arXiv:2303.01436v1 [math.AG] 2 Mar 2023

舒伯特几何与组合学

Alexander Woo 和 Alexander Yong

摘要：本章结合了关于舒伯特簇的入门介绍与研究综述。主题是利用一族由行列式生成的多项式理想，对其奇点进行组合分类。

目录

1. 引言 1 2. 舒伯特基础知识 3 3. Kazhdan-Lusztig 理想与簇 13 4. 区间模式避免 16 5. 组合交换代数 19 6. 分解子与（极小的）自由分解 26 7. 奇异性测度 29 8. 其他李型的类似结果 40 9. 关于其他簇的评述 47 10. 部分习题的提示、注释与参考文献 51 致谢 52 参考文献 53

1. 引言

1.1. 目标。 本章旨在对舒伯特簇作基础介绍，并综述相关研究。全文以一个主题为主线：从由行列式生成的某些多项式理想的角度考察它们的奇点。因此，我们着重讨论那些可用交换代数方法研究的性质。谨先致歉：本章并未涵盖研究舒伯特奇点的诸多其他方法中的大部分，甚至连其中相当一部分也未能涉及[1]。本章也不讨论舒伯特演算，后者在很大程度上是一个独立的研究领域。[2]

粗略浏览一下有关舒伯特簇的文献，就会发现其中运用了广泛（或许也令人望而生畏）的思想，包括李理论、表示论、代数几何、交换代数和组合学。尽管如此，我们仍力求使本书的阐述

日期：2023年3月2日。[1]例如，参见 *Frobenius* 分裂 [BK05], *Peterson* 平移 [CK06], 标准单项式理论 [LR08],以及 *Bott-Samelson* 分解 [BS58, H73, D74], *Billey-Postnikov* 分解 [RS16], 以及其他方法 [BL00]。[2]参见 [F97, M01c] 或近期综述，例如 [RYY22, K22]。

尽可能自成一体。因此，在适当之处，我们会着重介绍基本原理，而不拘泥于正式的陈述。我们安排了大量习题（较难的习题以星号标出），旨在从基础开始，帮助感兴趣的读者为探究未解决问题做好准备。我们希望，侧重于交换代数的内容能让读者在尚未深入学习上述领域之前，就能探索这一主题，并可借助计算交换代数系统。

1.2. **简史**。 舒伯特簇可追溯至 H. Schubert 在 19 世纪的著作 [S79] 以及更早的研究，但“现代时期”始于 20 世纪 50 年代 C. Chevalley 的手稿 [C94].[3] 该手稿引入了如今无处不在的布鲁哈特序概念。[4] 他还探讨了舒伯特簇的奇点问题[5]，，不过有一段历史趣闻：在谈到这个问题时，他作了如下评论：

> “.....看起来很可能这些 $X(w)$ 始终都是非奇异簇´´，但我们尚未能确立这一点。”[6]

本章关注局部性质。局部性质是指一种可能在代数簇的给定点 p 处成立，也可能不成立的性质 X；若它在 X 的每一点 $p \in X$都成立，则称它在该簇上成立。在 Chevalley 在世期间，其他人证明了某些局部性质在每个舒伯特簇上都成立。例如，C. DeConcini–V. Lakshmibai [DL81] 以及 S. Ramanan–A. Ramanathan [RR85, R85] 证明，舒伯特簇具有“温和”的奇点：它们是正规且科恩–麦考利的。相比之下，本章讨论的局部性质只在某些舒伯特簇的某些点上成立。我们要考察的问题原型如下：

(S1) 哪些舒伯特簇是光滑的？(S2) 舒伯特簇上的哪些点是光滑的？

尽管 (S1) 是 (S2) 的特例，但它本身也很值得研究 .

