙能带结构。(g) 实验获得的最低能带 meron Skyrmion 织构。图 (e)–(g) 改编自参考文献 [335]。

非阿贝尔能带拓扑也出现在四能带 PT对称系统 [332], Floquet 系统 [327], 非厄米领域 [326, 351, 352], 非平庸欧拉绝缘体 [353, 324, 354, 335, 355] 等系统中。值得注意的是，在声学 Kagome 晶格中引入非零的次近邻耦合 [见图29(e)], 便形成了所谓的欧拉绝缘体，其最低能带具有带隙 [见图29(f)]这一结构由 meron Skyrmion 织构表征 [见图29(g)]。这种织构基于二维布里渊区中实本征态的取向 [335]。近期研究表明，高阶拓扑相的边缘态分布可以从非阿贝尔视角加以解释 [325]。我们指出，值得在理论和实验两方面进一步研究非阿贝尔能带拓扑，因为运用全局方法理解无法由传统能带拓扑刻画的新颖拓扑现象具有根本重要性。

3.9. 拓扑缺陷与体缺陷对应关系

体边对应指出，非平凡的体能带拓扑可以表现为受拓扑保护的低维边界态的存在，这是拓扑能带理论的核心。通过探测包括表面、铰链或角在内的边界处的谱信号，能带拓扑的实验验证取得了前所未有的进展。除了由于晶格的破坏而可被视为某种晶体缺陷的边界之外，晶体内部还存在多种缺陷，例如空位、替位缺陷、位错和位旋。它们广泛存在于天然纳米材料和非平衡过程 [356, 357]中。这些缺陷在一定程度上可以被视为体内部的“边界”。一个自然的问题是，体能带拓扑能否通过这些内部“边界”得到揭示。拓扑缺陷给出了肯定的答案
[358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368],，其中包括例如位错 [，见图30（a）和30（b）] 以及位旋[，见图30（c）]。

拓扑缺陷是能够抵抗局部晶格形变的稳健晶格畸变，其区别于其他缺陷的特征是在实空间中定义的稳定拓扑荷，例如伯格斯矢量和弗兰克角 [见图 30]。它们为探索拓扑能带理论提供了独特的方法，并将传统的体-边界对应扩展为体-缺陷对应。实空间拓扑荷与倒易空间能带拓扑之间的相互作用构成了其基本原理。实空间和倒易空间中的这种双重拓扑为探究和诱导拓扑现象带来了前所未有的机遇，例如拓扑缺陷态和分数谱荷。除天然材料方面的研究外 [369, 370], 由于超材料中能够实现所需晶格形变，拓扑缺陷诱导的大多数拓扑现象都已在例如光子学、声子和电路系统中得到验证。本文简要回顾拓扑现象的实验进展，这些现象由

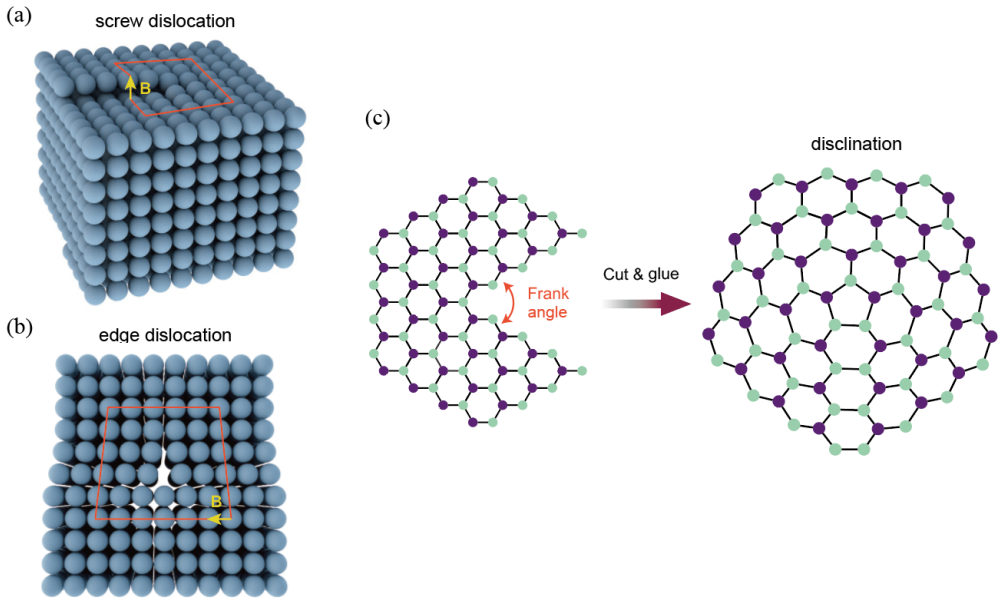

图 30. 分别示意螺型位错 (a)、刃型位错 (b) 和向错 (c)。

拓扑缺陷诱导，尤其是在声子超材料中。我们按照拓扑缺陷的分类展开讨论。

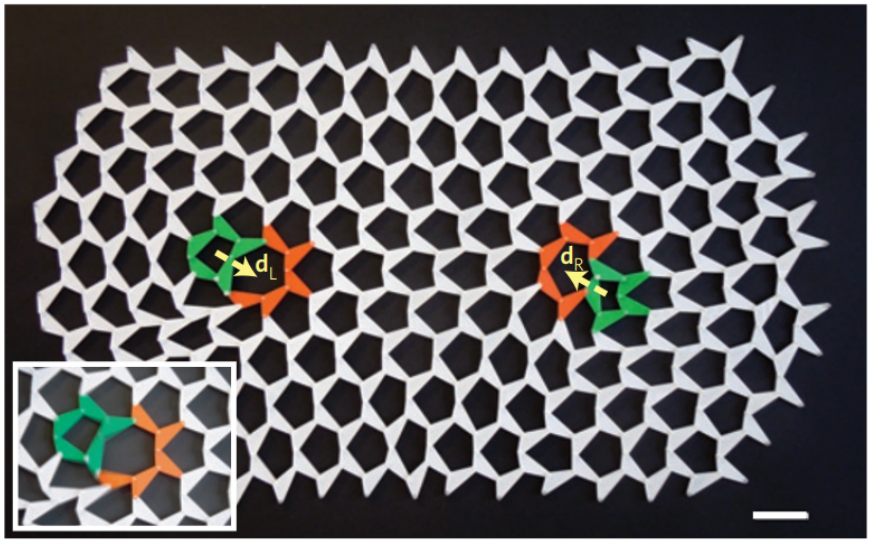

图 31. 变形笼目网络塑料原型中局域于两个位错处的拓扑机械模态。图片改编自参考文献 [371]

刃型位错由伯格斯矢量表征，它在二维空间中充当零维缺陷。此前，人们已在基于变形笼目晶格的机械超材料中观测到束缚于刃型位错的拓扑态 [371], ，如图31所示。这些拓扑束缚态源于

实空间中的动量贝里相位与伯格斯矢量之间的精妙相互作用。随后，Li在光子晶体中直接测量了刃型位错上的拓扑零维光俘获等人 [372], ，该研究基于陈绝缘体的拓扑边缘态。最近，在各向异性磁机械系统中，由堆叠的一维Su-Schrieffer-Heeger链构成的“弱”拓扑绝缘体中，拓扑位错态已得到实验验证 [373]。在基于电路的谐振器阵列中，首次观测到部分刃型位错能够探测二维和三维多极绝缘体的高阶能带拓扑 [374]。此外，通过引入另外两个合成平移维度，Chen等人在二维介质光子晶体中设计出具有非平庸第二陈数的四维拓扑绝缘体相 [375]。由于其中非平庸的第二陈数，非合成空间中的零维位错态演变为四维合成空间中的手性无能隙一维位错态，这一现象也得到了实验验证。这些拓扑现象尚待在声子系统中探索。

事实上，自 2009 年 Ran等首次预测在弱三维拓扑绝缘体中，螺型位错线可以像边界一样承载一维拓扑无能隙螺旋边界态以来，拓扑缺陷便开始在拓扑材料中发挥作用。由伯格斯矢量表征的螺型位错是一种破缺平移对称性的缺陷，其晶格平面沿位错线呈螺旋状排列。拓扑位错态的出现由占据能带的弱拓扑不变量 v_i 和位错的伯格斯矢量 $\boldsymbol{B}$ 共同决定，具体如下：

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\cdot\sum_i v_i\boldsymbol{G}_i=\pi\,(mod\,2\pi), \tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{G}_i$ 是倒格子的基矢。Ye等 [376] 和 Xue等 [377],最近分别在由耦合谐振器实现的声学弱三维拓扑绝缘体中观测到了螺旋自旋极化位错态（见 Ye 的研究中的图32（a）—32（c））。两项研究采用了不同的方法：前者基于层叠结构，后者则运用了赝自旋变换这一数学技术（见图32（d））。最近，人们还在耦合光波导阵列中实现了具有合成维度的光子学位错态。

与此同时，Lin 等人首次提出并通过实验验证了一种独特的螺型位错机制，称为拓扑Wannier循环；该机制与弱拓扑不变量无关等人 [378], 在一种基于堆叠二维Su-Schrieffer-Heeger模型的声学高阶拓扑绝缘体中[见图32(e)]。在这项工作中，螺型位错发挥了人工局域规范通量插入的作用 [见图32(f)]。由具有不同旋转对称性表示的瓦尼尔轨道组成的四条分离能带会彼此循环演化，随着

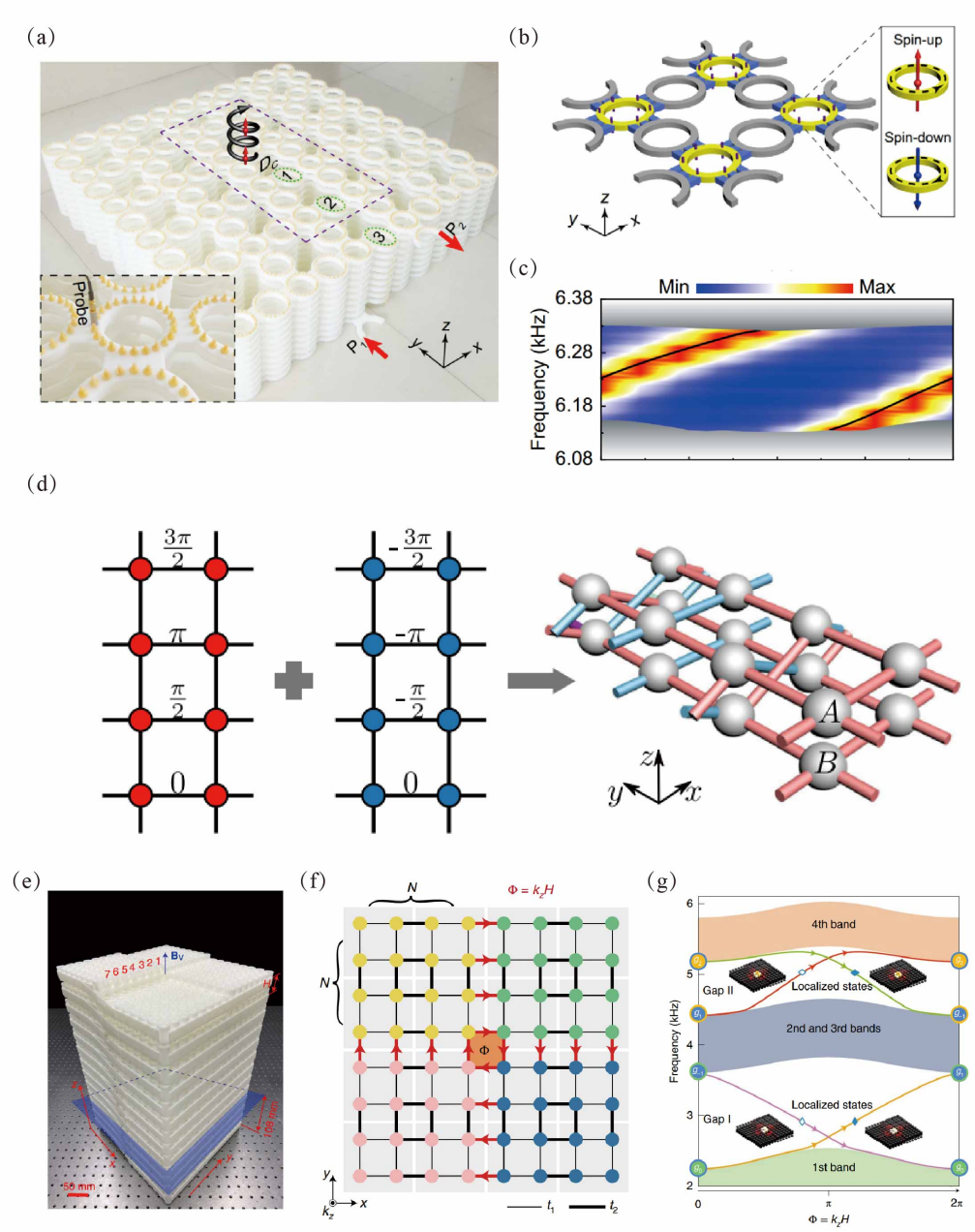

图 32. (a) 带有位错的三维声子晶体实验样品。(b) 用于堆叠三维结构的单层耦合环形波导结构。插图根据声音的环绕方向显示赝自旋。(c) 实验测得的一维位错态色散。(a)–(c) 图改编自参考文献 [376]。(d) 两个每个晶格面磁通不同的方形晶格堆叠后形成二维拓扑绝缘体。红色（蓝色）表示正（负）耦合。(d) 图改编自参考文献 [377]。(e) 用于实现拓扑Wannier循环的台阶螺旋位错实验装置。(f) 沿 z方向进行傅里叶变换后得到的有效二维模型，其中具有局域规范通量 k_z ，其范围为 0 2π。(g) 声学谱随 k_z 变化，局域态在两个带隙中传播。(e)–(g) 图改编自参考文献 [378]。

局域规范通量表现为穿越多个带隙的谱流，以及局域于位错处的拓扑边界态 [见图32(g)]。当缺乏手征对称性、无法获得角处的谱信号时，拓扑Wannier循环为实验中探测高阶能带拓扑提供了另一种途径。

现在让我们转向向错。向错分别是二维和三维空间中的零维和一维拓扑缺陷。与位错造成的平移对称性破缺不同，向错通过“添加”或“减去”扇形区域，再施加切割-粘合过程，破坏理想晶格的旋转对称性 [见图30(c)]。向错中的实空间拓扑由弗兰克角表征。向错诱导的拓扑响应包括分数束缚电荷 [380], 、局域于零维和一维的边界态、拓扑位旋泵浦 [381], 等。与前述位错处的拓扑现象类似，向错诱导的分数电荷也由实空间和动量空间中的对偶拓扑决定 [380]。此处，实空间拓扑是弗兰克角，而动量空间拓扑则是拓扑晶体绝缘体的拓扑不变量。实验中，Liu等人 [382]和 Peterson等人 [383]分别在二维光子晶体和传输线系统中首次展示了分数旋错电荷。通过在一定频率范围内定量测量每个晶胞的总谱态密度，检测到了量子化的分数电荷。反过来，分数电荷也可启发对体晶体拓扑的探测。Wang等人通过实验证实，在引入一对弗兰克角相反的向错后，可在光子谷霍尔系统中获得内部拓扑边缘态。连接两个向错的位旋线充当内部边界，将晶格分割为两个拓扑性质不同的区域，并使终止于两个向错处的拓扑边缘态得以稳健传播。这类内部拓扑边缘态有望为自由形态拓扑波导铺平道路，使其能够抵御不可避免的制造误差。基于类似的双向错光子系统，Xie等人 [381]提出了一种名为拓扑位旋泵浦的新型拓扑现象。最后值得一提的是，
Su-Schrieffer-Heeger 模型的折点和边缘处也会出现分数电荷，并伴有拓扑折点模和边缘模；这一现象近期已在光子 [384] 和声子 [?]系统中得到证实。

接下来，Wang等人再次设计了一种带有一维向错的声学三维外尔半金属 [386], 如图33(a)-33(c)所示。他们发现，携带轨道角动量的一维位旋线态仅在 k_z 陈数非零的区域内出现。其物理机制可解释为向错诱导的局域规范通量与非零陈数之间的相互作用。向错诱导的规范通量具有非阿贝尔性质，这意味着多个缺陷可以相互编织，从而产生不同的净通量；这一现象尚未在超材料中得到探索。

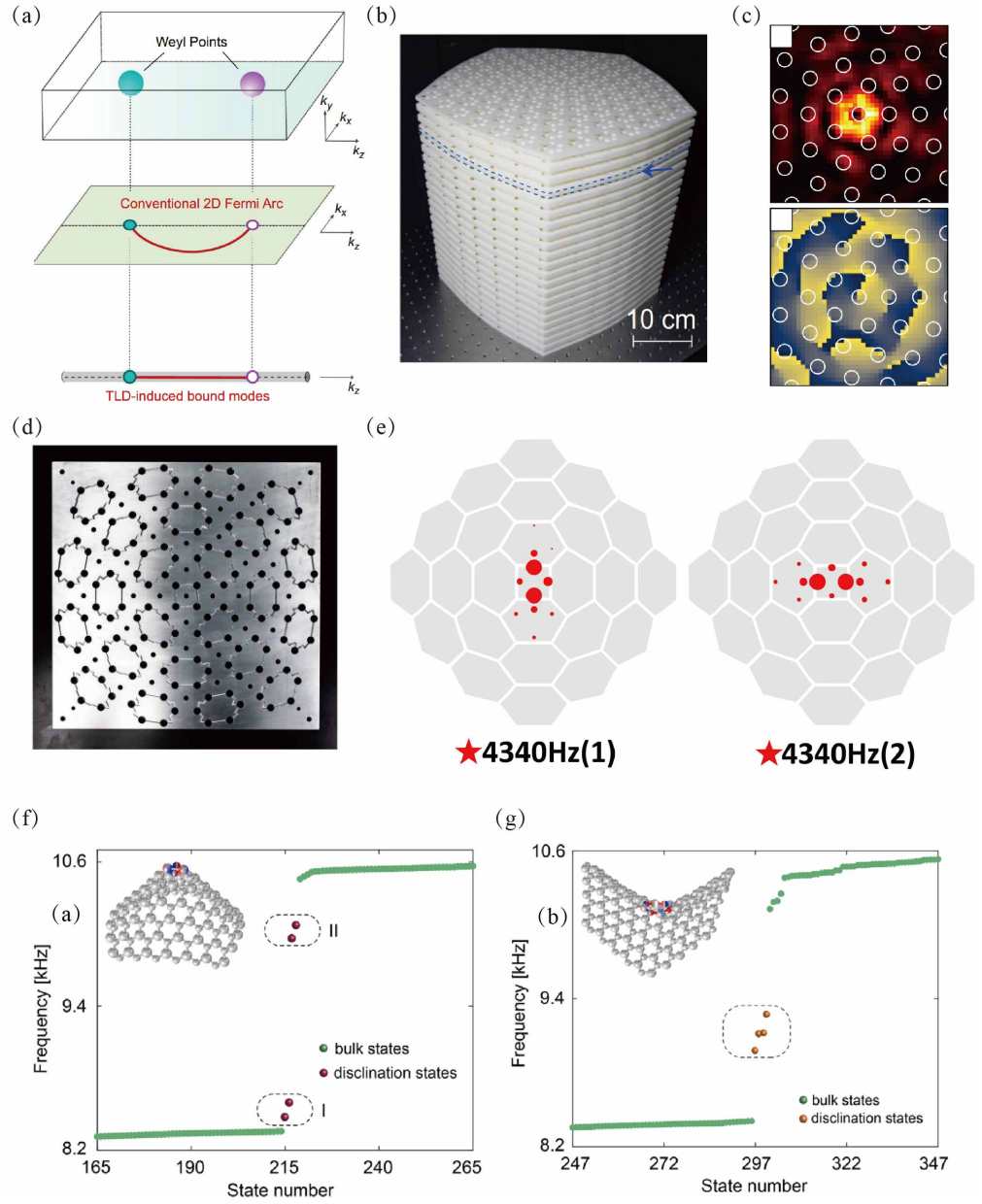

图 33. (a) 带有向错的外尔半金属中的束缚态示意图。束缚态存在于一维动量空间中外尔点投影之间的区域，且该区域的陈数非零。(b) 带有向错的实验声子晶体。蓝色虚线表示其中一层。箭头表示声学探针对应的一个带隙。(c) 测得的局域向错模及其对应的相位分布。图 (a)–(c) 改编自参考文献 [386]。(d) 具有盘绕耦合的实验手征对称声学晶格。(e) 两个向错态的声压分布测量结果。图 (d) 和 (e) 改编自参考文献 [387]。(f) 和 (g) 分别为带有向错的圆锥晶格和双曲晶格中拓扑带隙附近的声学本征频率模拟结果。图 (f) 和 (g) 改编自参考文献 [388]。

由于形变能最小化，在石墨烯和富勒烯等纳米材料中，向错总会形成非平面曲面。拓扑缺陷诱导的拓扑现象受非平面或非欧几里得几何的影响，这方面的研究尚不充分。Chen基于谷霍尔声学超材料，采用Kamada-Kawai布局算法等人设计了由向错诱导的圆锥面和双曲曲面，它们分别具有正高斯曲率和负高斯曲率 [388]。此外，他们研究了由 p轨道诱导的拓扑能带。新出现的拓扑束缚态源于实空间拓扑、非欧几里得几何、体能带拓扑和p轨道物理之间的相互作用。这些束缚态 [见图33（f）和33（g）] 得到了明确实验结果的证实。Chen的工作将体-向错对应关系扩展到非欧几里得几何和p轨道物理，这有望为理解非欧几里得几何纳米材料中电子的拓扑现象提供启示，而这些现象对于理解此类材料的性质至关重要。

众所周知，声子超材料往往会破坏手征对称性，而手征对称性能够将拓扑晶体绝缘体中的拓扑向错态钉扎在带隙中。Deng等 [387] 通过巧妙设计一种基于盘绕耦合腔模型且保持手征对称性的声学晶体，在实验中解决了这一问题 [见图33(d)]。他们测量到了两个局域在向错处、受手征对称性保护的带隙中态 [见图33(e)]。

需要指出的是，广义而言，拓扑缺陷不仅包括位错和向错，还包括涡旋、斯格明子、磁单极激发等。如第 2.7 节所述，狄拉克涡旋体现了二维狄拉克质量项相位的涡旋纹理。近期，人们基于具有 Kekul$\acute{e}$畸变的蜂窝晶格，在超材料中对其进行了广泛研究。声学 [171], 机械 [170, 440],光子学 [390, 391] 系统中观测到了束缚在涡旋处的类马约拉纳零模，并且有人提出可利用它们提升激光性能 [392, 393,394, 395]。

这一快速进展预示着拓扑材料与物理学领域正在兴起一个新的研究前沿。我们期待，随着拓扑声子系统的发展，能够发现更多发生在拓扑缺陷处的新兴拓扑现象，并进一步推动其在声子学应用中的发展。

3.10. 投影对称性诱导的声学拓扑绝缘体

由于规范对称性，晶体对称性的代数结构需要以射影方式表示，从而产生新的拓扑相 [396, 397, 398, 399]。一个具体例子是由射影平移对称性诱导的 M¨obius 拓扑绝缘体，它存在于 Z_2 规范场 [399]作用下。图34(a) 展示了二维声学 M¨obius 拓扑绝缘体 [400], 的示意图，其中蓝色（红色）管具有正（负）跃迁振幅，从而在一个晶胞中产生 π 规范通量。在这一 Z_2 规范场作用下，沿

方向上的 y 交错二聚化打开体能隙，并产生由与射影平移对称性相关的 M¨obiusZ_2 不变量描述的非平庸拓扑。如图 34(b) 所示，边缘色散具有 M¨obius 扭转，并呈现 4π 周期性，类似于 M¨obius 带的边缘，且与体色散完全分离。实验结果如图 34(c) 所示，包括测得的边缘色散及相关压力场。图 34(d) 展示了一个三维高阶 M¨obius 拓扑绝缘体的声学样品，[401], 它通过堆叠四极矩拓扑绝缘体构建，并保持沿 z 方向的射影平移对称性。测得的铰链色散和铰链压力场提供了确凿证据，分别如图 34(e) 和 34(f) 所示。

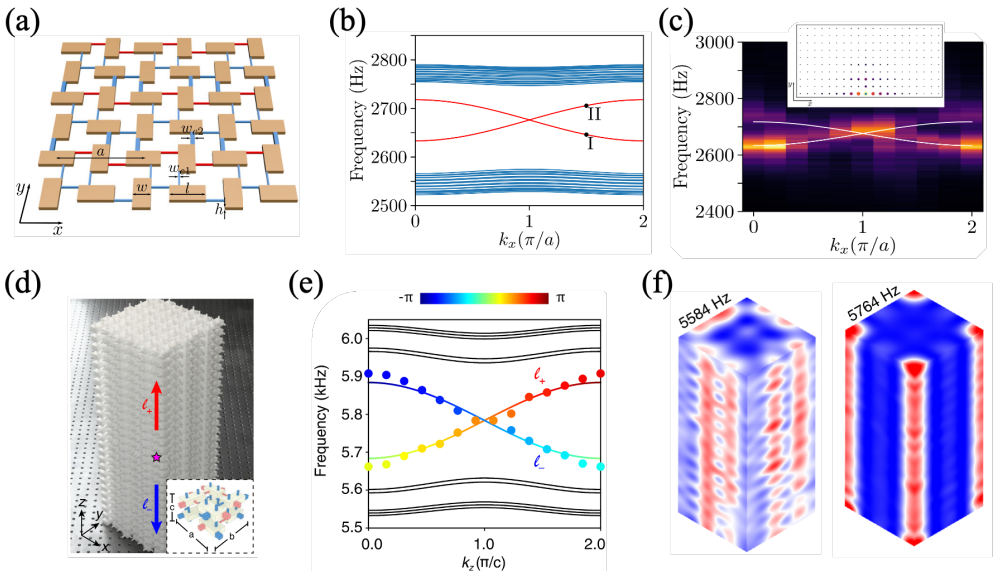

图 34. 由射影对称性诱导的声学 M¨obius 拓扑绝缘体。(a) 二维声学 M¨obius 拓扑绝缘体示意图，由谐振器（橙色）和管道（蓝色和红色）构成。(b) 沿 y 方向具有开放边界的带状结构的模拟投影色散。(c) 测得的边缘色散。白线表示模拟结果，对应于 (b) 中的红线。插图：测得的压力场。圆圈的颜色和大小均表示测得的振幅。(d) 三维声学高阶 M¨obius 拓扑绝缘体的实验样品。插图展示了晶胞。(e) 测得的（彩色圆点）和计算得到的（彩色线条）铰链色散。色标表示投影平移本征值的相位信息。黑线表示计算得到的投影体态和表面态。(f) 分别为曲面（左图）和铰链态（右图）的测得压力场。(a)–(c) 改编自参考文献 [400],，(d)–(f) 改编自参考文献 [401]。

3.11. 宏观尺度下的机械超材料

与声学系统中一样，机械系统中的声子波拓扑现象 [402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409] 可以从经典力学丰富的几何相位中得到理解（Hannay 1985 [410]）。然而，考察某些典型拓扑机械系统中的运动方程，

会带来新的见解。

现在，我们来说明广义质量-弹簧模型的运动方程与薛定谔方程之间的形式一致性，以展示经典系统与量子系统之间的映射。根据参考文献 [411], ，广义质量-弹簧模型的运动方程为

$$\ddot{x}_i = -D_{ij}x_j + A_{ij}\dot{x}_j, \tag{23}$$

该方程遵循爱因斯坦求和约定。这里， $x_i(i \in N)$ 表示其中一个 N独立位移， $\dot{x}_i$ 是其时间导数。质量项被合并到矩阵 D_{ij} 和 A_{ij}中。实对称正定动力学矩阵 D_{ij}表示弹簧耦合，而反对称矩阵 A_{ij} [412] 描述了由速度相关力产生的非耗散耦合。非零的 A_{ij} 仅出现在含有非互易元件的材料中，其作用类似于带电粒子在磁场中受到的洛伦兹力。矩阵 D_{ij} 与 A_{ij}的对称性使弹簧网络成为保守（非耗散）系统。这类机械系统由牛顿第二定律支配，其运动方程是关于时间的二阶导数方程。为了将经典机械系统与量子系统联系起来（尽管式23 是离散的，不足以描述连续机械系统），可以将式23改写成类似薛定谔方程的形式：

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\sqrt{D}^T x \\ i\dot{x}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{D}^T \\ \sqrt{D} & iA\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{D}^T x \\ i\dot{x}\end{pmatrix}, \tag{24}$$

它对时间是一阶导数形式。这里，矩阵 D 的正平方根可通过其谱分解求得。由于矩阵 D 是正定矩阵，且矩阵 A 具有反对称性质，哈密顿量 $H = \begin{pmatrix}0 & \sqrt{D}^T \\ \sqrt{D} & -iA\end{pmatrix}$ 是厄米的。向量 $\psi = \begin{pmatrix}\sqrt{D}^T x \\ i\dot{x}\end{pmatrix}$ 在此处的作用类似于薛定谔方程中的波函数 ψ。

方程 24 的表述类似于量子力学中的紧束缚问题，促使我们直接将拓扑理论应用于机械超材料。尽管拓扑性质并不依赖于平移对称性，但在晶格系统中，拓扑理论的表述十分清晰：哈密顿量和特征向量在倒易空间中具有布洛赫形式：$H(k)$ 和 $\psi(k)$。根据这些形式，可以通过拓扑能带理论深入理解机械系统的拓扑性质 [413, 414, 415, 71]。

在回顾具体系统和模型之前，我们先讨论机械系统的拓扑分类。在电子系统中，拓扑态的分类由空间维度和对称性决定，例如时间反演对称性 T、粒子-空穴对称性 C 和手征对称性 S。

在机械系统中，这些对称性可视为对布洛赫哈密顿量 $H(k)$ 的约束，如方程 25、26、27所示。值得注意的是，时间反演对称性 T具有 $T^2=-1$，这是由于电子具有自旋 1/2 的性质。然而，在机械系统中，$T^2=1$，尽管它可以与适当的对称性结合后扩展为 $T^{*2}=-1$。

具有 T 对称性的机械系统如下

$$U_T H(k) - H(-k)U_T = 0, \tag{25}$$

具有某种反幺正 U_T 和$U_T^2=1$，它代表的是 T 而非“时间反演”，因为在机械系统中，它并不对应时间的反转。此外，具有粒子-空穴对称性的机械系统 C 满足以下约束：

$$U_C H(k) + H(-k)U_C = 0, \tag{26}$$

反幺正 C满足 $U_C^2=1$。此外，手征对称性 S 要求：

$$U_S H(k) + H(k)U_S = 0, \tag{27}$$

具有幺正对称性 U_S和 $U_S^2=1$。存在 T、C、S对称性时的能带结构分别如图 35(a)-35(c) 所示。

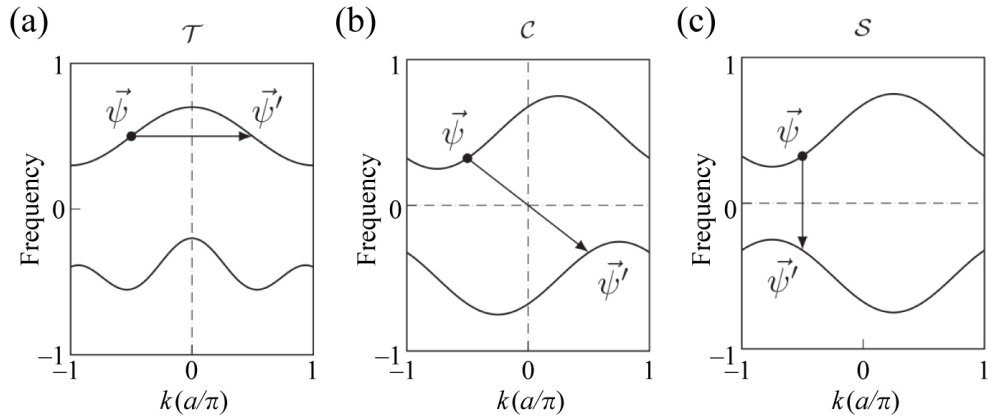

图 35. T、 C、 S 对能带结构中对称性的可视化。图片取自参考文献 [412]

通过上述讨论，我们可以像对电子系统进行拓扑分类那样，对机械系统进行拓扑分类。由于当目标带隙位于零能线附近（与热力学或基态性质相关）或有限频率处时，拓扑指标的表述方式有所不同，而且是否存在非互易元件是机械系统的一个重要区别，因此我们可以将拓扑分类问题分为四类：低频/高频与互易/非互易。具体的分类过程可参见 Huber 的工作 [412]（Prodan 在其工作 [222] 中也对经典无源超材料进行了类似的分类），并且我们

High-Frequency Nonreciprocal Metamatrerials

	Symmetries			Dimensions		
Class	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{S}$	1	2	3
A	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0
AIII	0	0	1	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$
AI	+	0	0	0	0	0
BDI	+	+	1	$\mathbb{Z}$	0	0
D	0	+	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
DIII	−	+	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
AII	−	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
CII	−	−	1	$2\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}_2$
C	0	−	0	0	$2\mathbb{Z}$	0
CI	+	−	1	0	0	$2\mathbb{Z}$

High-Frequency reciprocal Metamatrerials

	Symmetries			Dimensions		
Class	$\mathcal{T}/\mathcal{T}^*$	$\mathcal{C}$	$\mathcal{S}$	1	2	3
BDI	+	+	1	$\mathbb{Z}$	0	0
DIII	+/−	+	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
AII	+/−	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
CII	+/−	−	1	0	0	$\mathbb{Z}_2$
CI	+	−	1	0	0	$2\mathbb{Z}$

Low-Frequency Reciprocal Metamatrerials

	Symmetries			Dimensions		
Class	$\mathcal{T}/\mathcal{T}^*$	$\mathcal{C}/\mathcal{C}^*$	$\mathcal{S}$	1	2	3
BDI	+	+	1	$\mathbb{Z}$	0	0
DIII	+/−	+	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	0
CII	+/−	+/−	1	0	0	$\mathbb{Z}_2$

Low-Frequency Nonreciprocal Metamatrerials

	Symmetries			Dimensions		
Class	$\mathcal{T}$	$\mathcal{C}/\mathcal{C}^*$	$\mathcal{S}$	1	2	3
BDI	+	+	1	$\mathbb{Z}$	0	0
D	0	+	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	0
DIII	−	+	1	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$
CII	−	+/−	1	0	0	$\mathbb{Z}_2$
C	0	+/−	0	0	$2\mathbb{Z}$	0