我们主要研究完全旗簇中的舒伯特簇。实质上，这是与 $GL_n(\mathbb{C})$ 相关的所有部分旗簇中的一般情形，其中包括格拉斯曼流形。在这一情形下，(S1) 和 (S2) 已得到解答。对于 (S1)，J. Wolper[W89] 给出了组合刻画，随后 K. Ryan [R87]提出了几何刻画。在他们工作的基础上，V. Lakshmibai–B. Sandhya [LS90] 从模式回避的角度，为 (S1) 提供了另一种组合解答。他们的结果表明，

$$X_w \text{ 光滑，当且仅当 } w \text{ 回避模式 3412 和 4231。}$$

此外，他们还在对 (S2) 的猜想性解答中运用了模式回避。这个猜想在千禧年之交由 [BW03, C03, KLR03, M01a] 分别独立证明。本章采用的正是模式回避方法。关于舒伯特簇与模式回避的早期综述见 [AB12]。

既然我们已经知道舒伯特簇的哪些点是奇异的，那么接下来要问的是：给定一点的奇异程度如何？正如我们将要说明的，许多具有交换代数定义的测度／性质 $\mathcal{P}$ 可以同时研究。推广 (S1) 和 (S2)，我们要问：

[3]在这篇遗作出版时所附的序言中，A. Borel 推测其写于“很可能是 1958 年”。[4]这正是斯蒂格勒命名法则的一个例子。[5]具体而言，他证明了它们出现于余维至少为二的情形。[6]“.....似乎所有舒伯特簇都是光滑的，尽管我们无法证实这一断言。”习题 7.8 要求读者自行计算一些简单的反例。

（P1）哪些舒伯特簇整体上具有 $\mathcal{P}$? （P2）舒伯特簇中的哪些点满足 $\mathcal{P}$?

在 [WY08] 中，我们通过行列式理想研究了这类性质 $\mathcal{P}$，并将其称为 *Kazhdan-Lusztig* 理想。我们通过实例表明，经典模式避免不足以回答 (P1) 或 (P2)。为了解决这一问题，我们引入了区间模式避免，作为讨论这些问题并进行比较的通用语言。本章回顾这些结果以及截至目前的后续进展。

1.3. **结构安排**。第2节以格拉斯曼流形作为引言，说明行列式理想如何在舒伯特簇的研究中出现。我们将介绍普吕克坐标、舒伯特胞腔与舒伯特簇，以及格拉斯曼流形的群陪集描述，并以类似方式讲解完全旗簇的情形。

Kazhdan-Lusztig 理想在第3节中定义。这些行列式理想刻画了旗簇中舒伯特簇的仿射开邻域（相差一个无关紧要的仿射因子）。其中一个重要特例是 W. Fulton 的舒伯特行列式理想[F92], ，它们一直备受关注。关键在于，对舒伯特簇奇点性质的研究可以归结为对 Kazhdan-Lusztig 簇相应性质的研究。

第 4 节定义了区间模式避免。定理 4.17 表明，在对性质 $\mathcal{P}$ 的假设较为宽松的情况下，(P1) 和 (P2) 的答案可以 用区间模式避免 来表述（尽管目前可能还不知道确切答案）。这种通用语言提供了一种具体的方法，用以比较和对照各种性质 $\mathcal{P}$。其普适性通过 Kazhdan-Lusztig 理想得到证明。

第 5 节深入探讨 Kazhdan-Lusztig 理想的组合交换代数方面，并沿用 A.Knutson-E. Miller 关于舒伯特行列式理想的思路 [KM05] 。我们通过一个贯穿全文的例子，回顾 Gr¨obner 基、多重分次、希尔伯特级数、素分解和 Stanley-Reisner 对应等概念。习题让读者能够亲自动手，了解这些思路在行列式理想中的应用。接着，我们介绍 WY [WY12], 对 Kazhdan-Lusztig 理想的推广，但不在本文中详细展开。

第 6 节讨论多项式环上模的自由分解 。我们的主要目的是结合相关例子，详细阐述 Kazhdan-Lusztig 理想情形下的交换代数概念，以便为下一节做好准备。

第 7 节是本章的高潮。它分析了七种性质/测度 $\mathcal{P}$，并研究它们在舒伯特簇中的情形：光滑性、局部完全交性质、Gorenstein 性、唯一分解性、希尔伯特-塞缪尔重数、切锥的 Castelnuovo-Mumford 正则性，以及 Kazhdan–Lusztig 多项式。我们分别介绍每种情形下已知的结果、猜想和未解决问题。

最后三节提供了补充说明。第 8 节指出了我们所讨论问题在其他李型中的类似情形，并汇集了似乎未曾在文献中任何单一出处出现过的相关信息。第 9 节讨论其他簇中的类似情形。最后，第 10 节为部分习题提供提示和参考文献。

2. 舒伯特基础

2.1. **格拉斯曼流形**。 我们先给出集合论定义：

定义 2.1。 格拉斯曼流形 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中 k 维子空间的参数空间[7]。

2.1.1. 由仿射空间构成的覆盖。假设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$ 是一个 k 维子空间V的基。将这些向量视为一个 $(n \times k)$ 维矩阵 M 的列。对 M 进行列变换（即行变换的对应操作，只不过作用于列）就是基变换，因此，列等价的矩阵表示同一个 k 维子空间 V。换言之，可以将格拉斯曼流形视为一个群商：

$$Gr_k(\mathbb{C}^n) = \left(\mathsf{Mat}_{n\times k} - \{M \in \mathsf{Mat}_{n\times k} : \operatorname{rank}(M) < k\}\right)/GL_k, \tag{1}$$

其中 $\mathsf{Mat}_{n\times k}$ 是 $n \times k$ 维矩阵的集合，而商是指在 GL_k 上由右侧矩阵乘法给出的作用所得的商。

初学线性代数时，进行列消元的目的是尽可能让第 1、2、.....、k 行成为主元行。不过，除了方便之外，并没有特别理由要采用这种顺序。[8] 不妨改为令 $\mathcal{S}_{k,n}$ 表示 $[n]$ 的 k 元子集，给定任意一个

$$I := \{i_1 < i_2 < \ldots < i_k\} \in \mathcal{S}_{k,n},$$

我们可以将 I 中的行视为"第一批"行，并尝试对 M 进行列化简，使 I 中的行成为主元行，其余行则为自由行。

现在，令 U_I为所有满足以下条件的 $n\times k$矩阵的集合：$x^I_{i_c,c} = 1$对所有满足 $1 \le c \le k$的 c均成立，且 $x^I_{i_c,d} = 0$ 对所有满足 $1 \le c$的 $c \ne d$ 均成立，$d \le k$。每个 U_I 都可以与$\mathbb{C}^{k(n-k)}$ 作典范对应，其坐标为 x^I_{ab}，其中 $a \notin I, 1 \le b \le k$。简化列阶梯形的唯一性告诉我们以下结论：

定理 2.2。 给定任意 $I \in \mathcal{S}_{k,n}$，U_I 中的每个矩阵都表示一个不同的 k维子空间 V。因此，我们可以将 U_I 视为 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$的一个子集。

由于对于任意 k维子空间 V以及 V的任意一组基，矩阵 M都是满秩的，因此存在一组行 I，使得 M 可以通过列化简，将主元置于 I。因此，这些集合 U_I 覆盖了 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$。每个 U_I 都是一个坐标图，它们共同构成了 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ 的一个图册，将其视为一个流形。

例2.3。 对于 $Gr_2(\mathbb{C}^4)$，图册由以下部分组成：

$$U_{34} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{24} = \begin{bmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ * & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{14} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & * \\ * & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{23} = \begin{bmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, U_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & * \\ 0 & 1 \\ * & * \end{bmatrix}, U_{12} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ * & * \\ * & * \end{bmatrix}.$$

2.1.2. 转移映射；格拉斯曼流形是光滑复流形和代数簇。设 $V \in U_I \cap U_J$。那么，V作为 U_I 中的一个点时，其坐标为 $x^I_{ab}(V)$；作为 U_J 中的一个点时，其坐标为 $x^J_{ab}(V)$。在 U_I 中取一个一般矩阵，并对其进行列消元，使 J中的行成为主元行，由此可知坐标 x^J_{ab}是

[7]"参数空间"的同义词是"模空间"。不过，后者通常用于空间中的点是抽象对象（例如曲线的同构类），而非嵌入特定环境空间中的对象的情形；这里我们讨论的则是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间。[8]虽然列变换和列阶梯形对读者来说可能不如行变换和行阶梯形熟悉，但事实证明，对格拉斯曼流形的群陪集描述与这些约定相兼容。

坐标 x^I_{ab}的有理函数。由于有理函数是光滑的，这赋予 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ 光滑流形结构，进而使其成为复流形和光滑复代数簇。我们通过规定：对于所有 I，若 $W \cap U_I$ 在 $U_I \cong \mathbb{C}^{k(n-k)}$ 中是开集，则 $W \subseteq Gr_k(\mathbb{C}^n)$为开集，从而在 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$上赋予复拓扑；或者，我们通过规定：对于所有 I，若 $W \cap U_I$ 在扎里斯基拓扑中是开集，则 W 为开集，从而在 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$上赋予扎里斯基拓扑。