图36。 机械系统的拓扑分类。表格的第一列给出了对称群的标准名称。接下来的三列表示某种对称性的缺失（0）或存在（1，+，−）。 +/− 标示对称性平方的取值（$+1/-1$）。最后几列列出了表征给定维度下能带结构的拓扑数类别。 $\mathbb{Z}$表示整数； $2\mathbb{Z}$ 表示偶数； $\mathbb{Z}_2$ 表示二元指标。偶数维中的陈数以蓝色标示。奇数维中的绕数以红色标示。当存在更多对称性时，可由基本拓扑数推导出其他指标。陈数和绕数的派生指标分别以浅蓝色和浅红色标示。表格改编自参考文献 [412]

仅展示图中这四个表格36，它们将能带结构的类别、对称性及相应拓扑指标联系起来。

根据低频和高频机械材料的不同特性，我们分别讨论低频和高频情况下的一些拓扑现象。对于超材料的低频范围，出现的拓扑现象在大多数情况下与粒子-空穴对称性有关。质量-弹簧模型固有的粒子-空穴对称性 C 要求谱关于中心点对称：($k=0$, $f=0$)。在这种情况下，拓扑边缘模出现在零能量附近的带隙中，这为研究超材料中玻色子的热力学问题提供了极佳的平台。当然，在时间反演系统中，手征对称性 S 也发挥着类似的作用。

关于声子零能边缘模，Kane 和 Lubensky 的研究是最具影响力的工作之一 [160]。他们研究了麦克斯韦框架中的拓扑边界态 [416, 417, 418] ， 该框架由通过刚性键或中心力弹簧相连的质点构成。在这种系统中，晶格的运动自由度总数与键的数量之差决定了零频模的数量 [419]。Kane 和 Lubensky 重点研究了等静力麦克斯韦框架，

在这类框架中，这两个数量相等（本不应存在零能模，但更一般的麦克斯韦关系预言了零能模的存在 [420]），且系统正处于机械坍塌的临界状态。有趣的是，近期研究发现，等静力扭曲 kagome 晶格可通过旋转相邻的共享顶点三角形（方向相反）产生零模 [421],，这超出了传统的麦克斯韦计数，并可由一般的麦克斯韦关系加以描述——该关系与自应力态有关；在自应力态中，弹簧可以承受拉力或压力，而质点所受合力为零。

对于这类等静力麦克斯韦框架，动力学矩阵的平方根 D对应于质点弹簧模型的平衡矩阵，其中 $\sqrt{D}$ 将弹簧张力与所连接质量块的位移联系起来。基于这个平衡矩阵，Kane 和 Lubensky 提出了一种绕数，用于表征局域拓扑模的数量 [160, 422]。对于这些临界麦克斯韦框架，正绕数预示着柔性模——系统中的某些部分可以自由移动。另一方面，柔性模的对偶伙伴是自应力模；在这种模式下，材料承受的外部载荷能够被吸收，其存在由负绕数预示。这两种拓扑边界模都已在实验中得到证实。Vitelli 通过实验验证了局域于边界的柔性模：该实验采用了一种由 Su-Schrieffer-Heeger 模型映射得到的一维麦克斯韦框架 [159] ，如图37（a）和37（b）所示。此外，他们还表明，这些柔性模可以通过非线性机制在系统的体内传输。在另一项实验中，通过一个准二维框架证实了束缚在缺陷上的自应力模 [423] ，如图37（c）和37（d）所示。上述关于低频拓扑的讨论，无论在物理学还是应用领域都颇具意义。在物理学中，低频拓扑与热力学性质和基态性质相关。在应用领域，这类柔性模和自应力模可用于设计机械响应仪器。

对于机械超材料中的高频拓扑现象，我们主要讨论两种情况：时间反演对称性分别被破缺和保留。这两种情况回答了一个问题：量子霍尔效应和量子自旋霍尔效应能否在机械系统中实现？量子霍尔效应和量子自旋霍尔效应最初是在电子系统中研究的；在这些系统中，体存在能隙，而边缘态却可以连续地跨越能隙被激发。量子霍尔效应与量子自旋霍尔效应的区别在于，前者需要破缺时间反演对称性，而后者受时间反演对称性保护。如果时间反演对称性被破缺，量子自旋霍尔效应便不复存在，但量子霍尔效应则可以实现。然而，在机械系统中实现量子霍尔效应仍存在一个问题。机械系统的运动由牛顿第二定律支配，由于其运动方程对时间是二阶的，因此在时间反演下保持不变。最近，一项出色的工作解决了这一问题。他们构建了一个具有内禀时间反演对称性破缺的陀螺仪耦合系统 [424, 425, 426] 如图 38（a）所示。在快速自旋极限下，他们获得了陀螺仪轴的进动响应，该响应对时间是一阶的。利用这一

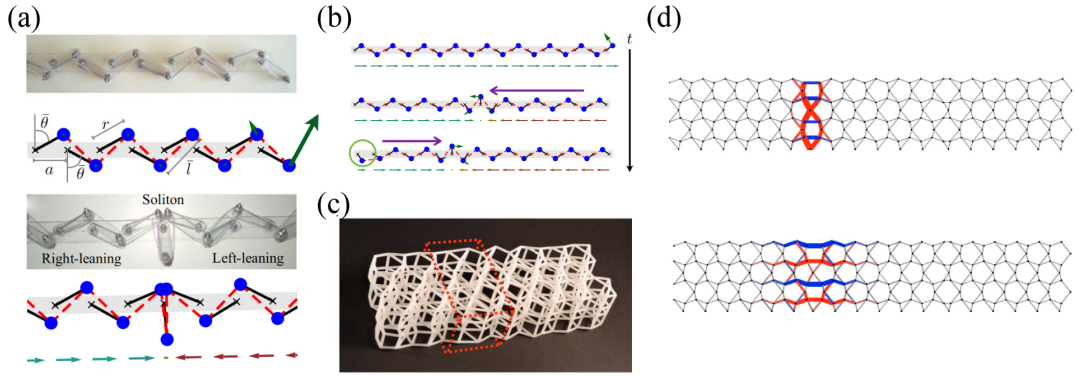

图37。 转子链中的柔性模与麦克斯韦框架中的自应力模。(a) 上方两个面板分别展示了具有恒定$\theta = \theta$时转子链的构型和示意图。绿色箭头表示系统边缘局域零模中每个质量块（蓝色圆圈）的位移振幅。最后几个面板展示了孤子态出现在右倾态和左倾态之间的情况。下方箭头表示每个转子的 x 投影。(b) 孤子态的演化。孤子态始终局域在畴壁处，并在系统中自由移动。(c) 具有两个畴壁的麦克斯韦框架。(d) 不同结构参数下左侧畴壁中自应力态的两种场分布图样。图片引自：(a) 和 (b)，参考文献 [159]；(c) 和 (d)，参考文献 [423]

机制，他们组织了一项实验来实现量子霍尔效应。由此，他们克服了陀螺系统固有的无序，并成功观测到由陈数 [427]（图 38（b））描述的单向量子霍尔效应边缘态，尽管该系统的体模式是混沌的。这项工作开辟了一种构建时间反演对称性破缺机械超材料的新方法，也可能启发人们在其他系统中构建支持此类稳健拓扑模式的超材料。

量子自旋霍尔效应的特点是存在两个反向传播的边缘模，它们的区别在于系统的自旋自由度。然而，在无自旋的机械系统中，很难构建自旋自由度来实现量子自旋霍尔效应。幸运的是，近期研究提出了一些方法 [172, 428]。研究人员采用一种特殊的摆结构，如图38(c) 所示，以实现每个晶格面具有磁通的拓扑晶格$\Phi = \pm 2\pi/3$，这与霍夫施塔特模型类似。他们用系统中的左、右圆偏振运动取代电子系统中的自旋向上和自旋向下。在这些条件下，他们成功地在机械系统中观测到声子螺旋边缘态，如图38(d) 所示。当时间反演对称性得到保持时，这些传播方向相反的量子自旋霍尔边缘态不会相互散射，因此在表面声信号传输方面具有潜在的应用前景。

回顾这些关于机械系统的讨论，不难发现，尽管我们想讨论系统的线性性质，但其中仍不可避免地涉及一些非线性元素，例如自应力。我们讨论的拓扑分类基于线性无耗散机械超材料，而

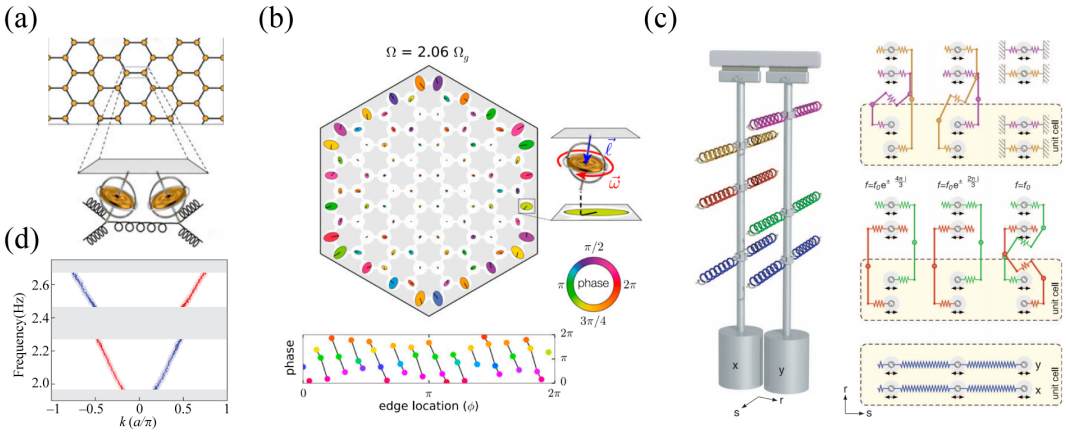

图38。 机械系统中的量子霍尔效应与量子自旋霍尔效应。（a）以陀螺仪为子晶格、通过有效弹簧耦合而成的蜂窝晶格。（b）陀螺手性边缘模的表征，包括以椭圆标示的轨道构型，以及量子霍尔边缘模的相位与位置关系。（c）两个一维摆的示意图，其中六根弹簧分为三层。右侧三个面板分别展示三层中的耦合。（d）螺旋边缘态的色散。红色和蓝色曲线表示不同的极化，体现了量子自旋霍尔边缘模的螺旋特性。图示改编自：（a）和（b），文献 [425]；（c）和（d），文献 [172]

非线性和耗散在机械系统中却非常微弱。一方面，非线性和耗散给线性拓扑带来了挑战；另一方面，它们也是丰富机械系统拓扑物理学的有力工具 [159, 429, 430, 431, 432]。例如，建立耗散性和非互易耦合是进入非厄米拓扑领域的一种好方法 [433]。非线性 [434] 则是与拓扑现象相互作用的绝佳添加因素；在具有机械不稳定性和大变形的柔性机械 [435, 8, 436] 超材料中，这些现象很容易实现，例如屈曲型超材料、受挫超材料和可编程超材料。此外，近期一些聚焦于拓扑缺陷 [437, 378] 和非阿贝尔 [333] 拓扑的研究揭示了更多有趣的拓扑现象。

3.12. 微米和纳米尺度机械超材料

受电子和光子系统中拓扑态的启发，加之微米和纳米尺度机械超材料具有多种潜在应用，拓扑物理的概念已扩展至弹性波系统。然而，固体结构中弹性波的三种极化给其实现带来了挑战。Mousavi *et al.* 提出了一种巧妙的设计，首次在机械超材料中展示了量子自旋霍尔效应 [202]。众所周知，固体膜中的对称态和反对称态通常会相互耦合。膜的镜面对称性使这两种态彼此解耦，因此可将其视为两种赝自旋态。通过精心设计，对称性

与反对称态在 K （或 K'）点处偶然简并。图39（a）上方示意图展示了图案化膜。图39（b）计算了沿高对称线的相关体能带结构，其中在 K 点出现了四重偶然简并。仅有沿方向的赝自旋不足以实现量子自旋霍尔效应；自旋轨道耦合是必不可少的要素。如图39（a）下方所示，改性膜中镜面对称性的破缺起到了在对称态与反对称态之间产生耦合的作用，从而形成自旋轨道耦合。四重简并现已分裂为两个二重简并态，同时出现完整的带隙，如图39（c）所示。体能隙下方两条能带的自旋陈数分别为 ± 1。根据体边对应，非零自旋陈数保证了拓扑边缘态的存在。我们构建了一个由自旋陈数值相反的两种声子晶体形成的畴壁。图39（d）展示了相应的投影能带结构。可以看到，体能隙中存在两对螺旋边缘态。为证明边缘态的稳健性，我们在图39（e）中模拟了波在具有随机势的畴壁上的传播。显然，边缘态可自由传输，不发生任何反射。在这一理论提案之后，2018年，Miniaci $et\ al.$开展了实验，以验证弹性板中的量子自旋霍尔效应和拓扑保护边缘态 [210]。实验装置如图39（f）所示。

除了之前在机械超材料中实现量子自旋霍尔效应的方案外，另一种方法受到光子晶体中相关方法的启发 [207]。C_6 对称性保护了位于 Γ 点的两个二维不可约表示。考虑最低态时，这两个二维不可约表示分别对应于p和d轨道态。这两个轨道态的组合，即 $p_x \pm ip_y$ 和$d_{x^2-y^2} \pm id_{xy}$，充当赝自旋。满足 $T^2 = -1$的赝自旋-1/2态的时间反演对称性，是由玻色子的时间反演对称性与 C_6 对称性的复合构成的。通过调节结构参数， p 和 d 轨道态发生能带反转，从而导致平庸相与拓扑相之间的相变 [209, 438, 439, 389]。通过在金属板上钻制穿孔制成的样品如图40(a)左图所示。黄色线表示平庸声子晶体与拓扑声子晶体之间的畴壁。对于左侧声子晶体， p 轨道态的频率低于 d 轨道态的频率。体能隙以下两个能带的自旋陈数为 ± 1。而对于右侧声子晶体， p 和 d 轨道态的频率发生反转。自旋陈数变为零。因此，在这两个声子晶体的边界处应存在拓扑边缘态 [209]。利用拓扑边缘态的鲁棒性，设计了一种单片集成回音壁谐振器，由一条直波导和一条六边形波导组成，如图40(b)左图所示。模拟和测量得到的场分布如图40(b)右图所示。输入波高效地

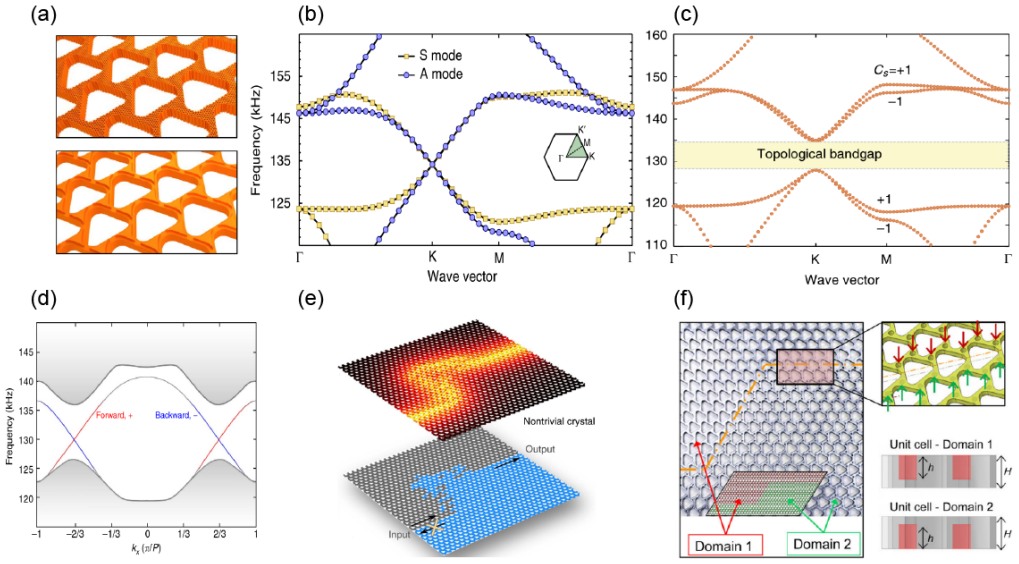

图 39. 机械超材料中的拓扑量子自旋霍尔效应。(a) 上（下）图：具有（不具有） z镜面对称性的弹性薄膜。(b) 具有 z镜面对称性的薄膜沿高对称线的体能带结构。在 K 点出现四重偶然简并。(c) 镜面对称性破缺的薄膜沿高对称线的体能带结构。在 z点出现两个二重偶然简并。(d) 由自旋陈数相反的两种弹性声子晶体构成的畴壁的投影能带结构。(e) 随机势作用下，沿一维边界传播的边缘态的鲁棒性。图 (a)-(e) 改编自参考文献 [202]。(f) 用于实现机械超材料中量子自旋霍尔效应的实验样品。图 (f) 改编自参考文献 [210]。

耦合进入回音廊谐振器，随后以全透射方式返回直波导。

为满足高频机械系统可靠性的要求，片上拓扑力学超材料已得到实现。在参考文献 [438], 中，作者制备了由独立悬置的氮化硅纳米薄膜构成的周期阵列，如图40(c) 所示。相比参考文献 [209], 中的百赫兹工作频率，本研究的工作频率高达十 MHz。为展示边缘态的赝自旋依赖传播，研究人员制备了赝自旋滤波样品，如图40(d) 所示。弹性波从底部端口注入，由于赝自旋-动量锁定特性，只有输出 1 和输出 3 通道允许波传播，而输出 2 通道则被禁止。在输出 1 至输出 3 通道中测得的场分布如图40(e) 所示，证实了这一结论。近期，拓扑量子自旋霍尔效应也已在表面声波 [439]中实现。

近年来，轨道自由度已被引入，用于研究纳米机械拓扑超材料 [389]。纳米机械超材料的晶胞展示于图40(f) 的左图中。辅助自由度为调制弹性波带来了新的优势。例如，绝热相位

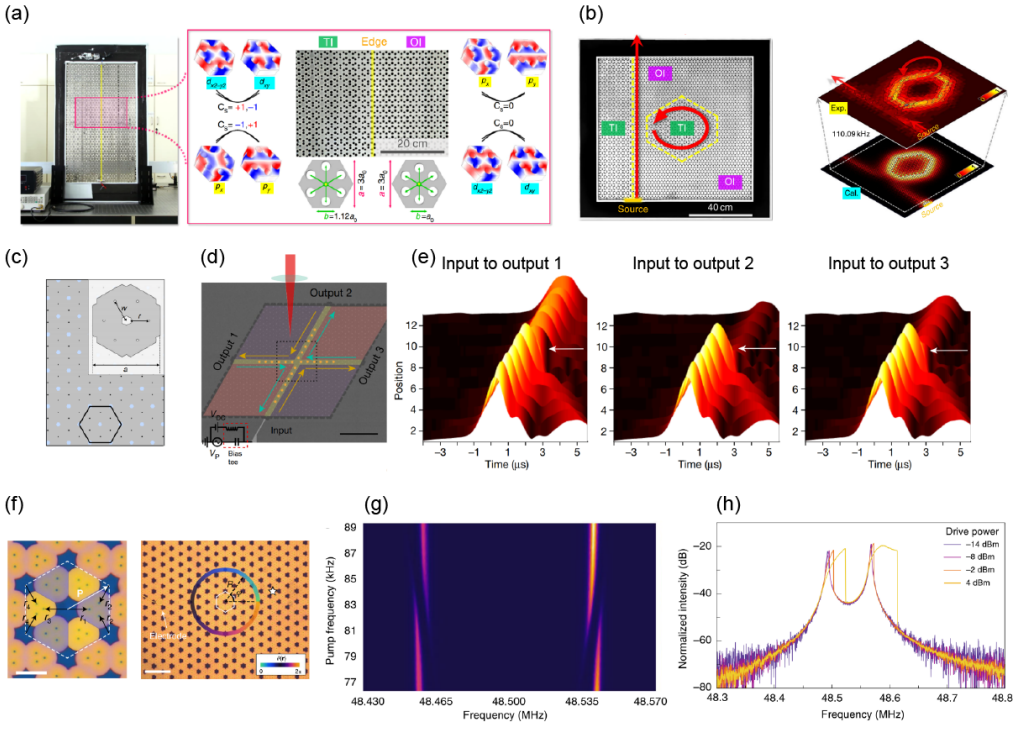

图40. 通过以下对象的能带反转实现的弹性量子自旋霍尔效应： p与 d 轨道态，分别处于毫米尺度（(a)、(b)）和纳米尺度（(c)-(h)）。图(a)-(b)改编自参考文献 [209]。图(c)-(e)改编自参考文献 [438]。图(f)-(h)改编自参考文献 [389]。

不同拓扑边缘态之间的转变可在不闭合体能带隙的情况下通过实验实现；相比之下，在固定轨道的情况下则无法实现。除一维边缘态外，在参数随空间变化的纳米机械超材料中还创造了零维涡旋态（图40(f) 的右图）。在样品中还明显观察到了二阶（图40(g)）和三阶（图40(h)）非线性。

在上述关于拓扑力学超材料的研究中，轨道态作为一种自由度已得到研究。谷是另一种自由度，可为机械波提供额外的操控方式。Yan *et al.* [441]首次实现了弹性波的谷拓扑绝缘体。微加工弹性超材料如图41(a)所示，它由排列成六角晶格的三角形柱构成，柱体位于硅板上。硅结构中传播的弹性波可用兰姆波描述，并受到周期性柱体的调制。通过调节三角形柱的旋转角度，可产生不同的谷相。实验观测到了不同谷相边界上边缘态的存在及其稳健性。有趣的是，硅芯片上弹性波的能量分配可通过不同通道之间的夹角进行调节。图41(b)展示了一种由交替排列的不同谷相构成的四通道（标记为 L、R、D 和 U）器件。角度

通道 L 和 D 之间的夹角为 α，通道 R 和 U 之间的夹角为 β。图41(b)中的插图展示了四个通道交点附近的放大图。投影边缘态色散表明，通道 L、D 和 U 中具有正群速度的边缘态锁定于 K 谷，而通道 R 中的边缘态则锁定于 K' 谷。由于谷间散射可以忽略，弹性波从通道 L 入射后，只能进入通道 D 和 U，无法进入通道 R。图 $\alpha = \beta = 60°$ 中测得了41(b)所示的场分布。乍看之下，由于通道 L 和 U 之间的夹角比通道 L 和 D 之间的夹角更平缓，波似乎更容易转向通道 U，而不是通道 D。然而，出乎意料的是，通道 D 中测得的波能量远大于通道 U，这是因为通道 L 与 D 之间的耦合强于通道 L 与 U 之间的耦合。尽管波无法透射进入通道 R，但该通道在调控通道 D 和 U 的透射率方面发挥着重要作用。对于固定的通道 L、D 和 U，随着 β增大，通道 D 和 U 的透射率分别可由 1 变为 0、由 0 变为 1，如图41(c)所示。这种反常分流为控制弹性波传播提供了便捷途径。最近，Ren 等人利用光机械系统将弹性谷霍尔效应的工作频率提高到了数百 MHz，这或可应用于构建具有稳健拓扑波导的片上声子线路。

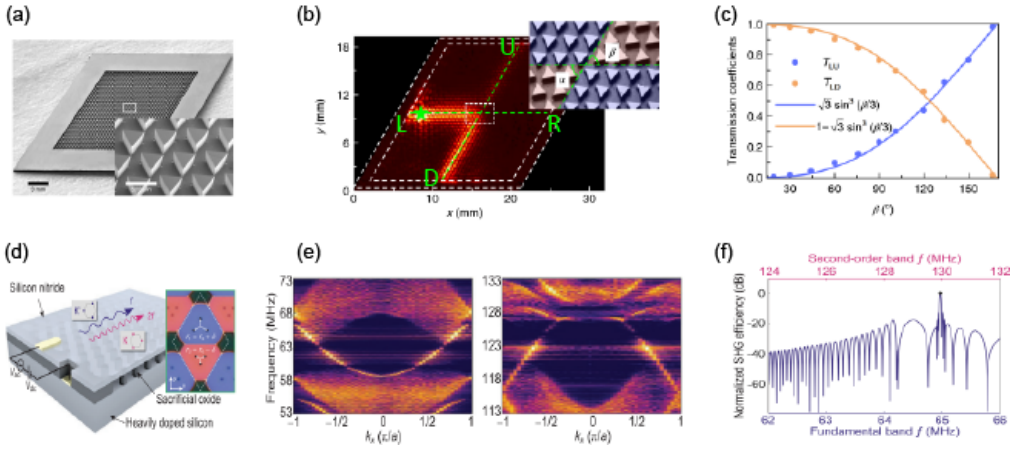

图 41. 片上微米级谷拓扑绝缘体 (a) 及异常分流 (b, c)。(a)–(c) 图改编自参考文献 [441]。用于实现双体能带隙 (d, e) 和增强二次谐波非线性 (f) 的谷拓扑绝缘体纳米机电结构。(d)–(f) 图改编自参考文献 [443]。

此前许多关于机械超材料中谷拓扑绝缘体的研究都聚焦于单个体能带隙。参考文献 [443] 通过实验展示了双体能带隙中的谷霍尔效应。纳米机电样品如图41(d)所示。在 62 MHz 和 122 MHz 附近存在两个完整的体能带隙。测得的这两个带隙的投影边缘态色散关系见图41(e)。清晰地观测到了反向传播的螺旋边缘态。

由于纳米机电系统具有强机械非线性，通过有意设计结构以满足理想的相位匹配条件，对二次谐波非线性过程进行了研究，从而实现了较高的二次谐波产生效率，如图41(f)所示。谷自旋霍尔效应也可以在简单的六角晶格结构中实现，其晶胞由金属板上自由孔与固定孔交替排列构成，这些孔位于一个较小六边形的顶点处 [444]。

以上讨论的无能隙螺旋边缘态研究，均位于拓扑性质不同的两种机械超材料之间的畴壁上。由此自然引出一个问题：如何在单一材料的边界处实现无能隙螺旋边缘态?单一材料中众所周知的边缘态，是石墨烯锯齿形边界上的边缘态。然而，这些边缘态是平带，而非螺旋态。Xi *et al.* 报告了在纳米机械石墨烯的单一锯齿形边界上存在螺旋边缘态 [445]。这是通过调节边缘的边界现场势实现的。样品及边缘的放大区域如图42(a)所示。对于特定的边缘参数，模拟和测量得到的边缘态色散证实了无能隙螺旋边缘态的存在，如图42(b)所示。由于赝自旋-动量锁定，边缘态可以穿过 $\pi/3$ 急弯而不发生反向散射。三角形样品的光学显微镜图像如图42(c)所示。这项工作的另一优势是其工作频率较高，最高可达 60MHz，这可能在弹性器件中具有潜在应用。

最近，有人提出了一种新方案，可在无需精细调制边界势的情况下，在单一边界上实现弹性波拓扑绝缘体 [446]。晶胞采用双层结构，每层均由板上的方形块组成，层间耦合通过四根倾斜柱引入。两层提供赝自旋自由度，而手性柱诱导自旋轨道耦合。除面外极化外，面内极化对于描述该系统的性质也不可或缺。非零的自旋陈数保护了自由边界和固定边界处无能隙螺旋边缘态的存在。样品的构型如图42（d）所示。除了具有特定层间耦合手性的单个弹性超材料边界处的边缘态外，不同拓扑系统之间边界处的边缘态也为操控波传播提供了一种途径。逆时针和顺时针的手性交错层耦合决定了系统不同的拓扑性质。样品及其对应示意图如图42（e）所示。入射波从端口1输入，并将传输至其他端口。端口2至4的透射率模拟结果如图42（f）所示。由于自旋-动量锁定特性，端口2不允许透射，而端口3和4的透射率可通过结构高度灵活调节。

局限在边界区域的边缘态限制了表面声波与叉指换能器之间的高效耦合。受声学异质结构中拓扑谷锁定波导态这一理念的启发 [191], Wang *et al.* 实现了

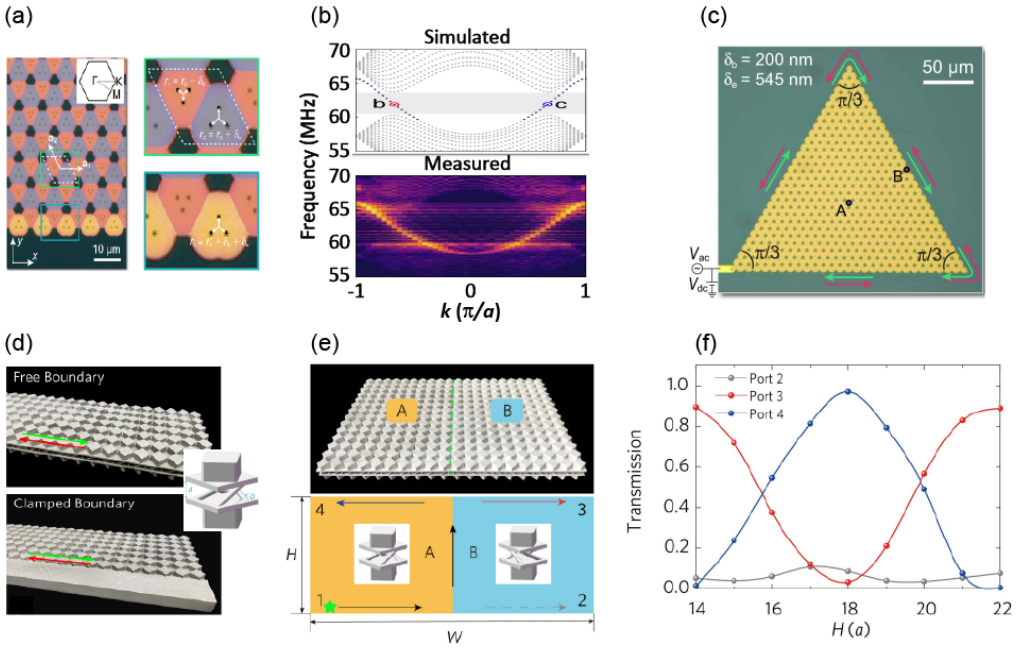

图42。（a）-（c）通过调节边界势，观测有带隙纳米机械石墨烯中的手性边缘态。（a）纳米机械石墨烯样品的光学显微镜图像。（b）模拟和测得的无带隙边缘态色散。（c）用于边缘态传播的三角形样品。（a）-（c）改编自参考文献 [445]。（d）-（f）未调制边界势时的手性边缘态。（d）上（下）图：具有自由（固定）边界的双层弹性超材料照片。插图：该结构的晶胞。（e）由具有相反手性层间耦合的两个结构组成的样品照片。样品的高度和宽度分别为 H 和 W。（f）频率为 26.75 kHz 时，不同 H 下输出端口 2-4 的透射率。（d）-（f）改编自参考文献 [446]。

压电片上芯片弹性超材料中的扩展型拓扑谷锁定表面声波 [447]，能够与宽带叉指换能器高效匹配。这有望应用于具有高吞吐量和高能量容量的表面声波集成电路。

前人关于边缘态拓扑性质的研究基于电极化。近年来，量子化极化已从偶极矩推广至高阶多极矩 [264]。高阶拓扑的概念及其扩展的体边对应，极大地拓展了传统拓扑材料的范畴。弹性超材料为展现高阶拓扑提供了灵活的平台。以零维角态为特征的四极矩拓扑绝缘体，首次在声子晶体中得到观测 [34]。除了受高阶多极矩保护的角态之外，还存在另一类以非平庸体极化为特征的角态 [298]。关于高阶拓扑的内容将在后续章节中介绍。

3.13. 非厄米拓扑声子系统

非厄米系统的拓扑性质受到了广泛关注 [448]。与厄米系统不同，非厄米系统具有复谱，因此支持更加丰富的拓扑结构。例外点是非厄米系统所特有的一个例子，其拓扑性质已在耦合少模系统中得到广泛研究 [449]。本文将主要关注能带结构的拓扑性质。正如前一节所述，非厄米系统可以支持点隙和线隙。声子超材料是探索这些新概念的可行且灵活的平台，既有助于加深对物理学基础问题的理解，也提供了潜在的应用前景。关于声子系统中非厄米能带拓扑的现有研究可分为三类。第一类涉及线隙拓扑。向拓扑声子超材料中加入增益与损耗。增益/损耗足够小，因此不会改变系统的线隙拓扑。然而，这些增益/损耗会改变体态或拓扑边缘态的输运性质和散射特性。第二类同样涉及线隙拓扑。在此，增益/损耗会引发拓扑相变。仅通过向拓扑平庸系统中加入增益与损耗，就可以获得拓扑非平庸态。第三类涉及点隙拓扑。非对称耦合可以在不同的声学系统中实现。研究了著名的非厄米趋肤效应。

第一类：一个例子是利用增益与损耗来放大或衰减谷拓扑态。该系统是声学氮化硼，增益与损耗分别交替分布在两个子晶格上 [450]。声学氮化硼的晶胞如图43 (a) 所示，由圆柱 A 和 B 组成。A 和 B 的半径不同，因此六重旋转对称性被打破。在没有增益与损耗时，该系统在高对称动量点 K 和K'处支持谷态，这些点也是拓扑带隙的极值位置。谷态分为两种，称为谷 K_1 和谷 K_2 ，其拓扑荷 $+1$ 和 -1分别不同，如图43(b) 中的相位所示。它们的场振幅也不同，其中谷 K_1主要分布在圆柱 A 上，而谷 K_2 主要分布在圆柱 B 上。通过向圆柱 A 和 B 添加增益/损耗引入较小的非厄米调制时，系统的线隙拓扑不会改变，谷态的拓扑性质得以保留。然而，非厄米调制会显著改变系统的输运性质。非厄米调制由γ调节，其表示圆柱 A 上的增益（损耗），负值（正值）对应增益（损耗）。图43(c) 显示了手性源激发的谷态场振幅。当 $\gamma < 0$ 时，这些K_1 态会被放大；当 $\gamma > 0$ 时，这些 K_2 态会被放大。除了体态外，两个具有不同谷陈数的声学氮化硼系统之间的谷边缘态也可以被放大或衰减。