例 2.4 ($Gr_2(\mathbb{C}^4)$)。设 $I = \{1, 2\}$ 和 $J = \{2, 4\}$。那么，U_I中的一般矩阵为

$$U_I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x^I_{31} & x^I_{32} \\ x^I_{41} & x^I_{42} \end{bmatrix}.$$

通过列变换将主元置于第 2 行和第 4 行，得到

$$U_I = \begin{bmatrix} -x^I_{42}/x^I_{41} & 1/x^I_{41} \\ 1 & 0 \\ (x^I_{32}x^I_{41} - x^I_{42}x^I_{31})/x^I_{41} & x^I_{31}/x^I_{41} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

这告诉我们

$$x^J_{11} = -x^I_{42}/x^I_{41},$$
$$x^J_{12} = 1/x^I_{41},$$
$$x^J_{31} = -\det \begin{bmatrix} x^I_{31} & x^I_{41} \\ x^I_{32} & x^I_{42} \end{bmatrix} / x^I_{41},$$

and

$$x^J_{32} = x^I_{31}/x^I_{41}.$$

有一种系统的方法可以确定这些坐标变换。给定一个 k维子空间V，“定义” $p_I(V)$为 M的 $k \times k$ 子矩阵的行列式，其中使用的是I中的行，M 是一个列向量构成 V的基的任意矩阵。现在，p_I 定义不明确，因为它取决于基的选择；但是，对于任意的 I 和 J，比值 p_I/p_J 定义明确（为什么？）。现在将前一句与以下观察结合起来：

$$x^J_{ab} = p_{J'}/p_J, \text{ where } J' = \{j_1, \ldots, j_{b-1}, a, j_{b+1}, \ldots, j_k\}.$$

（集合 J' 的顺序可能不正确；应将其视为定向集合，因此我们通过某个置换重新排列它，并乘以该置换的符号。）

习题 2.5。先用列变换，再用刚才介绍的“系统”方法，求出 $I = \{1, 2\}, J = \{3, 4\}$ 的坐标变换。

2.1.3. 射影代数几何。

定义2.6。复射影平面 $\mathbb{P}^n$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ –{(0, 0, . . ., 0)} 在等价关系 $\sim$下的等价类集合，其中等价关系定义为

$$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \sim (x'_0, x'_1, \ldots, x'_n)$$

i存在 $k \in \mathbb{C}^*$ 使得 $(x'_0, x'_1, \ldots, x'_n) = k(x_0, x_1, \ldots, x_n)$时。也就是说 ,

(2) $$\mathbb{P}^n = \left(\mathbb{C}^{n+1} - \{(0, 0, \ldots, 0)\}\right) / \mathbb{C}^*.$$

等价类记作 $[x_0 \colon x_1 \colon x_2 \colon \cdots \colon x_n]$。

定义 2.7。 射影簇 是 X 中的一个子集，其中 X 是 $x_0, x_1, \ldots, x_n$中的一组齐次多项式方程的公共解。

习题2.8（ $\mathbb{P}^1$的例子）。

(a) 说明为什么可以将 $\mathbb{P}^1$ 视为 $Gr_1(\mathbb{C}^2)$。因此， $Gr_1(\mathbb{C}^2)$ 显然具有射影簇的结构。[9]

(b) $\mathbb{P}^1$ 的标准开图为

$$U := \{[1 : x_1] : x_1 \in \mathbb{C}\} \text{ and } V = \{[x_0 : 1] : x_0 \in \mathbb{C}\}.$$

其中一个是 $U_{\{1\}}$ 另一个在第 2.1.1 小节的记号中是什么？$p_{\{1\}}$、$p_{\{2\}}$ 又是什么?

(c) 求 U 与 V 之间的转移函数。

一般而言， p_I 被称为*Pl¨ucker* 坐标，它们定义了一个嵌入

$$\begin{aligned} Gr_k(\mathbb{C}^n) &\to \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1} \\ V &\mapsto [p_{\{1,2,3,\ldots,k\}}(V) : \cdots : p_I(V) : \cdots : P_{\{n-k+1,n-k+2,\ldots,n\}}(V)] \end{aligned}$$

称为 *Pl¨ucker* 嵌入。

习题2.9。证明这个映射是良定义的，即它不依赖于 V 的基的选取，并且 $[p_{\{1,2,3,\ldots,k\}}(V) : \cdots : p_I(V) : \cdots : P_{\{n-k+1,n-k+2,\ldots,n\}}(V)] \in \mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$。

我们已经证明， $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ 是一个代数簇，因此 Pl¨ucker 嵌入是代数范畴中的一个映射。这个映射赋予 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ 一个射影代数簇的结构。坐标 $\{p_I\}$ 之间存在一些关系，称为*Pl¨ucker 关系*，它们生成定义该像的理想。在 $Gr_1(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1$ 的情形中，不存在这类关系。在 $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ 的情形中，存在一个关系：

$$p_{\{1,2\}}p_{\{3,4\}} - p_{\{1,3\}}p_{\{2,4\}} + p_{\{1,4\}}p_{\{2,3\}} = 0.$$

尽管这些关系是舒伯特簇理论的重要组成部分，我们实际上并不会用到它们，因此请读者参阅 [KL72] and [H95, Lecture 6] 以作进一步阅读。与练习 2.8 中一样，每个坐标图 U_I 都是像与 $\mathbb{P}^{\binom{n}{k}-1}$ 的标准坐标图之交的拉回，其中 $p_I \neq 0$。

2.1.4. 舒伯特胞腔与簇。 再次固定列约化时行的排列顺序。我们从下往上、从右往左进行约化，尝试使右下角（或最靠东南的）元素成为第一个主元，并使主元依次从东南移向西北。给定一个 k-子空间 V，根据简化列阶梯形的唯一性，主元行集合不依赖于最初为 V 选取的基。令 $X_I^\circ \subseteq Gr_k(\mathbb{C}^n)$ 为对应于 k-子空间且主元行集合为 I 的点集。这些集合 X_I° 称为舒伯特胞腔。格拉斯曼流形是其舒伯特胞腔的不交并。

习题2.10。 接着做练习 2.8，描述 $\mathbb{P}^1 = Gr_1(\mathbb{C}^2)$ 的舒伯特胞腔。例2.11。 在 $Gr_2(\mathbb{C}^4)$ 的情形下，舒伯特胞腔如下：

$$X_{34}^\circ = \begin{bmatrix} * & * \\ * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X_{24}^\circ = \begin{bmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X_{14}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & * \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, X_{23}^\circ = \begin{bmatrix} * & * \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_{13}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, X_{12}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

[9]类似地， $\mathbb{P}^n$ 可以与 $Gr_1(\mathbb{C}^{n+1})$等同起来，因此 (2) 是 (1) 的特例。

习题 2.12。 证明 $\dim(X_I^\circ) = \sum_{a=1}^{k}(i_a - a)$。

习题2.13。 设 $\mathbb{F}_q$ 是阶为 $q = p^k$ 的有限域，其中 p 是素数。证明， $Gr_k(\mathbb{F}_q^n)$ 的点数为 q-二项式系数 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q!\ [n-k]_q!}$，其中 $[i]_q := 1 + q + q^2 + \cdots + q^{i-1}$ 且 $[i]_q! := [1]_q[2]_q \cdots [i]_q$。[10]

定义 2.14。 布鲁哈特序 在 $\mathcal{S}_{k,n}$ 上定义为如下偏序：若 $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$ 且 $J = \{j_1 < j_2 < \cdots < j_k\}$，则当且仅当对所有 a，$1 \le a \le k$，都有 $I \le J$，若 $i_a \le j_a$。

习题2.15。 证明

$$X_I^\circ = U_I \setminus \bigcup_{J \not\le I} U_J.$$

定义舒伯特胞腔的一种等价且更简洁的方式如下。

定义 2.16. $\mathbb{C}^n$ 中的完全旗是由子空间构成的嵌套序列

$$F_\bullet = F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{n-1}$$

$\mathbb{C}^n$中的，且对所有 i，$\dim(V_i) = i$。

方便起见，令 E_i 为由 $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$、.....、$\vec{e}_i$ 张成的子空间，其中 $\vec{e}_t$ 是第 t 个标准基元素，且 $E_\bullet = E_1 \subsetneq \cdots \subsetneq E_{n-1}$。旗 $E_\bullet$ 称为标准旗。