另一个例子是利用非厄米拓扑边缘态实现非对称吸收器。该系统是梳状声学局域共振

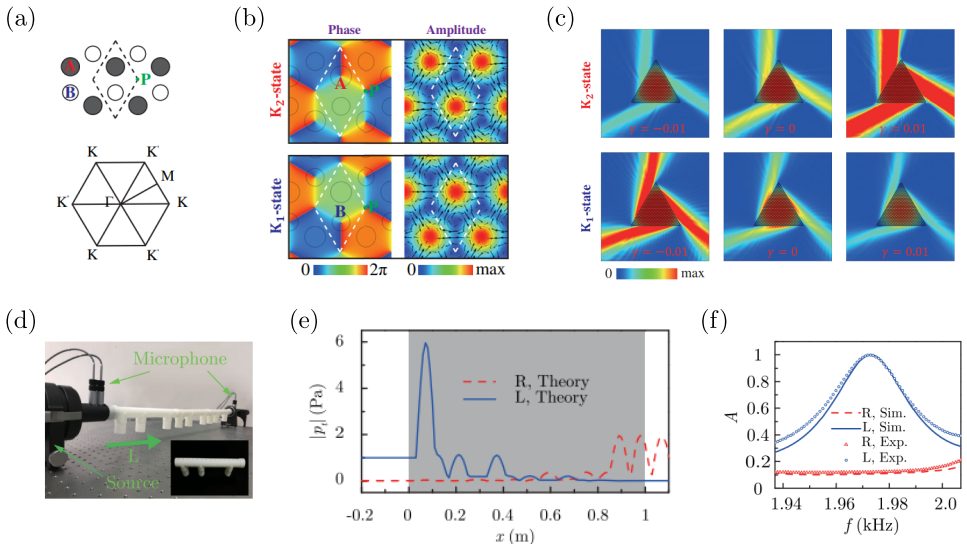

图 43. 第一类非厄米拓扑：声子超材料中的非厄米能带。(a) 上图为空气中的声学氮化硼，由 A、B 圆柱组成。下图为对应的第一布里渊区。(b) 谷态的相位和振幅分布。P 表示具有 C_3 对称性的位置。(c) 由拓扑荷为 $m = 1$ 和$m = -1$的手性源分别激发的谷态场分布。图(a)–(c)改编自 [450]。 (d) 具有 Aubry–Andre–Harper 类调制的梳状声学局域共振结构样品，其拓扑边缘态分布见(e)，声吸收见(f)。图(d)–(f)改编自 [64]。

结构 [64], ，其中谐振器的位置按照 Aubry-Andre-Harper 公式进行调制，如图 43(d) 所示。该系统可以理解为由远场耦合的局域谐振器，因此是研究开放系统中拓扑态的理想平台。当谐振器的位置按照 Aubry-Andre-Harper 公式进行调制时，系统会在带隙中支持非对称拓扑边缘态。与封闭系统不同，这里的拓扑边缘态与环境存在内在联系。我们可以从左侧或右侧入射平面波，以研究系统的散射特性。在没有增益与损耗的情况下，平面波可以激发拓扑边缘态。当拓扑边缘态达到稳态时，若频率位于带隙中，所有波都会发生反射。当以临界值的损耗引入谐振器后，拓扑边缘态会吸收所有波，且不发生反射。从图 43(e) 可以看出，系统仅在特定频率下于左侧支持拓扑边缘态。左侧入射波的反射率为零，右侧入射波的反射率为一。因此，它可用于实现图 43(f) 所示的拓扑保护的非对称吸收器。

非厄米调制还可用于调节二阶拓扑绝缘体中拓扑角态的本征值。拓扑角态可以被调节为源状或汇状 [309]。通过在拓扑腔上设计非厄米特性，可实现非厄米拓扑回音廊，其中

可以获得手性 [188]。

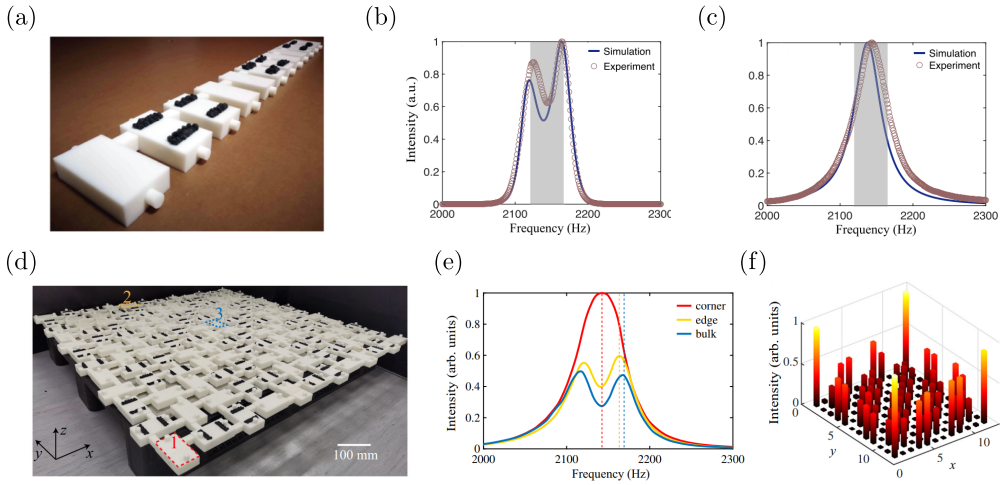

图 44. 第二类非厄米拓扑：完全由增益与损耗诱导的拓扑绝缘体。(a) 具有空间分布式损耗的耦合声学谐振器样品。(b) (a) 的实测体能谱。(c) (a) 的实测边缘谱。图(a)–(c)改编自 [451]。(d) 具有空间分布式损耗的声学二阶拓扑绝缘体样品。(e) (d) 的实测体谱、边缘谱和角谱。(f) 角模的实测场分布。图(d)–(f)改编自 [37]。

第二类：在这一类中，仅通过增益与损耗即可获得拓扑非平庸相 [451, 37]。图 44（a）展示了由耦合声学谐振器组成的一维系统。相邻谐振器之间的耦合相同。在没有增益与损耗的情况下，只有一个通带。当引入损耗后，如图 44（a）所示，该系统二聚化为Su-Schrieffer-Heeger类模型，但属于非厄米版本。图 44（b）中测得的体能谱证明了这一点，其中存在一个带隙。重要的是，空间分布式损耗使边界处两个谐振器之间的有效耦合变弱。该系统属于拓扑非平庸相，因此支持带隙中的拓扑边缘态，这一点已由图 44（c）中测得的边界谱得到证明。在声学系统中，也已有关于由增益或损耗诱导的二阶拓扑绝缘体的研究 [37]。图 44（d）展示了二维样品。与一维样品类似，这里的相邻谐振器之间具有相同幅度的耦合。在没有增益与损耗的情况下，只有一个通带。当引入损耗后，会打开一个带隙，并支持有隙边缘态和拓扑角态，如图 44（e）所示。拓扑角态的场局域于四个角处，如图 44（f）所示。

第三类：此类具有源于点隙拓扑的非厄米趋肤效应。实现非厄米趋肤效应的一个重要步骤，是实现如图所示的非对称耦合。45(a)。声子超材料是研究非厄米趋肤效应的理想平台，因为耦合强度易于设计。例如，Brandenbourger *et al*实现了一种机器人机械超材料中的非厄米趋肤效应，其中局部控制回路

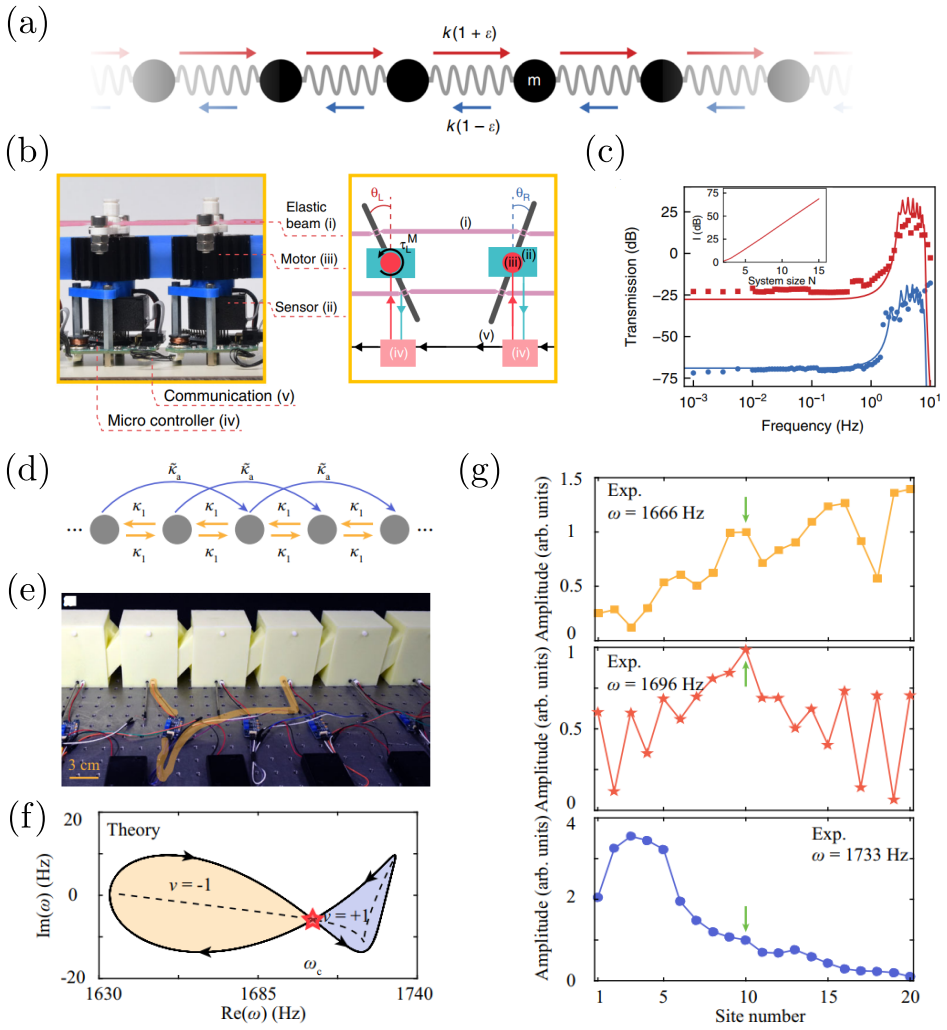

图 45. 第三类非厄米拓扑：机械超材料（a）–（c）和声学超材料（d）–（f）中的非厄米趋肤效应。（a）具有非对称耦合的晶格模型。（b）具有最近邻非对称耦合的机器人超材料晶胞。（c）在超材料左侧（红色方块）或右侧（蓝色圆点）边缘激励时测得的透射率。图（a）–（c）采用自 [452]。（d）具有最近邻非对称耦合和次近邻耦合的晶格模型。（e）声学超材料样品。（f）具有扭曲绕数的复谱。（g）在中间位置激励时测得的场分布。图（d）–（g）采用自 [453]。

用于打破耦合的互易性 [452]。晶胞如图45(b)所示。传感器测量机械马达的振荡，并通过微控制器向转子提供反馈力。由于非厄米趋肤效应，无论左侧激励还是右侧激励，场都局域在右侧，如图45(c)所示。Zhang *et al*研究了声学超材料中的非厄米趋肤效应 [453]。他们研究了一个更复杂的情形，其中也考虑了次近邻耦合，如图45(d)所示。图45(e)展示了一个样品。这里的非对称耦合

由定向声学放大器实现。麦克风测量腔体中的声信号，并将其放大，以激发下一个最近邻腔体。与最近邻非对称耦合不同，这里的系统谱在复平面上支持扭曲绕数，如图45(f) 所示。在开放边界条件下，$\nu = -1$ 部分累积于右侧，而 $\nu = +1$ 部分累积于左侧。图45(g) 展示了在中间位点激发时的场测量结果，证实了这一点。其他研究也探讨了非厄米趋肤效应，其中的非对称耦合是通过在耦合环形谐振器中构造非厄米空间分布 [454, 455], 机械超材料中的压电元件 [456, 457] 以及拓扑活性材料中的非厄米空间分布 [129, 459]引入的。主动机械超材料中的非厄米体边对应也已得到研究 [460]。

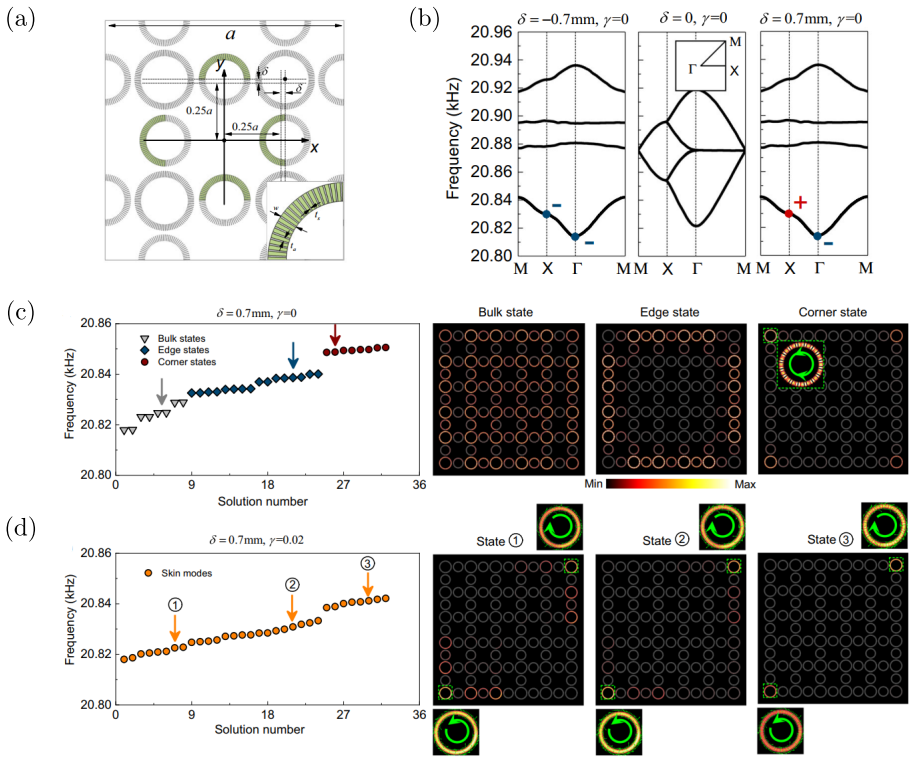

图 46。具有非厄米趋肤效应的非厄米高阶拓扑。(a) 声学超材料的晶胞，由四个位点环组成，并通过连接环彼此耦合。(b) 对厄米声学超材料计算得到的能带结构，其中 $\delta = -0.7$ mm、0、0.7 mm。(c) 具有开放边界条件的盒状声学超材料（处于厄米区域）的谱，x 和 y 两个方向均为开放边界。图中展示了相应的体态、边缘态和角态声学波函数。(d) 与 (c) 相同，但加入了损耗。图片改编自 [454]。

近年来，也有研究探讨了具有非厄米趋肤效应的非厄米高阶拓扑 [454]。图46(a) 展示了晶胞。通过对连接环中的损耗进行设计

，实现了自旋极化非对称耦合。即使在厄米情形下，这种模型也已支持拓扑非平庸态。系统的能带结构如图46(b)所示。随着二聚化参数 δ的调节，第二能带与第三能带之间的带隙闭合并重新打开，系统经历了从普通绝缘体到无能隙态，最终到二阶拓扑绝缘体的相变。图46(c)中有限结构的谱证实了二阶拓扑相。只有角态局域在角上。然而，引入损耗后，如图46(d)所示，所有态都局域在角上。这种局域化源于非厄米趋肤效应。Wang $et\ al$在主动机械晶格中实现了离域拓扑角模 [461, 462]。此外，主动超材料中还研究了二阶非厄米皮肤效应；在这种效应下，只有 $\mathcal{O}(L)$模局域在角上，而体态仍然是扩展态 [459]。

4. 专题

本文回顾了与拓扑物理相关的一些专题，包括赝磁场、合成维度、声学 Floquet 拓扑绝缘体、声学异质结构中的体输运、拓扑泵浦、拓扑活性物质、声学斯格明子、扭转声子双层以及分形拓扑声学超材料。

4.1. 赝磁场

赝磁场源自类石墨烯材料的应变，为研究与磁场相关的现象提供了很好的工具，尤其适用于不与真实磁场相互作用的玻色子。实现赝磁场的核心是通过调节系统参数来移动狄拉克点，如图47（a）所示。无应变时，类石墨烯结构支持有效的狄拉克哈密顿量 $H = v_D\left(k_x\sigma_x + k_y\sigma_y\right)$，其位于布里渊区角点 K 或 K'。对模型施加应变后，狄拉克点的动量$\mathbf{k} = \left(k_x,\ k_y\right)$移动了$\mathbf{k} \to \mathbf{k} + \delta\mathbf{k}$ 其中$\delta\mathbf{k}$ 等效于有效矢势$\mathbf{A}$。通过设计空间依赖矢势，可以获得赝磁场。

人们提出了多种在声子超材料中实现赝磁场的方法。Yang 提出，可通过对声学蜂窝晶格施加三轴应变，在声学结构中实现赝磁场，如图 47(b) [464]所示。在他们的方案中，晶格位点偏离原始位置，并通过长度适当的耦合波导连接起来。由此可获得强均匀赝磁场。Abbaszadeh $et\ al$提出对机械石墨烯的局部材料刚度进行图案化处理 [图 47(c)]，以实现赝磁场 [465]。该系统沿 x 方向均匀，沿 y 方向呈梯度变化。由此可获得均匀赝磁场，以控制

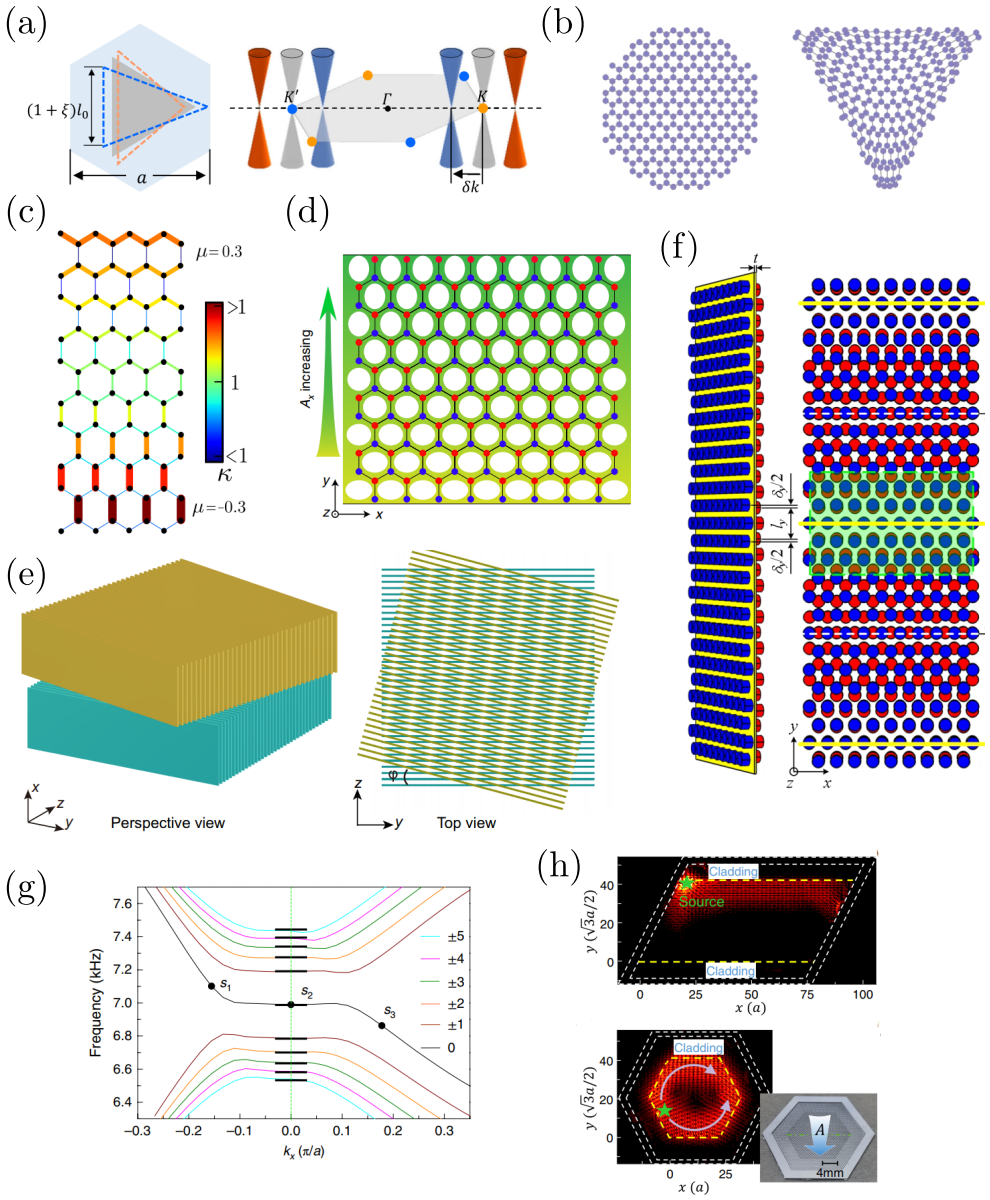

图 47. 声子超材料中的赝规范场。(a) 一个晶胞内三角形散射体的形状变形及其对狄拉克锥位移 δk 的影响。(b) 施加三轴应变前后声学晶格的示意图。(c) 局部材料刚度的图案化分布，由此在机械超材料中产生恒定磁场。(d) 声学超材料中散射体形状变形产生的赝磁场。(e) 扭转双层声学超材料产生的规范场。(f) 莫尔声子晶格产生的赝磁场。(g) (d) 中狄拉克频率附近的谱。粗线标示预测的朗道能级。(h) (a) 中赝磁场作用下测得的弹性边缘态。图片改编自[463, 464, 465, 427, 466, 467]

超材料中声音的态密度和横向空间限制。Wen *etal.* 从理论上提出并通过实验实现了在声学石墨烯中对散射体进行单轴变形所产生的赝磁场 [图 47(d)] [427]. Yan *etal.* 从理论上提出并通过实验实现了在芯片弹性系统中通过变形散射体产生的赝磁场 [图 47(a)] [463]. 引入赝磁场的其他方法包括图 47(e) [466]所示的扭转双层声学超材料，以及图 47(f) [467]所示的莫尔声子石墨烯。在狄拉克锥处，准粒子具有线性色散。在均匀赝磁场作用下，它们的行为与处于磁场中的石墨烯内电子相同，支持不等间隔的朗道能级。图 47(g) 展示了一个标出朗道能级的示例。在朗道能级之间存在拓扑边缘态。图 47(h) 展示了在芯片弹性系统中测得的弹性边缘态。对于固定的谷，边缘态沿一个方向传播。此外，赝磁场也已在三维系统中得到研究，其中规范场由外尔点的移动所诱导 [236]。在赝磁场作用下，可以从声学外尔半金属中获得手性声子。

4.2. 合成维度

拓扑态在不同维度的系统中通常表现出不同的行为。然而，高维系统通常难以通过实验实现。合成维度为在低维系统中研究高维拓扑态提供了一种途径。甚至可以通过合成方法研究维度高于三维的系统。系统的内部自由度（频率或角动量）或系统的参数 [468, 469, 470, 471]都可以用来构造合成维度。

在声子超材料领域，大多数研究将参数作为额外维度。例如，Zhu $et\ al$ 从理论上提出并通过实验实现了声学局域共振超材料中的非对称拓扑边缘态 [64]。局域共振器之间的距离按照 Aubry-Andre-Harper 公式 $L_n = L + \delta L\cos(2\pi bn + \phi)$进行调制，其中 b 是一个有理数， ϕ 是调制相位。虽然该系统是一维的，但其拓扑边缘态由陈数描述；陈数是二维系统的拓扑不变量（一个维度来自系统的空间，另一个维度则是由调制相位构成的合成维度）。在一维晶格模型的位点势或最近邻耦合上加入 Aubry-Andre-Harper 类调制，也能获得类似的拓扑态。Chen $et\ al$ 研究了一个二维系统 [60], 中的四维拓扑相，其中每个方向都是带有位点调制的耦合声学谐振器。该系统的本征态可以视为两个相互独立的 Aubry-Andre-Harper 模型的本征态的乘积态。研究还探讨了拓扑角态以及体连续谱中的拓扑角态。Wang $et\ al$ 通过研究三维 $Z \times Z_2$ 拓扑态，

一个二维系统，其中一个方向是 Su-Schrieffer-Heeger 模型，另一个方向是耦合受到调制的 Aubry-Andre-Harper 模型 [472]。该 b 也可以设为无理数。在这种情况下，它对应于准晶。两个研究团队已证明，准晶也能支持拓扑边缘态 [473, 474]。此外，借助合成维度测量到了著名的 Hofstadter 蝴蝶谱 [475]。其他研究则探讨了合成维度中的 II 型外尔点和 Weyl 异常环 [476, 270]。

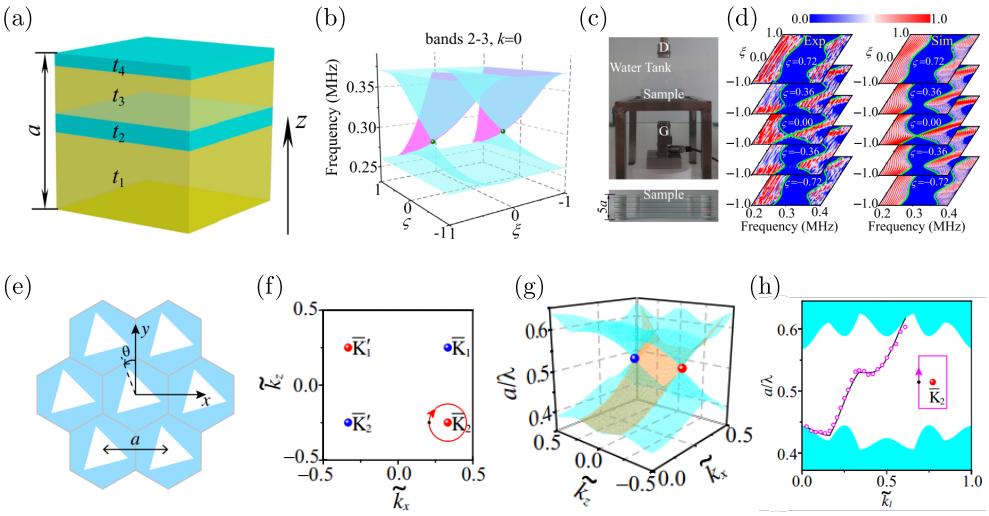

图 48. 合成 Weyl 点。(a) 由四层构成的晶胞，水（黄色）和玻璃（蓝色）沿 z 方向交替堆叠。(b) 第二能带与第三能带处简并的合成 Weyl 点。(c) 实验装置。下方：实验样品的放大图。(d) 测量和模拟的透射光谱。图(a)–(d)改编自 [477]。(e) 由规则三角形散射体（白色）构成、置于空气背景（蓝色）中的二维声学谷态超材料。θ 是额外的合成维度。(f) 合成$k_x - k_z$ 表面布里渊区中 Weyl 点的位置。(g) 绘制在表面布里渊区一半区域内的表面能带（橙色）。(h) 沿 $k_x - k_z$ 表面布里渊区（插图）中的环路测得（空心圆）和模拟（黑线）的表面能带。图(e)–(h)改编自 [478]。

这些参数可以更加通用。例如，Fan *et al*研究了具有两个额外结构参数的一维声学超材料中的 Weyl 物理 [477]。如图 48(a) 所示，晶胞由两层水和两层玻璃组成。引入了两个额外的结构参数 $\xi = (t_1 - t_3)/(t_1 + t_3)$ 和 $\varsigma = (t_2 - t_4)/(t_2 + t_4)$，用于控制系统的层厚度，并充当两个额外的合成维度。图 48(b) 展示了合成空间中的两个 Weyl 点。具有特定边界条件的费米弧以粉色标出。通过图 48(c) 所示装置进行透射测量，可以确认 Weyl 点的存在。测得的透射结果证实，第二能带和第三能带在 $\varsigma = 0.00$ 处接触，如图 48(d) 所示。实验结果与仿真结果一致。此外，Fan *et al*还

提出利用合成维度，通过将谷拓扑边缘态与合成空间中 Weyl 点周围的费米弧相连接，来理解谷拓扑 [478]。图 48(e) 展示了声学谷态超材料的结构。散射的旋转角度 θ 充当额外的合成维度。图 48(f) 和 48(g) 展示了 Weyl 点的位置。围绕一个 Weyl 点，可以获得无能隙拓扑边缘态，如图 48(h) 所示。

4.3. 声学 *Floquet* 拓扑绝缘体

拓扑绝缘体可以通过周期性驱动或弗洛凯工程获得。Fleury $et\ al$ 提出了首个切实可行的声学 Floquet 拓扑绝缘体 [479]。他们提出了一种石墨烯晶格，每个格点上都设有一个三聚体超分子。子腔的现场势被设计为随时间以不同相位周期性变化，这通过对体积模量进行周期性调制来实现。这种时间调制打破了时间反演对称性，使系统能够支持拓扑保护边缘态。此方法后来被扩展至弹性系统，并通过实验实现了首个弹性 Floquet 拓扑绝缘体 [480]。

时间调制方法对实验要求较高。还有其他方法可用于实现声学弗洛凯拓扑绝缘体。一种方法是将额外的空间维度视为时间。这种方法借鉴自光子学，其中使用螺旋波导阵列实现光子弗洛凯拓扑绝缘体 [99]。在声学领域，Peng $et\ al$ 利用耦合声学波导阵列实现了一维弗洛凯拓扑绝缘体 [481]。一维耦合波导阵列的示意图如图 49(a) 所示，该阵列由规则分布的波导和耦合块组成。这里，z 方向起到时间的作用。耦合沿 z 方向调制。特别是，该系统支持两个带隙，一个位于准能量 0 处，另一个位于准能量 π/D处。系统的拓扑性质由 $Z_0\times Z_\pi$ 拓扑不变量描述。通过设计步骤 1 和步骤 2 中的耦合，可以获得两种不同的相（0×0 和 1×1）。图 49(b) 展示了拓扑界面态沿 z方向的场演化，图 49(c) 展示了体态的场演化。这种方法也被用于研究二维声学弗洛凯拓扑绝缘体 [482]。其结构如图 49(d) 所示。沿 z 方向对耦合进行手性调制，使系统支持手性边缘态，如图 49(e) 所示。这些新颖的态不同于静态系统中通常的陈绝缘体。它被称为反常弗洛凯拓扑绝缘体，支持陈数为零的拓扑手性边缘态。他们还利用该结构实现了拓扑负折射，如图 49(f) 所示。最近，耦合声学波导还被用于实现声学弗洛凯高阶拓扑绝缘体和声学弗洛凯$\pi/2$ 模式 [483, 484]。与静态系统不同，Floquet 系统中的拓扑边界态通常具有反常的动力学演化。例如，参考文献 [483] 报道了源于 Floquet高阶拓扑的时间周期性角态。

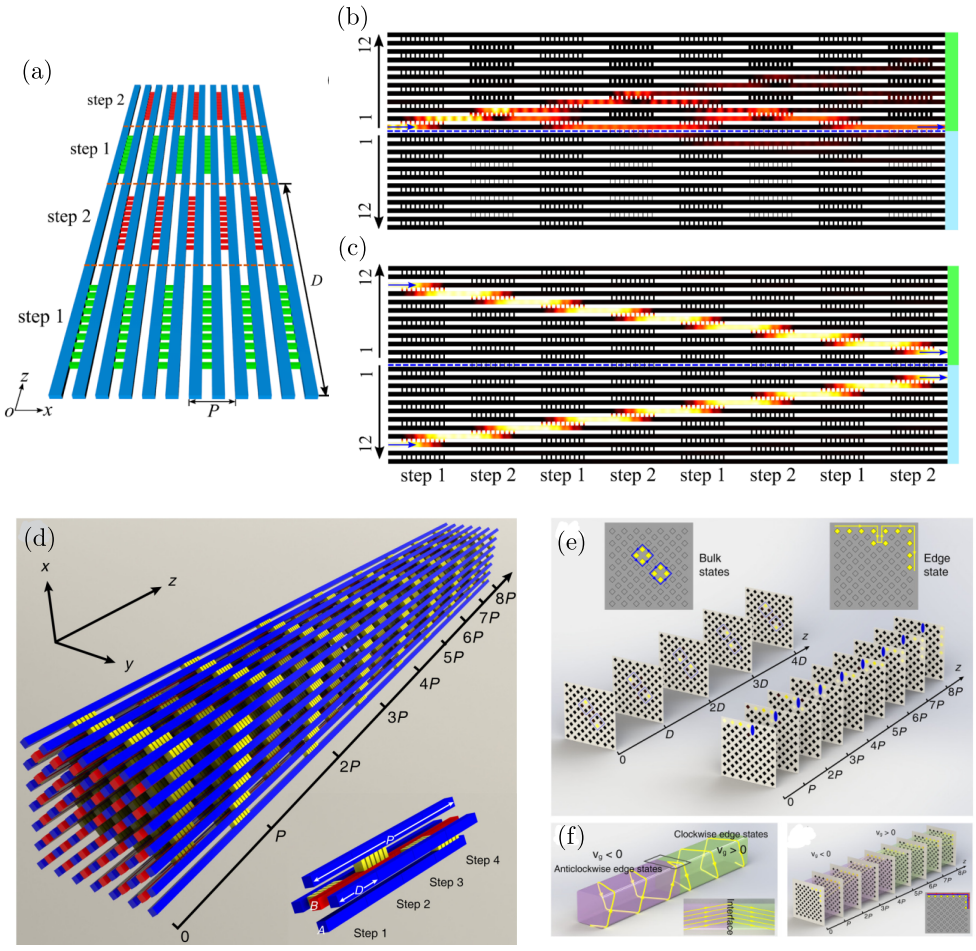

图 49. 耦合波导阵列中的声学 Floquet 拓扑绝缘体。(a) 一维耦合波导阵列示意图。(b) 拓扑界面态的场演化。(c) 体态的场演化。图(a)–(c)改编自 [481]。(d) 二维耦合波导阵列。(e) 体态和拓扑边缘态的场演化。(f) 拓扑负折射。图(d)–(f)改编自 [482]。

实现声学弗洛凯拓扑绝缘体的另一种方法是使用由散射矩阵描述的耦合环形谐振器 [94]。鉴于散射矩阵和 Floquet 算符均为酉矩阵，它们的本征方程问题是等价的。Peng *et al.* 使用声学波导实现了环形谐振器 [173]。其构型如图 50(a) 所示。该系统由位点环形谐振器构成，这些谐振器通过连接环形谐振器耦合；它们均由波导组成。右下方展示了波导的细节，该波导将声波限制在微结构中。一条波导中的波可通过近场耦合传播至邻近波导。通过设计参数，可以实现完美耦合。在这些参数下，系统能够支持拓扑边缘态，如图 50(b) 的投影能带结构所示。测得的拓扑边缘态压力振幅如图所示