定义 2.17. 对每个 $I \in \mathcal{S}_{k,\ n}$，舒伯特胞腔是

$$X_I^\circ := \{V \in Gr_k(\mathbb{C}^n) : \dim(V \cap E_t) = \#([t] \cap I),\ 1 \le t \le n\}.$$

每个子空间 V 与旗 $E_\bullet$ 的交都具有特定的维数序列，因此

$$Gr_k(\mathbb{C}^n) = \coprod_{I \in \mathcal{S}_{k,n}} X_I^\circ. \tag{3}$$

习题2.18. S 式 (3) 如何与例 2.11 中描述的分解一致。

现在我们定义本章的主要对象——舒伯特簇 .

定义 2.19。 舒伯特簇 X_I 是 X_I° 的闭包。（扎里斯基拓扑中的闭包与流形结构所诱导的欧几里得拓扑中的闭包相同，因此本章中我们将不再区分二者。）

命题 2.20（舒伯特簇的关联条件描述） .

(1) 舒伯特簇 X_I 是以下舒伯特胞腔的并：

$$X_I = \coprod_{J \le I} X_J^\circ,$$

其中，$\le$ 指的是$\mathcal{S}_k$布鲁哈特序，$_n$。

[10]习题 2.12 和 2.13 合起来推出，Grassmannian $P_{k,n}(q)$ 的（上同调）Poincar´e 多项式（其 q^k 的系数为余维 k 的舒伯特胞腔数量）与 $Gr_k(\mathbb{F}_q^n)$ 的点计数一致。这是（如今已获证明的）韦伊猜想 的一个（相当平凡的）例子；该猜想揭示了上同调 Poincar´e 多项式与点计数之间的联系。

（2）因此，舒伯特簇 X_I 的定义是：将舒伯特胞腔定义中的交条件从等式改为不等式。具体而言，

$$X_I = \{V \in Gr_k(\mathbb{C}^n) : \dim(V \cap F_t) \geq \#([t] \cap I)\}. \tag{4}$$

例2.21。 我们来考察舒伯特簇 $X_{24} \subseteq Gr_2(\mathbb{C}^4)$。它包含除舒伯特胞腔 C_{34}中的点以外的所有点 $Gr_2(\mathbb{C}^4)$。根据交条件(4)，

$V \in X_{24}$ if $\dim(V \cap F_1) \geq 0$, $\dim(V \cap F_2) \geq 1$, $\dim(V \cap F_3) \geq 1$, and $\dim(V \cap F_4) \geq 2$.

第一个和最后一个条件是空泛成立的，第三个条件可由第二个条件推出，因此只有第二个条件对于定义 X_{24}是必要的。

假设 $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 构成 V的一组基。由于 F_2 由 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$张成，根据上一段，$V \in X_{24}$ 当且仅当以$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_2$ 为列的矩阵的行列式为0，或者等价地，$p_{34}(V) = 0$。[11] 我们可以用每个开集 U_I上的局部坐标 x^I_{ab} 来表达这一条件。例如，子空间 $V \in U_{12}$ 的一组基是以下各列

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ x^{12}_{33}(V) & x^{12}_{34}(V) \\ x^{12}_{43}(V) & x^{12}_{44}(V) \end{bmatrix},$$

and

$$V \in U_{12} \cap X_{24} \iff x^{12}_{33}x^{12}_{44} - x^{12}_{34}x^{12}_{43} = 0.$$

类似的论证普遍适用，本章的主要“原则”是：

> 通过研究局部方程，可以有效地理解舒伯特簇；这些局部方程定义了一个行列式簇。

行列式簇是指由某个不定元矩阵的子式（大小可以不同）定义的簇。关于格拉斯曼流形中的例子如何推广，具体可参见 V. Kreiman-V. Lakshmibai [KR04，第3节3]。

2.1.5. 群陪集。将格拉斯曼流形及其舒伯特簇表示为 GL_n 的群商很有用。为此，固定一个特定的 k 维子空间，例如 $E = \langle \vec{e}_1, \ldots\ldots, \vec{e}_k \rangle$，并考察 E 的稳定子 $P \subset GL_n$（这里认为 GL_n 作用于底层向量空间 $\mathbb{C}^n$）。子群 P 属于一类称为 抛物子群 的子群。