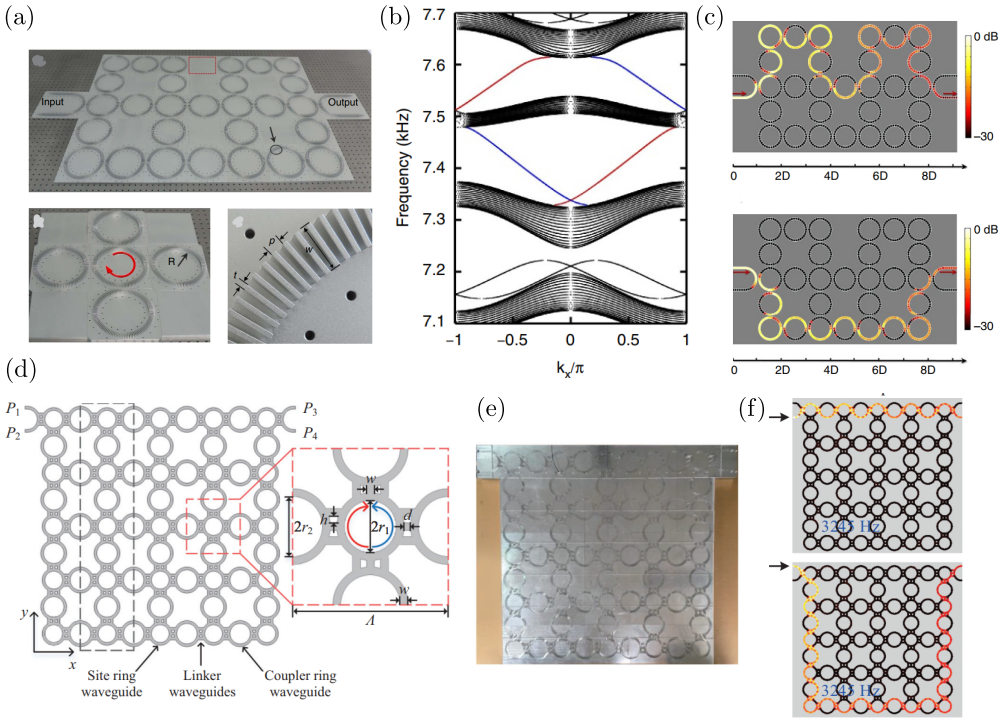

图 50. 耦合环形谐振器中的声学 Floquet 拓扑绝缘体。(a) 由 3×4 个晶胞组成的二维耦合超材料环形晶格。左下方为一个晶胞。右下方为波导细节图。(b) 投影能带结构。(c) 分别测得的自旋向上和自旋向下拓扑边缘态。图 (a)–(c) 改编自 [173]。(d) 波导网络示意图。(e) 样品照片。(f) 测得的拓扑边缘态压力幅值。图 (d)–(f) 改编自 [485]。

图 50 (c) 中的自旋向上和自旋向下激发。Wei *et al*提出了一种更简单的结构来实现声学反常弗洛凯拓扑绝缘体 [485]。示意图如图 50 (d) 所示，样品照片如图 50 (e) 所示。这里，波导由硬边界构成，两个波导之间的耦合通过连接波导实现。得益于结构的简单性，系统损耗较小。测得的拓扑边缘态压力幅值如图 50 (f) 所示。通过加入设计损耗，耦合环形谐振器也被用于研究非厄米趋肤效应 [454, 455]；通过扩展到三维系统，还被用于研究拓扑位错模 [486]。

4.4. 声学异质结构中的体输运

如第 3.1 节所述，在声子晶体的畴壁中已观测到由谷和赝自旋保护的声学拓扑边缘输运；无带隙的谷锁定和赝自旋锁定边缘态局域于一维界面，并从界面向外衰减 [174, 163, 176]。基于界面输运，可将具有无能隙体能带的声子晶体进一步嵌入畴壁

以构建异质结构并形成拓扑波导 [191, 447, 487, 488]。继承自畴壁边缘态的波导态具有无带隙色散，且不受缺陷影响。更重要的是，波导态具有很高的能量传输能力，因此更容易与现有声学器件对接。基于谷拓扑的异质结构如图 51(a) 所示，它是一种由三个畴组成的夹层结构 [191]。在六角晶格阵列中，畴 B 是由规则三角形杆构成的典型狄拉克声子晶体 [63], ，而畴 A 和 C 则是通过改变杆的朝向实现谷相的声子晶体。这种异质结构可支持谷锁定导引态；与畴壁结构中的导引态不同，这些导引态延伸至整个畴 B。由于空间范围从界面扩展到整个畴，这些波导拥有更多空间来传输能量。此外，异质结构的能量传输能力可通过调节畴 B 的宽度来改变。如图 51(b) 所示，使用不同宽度的线源（红色标记）激发拓扑谷波导态，声学导引波主要在畴 B 内传播，相关压力场几乎均匀分布。通过在波导右侧收集得到的总透射能量随畴 B 宽度增加而增大 [图 51(c)]，与畴壁结构相比展现出更灵活的应用潜力。这些异质结构还可用作多功能新型声波操控器件，例如声学分束、无反射导引和声学汇聚 [191]。对于声学汇聚，如图 51(d) 所示，由左侧的点声源激发时，拓扑谷波导态通过宽度从 21 急剧减小至 1 的阶梯状畴 B 时几乎不会发生反射。抗反射能力源于谷锁定特性，这是由于畴 B 中仅存在 K 谷所致；对畴 B 中的声场进行傅里叶变换即可证明这一点 [图 51(d) 插图]。正是拓扑波导的有限宽度使无反射汇聚成为可能，这有望助力声学增强或能量收集。这种波导方案也被证明适用于具有赝自旋的声学拓扑绝缘体 [487]。如图 51(e) 和 51(f) 所示，将具有双狄拉克色散的声学石墨烯 [205] 嵌入具有反转能带的声子晶体的畴壁中 [174], ，同样可以构建出一种拓扑异质结构，其中包含一对无带隙螺旋波导模 [图 51(g)]。螺旋波导模还获得了可调传输容量和波束准直能力，这些能力源于畴 B 宽度的可调性 [487], ，为探索声波异质结构多样化设计中的拓扑输运开辟了新途径。

4.5. 拓扑泵浦

支持单向波传输的拓扑泵浦是能带拓扑的另一个热门研究方向。Thouless 泵是一个例子，其能够实现波和粒子的量子化输运

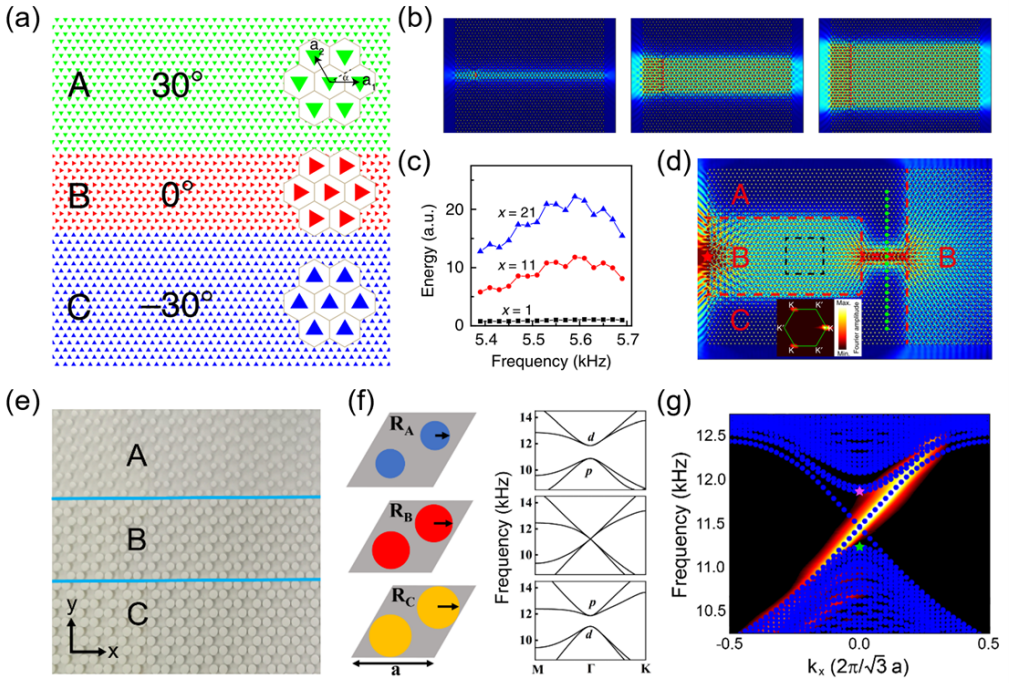

图51。 (a) 异质结构示意图（A|B_x|C），由三个声子晶体畴 A、B 和 C 组成。这里，A 和 C 畴中的声子晶体具有不同的谷相，而 B 畴中的声子晶体具有狄拉克色散。(b) 异质结构（A|B_x|C）在 5.55 kHz 频率下的模拟压力场，其中 B 畴的层数 x分别为 1、11 和 21。红线表示激励源。(c) 三种结构的透射总能量随频率的变化。(d) 异质结构中阶梯状 B 畴的模拟压力场，频率为 5.45 kHz；x 从 21 急剧变化至 1，显示出谷锁定汇聚。红色虚线标示 A、B 和 C 畴的边界。插图显示黑色虚线矩形内声场的傅里叶谱。图(a)–(d)引自 [191]。(e) 与(a)类似的异质结构照片，但 A 和 C 畴中的声子晶体具有不同的赝自旋霍尔相，而 B 畴中的声子晶体具有双狄拉克色散。(f) 左图：A、B 和 C 畴中具有相同晶格常数、但散射体半径不同的晶胞示意图。右图：相应的体能带色散。(c) 如(e)所示异质结构（A|B_9|C）的投影色散。颜色图和蓝点分别表示测量结果和模拟结果。图(e)–(g)引自 [487]。

。Long *et al.* 研究了 Aubry-Andre-Harper 模型声学模拟中的声学Thouless泵浦 [490]。该模型将额外的一个空间维度视为时间，并按照 Aubry-Andre-Harper 公式调制系统的位点势。对于局域体波包，在一个泵浦周期内，波包中心的位置将改变一个量子化的晶胞。最近，人们提出并在耦合声学波导阵列中实现了非阿贝尔Thouless泵浦：当两个具有相同基点的演化回路交换顺序时，泵浦效果会有所不同 [491]。

另一种拓扑泵浦涉及将波绝热泵浦

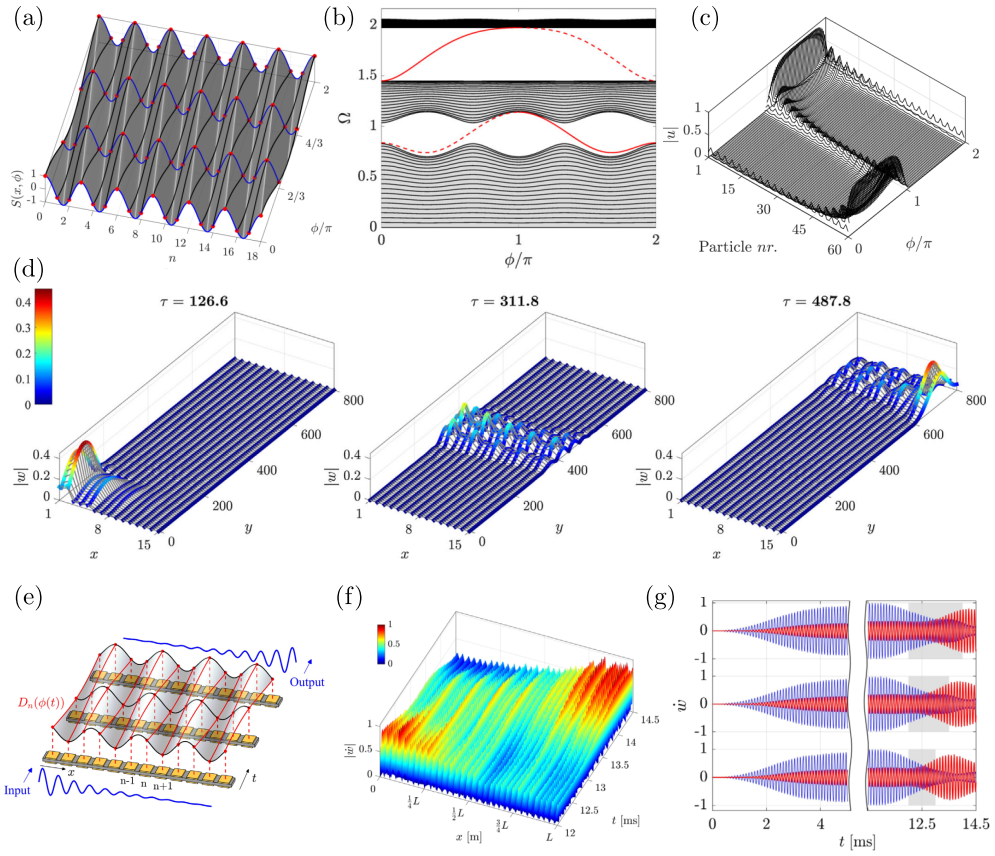

图 52. 声学拓扑泵浦。(a) 曲面 $S(x,\ \phi)\ = \cos(2\pi\tau x + \phi)$ 通过在 $x_n\ =\ n$ 处采样生成刚度常数。(b) 有限系统的能带结构随 ϕ 的变化。(c) 拓扑边缘态从右向左的绝热泵浦。(d) 拓扑边缘态的时间泵浦。(a)–(d) 图改编自 [492]。(e) 输入与输出机电梁示意图。(f) 测得的拓扑边缘态时间泵浦。(g) 调制窗口（灰色阴影区域）不同时，梁左侧（蓝色）和右侧（红色）边界处的信号。(e)–(g) 图改编自 [493]。

从一种拓扑边缘态转移到另一种拓扑边缘态 [494]。这类现象最初在光波导阵列中得到研究，最近则被引入声学和力学领域。Rosa $et\ al$ 提出在空间调制弹性晶格中实现边缘态的拓扑泵浦 [492]。一维晶格的刚度由图中所示的函数进行调制。52(a)。通过改变该函数的相位，可以使一维有限结构的拓扑边缘态在带隙中移动。图 52(b) 展示了有限结构随 ϕ 变化的能带结构，其中无隙边缘态清晰可见。这些拓扑边缘态可以用相应带隙的带隙陈数来描述。这些拓扑边缘态的场分布绘于图 52(c)。对于 $0 < \phi < \pi\ (\pi < \phi < 2\pi)$，它们分别局域于右侧（左侧）边缘。他们通过模拟随时间变化的 ϕ 从 -0.25π 到 0.25π。左侧拓扑边缘态缓慢转移至体内，最终被泵浦至右侧

如图所示52(d)。Xia $et\ al$设计了一种机电波导，用于实现拓扑边缘态的时间泵浦 [493]。该系统由波导和压电贴片构成，如图52(e)所示。可实现如下形式的有效刚度调制 $D_n(\phi) = D_0[1+\alpha\cos(2\pi\theta+\phi)]$。如图52(f)所示，实验测得的拓扑边缘态时间泵浦与理论预测一致。图52(g)展示了调制窗口不同时的不同情况。在最初的12 ms内，会诱发左侧拓扑边缘态的稳态振动。调制窗口开启后，拓扑边缘态会被泵浦至右侧。已有研究采用不同的力学机制实现拓扑边缘模泵浦，例如非公度双层声学超材料 [495]，波导中的动态边界 [496]，以及两个耦合拓扑边缘态之间的朗道-齐纳跃迁 [497]。最近，研究人员利用三个耦合拓扑模式，在动态调制的纳米机械系统中实现了相干声子的绝热输运 [498]。这项工作对声子量子信息处理具有重要价值。

4.6. 拓扑活性物质

拓扑活性物质是另一个热门研究课题。人们已提出或实现了活性物质系统中的多种拓扑态，包括拓扑缺陷、拓扑保护声波和非厄米趋肤效应。活性物质的实验平台包括活性液体超材料 [499, 500, 501]，、活性向列相细胞 [502] 和机器人超材料 [452]，等。关于这一课题，有一篇很好的综述 [503]。这里我们仅讨论活性物质在实现无背向散射拓扑声方面的一些优势。众所周知，实现拓扑手性边缘模需要打破时间反演对称性。在电子系统中，这通过磁场实现。在声学中，可通过旋转流体获得有效磁场。在常规声学系统中，我们使用外部驱动来实现这一点。然而，这会给实验带来诸多困难。一方面，外部驱动通常会使系统不稳定。另一方面，旋转流体的速度难以控制，而该速度对于调节系统的带隙宽度至关重要。活性物质为解决这些问题提供了一个很好的平台 [499]。活性物质的组成单元在微观尺度上运动，因此天然会打破时间反演对称性。此外，其速度很容易调节至与声速相当的水平，从而能够获得宽频率范围的拓扑手性边缘态 [504]。

4.7. 声学斯格明子

以实空间拓扑数为特征的斯格明子已在多种系统中实现，包括螺旋磁性材料和光子系统 [505, 506, 507,508, 509]。实现斯格明子的关键之一是矢量场。声波由声场压力描述，而压力是标量，因此人们普遍认为声学系统中无法实现斯格明子。最近，Ge $et\ al$ 发现了一种新方法，利用声速作为矢量场，在声学

系统 [510]。利用仿表面声波，使声速的 z 分量与面内分量之间具有 $\pi/2$ 相位差，他们实现了呈三角晶格分布的声学斯格明子。通过控制声源的相位，可以移动这些斯格明子。他们还证明，这些斯格明子具有抵御缺陷的鲁棒性。声学斯格明子或可用于以更稳定的方式传输信息。

4.8. 扭转声子双层

扭转电子学和扭转光子学 [511, 512, 513] 的兴起，近来激发了大量关于扭转声子双层的研究 [514, 515, 516, 517, 518, 519]。扭转声子系统的研究始于对扭转双层石墨烯的类比，旨在利用扭转这一自由度调控声子能带。例如，参考文献 [515] 研究了由两块振动板构成的扭转双层石墨烯机械类比系统，旨在寻找声子（具体而言，弯曲波）准平带对应的魔角，此时群速度趋于零。其他针对声学和力学系统的研究也追求类似目标 [514, 516, 518]。随后，研究者开始探究扭转声子系统双层结构的拓扑性质 [517, 519]，重点关注因扭转和层间耦合而产生的声子带隙。这类扭转声子双层的一项独特优势是，其层间耦合可以直接调节，因此能够实现电子对应系统无法达到的强耦合和超强耦合。特别是，参考文献 [517],中，超强层间耦合产生了非传统的高阶拓扑带隙，其具有独特的拓扑指标和层杂化角态；这类现象此前在电子扭转双层石墨烯中尚未发现。超强层间耦合还产生了较大的带隙，并在带隙附近形成近乎平坦的能带。这些研究展现了扭转声子双层中丰富的声子性质。

4.9. 分形拓扑声学超材料

超越限制拓扑物理研究的传统欧几里得几何，是该领域的前沿方向。在电子系统中，这一目标在铋薄膜的 Sierpi´nski 三角形几何中得到了部分实现；研究发现，分形几何会关闭电子拓扑 [520]。后来，研究人员在光子系统 [521, 522], 中研究了分形几何的拓扑物理，证实外侧和内侧边缘均存在拓扑边缘态，并发现与基于欧几里得几何定义的模型相比，拓扑相图发生了变化。对于声学系统，近期研究了分形几何中的拓扑态，包括陈绝缘体相 [523] 和高阶拓扑绝缘体相 [524, 525]。对于在具有合成规范磁通的声学超材料中实现的陈绝缘体相，分形几何显著压缩了拓扑相区域，但单向边缘态受到稳健迁移率隙的保护。对于高阶拓扑态，研究发现分形几何从根本上改变了高阶拓扑现象，产生了大量边缘

态和角态，其数量可与体态相媲美。事实上，研究发现，[524, 525] 边缘态和角态的数量会根据系统的分形维数随系统尺寸呈多项式增长，直接体现了分形维数在拓扑物理中的作用。

5. 潜在应用

5.1. 狄拉克类点处的声学双零折射率介质

在二维声子晶体中，狄拉克点处两条能带简并形成的狄拉克锥已得到广泛研究。实验结果表明，三维双零折射率介质可高效地使声波在三维空间中弯曲。

狄拉克锥通常存在于布里渊区边界，并受到晶格对称性的保护。在二维声子晶体中，另一类称为狄拉克类点的简并点也引起了广泛关注。它们通常出现在布里渊区中心，属于偶然简并。与狄拉克锥不同，狄拉克类点具有三重简并。狄拉克类点处声子晶体的一个重要性质是其有效质量密度和体积模量倒数的有效值均为零，这种介质称为双零折射率介质。已有研究提出了不同的声子晶体系统来实现双零折射率介质，并表明它们可用于声波的超耦合、弯曲和隐身 [526, 527, 528, 529, 205, 530]。在声学系统中实验实现狄拉克类点极具挑战性，因为这需要散射体的折射率高于周围介质——空气，而空气的折射率在空气声学中几乎是最高的。Dubois *et al* 提出了一种巧妙的方法，通过调节声波导的厚度来改变有效声速 [531]。他们通过实验表明，双零折射率介质可以将点声源弯曲成平面波。另一项研究表明，狄拉克类锥存在于两个高阶声学拓扑绝缘体的界面处 [532]。关于不同狄拉克锥的更全面讨论，参见近期的一篇综述 [533]。最近，狄拉克类点也在三维系统中得以实现 [534]。在三维系统中，狄拉克类点具有四重简并，波可以向三维空间中的任意方向弯曲。

5.2. 用于方程求解和图像处理的拓扑模拟信号处理

近年来，基于超材料的模拟信号处理因效率高、功耗低而备受关注。基于腔体的常规方法容易受到无序的影响，而无序可能改变系统的线型，导致模拟信号处理不稳定。对无序具有鲁棒性的拓扑声学态为解决这一问题提供了一种途径。
Zangeneh-Nejad *et al.* 利用类似 Su-Schrieffer-Heeger 模型的拓扑界面态求解微分方程 [535]。该方法适用于洛伦兹型传输 $H(f) = \sum_i \frac{A}{(f-f_0)+f_0/2Q}$。如果考虑输入信号

˜声源 $\tilde{g}(t) = g(t)\cos(2\pi f_0 t)$，其与输出信号 $f(t) = f(t)\cos(2\pi f_0 t)$ 的关系可通过对 $H(f)$ 进行傅里叶逆变换得到，从而得到微分方程 $f'(t) + \alpha f(t) = \beta g(t)$，其中 $\alpha = \pi f_0/Q$ 和 $\beta = 2\pi A$。因此，可以通过测量时域中的透射信号来求解微分方程。需要指出的是，这种洛伦兹谱线形并非拓扑界面模所特有，在常规缺陷模或腔模中也存在。拓扑界面模的优势在于其共振频率对无序具有鲁棒性。图 53 对比了拓扑方程求解器和平庸方程求解器的结果。拓扑方程求解器几乎不受无序影响。具有不同线型的透射，例如法诺线形 [536], ，可用于求解更复杂的微分方程。图 53(c) 和图 53(d) 展示了拓扑法诺共振和平庸法诺共振的透射谱。我们注意到，拓扑法诺共振的线型对无序具有鲁棒性。拓扑声学态还可用于图像处理。Zangeneh-Nejad *et al.* 利用声学拓扑安德森绝缘体实现了对图像的无序诱导模拟滤波 [537]。

5.3. 拓扑声能量采集与拓扑声学镊子

与常规缺陷态或波导态相比，拓扑边缘态具有抗无序的鲁棒性，因此在许多应用中具有优势。接下来，我们将介绍一些可能的应用实例。声能可以为低功耗器件自动供电，因此备受关注。鉴于拓扑声学边缘态能够增强声场，它们可用于声能采集。与常见的缺陷模或腔模相比，拓扑声学边缘态的频率更加稳定，这有利于能量采集。Fan *et al* 提出利用声学晶体中的拓扑界面态采集能量 [538]。他们将压电悬臂梁置于拓扑平庸区域与拓扑非平庸区域之间的界面处。界面处的声场增强了 66 倍，在 1 Pa 的入射声下可获得 135 mW 的最佳输出功率。Lan*et al* 提出利用局域共振拓扑超材料采集声能 [539]。与声学晶体相比，该系统的频率可调至更低，而系统的晶胞则处于亚波长区域。

拓扑声学的另一个应用方向是控制微粒，这种方法称为拓扑声学镊子。Dai *et al.* 在基于片上亥姆霍兹共振腔的一维阵列中实现了拓扑声学镊子 [540]. 一颗 20-μm 的微粒在声辐射力和声流的作用下发生旋转。Liu*et al.* 利用赝自旋拓扑边缘态控制微粒 [541]. 通过选择赝自旋向上态或赝自旋向下态，可以使微粒顺时针或逆时针旋转。此外，拓扑界面态也可用于微粒分离。Dai *et al.* 提出了一种基于 Su-Schrieffer-Heeger 模型的拓扑界面态 [542]. 通过计算流场分布和声

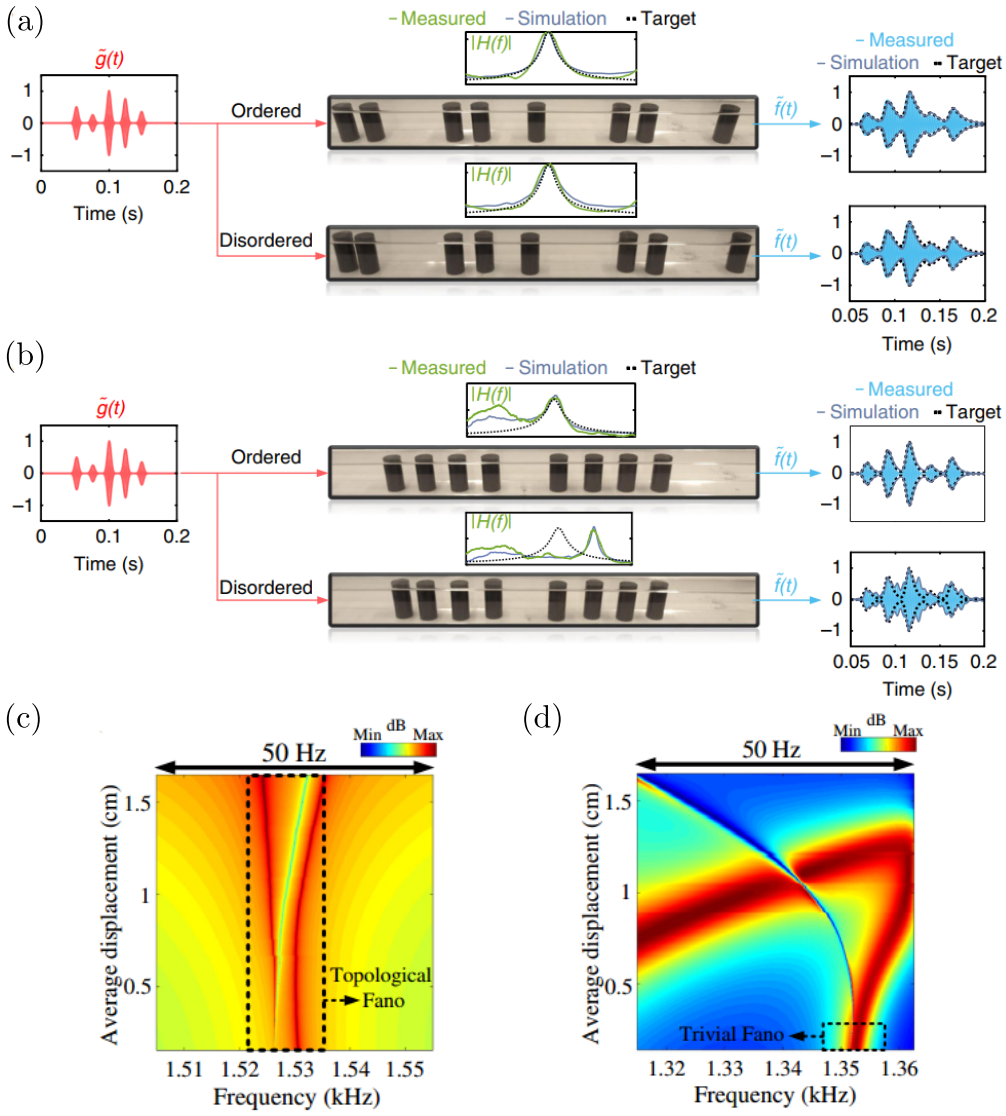

图 53. 拓扑方程求解器的数值与实验结果。(a) 有序和无序拓扑波导的结果。(b) 有序和无序平庸波导的结果。图(a)和图(b)改编自 [535]。(c) 拓扑法诺共振的透射谱随频率和无序强度变化的情况。(d) 与(c)相同，但针对平庸法诺共振。图(c)和图(d)改编自 [536]。

辐射力，他们表明，拓扑界面态可用于分离尺寸和密度相同、但压缩率不同的两个粒子。

5.4. 拓扑声学天线

拓扑边缘态，特别是谷拓扑边缘态，可用作拓扑声学天线。我们知道，谷拓扑边缘态具有动量锁定特性。在谷拓扑边缘态与自由空间的界面处，谷拓扑边缘态会沿特定方向辐射。Zhang *et al*。

在 Kagome晶格声子晶体中实现了定向声学天线 [187]。通过选择 K 谷或 K' 谷拓扑边缘态，声场可以向不同方向发射，如图 54(a) 和 54(c) 所示。图 54(b) 和 54(d) 中测得的场分布图样与模拟结果一致。图 54(e) 展示了一个应用场景，说明定向声学天线可用于抗干扰声学通信。场景中有两个声源，一个声源发射频率为 $f = 8.66$ kHz 的正弦波，另一个声源辐射宽带白噪声。测量了有无拓扑声学材料时 B 点处的声场。我们发现，使用拓扑声学材料后，可以在不受噪声影响的情况下提取目标信号，如图 54(f) 和54(g) 所示。在没有拓扑声学材料帮助的自由空间中，目标信号被噪声掩盖，如图 54(h) 和 54(i) 所示。Song *et al*设计了两种可旋转声子晶体，以实现可切换定向发射 [543]。通过将界面改为锯齿构型或扶手椅构型，可以调节发射方向。Zheng *et al*将此方法用于水下声学定位 [544]。

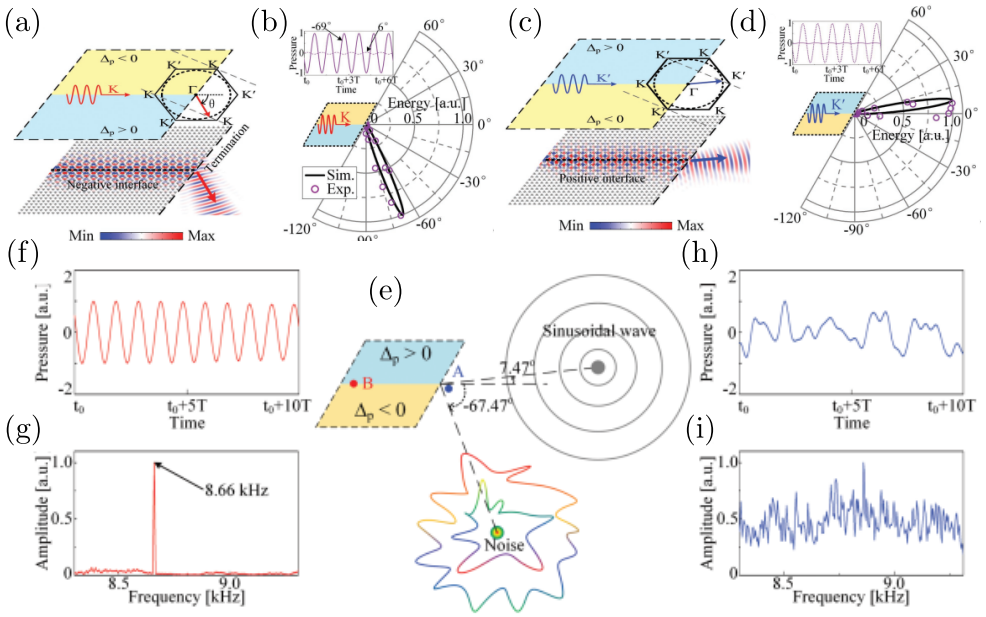

图 54. 基于谷拓扑边缘态的定向声学天线。(a) K 谷拓扑边缘态的模拟场分布和输出耦合。(b) (a) 中模拟和测得的场分布。(c) K' 谷拓扑边缘态的模拟场分布和输出耦合。(d) (c) 中模拟和测得的场分布。(e) 抗干扰声通信的实验示意图。(f) 使用拓扑声学材料时 B 点测得的时域信号，以及 (g) 对应的傅里叶变换频谱。(h) 和 (i) 与 (f) 和 (g) 类似，但未使用拓扑声学材料。图片引自 [187]。

5.5. 片上声子拓扑器件。

声子波，尤其是与电子或光子集成电路兼容的声子波，由于其群速度相对较慢、尺寸较小，在信号加载、调制或处理中发挥着重要作用。将多个独立器件组合成声子网络时，一个重要挑战是解决阻抗匹配问题。拓扑声子学中的拓扑边缘态具有抵抗无序的鲁棒性，为解决这一问题提供了平台，因此片上声子拓扑器件备受期待。人们已利用多种平台实现具有不同功能的片上声子拓扑器件，例如支持表面声波的平台、具有特定几何结构的硅芯片，以及纳米机械薄膜的晶格。Yan *et al*等人在硅芯片上制备了谷拓扑材料 [441]。基于谷拓扑边缘态，他们实现了如图55(a)所示的弯曲波导。他们还观察到了谷输运中的能量分配。Cha *et al*等人在纳米机电薄膜晶格中报道了一种赝自旋拓扑绝缘体 [438]。鉴于拓扑边缘态的传播方向由赝自旋决定，他们实现了如图55(b)所示的赝自旋滤波器。这些器件由四个拓扑性质不同的畴构成。如黄色箭头所示，输入信号传输至输出端口1和输出端口3。Zhang *et al*通过在铌酸锂上制备周期性微结构，研究了表面声波的拓扑态 [439]。通过收缩和扩张晶胞中的六个微结构，他们实现了赝自旋拓扑边缘态。基于这些赝自旋拓扑边缘态，他们实现了如图55(c)所示的表面声波弯曲波导。他们还在同一系统中实现了拓扑分束器。Ma *et al*提出了一种实现拓扑态的新力学机制 [389]。不同于以往利用谷或赝自旋自由度的工作，他们采用了辅助轨道自由度，并在纳米机械膜结构晶格中实现了这一方案。如图55(d)所示，可以实现弯曲波导。Wang *et al*基于图 [447] 所示的扩展型拓扑谷锁定表面声波实现了拓扑分束器55(e)。大多数研究聚焦于兆赫频段，而Zhang *et al*则在纳米机电系统中实现了吉赫频段的拓扑谷态 [545]。如图55(f)所示，可以实现拓扑分束器。他们还在同一系统中实现了弯曲波导。

5.6. 拓扑声子激光器。

拓扑激光器基于拓扑边界态实现激光发射，能够抵御制造缺陷和缺陷的影响，因而颇具应用前景，因为其性能将优于传统激光器 [546]。将这一概念扩展到用于声波的声学系统，即拓扑声子激光器时，增益难以获得。近期，Hu *et al*利用碳纳米管中的电热声耦合作为增益，并结合谷

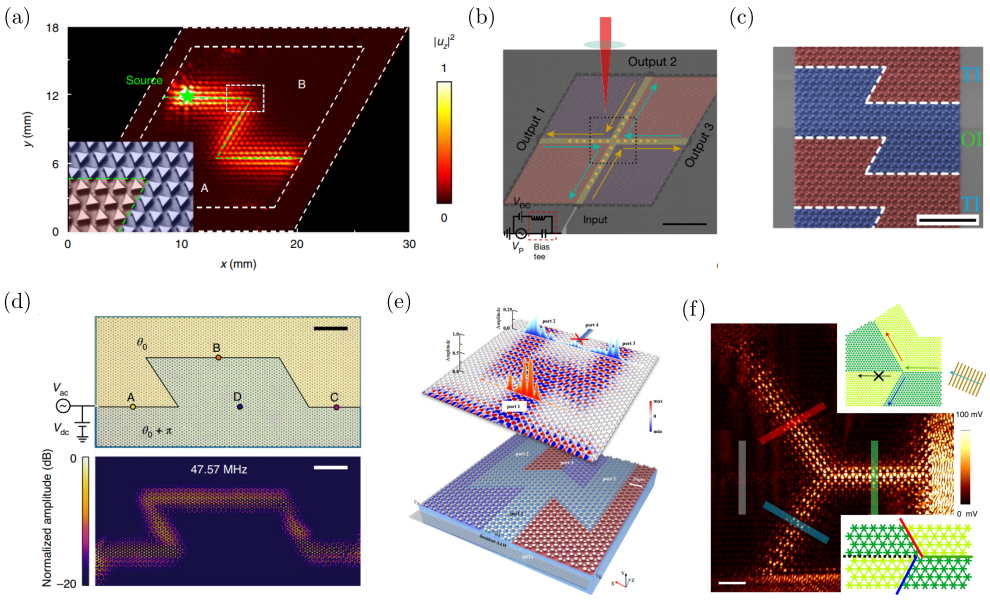

图55。 片上声子拓扑器件。(a) 基于硅芯片中谷拓扑边缘态的弯曲波导。(b) 基于膜结构中赝自旋拓扑边缘态的赝自旋滤波器。(c) 基于表面声波赝自旋拓扑边缘态的弯曲波导。(d) 基于纳米机械膜结构中辅助轨道拓扑边缘态的弯曲波导。(e) 基于谷拓扑的表面声波分束器。(f) 纳机电声子晶体中的吉赫兹拓扑分束。图采用自 [441, 438, 439, 389, 447, 545]。

声子晶体中的拓扑边缘态 [188]。与扬声器等其他增益实现方法相比，电热声学方法引起的样品振动位移可忽略不计。图56(a)展示了由两种具有不同谷拓扑的声子晶体在畴壁处形成的谷拓扑边缘态构建的拓扑腔照片。在畴壁处，圆柱表面涂覆了碳纳米管薄膜，如图56(b)所示。碳纳米管由外部交变电信号驱动。如图56(c)所示，还可以精确控制不同圆柱的增益相位。激光模式可以通过相位 $\phi = 3(\phi_{j+1} - \phi_j)$控制，其中 $j = 1$，2。图56(d)-56(f)展示了三种不同增益相位纹理对应的放大因子， $\phi = 0$ 对应(d)， $\phi = \pi$ 对应(e)， $\phi = 2\pi$对应(f)。色条表示顺时针模式（+）和逆时针模式（-）的强度。图56(g)-56(i)展示了手性及场分布。我们注意到，当相位 ϕ 不为零时，可以获得手性激光模式：在 f_- 处为顺时针模式，在 f_+处为逆时针模式。还可以实现拓扑声学信号的手性路由。拓扑声子激光器可用于改善声学通信系统。

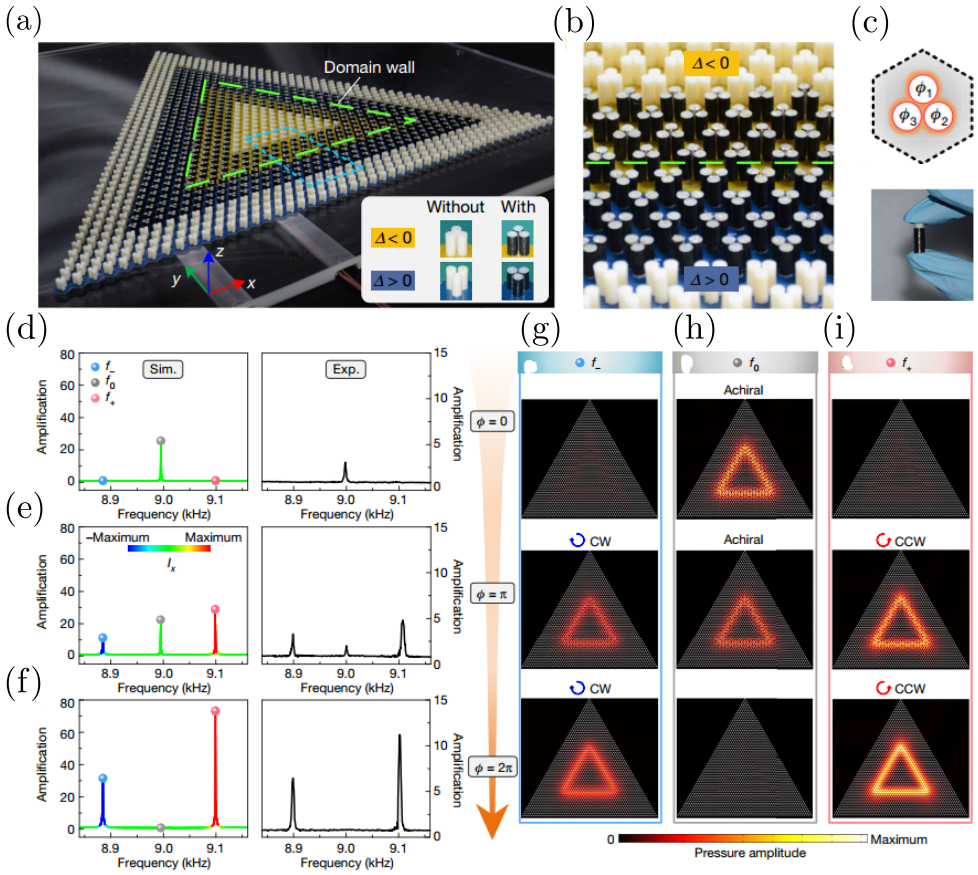

图56. 拓扑声子激光器。(a) 拓扑腔的照片。插图显示了未包覆或包覆碳纳米管薄膜的圆柱三聚体。(b) (a)中的青色区域。畴壁周围的圆柱包覆有碳纳米管薄膜。(c) 可控制三个增益圆柱的相位。(d)-(f) 三种不同增益相位纹理的放大因子，$\phi = 0$ 对应(e)，$\phi = \pi$ 对应(e)，以及 $\phi = 2\pi$对应(f)。(g)-(i) 三个共振频率下的手性和场 $f_{-}(g)$、f_0 (h)和$f_{+}(i)$，分别对应三种不同的增益相位纹理。图片改编自 [188]。

5.7. 声子拓扑逻辑门

声学拓扑绝缘体可用于构建拓扑逻辑门。在参考文献 [547], Pirie *et al*中，研究者基于声学拓扑绝缘体，通过设计温控拓扑开关构建了拓扑与门和拓扑非门。如图57(a)所示，温控拓扑开关利用边缘态进行设计，即有边缘态时开启，没有边缘态时关闭。图57(b)展示了该开关的拓扑特征，因为边缘态能够抵抗弱无序和弯折。图57(c)所示，两个拓扑开关串联即可构成拓扑与门。作为控制信号的 A 和 B 必须同时为高电平，才能加热两个开关，使声波（信息）从声源传播到接收端。当一个或所有控制信号为低电平时，信息无法传播至输出端。图57(d)展示了信号 B 为低电平的情形，此时声波在界面处发生散射，

并停止向输出端传播，对应拓扑与门的关闭状态。利用具有负系数的高热膨胀底板可以设计拓扑非门。控制信号关闭时，器件冷却并膨胀，从而形成具有边缘态的非平庸拓扑相，使信息得以传播。参考文献 [548], Xia *et al*中的另一项研究实现了声学拓扑或门和异或门。图57(e)展示了由“0”和“1”两个数字元件组成的可编程声学拓扑绝缘体。如图 6×6 57所示，通过构建元件阵列，可在同一系统中实现或门和异或门。根据图57(g)-57(i)的计算结果，只要声波从输入端口传入，无论来自 I1 还是 I2，都会传播至输出端口 O1，对应或门。然而，输出端口 O2 的行为对应异或门，因为当 I1 和 I2 同时激发声波时，没有信息传出。

6. 方法

6.1. 声子超材料的制备

用于声波的样品采用塑料光固化材料通过3D打印制备 [233, 247, 248, 279, 446]。在3D打印技术中，首先通过计算机将三维数字模型设计为多个平面切片。然后，3D打印机根据切片图案逐层叠加粉末、液体、塑料或金属材料。最后，整个物体即制作完成·。制备声波样品的另一种方法是采用机械加工 [278]。

弹性波片上样品通过硅晶圆上的微加工技术制备 [441, 463]。制备过程如下。首先，使用硫酸溶液和去离子水清洗双面抛光的晶圆。其次，经过光刻和显影后刻蚀出所需图案。第三，使用氢氟酸去除刻蚀区域顶部的二氧化硅。第四，采用深反应离子刻蚀工艺将晶圆刻蚀至一定深度。最后，使用氢氟酸去除光刻胶和二氧化硅。

6.2. 测量

测量声波时，将亚波长耳机置于样品内部或边界处，以激发体态或边缘态。将连接在钢杆上的亚波长麦克风探头插入样品内部或边界处，以记录声信号。探头固定在3D扫描平台上进行自动扫描。声信号由网络分析仪发送和接收。对测得的场进行傅里叶变换，即可得到体态和边缘态色散 [233, 247, 248]。测量高阶拓扑角态的声学响应谱时，耳机和探头同时放置在同一位置 [278, 290]。

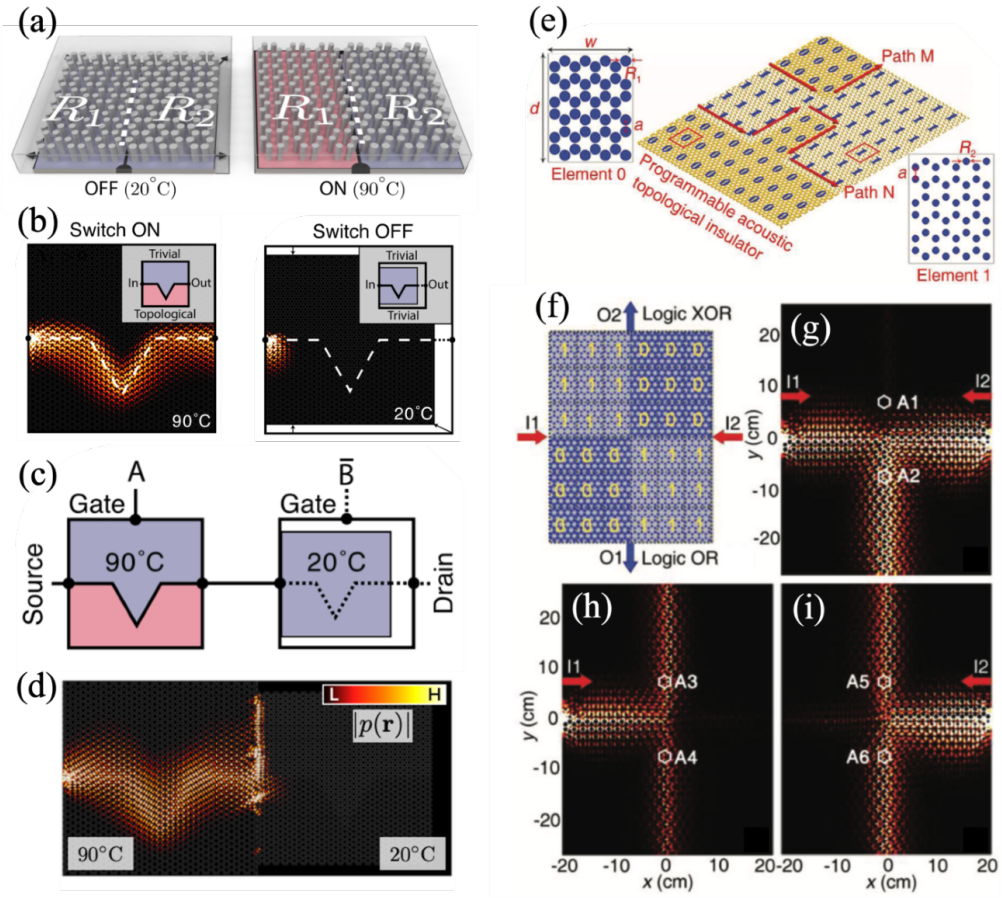

图57。 声学拓扑逻辑门。（a）温控拓扑开关，将两种尺寸的钢柱（半径分别为 R_1 和 R_2）组合在蜂窝晶格中，并锚定于高热膨胀底板上。当系统冷却时（左图），半径为 R_1 和 R_2 的两种拓扑相均为平庸相，界面处不会出现边缘态，此时开关处于关闭状态。当系统加热时（右图），半径为 R_1 的拓扑相转变为非平庸相，并在界面处产生边缘态，此时开关处于开启状态。（b）拓扑开关开启状态（左图）和关闭状态（右图）的场分布，揭示了其能够抵抗弯折的拓扑特征。（c）由两个串联开关构成的声学拓扑与门。只有控制信号A和B均为高电平时，才会产生输出。（d）控制信号B为低电平时的场分布。声波在界面处散射，无法传播至输出端口，此时拓扑与门处于关闭状态。（e）由“0”和“1”两个数字元件构成的可编程声学拓扑绝缘体。（f）声学拓扑或门和异或门。系统由一个 6×6 元件阵列构成。I1和I2表示输入端口，O1和O2表示输出端口。（g）—（i）分别为I1和I2同时输入（g）、仅在I1输入（h）和仅在I2输入（i）时的场分布，表明输出端口O1表现为或门，而O2表现为异或门。（a）—（d）改编自 [547], ，（e）—（i）改编自 [548]。

测量弹性波时，将一根尖端锋利、固定在压电陶瓷圆盘上的钨针用于激发弹性波。为了确定精确的激发位置，使用 CCD相机监测钨针的位置。此外，为避免弹性波发生反向散射，在样品边缘涂覆光刻胶和硅胶以吸收弹性波。使用安装在自动扫描平台上的激光测振仪扫描样品的位移场。所有位移信号均由网络分析仪采集，随后通过傅里叶变换得到体态和边缘态色散 [441, 463]。

7. 总结与展望

拓扑声子学是拓扑物理学（凝聚态物理学的一个重要分支）与声子学交叉形成的跨学科领域。其基本内容包括发现声子学中的拓扑机制和拓扑现象，以及利用这些机制和现象实现对声子波的非常规操控。在许多情况下，人们设计并使用声子超材料来实现此前尚未观测到的新型拓扑现象，这得益于声子超材料出色的可调控性，以及能够在广泛的温度和尺度范围内进行多样化的声子测量。在应用层面，拓扑机制和拓扑现象可用于实现对声子所携带能量和信息的前所未有的调控功能。拓扑机制能够使某些声学和声子现象不受无序和缺陷的影响，这确实令人惊叹，也让基于这些机制和现象的应用更加可行。在某些情况下，例如拓扑法诺共振 [536], ，基于拓扑机制的器件远胜于传统器件。

除了在材料科学和应用领域的重要性之外，拓扑声子超材料还开辟了通往实验拓扑物理的新途径。许多拓扑现象都是首先在声子超材料中发现或观测到的。例如，拓扑负折射 [235]，拓扑声子激光器 [188]，赝自旋和谷极化边缘态 [174, 163]，高阶拓扑绝缘体 [34, 40,278, 279]，高阶外尔半金属相 [248, 247]，狄拉克涡旋态 [171],拓扑Wannier循环 [378]，脆弱拓扑绝缘体中的谱流 [549],能带节点的非阿贝尔编织 [333, 335, 334]，拓扑模式的非厄米变形 [461, 462]，以及拓扑例外交汇点 [550] 均首先在声子超材料中被发现。

展望未来，拓扑声子超材料将继续对超材料研究产生重要影响，因为它们能够为稳健的波操控提供新机制，进而有望催生性能更优的功能器件和系统。随着拓扑声子超材料不断微型化，并与微机械系统、纳米机械系统和光机械系统相融合，这一点尤为重要 [442, 551]。开发高品质的片上声子拓扑系统及其应用，仍是未来研究的首要目标

方向。这类系统有望实现对线性、非线性、非厄米乃至量子区中声子的精细调控。基于拓扑声子超材料的应用和器件种类繁多，包括拓扑法诺器件、拓扑声子激光器、拓扑传感器、拓扑换能器、拓扑表面声波器件、拓扑波导与聚集、拓扑片上声子传输线、拓扑片上谐振器、电调谐拓扑声子器件等。

与此同时，从基础科学和材料的角度来看，未来仍有许多值得探索的方向，例如非阿贝尔拓扑态（如欧拉类拓扑相）、非厄米拓扑态、脆弱拓扑态、拓扑半金属（包括非阿贝尔拓扑半金属及其他奇异现象）、非线性拓扑声子超材料（包括拓扑声子激光器及其他引人入胜的课题）、声子-声子相互作用与非经典声子态，以及它们与拓扑现象之间的相互作用、拓扑光机械系统、拓扑缺陷处涌现的现象、可调谐声子系统、活性物质中的拓扑声子、声子的人工规范场，以及拓扑声子系统中的合成维度等。探索这些课题和方向仍有大量工作有待开展。一个令人鼓舞的迹象是，这些课题可能会对基础物理学和应用领域产生持久影响（例如超声技术、微纳机械应用、传感、检测、成像、拓扑换能器、拓扑表面声波器件以及片上通信器件）。然而，该领域仍面临诸多挑战，包括对非厄米效应的精细控制、非互易效应的物理实现、可调谐非线性效应、高品质声子谐振器、纳米制造与集成，以及对微纳机械系统中声子的控制。这些期待与挑战将塑造拓扑声子超材料未来的研究方向。

致谢

W. Z. 感谢新加坡国立大学提供的支持。W. D.、J. L.、X. H. 和 Z. L. 获得了国家自然科学基金委员会（项目编号：11890701、11974120、11974005 和 12074128）、国家重点研发计划（2018YFA0305800）以及广东省基础与应用基础研究基金（项目编号：2019B151502012、2021B1515020086 和 2022B1515020102）的资助。Y. L.、Z.-K. L. 和 J.-H. J. 获得了国家自然科学基金委员会（项目编号：12125504 和 12074281）、江苏高等学校优势学科建设工程（PAPD）以及江苏省先进光学制造技术重点实验室的资助。H.- X. W. 获得了国家自然科学基金委员会（项目编号：11904060）的资助。

参考文献

[1] Z. Liu、X. Zhang、Y. Mao、Y. Y. Zhu、Z. Yang、C. T. Chan 和 P. Sheng。《局域共振声学材料》。《科学》，289(5485):1734–1736，2000年9月。[2]N. Fang、D. Xi、J. Xu、M. Ambati、W. Srituravanich、C. Sun 和 X. Zhang。具有负模量的超声超材料。《自然·材料》，5:452，2006年。[3] Jensen Li 和 C. T. Chan。《双负声学超材料》。《物理评论E》，70:055602，2004年11月。[4] Shu Zhang、Leilei Yin 和 Nicholas Fang。《利用声学超材料网络聚焦超声》。《物理评论快报》，102:194301，2009年5月。[5] S. A. Cummer、J. Christensen 和 A. Al`u。《利用声学超材料控制声音》。《自然综述：材料》，1:16001，2016年。[6] Guancong Ma 和 Ping Sheng。《声学超材料：从局域共振到广阔前景》。《科学进展》，2(2):e1501595，2016年。[7]Huanyang Chen 和 C. T. Chan。《利用声学超材料实现三维声学隐身》。《应用物理快报》，91(18):183518，2007年。[8] Katia Bertoldi、Vincenzo Vitelli、Johan Christensen 和 Martin van Hecke。《柔性力学超材料》。《自然综述：材料》，2:17066，2017年。[9] James Utama Surjadi、Libo Gao、Huifeng Du、Xiang Li、Xiang Xiong、Nicholas Xuanlai Fang 和 Yang Lu。《机械超材料及其工程应用》。《先进工程材料》，21(3):1800864，2019年。[10] Jae-Hwang Lee、Jonathan P. Singer 和 Edwin L. Thomas。《微/纳米结构力学超材料》。《先进材料》，24(36):4782–4810，2012年。[11] I. E. Psarobas、N. Stefanou 和 A. Modinos。《具有平面缺陷的声子晶体》。《物理评论B》，62:5536–5540，2000年9月。[12] A. N. Cleland、D. R. Schmidt 和 C. S. Yung。《纳米结构声子晶体的热导》。《物理评论B》，64:172301，2001年10月。[13] Suxia Yang、J. H. Page、Zhengyou Liu、M. L. Cowan、C. T. Chan 和 Ping Sheng。《超声波隧穿三维声子晶体》。《物理评论快报》，88:104301，2002年2月。[14] Suxia Yang、J. H. Page、Zhengyou Liu、M. L. Cowan、C. T. Chan 和 Ping Sheng。《三维声子晶体中的声音聚焦》。《物理评论快报》，93:024301，2004年7月。[15] Ming-Hui Lu、Liang Feng 和 Yan-Feng Chen。《声子晶体与声学超材料》。《今日材料》，12(12):34–42，2009年。[16] Xiujuan Zhang、Meng Xiao、Ying Cheng、Ming Hui Lu 和 Johan Christensen。《拓扑声学》。《通讯物理》，1(1):97，2018年12月。[17] Guancong Ma、Meng Xiao 和 C. T. Chan。《声学和力学系统中的拓扑相》。《自然综述：物理》，1(4):281–294，2019年3月。[18]Xin Li、Siyuan Yu、Harry Liu、Minghui Lu 和 Yanfeng Chen。《拓扑力学超材料：简要综述》。《固态与材料科学最新观点》，24(5):100853，2020年10月。[19] Haoran Xue、Yihao Yang 和 Baile Zhang。《拓扑声学》。《自然综述：材料》，第1–17页，2022年8月。[20] Simon Yves、Xiang Ni 和 Andrea Al`u。《二维拓扑声学》。《纽约科学院年刊》，2022年9月。[21] J. Zak。《固体能带的贝里相位》。《物理评论快报》，62(23):2747，1989年6月。[22] R. Resta 和 D. Vanderbilt。《极化理论：现代方法》，第31页。Springer Berlin Heidelberg，柏林，海德堡，2007年。[23] C L Kane 和 E J Mele。《石墨烯中的量子自旋霍尔效应》。《物理评论快报》，95:226801，2005年。[24] Liang Fu、C. L. Kane 和 E. J. Mele。《三维拓扑绝缘体》。《物理评论快报》，98:106803，2007年3月。

[25] Di Xiao、Ming-Che Chang 和 Qian Niu。贝里相位对电子性质的影响。《现代物理评论》，82:1959–2007，2010年7月。[26] M Z Hasan 和 C L Kane。专题讨论：拓扑绝缘体。《现代物理评论》，82:3045–3067，2010年。[27] X L Qi 和 S C Zhang。拓扑绝缘体与超导体。《现代物理评论》，83:1057–1110，2011年。[28] J. E. Moore。拓扑绝缘体的诞生。《自然》，464:194，2010年。[29] N P Armitage、E J Mele 和 A Vishwanath。三维固体中的外尔半金属与狄拉克半金属。《现代物理评论》，90:015001，2018年。[30] Library。《MRS 公报》，26(11):940–941，2001年。[31] Z Yang 和 B Zhang。由二聚化链堆叠形成的声学 II 型外尔节点。《物理评论快报》，117:224301，2016年。[32] Meng Xiao、Guancong Ma、Zhiyu Yang、Ping Sheng、Z. Q. Zhang 和 C. T. Chan。周期性声学系统中的几何相与能带反转。《自然·物理》，11(3):240–244，2015年2月。[33] Fabrice Lemoult、Nad`ege Kaina、Mathias Fink 和 Geoffroy Lerosey。超材料深亚波长尺度上的波传播控制。《自然·物理》，9(1):55–60，2012年11月。[34] Marc Serra-Garcia、Valerio Peri、Roman S¨usstrunk、Osama R. Bilal、Tom Larsen、Luis Guillermo Villanueva 和 Sebastian D. Huber。声子四极矩拓扑绝缘体的观测。《自然》，555:342–345，2018年1月。[35]Weiwei Zhu 和 Guancong Ma。区分有限尺寸高阶拓扑绝缘体中的拓扑角态。《物理评论B》，101:161301，2020年4月。[36] Yajuan Qi、Chunyin Qiu、Meng Xiao、Hailong He、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。四极矩拓扑绝缘体的声学实现。《物理评论快报》，124:206601，2020年5月。[37] He Gao、Haoran Xue、Zhongming Gu、Tuo Liu、Jie Zhu 和 Baile Zhang。声学晶体中通往高阶拓扑的非厄米路径。《自然·通讯》，12(1):1888，2021年3月。[38] Ze-Guo Chen、Licheng Wang、Guanqing Zhang 和 Guancong Ma。耦合声学腔系统中紧束缚模型的手征对称性破缺。《物理评论应用》，14:024023，2020年8月。[39] Jiuyang Lu、Chunyin Qiu、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。声子晶体中的谷涡旋态。《物理评论快报》，116:093901，2016年2月。[40] Xiujuan Zhang、Hai-Xiao Wang、Zhi-Kang Lin、Yuan Tian、Biye Xie、Ming-Hui Lu、Yan-Feng Chen 和 Jian-Hua Jiang。声子晶体中的二阶拓扑与多维拓扑相变。《自然·物理》，15(6):582–588，2019年。[41] F. D. M. Haldane。无需朗道能级的量子霍尔效应模型：宇称反常的凝聚态实现。《物理评论快报》，61:2015–2018，1988年10月。[42] T. Thonhauser 和 David Vanderbilt。Haldane 模型中的绝缘体/陈绝缘体相变。《物理评论B》，74:235111，2006年12月。[43] C. L. Kane 和 E. J. Mele。 Z_2 拓扑序与量子自旋霍尔效应。《物理评论快报》，95:146802，2005年9月。[44] Jun Ding、Zhenhua Qiao、Wanxiang Feng、Yugui Yao 和 Qian Niu。通过金属原子吸附在石墨烯中实现量子反常/谷霍尔态：第一性原理研究。《物理评论B》，84:195444，2011年11月。[45]Zhenhua Qiao、Wang-Kong Tse、Hua Jiang、Yugui Yao 和 Qian Niu。双层石墨烯中的二维拓扑绝缘体态与拓扑相变。《物理评论快报》，107:256801，2011年12月。[46] Youngkuk Kim、Keunsu Choi、Jisoon Ihm 和 Hosub Jin。硅烯中的拓扑畴壁与量子谷霍尔效应。《物理评论B》，89:085429，2014年2月。[47] Z. Song、C.-C. Liu、J. Yang、J. Han、M. Ye、B. Fu、Y. Yang、Q. Niu、J. Lu 和 Y. Yao。具有创纪录体能带隙的 BiX/SbX（X=H、F、Cl 和 Br）单层材料中的量子自旋霍尔绝缘体与量子谷霍尔绝缘体

具有创纪录的体能带隙。《NPG 亚洲材料》，6:e147，2014年。[48] Jianpeng Liu、Zhen Ma、Jinhua Gao 和 Xi Dai。扭曲多层石墨烯系统中的量子谷霍尔效应、轨道磁性与反常霍尔效应。《物理评论X》，9:031021，2019年8月。[49] Zhida Song、Zhong Fang 和 Chen Fang。（$d-2$）维旋转对称性保护拓扑态的边缘态。《物理评论快报》，119:246402，2017年12月。[50]Frank Schindler、Ashley M. Cook、Maia G. Vergniory、Zhijun Wang、Stuart S.P. Parkin、B. Andrei Bernevig 和 Titus Neupert。高阶拓扑绝缘体。《科学进展》，4(6):eaat0346，2018年6月。[51] Eslam Khalaf。由反演对称性保护的高阶拓扑绝缘体与超导体。《物理评论B》，97(20):205136，2018年。[52] Guido van Miert 和 Carmine Ortix。由反演与旋转反演对称性保护的高阶拓扑绝缘体。《物理评论B》，98:081110，2018年8月。[53] Motohiko Ezawa。呼吸式 kagome 和烧绿石晶格上的高阶拓扑绝缘体与半金属。《物理评论快报》，120:026801，2018年1月。[54] Akishi Matsugatani 和 Haruki Watanabe。将高阶拓扑绝缘体与低维拓扑绝缘体相连接。《物理评论B》，98:205129，2018年11月。[55] S. Franca、J. van den Brink 和 I. C. Fulga。反常高阶拓扑绝缘体。《物理评论B》，98:201114，2018年11月。[56] Moon Jip Park、Youngkuk Kim、Gil Young Cho 和 SungBin Lee。扭转双层石墨烯中的高阶拓扑绝缘体。《物理评论快报》，123:216803，2019年11月。[57] Rui Chen、Chui-Zhen Chen、Jin-Hua Gao、Bin Zhou 和 Dong-Hui Xu。准晶体中的高阶拓扑绝缘体。《物理评论快报》，124:036803，2020年1月。[58] Ryo Takahashi、Tiantian Zhang 和 Shuichi Murakami。二维 C_n对称高阶拓扑绝缘体中的一般角电荷公式。《物理评论B》，103:205123，2021年5月。[59] Max Geier、Luka Trifunovic、Max Hoskam 和 Piet W. Brouwer。具有二阶晶体对称性的二阶拓扑绝缘体与超导体。《物理评论B》，97:205135，2018年5月。[60] Ze-Guo Chen、Weiwei Zhu、Yang Tan、Licheng Wang 和 Guancong Ma。四维高阶陈绝缘体的声学实现与边界模工程。《物理评论X》，11:011016，2021年1月。[61]Rui-Xing Zhang、Yi-Ting Hsu 和 S. Das Sarma。高阶拓扑狄拉克超导体。《物理评论B》，102:094503，2020年9月。[62] H X Wang、Z K Lin、B Jiang、G Y Guo 和 J H Jiang。高阶 Weyl 半金属。《物理评论快报》，125:146401，2020年。[63] Jiuyang Lu、Chunyin Qiu、Shengjun Xu、Yangtao Ye、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。经典波二维人工晶体中的狄拉克锥。《物理评论B》，89:134302，2014年4月。[64]Weiwei Zhu、Xinsheng Fang、Dongting Li、Yong Sun、Yong Li、Yun Jing 和 Hong Chen。在开放非厄米声学系统中同时观测到拓扑边缘态和例外点。《物理评论快报》，121(12):124501，2018年9月。[65] Michael Victor Berry。伴随绝热变化的量子相位因子。《伦敦皇家学会会刊 A：数学与物理科学》，392(1802):45–57，1984年。[66] H Weng、R Yu、X Hu、X Dai 和 Z Fang。量子反常霍尔效应及相关拓扑电子态。《先进物理》，64:227–282，2015年。[67] Long Hua Wu 和 Xiao Hu。具有失谐跃迁能的蜂窝晶格中电子的拓扑性质。《科学报告》2016 6:1，6(1):24347，2016年4月。[68]Hai Xiao Wang、Guang Yu Guo 和 Jian Hua Jiang。经典波中的能带拓扑：从威尔逊环方法到拓扑数与脆弱拓扑。《新物理学杂志》，21(9):093029，2019年9月。

[69]Liang Fu 和 C. L. Kane。具有反演对称性的拓扑绝缘体。《物理评论B》，76:045302，2007年7月。[70] Hoi Chun Po。能带拓扑对称性指标。《凝聚态物理杂志》，32(26):263001，2020年6月。[71] Jennifer Cano 和 Barry Bradlyn。能带表示与拓扑量子化学。《凝聚态物理年度评论》，12:225–246，2021年3月。[72] Feng Tang、Hoi Chun Po、Ashvin Vishwanath 和 Xiangang Wan。利用对称性指标全面搜索拓扑材料。《自然》，566(7745):486–489，2019年2月。[73] Tiantian Zhang、Yi Jiang、Zhida Song、He Huang、Yuqing He、Zhong Fang、Hongming Weng 和 Chen Fang。拓扑电子材料目录。《自然》，566(7745):475–479，2019年2月。[74]Hoi Chun Po、Haruki Watanabe 和 Ashvin Vishwanath。脆弱拓扑与Wannier阻碍。《物理评论快报》，121:126402，2018年9月。[75]Liang Jiang、Takuya Kitagawa、Jason Alicea、A. R. Akhmerov、David Pekker、Gil Refael、J. Ignacio Cirac、Eugene Demler、Mikhail D. Lukin 和 Peter Zoller。平衡态及驱动冷原子量子线中的马约拉纳费米子。《物理评论快报》，106:220402，2011年6月。[76] Qing-Jun Tong、Jun-Hong An、Jiangbin Gong、Hong-Gang Luo 和 C. H. Oh。通过周期驱动产生多个马约拉纳模：超导体模型。《物理评论B》，87:201109，2013年5月。[77] Mark S. Rudner、Netanel H. Lindner、Erez Berg 和 Michael Levin。周期驱动二维系统中的反常边缘态与体边对应。《物理评论X》，3:031005，2013年7月。[78] Takahiro Morimoto、Hoi Chun Po 和 Ashvin Vishwanath。受时间滑移对称性保护的Floquet拓扑相。《物理评论B》，95:195155，2017年5月。[79] Takashi Oka 和 Hideo Aoki。石墨烯中的光伏霍尔效应。《物理评论B》，79:081406，2009年2月。[80] Takuya Kitagawa、Erez Berg、Mark Rudner 和 Eugene Demler。周期驱动量子系统的拓扑刻画。《物理评论B》，82:235114，2010年12月。[81]Takuya Kitagawa、Takashi Oka、Arne Brataas、Liang Fu 和 Eugene Demler。光作用下非平衡系统的输运性质：没有朗道能级的光诱导量子霍尔绝缘体。《物理评论B》，84:235108，2011年12月。[82] H. H¨ubener、M. A. Sentef、U. De Giovannini、A. F. Kemper 和 A. Rubio。通过激光驱动三维狄拉克材料创建稳定的Floquet–Weyl半金属。《自然·通讯》，8:13940，2017年。[83] J. W. McIver、B. Schulte、F. U. Stein、T. Matsuyama、G. Jotzu、G. Meier 和 A. Cavalleri。石墨烯中的光诱导反常霍尔效应。《自然·物理》，16:38，2020年。.[84] K. Wintersperger、C. Braun、F. N. Unal、A. Eckardt、M. D. Liberto、N. Goldman、I. Bloch 和 M. Aidelsburger。利用超冷原子实现反常Floquet拓扑系统。《自然·物理》，16:1058，2020年。[85] M. S. Rudner 和 N. H. Lindner。Floquet拓扑绝缘体中的能带结构工程与非平衡动力学。《自然综述：物理》，2:229，2020年。[86]Liang Jiang、Takuya Kitagawa、Jason Alicea、A. R. Akhmerov、David Pekker、Gil Refael、J. Ignacio Cirac、Eugene Demler、Mikhail D. Lukin 和 Peter Zoller。平衡态及驱动冷原子量子线中的马约拉纳费米子。《物理评论快报》，106:220402，2011年6月。[87]Raditya Weda Bomantara、Longwen Zhou、Jiaxin Pan 和 Jiangbin Gong。静态和Floquet二阶拓扑绝缘体的耦合线构造。《物理评论B》，99:045441，2019年1月。[88] Martin Rodriguez-Vega、Abhishek Kumar 和 Babak Seradjeh。具有角态和体束缚态的高阶Floquet拓扑相。《物理评论B》，100:085138，2019年8月。

[89] Haiping Hu、Biao Huang、Erhai Zhao 和 W. Vincent Liu。Floquet高阶拓扑绝缘体的动力学奇异点。《物理评论快报》，124:057001，2020年2月。[90] Biao Huang 和 W. Vincent Liu。具有反常动力学极化的Floquet高阶拓扑绝缘体。《物理评论快报》，124:216601，2020年5月。[91] Weiwei Zhu、Y. D. Chong 和 Jiangbin Gong。周期驱动二分晶格中的Floquet高阶拓扑绝缘体。《物理评论B》，103:L041402，2021年1月。[92]Weiwei Zhu、Y. D. Chong 和 Jiangbin Gong。反常Floquet拓扑相的对称性分析。《物理评论B》，104:L020302，2021年7月。[93] G. Q. Liang 和 Y. D. Chong。二维拓扑绝缘体的光学谐振器类比。《物理评论快报》，110:203904，2013年5月。[94] Michael Pasek 和 Y. D. Chong。光子Floquet拓扑绝缘体的网络模型。《物理评论B》，89:075113，2014年2月。[95] Wenchao Hu、Jason C. Pillay、Kan Wu、Michael Pasek、Perry Ping Shum 和 Y. D. Chong。微波网络中拓扑边缘不变量的测量。《物理评论X》，5:011012，2015年2月。[96] F. Gao、Z. Gao、X. Shi、Z. Yang、X. Lin、H. Xu、J. D. Joannopoulos、M. Solja˘ci´c、H. Chen、L. Lu、Y. Chong 和 B. Zhang。利用设计型表面等离激元结构探测拓扑保护。《自然·通讯》，7:11619，2016年。[97]Pierre Delplace、Michel Fruchart 和 Cl´ement Tauber。相位旋转对称性与定向散射网络的拓扑。《物理评论B》，95:205413，2017年5月。[98] Shirin Afzal、Tyler J. Zimmerling、Yang Ren、David Perron 和 Vien Van。在强耦合纳米光子晶格中实现反常Floquet绝缘体。《物理评论快报》，124:253601，2020年6月。[99] Mikael C. Rechtsman、Julia M. Zeuner、Yonatan Plotnik、Yaakov Lumer、Daniel Podolsky、Felix Dreisow、Stefan Nolte、Mordechai Segev 和 Alexander Szameit。光子Floquet拓扑绝缘体。《自然》，496(7444):196–200，2013年4月。[100] Daniel Leykam、M. C. Rechtsman 和 Y. D. Chong。光子Floquet拓扑绝缘体中的反常拓扑相与未配对狄拉克锥。《物理评论快报》，117:013902，2016年6月。.[101] S. Mukherjee、A. Spracklen、M. Valiente、E. Andersson、P. Ohberg、N. Goldman 和 R. R. Thomson。在缓慢驱动的光子晶格中实验观测反常拓扑边缘模。《自然·通讯》，8:13918，2017年。.[102] S. Mukherjee、H. K. Chandrasekharan、P. Ohberg、N. Goldman 和 R. R. Thomson。拓扑光子晶格中的态重构与时间分辨成像。《自然·通讯》，9:4209，2018年。[103] L. J. Maczewsky、J. M. Zeuner、S. Nolte 和 A. Szameit。光子反常Floquet拓扑绝缘体的观测。《自然·通讯》，8:13756，2017年。[104]L. J. Maczewsky、B. H¨ockendorf、M. Kremer、T. Biesenthal、M. Heinrich、A. Alvermann、H. Fehske 和 A. Szameit。光子拓扑绝缘体中的费米子时间反演对称性。《自然·材料》，19:855，2020年。[105] Sebabrata Mukherjee 和 Mikael C. Rechtsman。拓扑带隙中Floquet孤子的观测。《科学》，368(6493):856–859，2020年。[106]R. El-Ganainy、K. G. Makris、M. Khajavikhan、Z. H. Musslimani、S. Rotter 和 D. N. Christodoulides。非厄米物理与PT对称性。《自然·物理》，14:11，2018年。[107] Yuto Ashida、Zongping Gong 和 Masahito Ueda。非厄米物理。《物理学进展》，69(3):249–435，2021年。[108] Emil J. Bergholtz、Jan Carl Budich 和 Flore K. Kunst。非厄米系统的例外拓扑。《现代物理评论》，93:015005，2021年2月。[109] K. Ding、C. Fang 和 G. Ma。非厄米拓扑与例外点几何。《自然综述：物理》，4:745，2022年。[110] Shunyu Yao 和 Zhong Wang。非厄米系统的边缘态与拓扑不变量。《物理评论快报》，121:086803，2018年8月。

[111] Ching Hua Lee 和 Ronny Thomale。《非厄米系统中趋肤模与拓扑的剖析》。《物理评论B》，99:201103，2019年5月。[112]Zongping Gong、Yuto Ashida、Kohei Kawabata、Kazuaki Takasan、Sho Higashikawa 和 Masahito Ueda。《非厄米系统的拓扑相》。《物理评论X》，8:031079，2018年9月。[113] Kohei Kawabata、Ken Shiozaki、Masahito Ueda 和 Masatoshi Sato。《非厄米物理中的对称性与拓扑》。《物理评论X》，9:041015，2019年10月。[114] Kai Zhang、Zhesen Yang 和 Chen Fang。《非厄米系统中绕数与趋肤模的对应关系》。《物理评论快报》，125:126402，2020年9月。[115] Kazuki Yokomizo 和 Shuichi Murakami。《非厄米系统的非布洛赫能带理论》。《物理评论快报》，123:066404，2019年8月。[116] Flore K. Kunst、Elisabet Edvardsson、Jan Carl Budich 和 Emil J. Bergholtz。《非厄米系统中的双正交体边对应》。《物理评论快报》，121:026808，2018年7月。[117] A. McDonald、T. Pereg-Barnea 和 A. A. Clerk。《玻色Kitaev-Majorana链中的相位依赖手征输运与有效非厄米动力学》。《物理评论X》，8:041031，2018年11月。[118] Flore K. Kunst 和 Vatsal Dwivedi。《非厄米系统与拓扑：转移矩阵视角》。《物理评论B》，99:245116，2019年6月。[119] Stefano Longhi。《探测非厄米趋肤效应与非布洛赫相变》。《物理评论研究》，1:023013，2019年9月。[120] L. Jin 和 Z. Song。《一维具有手征反演对称性的非厄米系统中的体边对应》。《物理评论B》，99:081103，2019年2月。[121] Fei Song、Shunyu Yao 和 Zhong Wang。《开放量子系统中的非厄米趋肤效应与手征阻尼》。《物理评论快报》，123:170401，2019年10月。[122] Dan S. Borgnia、Alex Jura Kruchkov 和 Robert-Jan Slager。《非厄米边界模与拓扑》。《物理评论快报》，124:056802，2020年2月。[123] Tian-Shu Deng 和 Wei Yi。《非厄米畴壁系统中的非布洛赫拓扑不变量》。《物理评论B》，100:035102，2019年7月。[124] Hui Jiang、Li-Jun Lang、Chao Yang、Shi-Liang Zhu 和 Shu Chen。《非互易准周期晶格中的非厄米趋肤效应与安德森局域化的相互作用》。《物理评论B》，100:054301，2019年8月。[125]Shunyu Yao、Fei Song 和 Zhong Wang。《非厄米陈能带》。《物理评论快报》，121:136802，2018年9月。[126] Ken-Ichiro Imura 和 Yositake Takane。《非厄米拓扑系统的广义体边对应》。《物理评论B》，100:165430，2019年10月。[127]Kohei Kawabata、Nobuyuki Okuma 和 Masatoshi Sato。《辛类非厄米哈密顿量的非布洛赫能带理论》。《物理评论B》，101:195147，2020年5月。[128] S. Longhi。《非布洛赫能带坍缩与手征泽纳隧穿》。《物理评论快报》，124:066602，2020年2月。[129] Colin Scheibner、William T.M. Irvine 和 Vincenzo Vitelli。《主动弹性介质中的非厄米能带拓扑与趋肤模》。《物理评论快报》，125(11):118001，2020年9月。[130]Xizheng Zhang 和 Jiangbin Gong。《非厄米Floquet拓扑相：异常点、合并边缘模态与趋肤效应》。《物理评论B》，101:045415，2020年1月。[131]Zhesen Yang、Kai Zhang、Chen Fang 和 Jiangping Hu。《非厄米体边对应与辅助广义布里渊区理论》。《物理评论快报》，125:226402，2020年11月。[132]Xueyi Zhu、Huaiqiang Wang、Samit Kumar Gupta、Haijun Zhang、Biye Xie、Minghui Lu 和 Yanfeng Chen。《光子非厄米趋肤效应与非布洛赫体边对应》。《物理评论研究》，2:013280，2020年3月。[133] Ananya Ghatak、Martin Brandenbourger、Jasper van Wezel 和 Corentin Coulais。《观测主动机械超材料中的非厄米拓扑及其体边对应》

《美国国家科学院院刊》，117(47):29561–29568，2020年。[134] T. Helbig、T. Hofmann、S. Imhof、M. Abdelghany、T. Kiessling、L. W. Molenkamp、C. H. Lee、A. Szameit、M. Greiter 和 R. Thomale。《非厄米拓扑电路中的广义体边界对应》。《自然·物理》，16:747，2020年。[135] L. Xiao、T. Deng、K. Wang、G. Zhu、Z. Wang、W. Yi 和 P. Xue。《量子动力学中的非厄米体边界对应》。《自然·物理》，16:761，2020年。[136] Weiwei Zhu、Wei Xin Teo、Linhu Li 和 Jiangbin Gong。《拓扑边缘态的离域化》。《物理评论B》，103:195414，2021年5月。[137] Longwen Zhou、Yongjian Gu 和 Jiangbin Gong。《非厄米Floquet相的双重拓扑表征》。《物理评论B》，103:L041404，2021年1月。[138] Deguang Wu、Jiao Xie、Yao Zhou 和 Jin An。《非厄米系统中的开边界能谱与广义布里渊区之间的联系》。《物理评论B》，105:045422，2022年1月。[139] Kohei Kawabata、Ken Shiozaki 和 Masahito Ueda。《非厄米陈绝缘体中的异常螺旋边缘态》。《物理评论B》，98:165148，2018年10月。[140] Yu Chen 和 Hui Zhai。《非厄米陈绝缘体的霍尔电导》。《物理评论B》，98:245130，2018年12月。[141] Mark R. Hirsbrunner、Timothy M. Philip 和 Matthew J. Gilbert。《非厄米陈绝缘体的拓扑与可观测量》。《物理评论B》，100:081104，2019年8月。[142] Yi-Xin Xiao 和 C. T. Chan。《具有趋肤效应的非厄米陈绝缘体中的拓扑》。《物理评论B》，105:075128，2022年2月。[143] Ching Hua Lee、Linhu Li 和 Jiangbin Gong。《非互易系统中的混合高阶趋肤拓扑模》。《物理评论快报》，123:016805，2019年7月。[144] Linhu Li、Ching Hua Lee 和 Jiangbin Gong。《有损冷原子系统中的非厄米趋肤效应拓扑开关》。《物理评论快报》，124:250402，2020年6月。[145] Sayed Ali Akbar Ghorashi、Tianhe Li 和 Masatoshi Sato。《非厄米高阶外尔半金属》。《物理评论B》，104:L161117，2021年10月。[146] Sayed Ali Akbar Ghorashi、Tianhe Li、Masatoshi Sato 和 Taylor L. Hughes。《非厄米高阶狄拉克半金属》。《物理评论B》，104:L161116，2021年10月。[147] Weiwei Zhu 和 Jiangbin Gong。《无非对称耦合的混合趋肤拓扑模》。《物理评论B》，106:035425，2022年7月。[148] Yaohua Li、Chao Liang、Chenyang Wang、Cuicui Lu 和 Yong-Chun Liu。《增益损耗诱导的混合趋肤拓扑效应》。《物理评论快报》，128:223903，2022年6月。[149] Linhu Li、Ching Hua Lee、Sen Mu 和 Jiangbin Gong。《临界非厄米趋肤效应》。《自然·通讯》，11(1):5491，2020年。[150] Kohei Kawabata、Masatoshi Sato 和 Ken Shiozaki。《高阶非厄米趋肤效应》。《物理评论B》，102:205118，2020年11月。[151] Ryo Okugawa、Ryo Takahashi 和 Kazuki Yokomizo。《二阶拓扑非厄米趋肤效应》。《物理评论B》，102:241202，2020年12月。[152] Yongxu Fu、Jihan Hu 和 Shaolong Wan。《非厄米二阶趋肤模与拓扑模》。《物理评论B》，103:045420，2021年1月。[153] Kyoung-Min Kim 和 Moon Jip Park。《二阶非厄米趋肤效应中的无序驱动相变》。《物理评论B》，104:L121101，2021年9月。[154] Carl D. Anderson。《易偏转正电粒子表观存在的证据》。《科学》，76(1967):238–239，1932年。[155] R. Jackiw 和 C. Rebbi。《具有1⁄2费米子数的孤子》。《物理评论D》，13:3398–3409，1976年6月。[156] R Jackiw。《分数电荷费米子与马约拉纳费米子：零能模的物理学》。《Physica Scripta》，2012(T146):014005，2012年1月。[157] W. P. Su、J. R. Schrieffer 和 A. J. Heeger。《聚乙炔中的孤子激发》。《物理评论B》，

22:2099–2111, 1980年8月。[158] Xin Li、Yan Meng、Xiaoxiao Wu、Sheng Yan、Yingzhou Huang、Shuxia Wang 和 Weijia Wen。受 Su-Schrieffer-Heeger 模型启发的声学界面态和边缘态。《应用物理快报》，113(20):203501，2018年。[159] Bryan Gin ge Chen、Nitin Upadhyaya 和 Vincenzo Vitelli。拓扑机械绝缘体中通过孤子实现的非线性传导。《美国国家科学院院刊》，111(36):13004–13009，2014年。[160] C. L. Kane 和 T. C. Lubensky。等静定晶格中的拓扑边界模。《自然·物理》，10:39–45，2014年。[161] Yahui Yang、Zhaoju Yang 和 Baile Zhang。类石墨烯谐振器系统中的声学谷边缘态。《应用物理杂志》，123(9):091713，2018年。[162] Fan Zhang、Allan H. MacDonald 和 Eugene J. Mele。有能隙双层石墨烯中的谷陈数和边界模。《美国国家科学院院刊》，110:10546–10551，2013年。[163] Jiuyang Lu、Chunyin Qiu、Liping Ye、Xiying Fan、Manzhu Ke、Fan Zhang 和 Zhengyou Liu。在声子晶体中观测到声波的拓扑谷输运。《自然·物理》，13:369–374，2017年。[164] Boyang Xie、Hui Liu、Hua Cheng、Zhengyou Liu、Shuqi Chen 和 Jianguo Tian。Kekul´e 晶格中的声学拓扑输运与折射。Phys. Rev. Applied, 11:044086，2019年4月。[165] Kai Qian、David J. Apigo、Camelia Prodan、Yafis Barlas 和 Emil Prodan。谷陈效应的拓扑。《物理评论B》，98:155138，2018年10月。[166] Ting-Wei Liu 和 Fabio Semperlotti。可重构声子弹性波导中的可调谐声学谷霍尔边缘态。Phys. Rev. Applied, 9:014001，2018年1月。[167] Zhenhua Tian、Chen Shen、Junfei Li、Eric Reit、Hunter Bachman、Joshua E. S. Socolar、Steven A. Cummer 和 Tony Jun Huang。谷拓扑声子晶体中声波的色散调谐与路径重构。《自然·通讯》，11:762，2020年。[168] Berthold J¨ack、Yonglong Xie、Jian Li、B. Andrei Jeon、Sangjun andd Bernevig 和 Ali Yazdani。在拓扑保护边缘通道中观测到马约拉纳零模。《科学》，364(6447):1255–1259，2019年。[169] Emil Prodan、Kyle Dobiszewski、Alokik Kanwal、John Palmieri 和 Camelia Prodan。一大类拓扑机械系统中的动力学马约拉纳边缘模。《自然·通讯》，8:14587，2017年。[170] Chun-Wei Chen、Natalia Lera、Rajesh Chaunsali、Daniel Torrent、Jose Vicente Alvarez、Jinkyu Yang、Pablo San-Jose 和 Johan Christensen。马约拉纳束缚态的机械类比。《先进材料》，31(51):1904386，2019年。[171] Penglin Gao、DanielTorrent、Francisco Cervera、Pablo San-Jose、Jos´eS´anchez-Dehesa 和 Johan Christensen。Kekul´e 扭曲声学晶格中的类马约拉纳零模。《物理评论快报》，123:196601，2019年11月。[172] Roman S¨usstrunk 和 Sebastian D. Huber。在机械拓扑绝缘体中观测到声子螺旋边缘态。《科学》，349(6243):47–50，2015年。[173] Yu Gui Peng、Cheng Zhi Qin、De Gang Zhao、Ya Xi Shen、Xiang Yuan Xu、Ming Bao、Han Jia 和 Xue Feng Zhu。声学反常弗洛凯拓扑绝缘体的实验演示。《自然·通讯》，7:13368，2016年11月。[174] Cheng He、Xu Ni、Hao Ge、Xiao-Chen Sun、Yan-Bin Chen、Ming-Hui Lu、Xiao-Ping Liu 和 Yan-Feng Chen。声学拓扑绝缘体与稳健的单向声输运。《自然·物理》，12(12):1124–1129，2016年。[175] Jiuyang Lu、Chunyin Qiu、Weiyin Deng、Xueqin Huang、Feng Li、Fan Zhang、Shuqi Chen 和 Zhengyou Liu。双层声子晶体中的谷拓扑相。《物理评论快报》，120(11):116802，2018年。[176] Zhiwang Zhang、Qi Wei、Ying Cheng、Ting Zhang、Dajian Wu 和 Xiaojun Liu。在无流动对称性破缺超材料晶格中拓扑地产生声学赝自旋多极子。

《物理评论快报》，118(8):084303，2017年。[177] B A Bernevig、T L Hughes 和 S C Zhang。碲化汞量子阱中的量子自旋霍尔效应与拓扑相变。《科学》，314:1757–1761，2006年。[178] Markus Konig、Steffen Wiedmann、Christoph Brune、Andreas Roth、Hartmut Buhmann、Laurens W Molenkamp、Xiao-Liang Qi 和 Shou-Cheng Zhang。碲化汞量子阱中的量子自旋霍尔绝缘体态。《科学》，318(5851):766–770，2007年。[179] Conyers Herring 和 Erich Vogt。各向异性散射条件下多谷半导体的输运与形变势理论。《物理评论》，105(6):1933，1957年。[180] Jun Mei、Ying Wu、Che Ting Chan 和 Zhao-Qing Zhang。声子晶体和光子晶体中狄拉克锥与类狄拉克锥的第一性原理研究。*Physical Review B*，86(3):035141，2012年。[181] Lifa Zhang 和 Qian Niu。声子的角动量与爱因斯坦–德哈斯效应。《物理评论快报》，112(8):085503，2014年。[182] Lifa Zhang 和 Qian Niu。单层六角晶格高对称点处的手性声子。《物理评论快报》，115(11):115502，2015年。[183] Liping Ye、Chunyin Qiu、Jiuyang Lu、Xinhua Wen、Yuanyuan Shen、Manzhu Ke、Fan Zhang 和 Zhengyou Liu。声学谷涡旋态及谷手性锁定分束的观测。*Physical Review B*，95(17):174106，2017年。[184] Di Xiao、Gui-Bin Liu、Wanxiang Feng、Xiaodong Xu 和 Wang Yao。单层二硫化钼及其他第六族二硫属化物中的自旋与谷耦合物理。《物理评论快报》，108(19):196802，2012年。[185] Di Xiao、Wang Yao 和 Qian Niu。石墨烯中的谷对比物理：磁矩与拓扑输运。《物理评论快报》，99(23):236809，2007年。[186] Zhiwang Zhang、Ye Tian、Ying Cheng、Qi Wei、Xiaojun Liu 和 Johan Christensen。拓扑声学延迟线。《物理评论·应用》，9(3):034032，2018年。[187]Zhiwang Zhang、Ye Tian、Yihe Wang、Shuxiang Gao、Ying Cheng、Xiaojun Liu、Johan Christensen、Z Zhang、Y Tian、Y Wang、S Gao、Y Cheng、X Liu 和 J Christensen。基于谷霍尔拓扑绝缘体的定向声学天线。《先进材料》，30(36):1803229，2018年9月。[188] Bolun Hu、Zhiwang Zhang、Haixiao Zhang、Liyang Zheng、Wei Xiong、Zichong Yue、Xiaoyu Wang、Jianyi Xu、Ying Cheng、Xiaojun Liu 和 Johan Christensen。非厄米拓扑回音廊。《自然》，597(7878):655–659，2021年9月。[189] Bai-Zhan Xia、Sheng-Jie Zheng、Ting-Ting Liu、Jun-Rui Jiao、Ning Chen、Hong-Qing Dai、De-Jie Yu 和 Jian Liu。高对称点以外动量处声波类谷边缘态的观测。*Physical Review B*，97(15):155124，2018年。[190] Zhenxiao Zhu、Xueqin Huang、Jiuyang Lu、Mou Yan、Feng Li、Weiyin Deng 和 Zhengyou Liu。方形晶格声学谷材料中的负折射与分流。《物理评论·应用》，12(2):024007，2019年。[191] Mudi Wang、Wenyi Zhou、Liya Bi、Chunyin Qiu、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。声学异质结构中的谷锁定波导输运。《自然·通讯》，11(1):1–6，2020年。[192]Fan Zhang、Jeil Jung、Gregory A Fiete、Qian Niu 和 Allan H MacDonald。手性堆叠少层石墨烯系统中的自发量子霍尔态。《物理评论快报》，106(15):156801，2011年。[193] Long Ju、Zhiwen Shi、Nityan Nair、Yinchuan Lv、Chenhao Jin、Jairo Velasco、Claudia Ojeda- Aristizabal、Hans A Bechtel、Michael C Martin、Alex Zettl 等。双层石墨烯畴壁处的拓扑谷输运。《自然》，520(7549):650–655，2015年。[194] Xiaoxiao Wu、Yan Meng、Jingxuan Tian、Yingzhou Huang、Hong Xiang、Dezhuan Han 和 Weijia Wen。在设计型表面等离激元晶体中直接观测到谷极化拓扑边缘态。《自然·通讯》，8(1):1–9，2017年。[195] Jiho Noh、Sheng Huang、Kevin P Chen 和 Mikael C Rechtsman。光子拓扑谷霍尔边缘态的观测。《物理评论快报》，120(6):063902，2018年。[196] L Sheng、DN Sheng、CS Ting 和 FDM Haldane。通过量子化实现的无耗散自旋霍尔效应

边缘输运。《物理评论快报》，95(13):136602，2005年。[197] D N Sheng、Z Y Weng、L Sheng 和 F D M Haldane。量子自旋霍尔效应与拓扑不变量陈数。《物理评论快报》，97:036808，2006年。[198]Zhenxiao Zhu、Mou Yan、Jincheng Pan、Yating Yang、Weiyin Deng、Jiuyang Lu、Xueqin Huang 和 Zhengyou Liu。声学谷自旋陈绝缘体。Physical Review Applied，16(1):014058，2021年。[199] William Dorrell、Harris Pirie、S Minhal Gardezi、Nathan C Drucker 和 Jennifer E Hoffman。范德华超材料。Physical Review B，101(12):121103，2020年。[200]Alexander B Khanikaev、S Hossein Mousavi、Wang-Kong Tse、Mehdi Kargarian、Allan H MacDonald 和 Gennady Shvets。光子拓扑绝缘体。《自然·材料》，12(3):233–239，2013年。[201] Tzuhsuan Ma、Alexander B Khanikaev、S Hossein Mousavi 和 Gennady Shvets。引导电磁波绕过尖角：超材料波导中的拓扑保护光子输运。《物理评论快报》，114(12):127401，2015年。[202] S. Hossein Mousavi、Alexander B. Khanikaev 和 Zheng Wang。声子超材料中的拓扑保护弹性波。《自然·通讯》，6:8682，2015年11月。[203] Cheng He、Xiao-Chen Sun、Xiao-Ping Liu、Ming-Hui Lu、Yulin Chen、Liang Feng 和 Yan-Feng Chen。具有时间反演对称性破缺的光子拓扑绝缘体。《美国国家科学院院刊》，113(18):4924–4928，2016年。[204] Xinhua Wen、Chunyin Qiu、Jiuyang Lu、Hailong He、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。通过旋转散射体实现声学狄拉克简并和拓扑相变。《应用物理学杂志》，123(9):091703，2018年。[205] Yan Li、Ying Wu 和 Jun Mei。声子晶体中的双狄拉克锥。《应用物理快报》，105(1):014107，2014年。[206] Yan Li 和 Jun Mei。二维介质光子晶体中的双狄拉克锥。《光学快报》，23(9):12089–12099，2015年。[207]Long-Hua Wu 和 Xiao Hu。利用介电材料实现拓扑光子晶体的方案。《物理评论快报》，114:223901，2015年6月。[208] Simon Yves、Romain Fleury、Fabrice Lemoult、Mathias Fink 和 Geoffroy Lerosey。拓扑声学极化激元：亚波长尺度上的稳健声音操控。《新物理学杂志》，19(7):075003，2017年。[209] Si-Yuan Yu、Cheng He、Zhen Wang、Fu-Kang Liu、Xiao-Chen Sun、Zheng Li、Hai-Zhou Lu、Ming- Hui Lu、Xiao-Ping Liu 和 Yan-Feng Chen。用于集成拓扑声子电路的弹性赝自旋输运。《自然·通讯》，9(1):1–8，2018年。[210] Marco Miniaci、RK Pal、B Morvan 和 M Ruzzene。图案化弹性板中拓扑保护螺旋边缘模的实验观测。Physical Review X，8(3):031074，2018年。[211] Li-Yang Zheng、Georgios Theocharis、Vincent Tournat 和 Vitalyi Gusev。机械颗粒石墨烯中的准拓扑旋转波。Physical Review B，97(6):060101，2018年。[212] Cheng He、Si-Yuan Yu、Hao Ge、Huaiqiang Wang、Yuan Tian、Haijun Zhang、Xiao-Chen Sun、YB Chen、Jian Zhou、Ming-Hui Lu 等。具有赝自旋-谷耦合鞍面态的三维拓扑声学晶体。《自然·通讯》，9(1):1–7，2018年。[213] Cheng He、Hua-Shan Lai、Bo He、Si-Yuan Yu、Xiangyuan Xu、Ming-Hui Lu 和 Yan-Feng Chen。三维拓扑绝缘体的声学类比。《自然·通讯》，11:2318，2020年12月。[214] R Fleury、D L Sounas、C F Sieck、M R Haberman 和 A Al`u。紧凑型声学环行器中的声音隔离与巨大线性非互易性。《科学》，343:516–519，2014年。[215] A B Khanikaev、R Fleury、S H Mousavi 和 A Al`u。角动量偏置类石墨烯谐振器晶格中的拓扑稳健声传播。《自然·通讯》，6:8260，2015年。[216] X Ni、C He、X C Sun、X P Liu、M H Lu、L Feng 和 Y F Chen。具有循环气流的声学谐振器网络中的拓扑保护单向边缘模。《新物理学杂志》，17:053016，2015年。

[217] Z Yang、F Gao、X Shi、X Lin、Z Gao、Y Chong 和 B Zhang。拓扑声学。《物理评论快报》，114:114301，2015年。[218] Y Ding、Y Peng、Y Zhu、X Fan、J Yang、B Liang、X Zhu、X Wan 和 J Cheng。声学陈绝缘体的实验演示。《物理评论快报》，122:014302，2019年。[219] L Sheng、H Li、Y Yang、D N Sheng 和 D Y Xing。自旋陈数与时间反演对称性破缺的量子自旋霍尔效应。《中国物理B》，22:067201，2013年。[220] E Prodan。自旋陈数的稳健性。《物理评论B》，80:125327，2009年。[221] H Li、L Sheng、D N Sheng 和 D Y Xing。拓扑绝缘体 Bi2Se3 薄膜的陈数。《物理评论B》，82:165104，2010年。[222] Y Barlas 和 E Prodan。采用经典无源超材料实现的拓扑分类表。《物理评论B》，98:094310，2018年。[223] M Ezawa。具有磁序的高自旋陈绝缘体。《科学报告》，3:3435，2013年。[224] H Li、L Sheng 和 D Y Xing。量子自旋霍尔态中边缘态与体拓扑不变量的关联。《物理评论快报》，108:196806，2012年。[225] W Deng、X Huang、J Lu、V Peri、F Li、S D Huber 和 Z Liu。由自旋守恒破缺的合成自旋轨道耦合诱导的声学自旋陈绝缘体。《自然·通讯》，11:3227，2020年。[226] M Z Hasan、G Chang、I Belopolski、G Bian、S-Y Xu 和 J-X Yin。拓扑量子物质中的外尔、狄拉克和高重手征费米子。《自然综述：材料》，6:784–803，2021年。[227] Jian-Hua Jiang。由具有交错磁通的简单立方晶格实现的可调拓扑外尔半金属。《物理评论A》，85:033640，2012年3月。[228] P.Delplace、J Li 和 D. Carpentier。基于晶格模型的拓扑外尔半金属。《欧洲物理快报》，97:67004，2012年。[229] Ling Lu、Liang Fu、John D. Joannopoulos 和 M. Solja˘ci´c。陀螺晶格光子晶体中的外尔点和线节点。《自然·光子学》，7:294–299，2013年。[230] Ling Lu、Zhiyu Wang、Dexin Ye、Lixin Ran、Liang Fu、John D. Joannopoulos 和 M. Solja˘ci´c。外尔点的实验观测。《科学》，349:622–624，2015年。[231] Wen-Jie Chen、Meng Xiao 和 C. T. Chan。具有多个外尔点的光子晶体及稳健表面态的实验观测。《自然·通讯》，7:13038，2016年。[232] M Xiao、W-J Chen、W-Y He 和 C T Chan。声学系统中的合成规范磁通与外尔点。《自然·物理》，11:920–924，2015年。[233] F Li、X Huang、J Lu、J Ma 和 Z Liu。手性声子晶体中的外尔点与费米弧。《自然·物理》，14:30–34，2018年。[234] H Ge、X Ni、Y Tian、S K Gupta、M-H Lu、X Lin、W-D Huang、C T Chan 和 Y-F Chen。声学外尔点和拓扑表面态的实验观测。《物理评论·应用》，10:014017，2018年。[235] H He、C Qiu、L Ye、X Cai、X Fan、M Ke、F Zhang 和 Z Liu。外尔声子晶体中表面声波的拓扑负折射。《自然》，560:61–64，2018年。[236] V Peri、M Serra-Garcia、R Ilan 和 S D Huber。声学外尔系统中的轴向场诱导手性通道。《自然·物理》，15:357–361，2019年。[237] A A Soluyanov、D Gresch、Z Wang、Q Wu、M Troyer、X Dai 和 B A Bernevig。II型外尔半金属。《自然》，527:495–498，2015年。[238] B Xie、H Liu、H Cheng、Z Liu、S Chen 和 J Tian。声子晶体中II型外尔点与费米弧的实验实现。《物理评论快报》，122:104302，2019年。[239] X Huang、W Deng、F Li、J Lu 和 Z Liu。声子晶体中的理想II型外尔相与拓扑相变。《物理评论快报》，124:206802，2020年。[240] 拟提交。[241] T-G Chen、J-R Jiao、H-Q Dai 和 D-J Yu。方形晶格中的声学外尔点。《物理评论B》，98:214110，2018年。[242] H He、C Qiu、X Cai、M Xiao、M Ke、F Zhang 和 Z Liu。二次外尔点和双螺旋面弧的观测。《自然·通讯》，11:1820，2020年。

[243] L Luo, W Deng, Y Yang, M Yan, J Lu, X Huang, and Z Liu. 在混合 Weyl 声子晶体中观测到四重 Weyl 点。arXiv:2203.14600, 2022年。[244] Y Yang, H-X Sun, J-P Xia, H Xue, Z Gao, Y Ge, D Jia, S-Q Yuan, Y Chong, and B Zhang. 具有双费米弧的拓扑三重简并点。《自然·物理》, 15:645–649, 2019年。[245] W Y Deng, X Q Huang, J Y Lu, F Li, J H Ma, S Q Chen, and Z Y Liu. 声学自旋-1 Weyl 半金属。《中国物理-物理力学天文学》, 63:287032, 2020年。[246] S A A Ghorashi, T Li, and T L Hughes. 高阶外尔半金属。《物理评论快报》, 125:266804, 2020年。[247] Q Wei, X Zhang, W Deng, J Lu, X Huang, M Yan, G Chen, Z Liu, and S Jia. 声学晶体中的高阶拓扑半金属。《自然·材料》, 20:812–817, 2021年。[248] L Luo, H X Wang, Z K Lin, B Jiang, Y Wu, F Li, and J H Jiang. 声子高阶 Weyl 半金属的观测。《自然·材料》, 20:794–799, 2021年。[249] B Xie, H Liu, H Cheng, Z Liu, J Tian, and S Chen. 三维声子晶体中的狄拉克点及向外尔点的转变。Light Sci. Appl., 9:201, 2020年。[250] X Cai, L Ye, C Qiu, M Xiao, R Yu, M Ke, and Z Liu. 对称性强制的三维狄拉克声子晶体。Light Sci. Appl., 9:38, 2020年。[251] H Cheng, Y Sha, R Liu, C Fang, and L Lu. 发现狄拉克点的拓扑表面态。《物理评论快报》, 124:104301, 2020年。[252] C Le, X Wu, S Qin, Y Li, R Thomale, F C Zhang, and J Hu. 没有表面费米弧的狄拉克半金属。《美国国家科学院院刊》, 115:8311–8315, 2018年。[253] H Qiu, M Xiao, F Zhang, and C Qiu. 高阶狄拉克声学晶体。《物理评论快报》, 127:146601, 2021年。[254] C H Xia, H S Lai, X C Sun, C He, and Y F Chen. 实验演示三维拓扑狄拉克声学晶体中的体态-铰链对应。《物理评论快报》, 128:115701, 2022年。[255] C Fang, H Weng, X Dai, and Z Fang. 拓扑节点线半金属。《中国物理B》, 25:117106, 2016年。[256] Zhan Xiong, Hai-Xiao Wang, Hao Ge, Jinjie Shi, Jie Luo, Yun Lai, Ming-Hui Lu, and Jian-Hua Jiang. 机械超材料晶体中的拓扑节点线。《物理评论B》, 97:180101, 2018年5月。[257] W Deng, J Lu, F Li, X Huang, M Yan, J Ma, and Z Liu. 声子晶体中的节点环和鼓膜表面态。《自然·通讯》, 10:1769, 2019年。[258] H Qiu, C Qiu, R Yu, M Xiao, H He, L Ye, M Ke, and Z Liu. 在声学超材料晶体中观测到直节点线和滑水道表面态。《物理评论B》, 100:041303(R), 2019年。[259] J Lu, X Huang, M Yan, F Li, W Deng, and Z Liu. 声子晶体中的节点链半金属态和拓扑聚焦。《物理评论应用》, 13:054080, 2020年。[260] Y Yang, J P Xia, H X Sun, Y Ge, D Jia, S Q Yuan, S A Yang, Y Chong, and B Zhang. 在人工声学晶体中观测到拓扑节点面及其表面态弧。《自然·通讯》, 10:5185, 2019年。[261] M Xiao, L Ye, C Qiu, H He, Z Liu, andS Fan. 实验演示具有拓扑带电节点面的声学半金属。《科学进展》, 6:eaav2360, 2020年。[262] M Xiao, X Q Sun, and S Fan. 几何受挫系统中的节点链半金属。《物理评论B》, 99:094206, 2019年。[263] Biye Xie, Hai-Xiao Wang, Xiujuan Zhang, Peng Zhan, Jian-Hua Jiang, Minghui Lu, and Yanfeng Chen. 高阶能带拓扑。《自然综述：物理》, 3:520–532, 2021年。[264] Wladimir A Benalcazar, B Andrei Bernevig, and Taylor L Hughes. 量子化电多极绝缘体。《科学》, 357(6346):61–66, 2017年。[265] Zhan Xiong, Zhi-Kang Lin, Hai-Xiao Wang, Xiujuan Zhang, Ming-Hui Lu, Yan-Feng Chen, and Jian-Hua Jiang. 具有反演对称性的二维高阶拓扑声学晶体中的角态和拓扑相变。《物理评论B》, 102:125144, 2020年9月。[266] Zhi-Kang Lin, Shi-Qiao Wu, Hai-Xiao Wang, and Jian-Hua Jiang. 声的高阶拓扑自旋霍尔效应。《中国物理快报》, 37:074302, 2020年7月。

[267] Qiang Wei, Xuewei Zhang, Weiyin Deng, Jiuyang Lu, Xueqin Huang, Mou Yan, Gang Chen, Zhengyou Liu, and Suotang Jia. 声学高阶拓扑绝缘体中的三维铰链输运。*Physical Review Letters*, 127:255501, 2021年12月。[268]Li-Yang Zheng and Johan Christensen. 声学拓扑绝缘体中的狄拉克层级。*Physical Review Letters*, 127:156401, 2021年10月。[269] Linyun Yang, Yin Wang, Yan Meng, Zhenxiao Zhu, Xiang Xi, Bei Yan, Shuxin Lin, Jingming Chen, Bin-jie Shi, Yong Ge, Shou-qi Yuan, Hongsheng Chen, Hong-xiang Sun, Gui-Geng Liu, Yihao Yang, and Zhen Gao. 三维声学拓扑绝缘体中狄拉克层级的观测。*Phys. Rev. Lett.*, 129:125502, 2022年9月。[270] Jing-jing Liu, Zheng-wei Li, Ze-Guo Chen, Weiyuan Tang, An Chen, Bin Liang, Guancong Ma, and Jian-Chun Cheng. 在合成三维非厄米声子晶体中实验实现外尔例外环。*Phys. Rev. Lett.*, 129:084301, 2022年8月。[271] Zhang-Zhao Yang, Xin Li, Yao-Yin Peng, Xin-Ye Zou, and Jian-Chun Cheng. 声学晶体绝缘体中的螺旋高阶拓扑态。*Physical Review Letters*, 125:255502, 2020年12月。[272]Fei Meng, Yafeng Chen, Weibai Li, Baohua Jia, and Xiaodong Huang. 在三维声学高阶拓扑绝缘体中实现多维声传播。*AppliedPhysics Letters*, 117:151903, 2020年10月。[273] Ying Wu, Mou Yan, Zhi-Kang Lin, Hai-Xiao Wang, Feng Li, and Jian-Hua Jiang. 片上高阶拓扑微机械超材料。*Science Bulletin*, 66:1959–1966, 2021年10月。[274] Zhen Wang, Qi Wei, Heng-Yi Xu, and Da-Jian Wu. 兰姆波系统中具有宽带隙的高阶拓扑绝缘体。*Journal of Applied Physics*, 127(7):075105, 2020年。[275] Changqing Xu, Ze-Guo Chen, Guanqing Zhang, Guancong Ma, and Ying Wu. 利用高阶拓扑声子晶体实现多维波束调控。*Science Bulletin*, 66:1740–1745, 2021年9月。[276]Yafei Ren, Zhenhua Qiao, and Qian Niu. 从二维拓扑绝缘体中设计角态。*Phys. Rev. Lett.*, 124:166804, 2020年4月。[277] Xueqin Huang, Jiuyang Lu, Zhongbo Yan, Mou Yan, Weiyin Deng, Gang Chen, and Zhengyou Liu. 利用内建类塞曼场从一阶拓扑导出声学高阶拓扑。*Science Bulletin*, 67:488–494, 2022年3月。[278] Haoran Xue, Yahui Yang, Fei Gao, Yidong Chong, and Baile Zhang. kagome晶格上的声学高阶拓扑绝缘体。*Nature Materials*, 18:108–112, 2019年2月。[279] Xiang Ni, Matthew Weiner, Andrea Al`u, and Alexander B. Khanikaev. 实验观测到受广义手征对称性保护的高阶拓扑声学态。*Nature Materials*, 18:113–120, 2019年2月。[280] Motohiko Ezawa. Wannier型高阶拓扑绝缘体和磷烯的最简模型。*Physical Review B*, 98:045125, 2018年7月。[281] Xiujuan Zhang, Le Liu, Ming-Hui Lu, and Yan-Feng Chen. 声子晶体中的谷选择性拓扑角态。*Phys. Rev. Lett.*, 126:156401, 2021年4月。[282] Haoran Xue, Yahui Yang, Guigeng Liu, Fei Gao, Yidong Chong, and Baile Zhang. 声学三阶拓扑绝缘体的实现。*Physical Review Letters*, 122:244301, 2019年6月。[283] Zhiwang Zhang, Houyou Long, Chen Liu, Chen Shao, Ying Cheng, Xiaojun Liu, and Johan Christensen. 深亚波长孔洞声学二阶拓扑绝缘体。*Advanced Materials*, 31:1904682, 2019年12月。[284]Zhang-Zhao Yang, Yao-Yin Peng, Xin Li, Xin-Ye Zou, and Jian-Chun Cheng. 拓扑声学谐振器阵列中的边界依赖角态。*Applied Physics Letters*, 117(11):113501, 2020年。[285] Ze-Guo Chen, Changqing Xu, Rasha Al Jahdali, Jun Mei, and Ying Wu. 二阶声学拓扑绝缘体中的角态：连续谱中的束缚态。*Phys. Rev. B*,

100:075120, 2019年8月。[286] Xiujuan Zhang、Zhi-Kang Lin、Hai-Xiao Wang、Zhan Xiong、Yuan Tian、Ming-Hui Lu、Yan-Feng Chen 和 Jian-Hua Jiang。非对称型超材料晶体中反常多极拓扑能带隙的对称性保护层级结构。《自然·通讯》，11:65，2020年12月。[287] Zhi-Kang Lin、Hai-Xiao Wang、Zhan Xiong、Ming-Hui Lu 和 Jian-Hua Jiang。二维非对称型声子晶体中的反常四极拓扑绝缘体。《物理评论*B*》，102:035105，2020年7月。[288] Wladimir A. Benalcazar 和 Alexander Cerjan。高阶拓扑绝缘体连续谱中的束缚态。《物理评论*B*》，101:161116，2020年4月。[289]Xiang Ni、Mengyao Li、Matthew Weiner、Andrea Al`u 和 Alexander B. Khanikaev。量子化声学八极拓扑绝缘体的演示。《自然·通讯》，11:2108，2020年12月。[290] Yating Yang、Jiuyang Lu、Mou Yan、Xueqin Huang、Weiyin Deng 和 Zhengyou Liu。声子晶体中的混合阶拓扑绝缘体。《物理评论快报》，126:156801，2021年4月。[291] Xiujuan Zhang、Bi-Ye Xie、Hong-Fei Wang、Xiangyuan Xu、Yuan Tian、Jian-Hua Jiang、Ming-Hui Lu 和 Yan-Feng Chen。三维声子晶体中高阶拓扑的维度层级结构。《自然·通讯》，10:5331，2019年11月。[292] Zhi-Kang Lin 和 Jian-Hua Jiang。准连续介质中的狄拉克锥与高阶拓扑。《欧洲物理快报》，137:15001，2022年。[293] Jian-Hua Jiang 和 Si Wu。费米面嵌套导致拓扑绝缘体边缘/表面的自旋磁化率与螺旋磁序。《物理评论*B*》，83:205124，2011年5月。[294] Feng Liu、Hai-Yao Deng 和 Katsunori Wakabayashi。四极相中的螺旋拓扑边缘态。《物理评论快报》，122:086804，2019年3月。[295] Wladimir A Benalcazar、Tianhe Li 和 Taylor L Hughes。c n 对称高阶拓扑晶体绝缘体中分数角电荷的量子化。*Physical Review B*，99(24):245151，2019年。[296] Xiaoxiao Wu、Yan Meng、Yiran Hao、Ruo-Yang Zhang、Jensen Li 和 Xiang Zhang。任意几何结构中由狄拉克涡旋诱导的拓扑角态。《物理评论快报》，126:226802，2021年6月。[297] Wladimir A. Benalcazar、B. Andrei Bernevig 和 Taylor L. Hughes。晶体绝缘体中的电多极矩、拓扑多极矩泵浦与手性铰链态。*Physical Review B*，96:245115，2017年12月。[298] Haiyan Fan、Baizhan Xia、Liang Tong、Shengjie Zheng 和 Dejie Yu。具有拓扑保护角态的弹性高阶拓扑绝缘体。《物理评论快报》，122:204301，2019年5月。[299] Chun-Wei Chen、Rajesh Chaunsali、Johan Christensen、Georgios Theocharis 和 Jinkyu Yang。二阶机械拓扑绝缘体中的角态。《通讯材料》，2:62，2021年12月。[300]Matthew Weiner、Xiang Ni、Mengyao Li、Andrea Al`u 和 Alexander B. Khanikaev。三维声学超材料中拓扑态三阶层级结构的演示。《科学进展》，6:eaay4166，2020年3月。[301] Shengjie Zheng、Baizhan Xia、Xianfeng Man、Liang Tong、Junrui Jiao、Guiju Duan 和 Dejie Yu。具有多维拓扑态的三维高阶拓扑声学系统。*Physical Review B*，102:104113，2020年9月。[302]Zhiwang Zhang、Bolun Hu、Feng Liu、Ying Cheng、Xiaojun Liu 和 Johan Christensen。相交声子晶格中由赝自旋诱导的拓扑角态。《物理评论*B*》，101:220102，2020年6月。[303] Hiromasa Wakao、Tsuneya Yoshida、Hiromu Araki、Tomonari Mizoguchi 和 Yasuhiro Hatsugai。呼吸型 kagome 晶格上弹簧-质量模型中的高阶拓扑相。《物理评论*B*》，101:094107，2020年3月。

[304] Byungmin Kang、Ken Shiozaki 和 Gil Young Cho。固体中多极矩的多体序参量。《物理评论B》，100:245134，2019年12月。[305] William A. Wheeler、Lucas K. Wagner 和 Taylor L. Hughes。扩展系统中的多体电多极算符。《物理评论B》，100:245135，2019年12月。[306] Seishiro Ono、Luka Trifunovic 和 Haruki Watanabe。体四极矩基于算符表述的困难。《物理评论B》，100:245133，2019年12月。[307] Haoran Xue、Yong Ge、Hong-Xiang Sun、Qiang Wang、Ding Jia、Yi-Jun Guan、Shou-Qi Yuan、Yidong Chong 和 Baile Zhang。声学八极拓扑绝缘体的观测。《自然·通讯》，11:2442，2020年12月。[308] Mou Yan、Xueqin Huang、Li Luo、Jiuyang Lu、Weiyin Deng 和 Zhengyou Liu。声学平方根拓扑态。《物理评论B》，102:180102，2020年11月。[309] Zhiwang Zhang、Mar´ıa Rosendo L´opez、Ying Cheng、Xiaojun Liu 和 Johan Christensen。非厄米声学二阶拓扑绝缘体。《物理评论快报》，122(19):195501，2019年5月。[310]QuanSheng Wu、Alexey A Soluyanov 和 Tom´aˇs Bzduˇsek。非相互作用金属中的非阿贝尔能带拓扑。《科学》，365(6459):1273–1277，2019年。[311] Junyeong Ahn、Sungjoon Park、Dongwook Kim、Youngkuk Kim 和 Bohm-Jung Yang。能带理论中的 Stiefel–Whitney 类与拓扑相。《中国物理 B》，28(11):117101，2019年。[312] Max Karoubi。K理论：导论，第226卷。Springer Science & Business Media，2008年。[313] Chen Fang、Yige Chen、Hae-Young Kee 和 Liang Fu。有自旋轨道耦合及无自旋轨道耦合的拓扑节点线半金属。《物理评论 B 》，92(8):081201，2015年。[314] Chen Fang、Hongming Weng、Xi Dai 和 Zhong Fang。拓扑节点线半金属。《中国物理 B》，25(11):117106，2016年。[315] Junyeong Ahn、Dongwook Kim、Youngkuk Kim 和 Bohm-Jung Yang。具有 z 2 磁单极子电荷的节线半金属的能带拓扑与链接结构。《物理评论快报》，121(10):106403，2018年。[316] Haedong Park 和 Sang Soon Oh。声子和光子拓扑半金属中非阿贝尔拓扑荷的符号自由度。《新物理学杂志》，24(5):053042，2022年。[317] Qinghua Guo、Tianshu Jiang、Ruo-Yang Zhang、Lei Zhang、Zhao-Qing Zhang、Biao Yang、Shuang Zhang 和 Che Ting Chan。非阿贝尔拓扑荷与边缘态的实验观测。《自然》，594(7862):195–200，2021年。[318] Adrien Bouhon、QuanSheng Wu、Robert-Jan Slager、Hongming Weng、Oleg V Yazyev 和 Tom´aˇs Bzduˇsek。Weyl 点的非阿贝尔互易编织及其在碲化锆中的表现。《自然·物理》，16(11):1137–1143，2020年。[319] Junyeong Ahn、Sungjoon Park 和 Bohm-Jung Yang。时空反演对称二维系统中 Nielsen–Ninomiya 定理的失效与脆弱拓扑：在魔角扭转双层石墨烯中的应用。《物理评论X》，9(2):021013，2019年。[320] Adrien Bouhon、Tom´aˇs Bzduˇsek 和 Robert-Jan Slager。超越对称性指标研究脆弱拓扑的几何方法。《物理评论B》，102(11):115135，2020年。[321] Apoorv Tiwari 和 Tom´aˇs Bzduˇsek。PT 对称系统中节线环的非阿贝尔拓扑。《物理评论B》，101(19):195130，2020年。[322] Jian Kang 和 Oskar Vafek。魔角扭转双层石墨烯中非阿贝尔狄拉克节点编织与奇整数填充时关联相的近简并。《物理评论B》，102(3):035161，2020年。[323] Bo Peng、Adrien Bouhon、Bartomeu Monserrat 和 Robert-Jan Slager。声子作为非阿贝尔编织的平台及其在层状硅酸盐中的表现。《自然·通讯》，13(1):1–15，2022年。[324]Adrien Bouhon 和 Robert-Jan Slager。通过能带节点编织实现欧拉类的多能隙拓扑转换：最简模型、 pt链接节点环与手性后代。arXiv预印本 arXiv:2203.167

[325] Tianshu Jiang、Ruo-Yang Zhang、Qinghua Guo、Biao Yang 和 CT Chan。从特征向量标架旋转的视角研究二维非阿贝尔拓扑绝缘体中的边缘态和角态。arXiv预印本 arXiv:2209.09466，2022年。[326] Motohiko Ezawa。具有PT对称性的非厄米非阿贝尔拓扑绝缘体。Physical Review Research，3(4):043006，2021年。.[327] Robert-Jan Slager、Adrien Bouhon 和 F Nur Unal。Floquet多能隙拓扑：非阿贝尔编织与反常狄拉克弦相。arXiv预印本 arXiv:2208.12824，2022年。[328] Dongyang Wang、Biao Yang、Mudi Wang、Ruo-Yang Zhang、Xiao Li、ZQ Zhang、Shuang Zhang 和 CT Chan。实验演示连接多个节点链的非相邻能带拓扑。arXiv预印本 arXiv:2210.15880，2022年。[329] Siyu Chen、Adrien Bouhon、Robert-Jan Slager 和 Bartomeu Monserrat。通过对称性约束相变实现外尔节点的非阿贝尔编织。Physical Review B，105(8):L081117，2022年。[330] Bo Peng、Adrien Bouhon、Robert-Jan Slager 和 Bartomeu Monserrat。基于第一性原理研究声子的多能隙拓扑与非阿贝尔编织。Physical Review B，105(8):085115，2022年。[331] Gunnar F Lange、Adrien Bouhon、Bartomeu Monserrat 和 Robert-Jan Slager。二维声学声子的拓扑连续体荷与南部-戈德斯通定理。Physical Review B，105(6):064301，2022年。[332] Tianshu Jiang、Qinghua Guo、Ruo-Yang Zhang、Zhao-Qing Zhang、Biao Yang 和 Che Ting Chan。四能带非阿贝尔拓扑绝缘体及其实验实现。《自然·通讯》，12(1):1–9，2021年。[333] Bin Jiang、Adrien Bouhon、Zhi-Kang Lin、Xiaoxi Zhou、Bo Hou、Feng Li、Robert-Jan Slager 和 Jian-Hua Jiang。非阿贝尔拓扑声学半金属及其相变的实验观测。《自然·物理》，17:1239–1246，2021年。[334] Huahui Qiu、Qicheng Zhang、Tingzhi Liu、Xiying Fan、Fan Zhang 和 Chunyin Qiu。理想超材料中的最简非阿贝尔节点编织。arXiv预印本 arXiv:2202.01467，2022年。[335] Bin Jiang、Adrien Bouhon、Shi-Qiao Wu、Ze-Lin Kong、Zhi-Kang Lin、Robert-Jan Slager 和 Jian-Hua Jiang。莫罗尼拓扑声学欧拉绝缘体的实验观测。arXiv预印本 arXiv:2205.03429，2022年。[336] Haedong Park、Stephan Wong、Xiao Zhang 和 Sang Soon Oh。介电光子晶体中的非阿贝尔带电节点链。ACS Photonics，8(9):2746–2754，2021年。.[337] F Nur Unal、Adrien Bouhon 和 Robert-Jan Slager。光学晶格中拓扑欧拉类作为动力学可观测量。《物理评论快报》，125(5):053601，2020年。[338] Mudi Wang、Shan Liu、Qiyun Ma、Ruo-Yang Zhang、Dongyang Wang、Qinghua Guo、Biao Yang、Manzhu Ke、Zhengyou Liu 和 CT Chan。声子晶体中非阿贝尔耳环节点链的实验观测。《物理评论快报》，128(24):246601，2022年。[339] Dongyang Wang、Biao Yang、Qinghua Guo、Ruo-Yang Zhang、Lingbo Xia、Xiaoqiang Su、Wen-Jie Chen、Jiaguang Han、Shuang Zhang 和 Che Ting Chan。光子学中的本征面内节点链与广义四元数荷保护的节点链。《光：科学与应用》，10(1):1–9，2021年。[340] Dongyang Wang、ZQ Zhang 和 CT Chan。利用光子晶体演示非阿贝尔标架荷流。arXiv预印本 arXiv:2202.02978，2022年。[341] Haedong Park、Stephan Wong、Adrien Bouhon、Robert-Jan Slager 和 Sang Soon Oh。弹簧-质量系统中非阿贝尔带电节点链的相变。arXiv预印本 arXiv:2204.00351，2022年。[342] Haedong Park、Wenlong Gao、Xiao Zhang 和 Sang Soon Oh。动量空间中的节点线：拓扑不变量及光子学和其他系统中的近期实现。Nanophotonics，11(11):2779–2801，2022年。[343] Ziming Zhu、Georg W Winkler、QuanSheng Wu、Ju Li 和 Alexey A Soluyanov。三重点拓扑金属。Physical Review X，6(3):031003，2016年。[344] Georg W Winkler、Sobhit Singh 和 Alexey A Soluyanov。三重点金属的拓扑。

《中国物理 B》，28(7):077303，2019年。[345] Patrick M Lenggenhager、Xiaoxiong Liu、Stepan S Tsirkin、Titus Neupert 和 Tom´aˇs Bzduˇsek。《从三重点材料到多能带节点链》。Physical Review B，103(12):L121101，2021年。[346] Sungjoon Park、Yoonseok Hwang、Hong Chul Choi 和 Bohm-Jung Yang。《拓扑声学三重点》。《自然·通讯》，12(1):1–9，2021年。[347] Xiaolong Feng、Weikang Wu、Yuexin Huang、Zhi-Ming Yu 和 Shengyuan A Yang。《三维无自旋系统中的三重简并点》。Physical Review B，104(11):115116，2021年。[348] Ankur Das、Eyal Cornfeld 和 Sumiran Pujari。arXiv预印本 arXiv:2205.07814，2022年。[349] Patrick M Lenggenhager、Xiaoxiong Liu、Titus Neupert 和 Tom´aˇs Bzduˇsek。《由节点线结构表征的所有磁空间群中的三节点点》。arXiv预印本 arXiv:2201.08404，2022年。[350] Patrick M Lenggenhager、Xiaoxiong Liu、Titus Neupert 和 Tom´aˇs Bzduˇsek。《三节点点的普适高阶体边对应》。Physical Review B，106(8):085129，2022年。[351] Cui-Xian Guo、Shu Chen、Kun Ding 和 Haiping Hu。《多能带非厄米系统中的例外非阿贝尔拓扑》。arXiv预印本 arXiv:2210.17031，2022年。[352] J Lukas K K¨onig、Kang Yang、Jan Carl Budich 和Emil J Bergholtz。《编织保护的拓扑能带结构与未配对例外点》。arXiv预印本 arXiv:2211.05788，2022年。[353] Motohiko Ezawa。《拓扑欧拉绝缘体及其电路实现》。Physical Review B，103(20):205303，2021年。[354] Wending Zhao、Yan-Bin Yang、Yue Jiang、Zhichao Mao、Weixuan Guo、Liyuan Qiu、Gangxi Wang、Lin Yao、Li He、Zichao Zhou 等。《拓扑欧拉绝缘体的量子模拟》。《通讯物理》，5(1):1–8，2022年。[355] Yifei Guan、Adrien Bouhon 和 Oleg V Yazyev。《欧拉类拓扑的朗道能级》。Physical Review Research，4(2):023188，2022年。[356] N David Mermin。《有序介质中缺陷的拓扑理论》。《现代物理评论》，51(3):591，1979年。[357] Maurice Kleman 和 Jacques Friedel。《向错、位错与连续缺陷：重新审视》。《现代物理评论》，80(1):61，2008年。[358] Jeffrey CY Teo 和 Charles L Kane。《绝缘体和超导体中的拓扑缺陷与无能隙模式》。Physical Review B，82(11):115120，2010年。[359] Ying Ran、Yi Zhang 和 Ashvin Vishwanath。《具有晶格位错的拓扑绝缘体中的一维拓扑保护模》。《自然·物理》，5(4):298–303，2009年。[360] Fernando de Juan、Andreas R¨uegg 和 Dung-Hai Lee。《粒子-空穴对称绝缘体与半金属中的体-缺陷对应》。Physical Review B，89(16):161117，2014年。[361] Jeffrey CY Teo 和 Taylor L Hughes。《对称性保护拓扑相中的拓扑缺陷》。《凝聚态物理年度评论》，8:211–237，2017年。[362] Tianhe Li、Penghao Zhu、Wladimir A Benalcazar 和 Taylor L Hughes。《二维 c n 对称拓扑晶体绝缘体中的分数旋错电荷》。Physical Review B，101(11):115115，2020年。[363] Guido Van Miert 和 Carmine Ortix。《位错电荷揭示二维拓扑晶体不变量》。Physical Review B，97(20):201111，2018年。[364]Max Geier、Ion Cosma Fulga 和 Alexander Lau。《旋转对称拓扑绝缘体与超导体中向错处的体-边-缺陷对应》。SciPost Physics，10(4):092，2021年。[365] Rodrigo Soto-Garrido、Enrique Mu˜noz 和 Vladimir Juriˇci´c。《位错缺陷作为多重外尔半金属磁单极子电荷的体探针》。Physical Review Research，2(1):012043，2020年。[366] Ze-Lin Kong、Zhi-Kang Lin 和 Jian-Hua Jiang。《体与边缘的拓扑Wannier循环》

[367] Frank Schindler、Stepan S Tsirkin、Titus Neupert、B Andrei Bernevig 和 Benjamin J Wieder。三维绝缘体中的拓扑零维缺陷与磁通态。《自然·通讯》，13(1):1–18，2022年。[368] Zhi-Kang Lin、Qiang Wang、Yang Liu、Haoran Xue、Baile Zhang、Yidong Chong 和 Jian-Hua Jiang。拓扑缺陷中的拓扑现象。*arXiv*预印本 *arXiv:2208.05082*，2022年。[369]Hiromu Hamasaki、Yuki Tokumoto 和 Keiichi Edagawa。铋锑拓扑绝缘体中的位错导电。《应用物理快报》，110(9):092105，2017年。[370] Abhay Kumar Nayak、Jonathan Reiner、Raquel Queiroz、Huixia Fu、Chandra Shekhar、Binghai Yan、Claudia Felser、Nurit Avraham 和 Haim Beidenkopf。利用拓扑缺陷厘清铋的拓扑分类。《科学进展》，5(11):eaax6996，2019年。[371] Jayson Paulose、Bryan Gin-ge Chen 和 Vincenzo Vitelli。机械超材料中束缚于位错的拓扑模式。《自然·物理》，11(2):153–156，2015年。[372] Fei-Fei Li、Hai-Xiao Wang、Zhan Xiong、Qun Lou、Ping Chen、Rui-Xin Wu、Yin Poo、Jian-Hua Jiang 和 Sajeev John。位错上的拓扑光俘获。《自然·通讯》，9(1):1–8，2018年。[373] Inbar Hotzen Grinberg、Mao Lin、Wladimir A Benalcazar、Taylor L Hughes 和 Gaurav Bahl。弱磁机械拓扑绝缘体中位错处的束缚态。《物理评论·应用》，14(6):064042，2020年。[374] Sasha S Yamada、Tianhe Li、Mao Lin、Christopher W Peterson、Taylor L Hughes 和 Gaurav Bahl。多极高阶拓扑绝缘体中部分位错缺陷处的束缚态。《自然·通讯》，13(1):1–8，2022年。[375] Xiao-Dong Chen、Fu-Long Shi、Jian-Wei Liu、Ke Shen、Xin-Tao He、Wen-Jie Chen 和 Jian-Wen Dong。具有内禀非平庸拓扑的四维合成平移空间中的第二陈晶体。*arXiv*预印本 *arXiv:2112.05356*，2021年。[376]Liping Ye、Chunyin Qiu、Meng Xiao、Tianzi Li、Juan Du、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。三维声学拓扑绝缘体中的拓扑位错模。《自然·通讯》，13(1):1–7，2022年。[377] Haoran Xue、Ding Jia、Yong Ge、Yi-jun Guan、Qiang Wang、Shou-qi Yuan、Hong-xiang Sun、YD Chong 和 Baile Zhang。三维声学拓扑绝缘体中位错诱导拓扑模式的观测。《物理评论快报》，127(21):214301，2021年。[378] Zhi-Kang Lin、Ying Wu、Bin Jiang、Yang Liu、Shi-Qiao Wu、Feng Li 和 Jian-Hua Jiang。声子晶胞中亚晶胞人工规范磁通诱导的拓扑Wannier循环。《自然·材料》，21:430–437，2022年。[379] Eran Lustig、Lukas J Maczewsky、Julius Beck、Tobias Biesenthal、Matthias Heinrich、Zhaoju Yang、Yonatan Plotnik、Alexander Szameit 和 Mordechai Segev。三维中由位错诱导的光子拓扑绝缘体。《自然》，609(7929):931–935，2022年。[380] Tianhe Li、Penghao Zhu、Wladimir A Benalcazar 和 Taylor L Hughes。二维 c n 对称拓扑晶体绝缘体中的分数旋错电荷。*Physical Review B*，101(11):115115，2020年。[381] Bi-Ye Xie、Oubo You 和 Shuang Zhang。手性向错态之间的光子拓扑泵。《物理评论*A*》，106(2):L021502，2022年。[382] Yang Liu、Shuwai Leung、Fei-Fei Li、Zhi-Kang Lin、Xiufeng Tao、Yin Poo 和 Jian-Hua Jiang。拓扑晶体绝缘体中的体态—位错角对应关系。《自然》，589(7842):381– 385，2021年。[383] Christopher W Peterson、Tianhe Li、Wentao Jiang、Taylor L Hughes 和 Gaurav Bahl。拓扑绝缘体体缺陷处的束缚分数电荷。《自然》，589(7842):376–380，2021年。[384] ChengpengLiang、Yang Liu、Fei-Fei Li、Shuwai Leung、Yin Poo 和 Jian-Hua Jiang。光子边缘和角处分数拓扑数的观测。*arXiv:2203.00206*，2022年。[385] Hao Ge、Zi-Wei Long、Xiang-Yuan Xu、Yang Liu、Bi-Ye Xie、Jian-Hua Jiang、Ming-Hui Lu 和 Yan-Feng Chen。声学谱密度和分数拓扑荷的直接测量。*arXiv*，第2208.11882页，2022年。

[386] Qiang Wang、Yong Ge、Hong-xiang Sun、Haoran Xue、Ding Jia、Yi-jun Guan、Shou-qi Yuan、Baile Zhang 和 YD Chong。具有拓扑晶格缺陷的声学 Weyl 晶体中的涡旋态。《自然·通讯》，12(1):1–8，2021年。[387] Yuanchen Deng、Wladimir A Benalcazar、Ze-Guo Chen、Mourad Oudich、Guancong Ma 和 Yun Jing。在声学晶格的位旋处观测到简并零能拓扑态。《物理评论快报》，128(17):174301，2022年。[388] Ying Chen、Yuhang Yin、Zhi-Kang Lin、Ze-Huan Zheng、Yang Liu、Jing Li、Jian-Hua Jiang 和 Huanyang Chen。在非欧几里得声学超材料中观测到拓扑 p 轨道位错态。《物理评论快报》，129(15):154301，2022年。[389] Jingwen Ma、Xiang Xi、Yuan Li 和 Xiankai Sun。具有辅助轨道自由度的纳米机械拓扑绝缘体。《自然·纳米技术》，16(5):576–583，2021年4月。[390] Adrian J Menssen、Jun Guan、David Felce、Martin J Booth 和 Ian A Walmsley。束缚于涡旋的光子拓扑模式。《物理评论快报》，125(11):117401，2020年。[391] Jiho Noh、Thomas Schuster、Thomas Iadecola、Sheng Huang、Mohan Wang、Kevin P Chen、Claudio Chamon 和 Mikael C Rechtsman。光子拓扑零模的编织。《自然·物理》，16(9):989–993，2020年。[392] Xiaomei Gao、Lechen Yang、Hao Lin、Lang Zhang、Jiafang Li、Fang Bo、Zhong Wang 和 Ling Lu。狄拉克涡旋拓扑腔。《自然·纳米技术》，15(12):1012–1018，2020年。[393] Xiang Xi、Jingwen Ma 和 Xiankai Sun。一种拓扑狄拉克涡旋参量声子激光器。arXiv预印本 arXiv:2107.11162，2021年。[394] Lechen Yang、Guangrui Li、Xiaomei Gao 和 Ling Lu。拓扑腔面发射激光器。《自然·光子学》，16(4):279–283，2022年。[395] Jingwen Ma、Taojie Zhou、Mingchu Tang、Haochuan Li、Zhan Zhang、Xiang Xi、Mickael Martin、Thierry Baron、Huiyun Liu、Zhaoyu Zhang 等。硅基室温连续波狄拉克涡旋拓扑激光器。arXiv预印本 arXiv:2106.13838，2021年。[396] Y X Zhao、C Chen、X L Sheng 和 S A Yang。利用射影 PT 对称性切换无自旋和有自旋拓扑相。《物理评论快报》，126:196402，2021年。[397] L B Shao、Q Liu、R Xiao、S A Yang 和 Y X Zhao。规范场扩展的 k.p 方法与新型拓扑相。《物理评论快报》，127:076401，2021年。[398] Z Y Chen、S A Yang 和 Y X Zhao。人工规范场产生的布里渊克莱因瓶。《自然·通讯》，13:2215，2022年。[399] Y X Zhao、Y X Huang 和 S A Yang。受 Z_2 射影平移对称性保护的拓扑相。《物理评论B》，102:161117(R)，2020年。[400] H Xue、Z Wang、Y Huang、Z Cheng、L Yu、Y X Foo、Y X Zhao、S A Yang 和 B Zhang。声学晶体中的射影富集对称性与拓扑。《物理评论快报》，128:116802，2022年。[401] T Li、J Du、Q Zhang、Y Li、X Fan、F Zhang 和 C Qiu。由射影对称性产生的声学莫比乌斯¨绝缘体。《物理评论快报》，128:116803，2022年。[402]D. Zeb Rocklin、Shangnan Zhou、Kai Sun 和 Xiaoming Mao。可变形拓扑机械超材料。《自然·通讯》，8:14201，2017年。[403] Oraib Al-Ketan、Reza Rowshan 和 Rashid K. Abu Al-Rub。3D打印的杆状、骨架状及片状周期性金属胞元材料的拓扑—力学性能关系。《增材制造》，19:167–183，2018年。[404] H. Chen、H. Nassar 和 G.L. Huang。一维和二维机械晶格中拓扑效应的研究。《固体与结构力学杂志》，117:22–36，2018年。[405] Yi Chen、Xiaoning Liu 和 Gengkai Hu。机械蜂窝晶格中的拓扑相变。《固体与结构力学杂志》，122:54–68，2019年。[406] Jan Attig、Krishanu Roychowdhury、Michael J. Lawler 和 Simon Trebst。基于超对称性的拓扑力学。《物理评论研究》，1:032047，2019年12月。[407] Vishal P. Patil、Joseph D. Sandt、Mathias Kolle 和 J¨orn Dunkel。纽结与缠结的拓扑力学。《科学》，367(6473):71–75，2020年。

[408]Wei Wang、Yabin Jin、Wan Wang、Bernard Bonello、Bahram Djafari-Rouhani 和 Romain Fleury。拓扑机械梁中的稳健法诺共振。《物理评论B》，101:024101，2020年1月。[409] Lea Sirota、Roni Ilan、Yair Shokef 和 Yoav Lahini。利用反馈控制实现的非牛顿拓扑机械超材料。《物理评论快报》，125:256802，2020年12月。[410] J H Hannay。可积哈密顿量绝热偏移中的角变量全纯。《物理学杂志A：数学与一般物理》，18(2):221–230，1985年2月。[411] Sebastian D. Huber。拓扑力学。《自然·物理》，12:621–623，2016年。[412]Roman S¨usstrunk 和 Sebastian D. Huber。线性机械超材料中拓扑声子的分类。《美国国家科学院院刊》，113(33):E4767–E4775，2016年。[413] C.L. Kane。第1章——拓扑能带理论与Z_2不变量。载于 Marcel Franz 和 Laurens Molenkamp 编，《拓扑绝缘体》，第6卷，《凝聚态科学当代概念》，第3–34页。爱思唯尔，2013年。[414] A. Bansil、Hsin Lin 和 Tanmoy Das。专题讨论：拓扑能带理论。《现代物理评论》，88:021004，2016年6月。[415] Barry Bradlyn、L. Elcoro、Jennifer Cano、M. G. Vergniory、Zhijun Wang、C. Felser、M. I. Aroyo 和 B. Andrei Bernevig。拓扑量子化学。《自然》，547:298–305，2017年。[416]D. Zeb Rocklin、Bryan Gin-ge Chen、Martin Falk、Vincenzo Vitelli 和 T. C. Lubensky。拓扑麦克斯韦晶格中的机械威尔模态。《物理评论快报》，116:135503，2016年4月。[417] Anne S. Meeussen、Jayson Paulose 和 Vincenzo Vitelli。机械稳定性可调的齿轮式拓扑超材料。《物理评论X》，6:041029，2016年11月。[418] Xiaoming Mao 和 Tom C. Lubensky。麦克斯韦晶格与拓扑力学。《凝聚态物理年度评论》，9(1):413–433，2018年。[419] J. Clerk Maxwell。关于框架平衡与刚度的计算。《哲学杂志》，27(182):294–299，1864年。[420] C.R. Calladine。Buckminster Fuller的“张拉整体”结构与克拉克·麦克斯韦规则在刚性框架构造中的应用。《国际固体与结构杂志》，14(2):161–172，1978年。[421] Kai Sun、Anton Souslov、Xiaoming Mao 和 T. C. Lubensky。扭曲笃耨晶格中的表面声子、弹性响应与共形不变性。《美国国家科学院院刊》，109(31):12369–12374，2012年。[422] T C Lubensky、C L Kane、Xiaoming Mao、A Souslov 和 Kai Sun。临界协调晶格中的声子与弹性。《物理学进展报告》，78(7):073901，2015年6月。[423] Jayson Paulose、Anne S. Meeussen 和 Vincenzo Vitelli。通过拓扑超材料中的自应力态实现选择性屈曲。《美国国家科学院院刊》，112(25):7639–7644，2015年。[424] Pai Wang、Ling Lu 和 Katia Bertoldi。具有单向弹性边缘波的拓扑声子晶体。《物理评论快报》，115:104302，2015年9月。[425] Lisa M. Nash、Dustin Kleckner、Alismari Read、Vincenzo Vitelli、Ari M. Turner 和 William T. M. Irvine。陀螺超材料的拓扑力学。《美国国家科学院院刊》，112(47):14495–14500，2015年。[426] Noah P. Mitchell、Lisa M. Nash 和 William T. M. Irvine。陀螺晶格中的可调能带拓扑。《物理评论B》，98:174301，2018年11月。[427] Xinhua Wen、Chunyin Qiu、Yajuan Qi、Liping Ye、Manzhu Ke、Fan Zhang 和 Zhengyou Liu。声学朗道量子化与量子霍尔类边缘态。《自然·物理》，15(4):352–356，2019年3月。[428] Raj Kumar Pal、Marshall Schaeffer 和 Massimo Ruzzene。利用双层晶格实现声子系统中的螺旋边缘态与拓扑相变。《应用物理学杂志》，119(8):084305，2016年。[429] T. Mullin、S. Deschanel、K. Bertoldi 和 M. C. Boyce。由变形触发的图案转变。《物理评论快报》，99:084301，2007年8月。[430]Jong min Shim、Claude Perdigou、Elizabeth R. Chen、Katia Bertoldi 和 Pedro M. Reis。

压力作用下结构化弹性壳的屈曲诱导包覆。《美国国家科学院院刊》, 109(16):5978–5983, 2012年。[431] Corentin Coulais、Johannes T. B. Overvelde、Luuk A. Lubbers、Katia Bertoldi 和 Martin van Hecke。宽梁和超材料梁的不连续屈曲。《物理评论快报》, 115:044301, 2015年7月。[432] Ananya Ghatak、Martin Brandenbourger、Jasper van Wezel 和 Corentin Coulais。主动机械超材料中非厄米拓扑及其体边对应的观测。《美国国家科学院院刊》, 117(47):29561–29568, 2020年。[433] Ananya Ghatak、Martin Brandenbourger、Jasper van Wezel 和 Corentin Coulais。主动机械超材料中非厄米拓扑及其体边对应的观测。《美国国家科学院院刊》, 117(47):29561–29568, 2020年。[434]Po-Wei Lo、Christian D. Santangelo、Bryan Gin-ge Chen、Chao-Ming Jian、Krishanu Roychowdhury 和 Michael J. Lawler。非线性机械系统中的拓扑。《物理评论快报》, 127:076802, 2021年8月。[435] Bryan Gin-ge Chen、Bin Liu、Arthur A. Evans、Jayson Paulose、Itai Cohen、Vincenzo Vitelli 和 C. D. Santangelo。折纸与剪纸的拓扑力学。《物理评论快报》, 116:135501, 2016年3月。[436] B. Deng、J. R. Raney、K. Bertoldi 和 V. Tournat。柔性机械超材料中的非线性波。《应用物理杂志》, 130(4):040901, 2021年。[437]Jayson Paulose、Bryan Gin-ge Chen 和 Vincenzo Vitelli。束缚于机械超材料位错的拓扑模式。《自然·物理》, 11:153–156, 2015年。[438] Jinwoong Cha、Kun Woo Kim 和 Chiara Daraio。片上拓扑纳机电超材料的实验实现。《自然》, 564(7735):229–233, 2018年12月。[439] Zi-Dong Zhang、Si-Yuan Yu、Hao Ge、Ji-Qian Wang、Hong-Fei Wang、Kang-Fu Liu、Tao Wu、Cheng He、Ming-Hui Lu 和 Yan-Feng Chen。拓扑表面声波。*Phys. Rev.Applied*, 16:044008, 2021年10月。[440] Jingwen Ma、Xiang Xi、Yuan Li 和 Xiankai Sun。具有辅助轨道自由度的纳米机械拓扑绝缘体。《自然·纳米技术》, 16(5):576–583, 2021年。[441] Mou Yan、Jiuyang Lu、Feng Li、Weiyin Deng、Xueqin Huang、Jiahong Ma 和 Zhengyou Liu。用于弹性波操控的片上谷拓扑材料。《自然·材料》, 17(11):993–998, 2018年10月。[442]Hengjiang Ren、Tirth Shah、Hannes Pfeifer、Christian Brendel、Vittorio Peano、Florian Marquardt 和 Oskar Painter。光机械系统中的拓扑声子输运。《自然·通讯》, 13:3476, 2022年。[443]Jingwen Ma、Xiang Xi 和 Xiankai Sun。双频纳机电谷霍尔拓扑超材料的实验演示。《先进材料》, 33:2006521, 2021年2月。[444]K. Tang、M. Makwana、R. V. Craster 和 P. Sebbah。可重构弹性板中对称性诱导的拓扑模态导引的观测。*Physical Review B*, 102:214103, 2020年12月。[445] Xiang Xi、Jingwen Ma、Shuai Wan、Chun-Hua Dong 和 Xiankai Sun。有带隙纳米机械石墨烯中手性边缘态的观测。*Sci. Adv.*, 7:eabe1398, 2021年1月。[446] Ying Wu、Jiuyang Lu、Xueqin Huang、Yating Yang、Li Luo、Linyun Yang、Feng Li、Weiyin Deng 和 Zhengyou Liu。全矢量弹性波的拓扑材料。*National Science Review*, 2022年9月。nwac203。[447] Ji Qian Wang、Zi Dong Zhang、Si Yuan Yu、Hao Ge、Kang Fu Liu、Tao Wu、Xiao Chen Sun、Le Liu、Hua Yang Chen、Cheng He、Ming Hui Lu 和 Yan Feng Chen。扩展型拓扑谷锁定表面声波。《自然·通讯》, 13(1):1324, 2022年3月。[448] Zhongming Gu、He Gao、Pei Chao Cao、Tuo Liu、Xue Feng Zhu 和 Jie Zhu。非厄米声学系统中的声音控制。《物理评论·应用》, 16(4):057001, 2021年11月。[449] Kun Ding、Guancong Ma、Meng Xiao、Z. Q. Zhang 和 C. T. Chan。多个异常点的出现、合并,

以及其拓扑性质和实验实现。*Physical Review X*, 6(2):021007, 2016年4月。[450] Mudi Wang、Liping Ye、J. Christensen 和 Zhengyou Liu。非厄米人工声学氮化硼中的谷物理。《物理评论快报》, 120(24):246601, 2018 年 6 月。[451]He Gao 、 Haoran Xue 、 Qiang Wang 、 Zhongming Gu 、 Tuo Liu、Jie Zhu 和 Baile Zhang。声学晶体中完全由非厄米性诱导的拓扑边缘态的观测。《物理评论*B*》, 101(18):180303, 2020年5月。[452] Martin Brandenbourger、Xander Locsin、Edan Lerner 和 Corentin Coulais。非互易机器人超材料。《自然·通讯》, 10(1):4608, 2019年10月。[453] Li Zhang、Yihao Yang、Yong Ge、Yi Jun Guan、Qiaolu Chen、Qinghui Yan、Fujia Chen、Rui Xi、Yuanzhen Li、Ding Jia、Shou Qi Yuan、Hong Xiang Sun、Hongsheng Chen 和 Baile Zhang。扭转绕数拓扑导致的声学非厄米趋肤效应。《自然·通讯》, 12(1):6297, 2021年11月。[454] Xiujuan Zhang、Yuan Tian、Jian Hua Jiang、Ming Hui Lu 和 Yan Feng Chen。高阶非厄米趋肤效应的观测。《自然·通讯》, 12(1):5377, 2021年9月。[455] He Gao、Haoran Xue、Zhongming Gu、Linhu Li、Weiwei Zhu、Zhongqing Su、Jie Zhu、Baile Zhang 和 Y. D. Chong。环形谐振器晶格中的非厄米趋肤效应。2022年5月。[456] Penglin Gao、Morten Willatzen 和 Johan Christensen。非厄米压电声子介质中的反常拓扑边缘态。《物理评论快报》, 125(20):206402, 2020年11月。[457]Yangyang Chen、Xiaopeng Li、Colin Scheibner、Vincenzo Vitelli 和 Guoliang Huang。奇微极弹性主动超材料的实现。《自然·通讯》, 12(1):5935, 2021年10月。[458] Colin Scheibner、William T. M. Irvine 和 Vincenzo Vitelli。主动弹性介质中的非厄米能带拓扑与趋肤模。《物理评论快报》, 125:118001, 2020年9月。[459] Lucas S. Palacios、Serguei Tchoumakov、Maria Guix、Ignacio Pagonabarraga、Samuel S´anchez 和 Adolfo G. Grushin。通过二阶趋肤效应的拓扑设计引导主动粒子聚集。《自然·通讯》, 12(1):4691, 2021年8月。[460] Ananya Ghatak、Martin Brandenbourger、Jasper Van Wezel 和 Corentin Coulais。主动机械超材料中非厄米拓扑及其体边对应的观测。美国国家科学院院刊, 117(47):29561–29568, 2020年11月。[461] Wei Wang、Xulong Wang 和 Guancong Ma。拓扑模式的非厄米变形。《自然》, 608:50–55, 2022年。[462] Wei Xin Teo、Weiwei Zhu 和 Jiangbin Gong。具有零相位锁定的可调二维激光阵列。《物理评论*B*》, 105:L201402, 2022年5月。[463]Mou Yan、Weiyin Deng、Xueqin Huang、Ying Wu、Yating Yang、Jiuyang Lu、Feng Li 和 Zhengyou Liu。利用赝磁场操控片上弹性波。《物理评论快报》, 127(13):136401, 2021年9月。[464] Zhaoju Yang、Fei Gao、Yahui Yang 和 Baile Zhang。声学结构中的应变诱导规范场与朗道能级。《物理评论快报》, 118(19):194301, 2017年5月。[465] Hamed Abbaszadeh、Anton Souslov、Jayson Paulose、Henning Schomerus 和 Vincenzo Vitelli。机械超材料中的声学朗道能级与合成规范场。《物理评论快报》, 119(19):195502, 2017年11月。[466] Yihao Yang、Yong Ge、Rujiang Li、Xiao Lin、Ding Jia、Yi Jun Guan、Shou Qi Yuan、Hong Xiang Sun、Yidong Chong 和 Baile Zhang。合成规范场诱导负折射的演示。《科学进展》, 7(50):2062, 2021年12月。[467] Shengjie Zheng、Jie Zhang、Guiju Duan、Zihan Jiang、Xianfeng Man、Dejie Yu 和 Baizhan Xia。莫尔声子晶格中的声学朗道能级与范德华界面。2021年3月。[468] O. Boada、A. Celi、J. I. Latorre 和 M. Lewenstein。额外维度的量子模拟。《物理评论快报》, 108(13):133001, 2012年3月。

[469] Yaacov E. Kraus、Zohar Ringel 和 Oded Zilberberg。二维准晶体中的四维量子霍尔效应。《物理评论快报》，111(22):226401，2013年11月。[470] Dimitris I. Tsomokos、Sahel Ashhab 和 Franco Nori。利用超导量子比特电路构造奇异晶格系统。《物理评论A》，82(5):052311，2010年11月。[471] Luqi Yuan、Meng Xiao、Qian Lin 和 Shanhui Fan。光子学中的合成维度。《Optica》，5(11):1396–1405，2018年11月。[472] Wei Wang、Ze-Guo Chen 和 Guancong Ma。弹性超材料晶体中的合成三维 $\mathbb{Z} \times _2$ 拓扑绝缘体。《物理评论快报》，127:214302，2021年11月。[473]David J. Apigo、Wenting Cheng、Kyle F. Dobiszewski、Emil Prodan 和 Camelia Prodan。准周期声波导中拓扑边缘模的观测。《物理评论快报》，122:095501，2019年3月。[474] Yiwei Xia、Alper Erturk 和 Massimo Ruzzene。准周期局域共振超结构中的拓扑边缘态。《物理评论·应用》，13:014023，2020年1月。[475] Xiang Ni、Kai Chen、Matthew Weiner、David J. Apigo、Camelia Prodan、Andrea Al`u、Emil Prodan 和 Alexander B. Khanikaev。可重构准周期声学晶体中 Hofstadter 蝴蝶谱和拓扑边缘态的观测。《通讯物理》，2(1):55，2019年6月。[476] Zheng Wei Li、Bin Liang 和 Jian Chun Cheng。合成三维声学晶格中的 II 型外尔点。《Applied Physics Express》，15(3):037001，2022年3月。[477] Xiying Fan、Chunyin Qiu、Yuanyuan Shen、Hailong He、Meng Xiao、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。利用一维声子晶体探测 Weyl 物理。《物理评论快报》，122:136802，2019年4月。[478] Xiying Fan、Tianzhi Xia、Huahui Qiu、Qicheng Zhang 和 Chunyin Qiu。利用合成 Weyl 路径追踪谷拓扑。《物理评论快报》，128:216403，2022年5月。[479] Romain Fleury、Alexander B. Khanikaev 和 Andrea Al`u。用于声音的 Floquet 拓扑绝缘体。《自然·通讯》，7(1):11744，2016年6月。[480] Amir Darabi、Xiang Ni、Michael Leamy 和 Andrea Al`u。基于合成角动量偏置的可重构 Floquet 弹性动力学拓扑绝缘体。《科学进展》，6(29):8656–8673，2020年7月。[481] Yu Gui Peng、Zhi Guo Geng 和 Xue Feng Zhu。一维 Floquet 声波导系统中的拓扑保护束缚态。《应用物理学杂志》，123(9):091716，2018年2月。[482] Yu-Gui Peng、Ying Li、Ya-Xi Shen、Zhi-Guo Geng、Jie Zhu、Cheng-Wei Qiu 和 Xue-Feng Zhu。手性辅助三维声学Floquet晶格。《物理评论研究》，1:033149，2019年12月。[483] Weiwei Zhu、Haoran Xue、Jiangbin Gong、Yidong Chong 和 Baile Zhang。Floquet高阶拓扑产生的时间周期性角态。《自然·通讯》，13(1):11，2022年1月。[484] Zheyu Cheng、Raditya Weda Bomantara、Haoran Xue、Weiwei Zhu、Jiangbin Gong 和 Baile Zhang。声学Floquet系统中 π/2 模的观测。2022年7月。[485] Qi Wei、Ye Tian、Shu-Yu Zuo、Ying Cheng 和 Xiao-Jun Liu。声波导网络中拓扑保护的高效声音传播的实验演示。《物理评论B》，95:094305，2017年3月。[486]Liping Ye、Chunyin Qiu、Meng Xiao、Tianzi Li、Juan Du、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。三维声学拓扑绝缘体中的拓扑位错模。《自然·通讯》，13(1):508，2022年1月。[487] Shan Liu、Weiyin Deng、Xueqin Huang、Jiuyang Lu、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。基于声学拓扑绝缘体异质结构的稳健声波导传输。《物理评论·应用》，18(3):034066，2022年。[488] Shunda Yin、Liping Ye、Hailong He、Manzhu Ke 和 Zhengyou Liu。方形晶格异质结构中的声学谷锁定波导。《物理评论·应用》，18(5):054073，2022年

[489] D. J. Thouless。粒子输运的量子化。《物理评论B》，27:6083–6087，1983年5月。[490] Yang Long 和 Jie Ren。Floquet拓扑声学谐振器与声学Thouless泵浦。《美国声学学会期刊》，146(1):742，2019年7月。[491] Oubo You、Shanjun Liang、Biye Xie、Wenlong Gao、Weimin Ye、Jie Zhu 和 Shuang Zhang。非阿贝尔Thouless泵浦的观测。《物理评论快报》，128:244302，2022年6月。[492] Matheus I. N. Rosa、Raj Kumar Pal、Jos´e R. F. Arruda 和 Massimo Ruzzene。空间调制弹性晶格中的边缘态与拓扑泵浦。《物理评论快报》，123:034301，2019年7月。[493] Yiwei Xia、Emanuele Riva、Matheus I. N. Rosa、Gabriele Cazzulani、Alper Erturk、Francesco Braghin 和 Massimo Ruzzene。机电波导中时间泵浦的实验观测。《物理评论快报》，126:095501，2021年3月。[494] Yaacov E. Kraus、Yoav Lahini、Zohar Ringel、Mor Verbin 和 Oded Zilberberg。准晶体中的拓扑态与绝热泵浦。《物理评论快报》，109:106402，2012年9月。[495] Wenting Cheng、Emil Prodan 和 Camelia Prodan。非公度双层声学超材料中动态拓扑泵浦的实验演示。《物理评论快报》，125:224301，2020年11月。[496] Xianchen Xu、Qian Wu、Hui Chen、Hussein Nassar、Yangyang Chen、Andrew Norris、Michael R. Haberman 和 Guoliang Huang。具有动态边界的波导中稳健声学泵浦的物理观测。《物理评论快报》，125:253901，2020年12月。[497] Ze-Guo Chen、Weiyuan Tang、Ruo-Yang Zhang、Zhaoxian Chen 和 Guancong Ma。声学拓扑态动态转移中的 Landau-Zener 跃迁。《物理评论快报》，126:054301，2021年2月。[498] Tian Tian、Yichuan Zhang、Liang Zhang、Longhao Wu、Shaochun Lin、Jingwei Zhou、Chang-Kui Duan、Jian-Hua Jiang 和 Jiangfeng Du。动态调制纳米机械拓扑绝缘体中声子的非互易绝热转移的实验实现。《物理评论快报》，129:215901，2022年11月。[499] Anton Souslov、Benjamin C. Van Zuiden、Denis Bartolo 和 Vincenzo Vitelli。活性液体超材料中的拓扑声学。《自然·物理》，13(11):1091–1094，2017年7月。[500] Suraj Shankar、Mark J. Bowick 和 M. Cristina Marchetti。曲面上的拓扑声学与群集运动。《物理评论X》，7:031039，2017年9月。[501]Anton Souslov、Kinjal Dasbiswas、Michel Fruchart、Suriyanarayanan Vaikuntanathan 和 Vincenzo Vitelli。具有奇黏度的流体中的拓扑波。《物理评论快报》，122:128001，2019年3月。[502] Lisa Yamauchi、Tomoya Hayata、Masahito Uwamichi、Tomoki Ozawa 和 Kyogo Kawaguchi。活性向列相细胞中的手性驱动边缘流与非厄米拓扑。2020年8月。[503] Suraj Shankar、Anton Souslov、Mark J. Bowick、M. Cristina Marchetti 和 Vincenzo Vitelli。拓扑活性物质。《自然综述：物理》，4(6):380–398，2022年5月。[504] Andrea Al`u。拓扑序变得活跃。《自然·物理》，13(11):1038–1039，2017年7月。[505] T.H.R. Skyrme。介子与重子的统一场论。《核物理》，31:556–569，1962年。[506]U. K. R¨oßler、A. N. Bogdanov 和 C. Pfleiderer。磁性金属中的自发斯格明子基态。《自然》，442:797，2006年。[507] S. M¨uhlbauer、B. Binz、F. Jonietz、C. Pfleiderer、A. Rosch、A. Neubauer、R. Georgii 和 P. B¨oni。手性磁体中的斯格明子晶格。《科学》，323(5916):915–919，2009年。[508] S. Tsesses、E. Ostrovsky、K. Cohen、B. Gjonaj、N. H. Lindner 和 G. Bartal。倏逝电磁场中的光学斯格明子晶格。《科学》，361(6406):993–996，2018年。[509] Cheng Guo、Meng Xiao、Yu Guo、Luqi Yuan 和 Shanhui Fan。动量空间中的半斯格明子自旋织构。《物理评论快报》，124:106103，2020年3月。[510] Hao Ge、Xiang-Yuan Xu、Le Liu、Rui Xu、Zhi-Kang Lin、Si-Yuan Yu、Ming Bao、Jian-Hua Jiang、Ming-Hui Lu 和 Yan-Feng Chen。声学斯格明子的观测。《物理评论快报》，

[511] S.-J. Liang、B. Cheng、X. Cui 和 F. Miao。面向高性能器件应用的范德华异质结构：挑战与机遇。《先进材料》，32:1903800，2020年。[512]P. Wang、Yuanlin Zheng、Xianfeng Chen、Changming Huang、Yaroslav V. Kartashov、Lluis Torner、Vladimir V. Konotop 和 Fangwei Ye。光在光子莫尔´e晶格中的局域化与离域化。《自然》，577:42–46，2020年。[513] Guangwei Hu、Qingdong Ou、Guangyuan Si、Yingjie Wu、Jing Wu、Zhigao Dai、Alex Krasnok、Yarden Mazor、Qing Zhang、Qiaoliang Bao、Cheng-Wei Qiu 和 Andrea Al`u。扭转 α-moo$_3$ 双层中的拓扑极化激元与光子魔角。《自然》，582:209–213，2020年。[514] S. M. Gardezi1、H. Pirie、S. Carr、W. Dorrell 和 J. E. Hoffman。在声学超材料中模拟扭转电子学。2D Mater.，8:031002，2021年。[515] Mar´ía Rosendo L´opez、Fernando Pe˜naranda、Johan Christensen 和 Pablo San-Jose。魔角振动板中的平带。《物理评论快报》，125:214301，2020年11月。[516] Kuan Zhang、Weijian Jiao 和 Stefano Gonella。受多层二维材料启发的磁机械超结构中的可调带隙与对称性破缺。《物理评论B》，104:L020301，2021年7月。[517] Shi-Qiao Wu、Zhi-Kang Lin、Bin Jiang、Xiaoxi Zhou、Zhi Hong Hang、Bo Hou 和 Jian-Hua Jiang。声学扭转莫尔´e超晶格中的高阶拓扑态。Phys. Rev. Applied，17:034061，2022年3月。[518] Yuanchen Deng、Mourad Oudich、Nikhil JRK Gerard、Jun Ji、Minghui Lu 和 Yun Jing。魔角双层声子石墨烯。《物理评论B》，102:180304，2020年11月。[519] Shengjie Zheng、Jie Zhang、Guiju Duan、Zihan Ji ang、Xianfeng Man、Dejie Yu 和 Baizhan Xia。双轴应变声学莫尔´e超晶格中的拓扑网络与谷束分束器。《物理评论B》，105:184104，2022年5月。[520] Chen Liu、Yinong Zhou、Guanyong Wang、Yin Yin、Can Li、Haili Huang、Dandan Guan、Yaoyi Li、Shiyong Wang、Hao Zheng、Canhua Liu、Yong Han、James W. Evans、Feng Liu 和 Jinfeng Jia。InSb(111)B表面铋薄膜中的谢尔宾斯基结构与电子拓扑。《物理评论快报》，126:176102，2021年4月。[521] Zhaoju Yang、Eran Lustig、Yaakov Lumer 和 Mordechai Segev。分形晶格中的光子Floquet拓扑绝缘体。Light Sci. Appl，9:128，2020年。[522] T. Biesenthal、L. J. Maczewsky、Zhaoju Yang、M. Kremer、Mordechai Segev、A. Szameit 和 M. Heinrich。分形光子拓扑绝缘体。《科学》，376:1114–1119，2022年。[523] Junkai Li、Yeyang Sun、Qingyang Mo、Zhichao Ruan 和 Zhaoju Yang。声学分形晶格中压缩陈绝缘体的观测。arXiv，第2205.05297页，2022年。[524] Shengjie Zheng、Xianfeng Man、Ze-Lin Kong、Zhi-Kang Lin、Guiju Duan、Ning Chen、Dejie Yu、Jian-Hua Jiang 和 Baizhan Xia。声学超材料中分形高阶拓扑态的观测。Science Bulletin，67:2069–2075，2022年。[525] J. Li、Q. Mo、J.-H. Jiang 和 Z. Yang。声学分形晶格中的高阶拓扑相。arXiv，第2205.05298页，2022年。[526] Fengming Liu、Yun Lai、Xueqin Huang 和 C. T. Chan。声子晶体中k$=0$ 处的狄拉克锥。《物理评论B》，84:224113，2011年12月。[527] Fengming Liu、Xueqin Huang 和 C. T. Chan。声学晶体中k$\rightarrow=0$ 处的狄拉克锥与零折射率声学材料。《应用物理快报》，100(7):071911，2012年2月。[528] Romain Fleury 和 Andrea Al`u。声音通过近零密度超窄通道的异常传输。《物理评论快报》，111:055501，2013年7月。[529] Li Yang Zheng、Ying Wu、Xu Ni、Ze Guo Chen、Ming Hui Lu 和 Yan Feng Chen。利用近零折射率声子晶体实现声学隐身。《应用物理快报》，104(16):161904，2014年4月。[530]Hongqing Dai、Tingting Liu、Junrui Jiao、Baizhan Xia 和 Dejie Yu。超越圆形晶胞的二维声子晶体中的双狄拉克锥。《应用物理学杂志》，121(13):135105，2017年4月。[531] Marc Dubois、Chengzhi Shi、Xuefeng Zhu、Yuan Wang 和 Xiang Zhang。声学的观测

类狄拉克锥与双零折射率。《自然·通讯》，8(1):14871，2017年3月。[532] Fei Meng、Zhi-Kang Lin、Weibai Li、Peiguang Yan、Yun Zheng、Xinping Li、Jian-Hua Jiang、Baohua Jia 和 Xiaodong Huang。观测声学高阶拓扑绝缘体表面的涌现狄拉克物理。《先进科学》，9(24):2201568，2022年。[533] Zhi-Kang Lin 和 Jian-Hua Jiang。准连续介质中的狄拉克锥与高阶拓扑。《欧洲物理学快报》，137(1):15001，2022年3月。[534] Changqing Xu、Guancong Ma、Ze-Guo Chen、Jie Luo、Jinjie Shi、Yun Lai 和 Ying Wu。具有四重简并类狄拉克点的三维声学双零折射率介质。《物理评论快报》，124:074501，2020年2月。[535]Farzad Zangeneh-Nejad 和 Romain Fleury。拓扑模拟信号处理。《自然·通讯》，10(1):2058，2019年5月。[536] Farzad Zangeneh-Nejad 和 Romain Fleury。拓扑法诺共振。《物理评论快报》，122:014301，2019年1月。[537] Farzad Zangeneh-Nejad 和 Romain Fleury。拓扑超材料中的无序诱导信号滤波。《先进材料》，32(28):2001034，2020年7月。[538]Lei Fan、Ye He、Xiao An Chen 和 Xue Zhao。基于一维声子晶体管拓扑界面模的声能采集。《*Applied Physics Express*》，13(1):017004，2019年12月。[539] Chunbo Lan、Guobiao Hu、Lihua Tang 和 Yaowen Yang。用于鲁棒振动能量采集的局域共振拓扑超材料中的能量局域化与拓扑保护。《应用物理学杂志》，129(18):184502，2021年5月。[540] Hongqing Dai、Linbo Liu、Baizhan Xia 和 Dejie Yu。拓扑片上声镊的实验实现。*Phys. Rev. Applied*，15:064032，2021年6月。[541] Peng Liu、Hangyu Li、Zhitao Zhou 和 Yongmao Pei。声学拓扑绝缘体的拓扑声镊与赝自旋态。《应用物理快报》，120(22):222202，2022年6月。[542] Hongqing Dai、Baizhan Xia 和 Dejie Yu。利用声学拓扑绝缘体分离微粒。《应用物理快报》，119(11):111601，2021年9月。[543]Ailing Song、Junfei Li、Chen Shen、Tianning Chen 和 Steven A. Cummer。基于拓扑绝缘体、具有增强场约束的可切换定向声发射。《应用物理快报》，117(4):043503，2020年7月。[544]Shengjie Zheng、Guiju Duan 和 Baizhan Xia。基于声学系统谷手性锁定波束的水下声学定位。*International Journal of Mechanical Sciences*，174:105463，2020年5月。[545] Qicheng Zhang、Daehun Lee、Lu Zheng、Xuejian Ma、Shawn I. Meyer、Li He、Han Ye、Ze Gong、Bo Zhen、Keji Lai 和 A. T.Charlie Johnson。纳机电声子晶体中的吉赫兹拓扑谷霍尔效应。《自然·电子学》，5(3):157–163，2022年3月。[546] Lechen Yang、Guangrui Li、Xiaomei Gao 和 Ling Lu。拓扑腔面发射激光器。《自然·光子学》，16:279–283，2022年。[547] H Pirie、S Sadhuka、J Wang、R Andrei 和 J E Hoffman。拓扑声子逻辑。《物理评论快报》，128:015501，2022年。[548] J-P Xia、D Jia、H-X Sun、S-Q Yuan、Y Ge、Q-R Si 和 X-J Liu。可编程编码声学拓扑绝缘体。《*Adv. Mater.*》，30:1805002，2018年。[549] Valerio Peri、Zhi-Da Song、Marc Serra-Garcia、Pascal Engeler、Raquel Queiroz、Xueqin Huang、Weiyin Deng、Zhengyou Liu、B. Andrei Bernevig 和 Sebastian D. Huber。声学超材料中脆弱拓扑的实验表征。《科学》，367:797–800，2020年。[550] Weiyuan Tang、Xue Jiang、Kun Ding、Yi-Xin Xiao、Zhao-Qing Zhang、C. T. Chan 和 Guancong Ma。具有混合拓扑不变量的例外节点。《科学》，370:1077，2020年。[551] Amir Youssefi、Shingo Kono、Andrea Bancora、Mahdi Chegnizadeh、Jiahe Pan、Tatiana Vovk 和 Tobias J. Kippenberg。在超导电路光机械学中实现的拓扑晶格。

《自然》，612:666–672，2022年。