习题2.22. 证明，将 E 映射到自身的矩阵群（即将 E 中的每个向量映射到 E 中的某个向量的矩阵群）是

$$P = \left(\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right),$$

其中，“0”块有 $(n-k)$ 行和 k 列。

根据轨道-稳定子定理，$Gr_k(\mathbb{C}^n)$作为集合与 GL_n/P 同一。后者是齐性空间，例如可参见 [FH91，第 23.3] 节。事实上，前几小节所述的 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$的拓扑结构和几何结构与

[11]虽然 $p_I(V)$ 本身取决于 V 的基的选择，但 $p_I(V)$ 是否为零 并不取决于此，因为基变换会将其乘以一个非零标量。

通过从 G 出发并将同一右 P-轨道中的所有点视为同一点而构造的这个齐性空间的拓扑结构和几何结构相同。

习题 2.23。 给出从 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ 到 GL_n/P 的一个双射。

> 这种以群来表述格拉斯曼流形的优点在于，它可以自然地推广为将 GL_n 换成另一种代数群，并将 P 换成不同的抛物子群（主要情形是下面的完全旗簇，另见第 8 节）。

从这个角度来看，如果 $B \subset P$ 是可逆上三角矩阵组成的博雷尔子群，那么 B 通过左乘作用于 GL_n/P，且具有有限多个轨道。这些轨道恰好就是舒伯特胞腔 X_I°。每个轨道都包含一个唯一的 T 不动点，其中 T 是可逆 $n \times n$ 矩阵组成的极大环面。特别地，如果 $I = \{i_1, \dots, i_k\}$，那么 X_I 就是 B 轨道，它包含 T 不动的 k 子空间 $W_I = \langle \vec{e}_{i_1}, \vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_k} \rangle$。由于每个舒伯特胞腔都是一个 B 轨道，而 B 是一个代数群，它在 W_I 的邻域与舒伯特胞腔 C_I 中任意其他点的邻域之间给出局部同构。因此：

> 舒伯特簇的局部性质可在不失一般性的前提下，归结为研究其 T-不动点的邻域。

2.2. **旗簇**。本章将重点讨论旗簇。事实上：

> 关于格拉斯曼流形（或任意部分旗簇）中舒伯特簇的大多数问题，
> 都可以归结为完全旗簇上舒伯特簇的问题。

参见 [B05，第 1.2]节以了解理由。

定义 2.24。 旗簇 Flags($\mathbb{C}^n$) 是 $\mathbb{C}^n$ 中完全旗的参数空间 .

2.2.1. 通过群给出定义。 群 GL_n 在 Flags($\mathbb{C}^n$) 上传递作用，因为它在 $\mathbb{C}^n$ 上的作用诱导出对子空间的作用，进而诱导出对旗的作用。

习题 2.25。 (a) 设 $E_\bullet$ 为标准旗，其中对所有 i 均有 $E_i = \langle \vec{e}_1, \dots\dots, \vec{e}_i \rangle$。证明， E_i 的稳定子是由 B 可逆上三角矩阵组成的群。

(b) 假设相对于另一个有序基 $\vec{v}_1$、$\vec{v}_2$、……、$\vec{v}_n$， $F_\bullet$ 以类似方式定义，并且从标准基到该基的基变换矩阵为 $g \in GL_n$。什么稳定 $F_\bullet$?

根据轨道-稳定子定理，将 Flags($\mathbb{C}^n$) 与 GL_n/B 识别。类似于关于格拉斯曼流形及其舒伯特胞腔的群商观点，我们有：

定义 2.26。 GL_n/B 的舒伯特胞腔是其在左乘作用下的 B-轨道。

令 S_n 为作用在 $[n]$ 上的对称群。若 $w \in S_n$，定义完全旗

$$E_\bullet^{(w)} = \langle \vec{0} \rangle \subsetneq \langle \vec{e}_{w(1)} \rangle \subsetneq \langle \vec{e}_{w(1)}, \vec{e}_{w(2)} \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \langle \vec{e}_{w(1)}, \vec{e}_{w(2)}, \cdots, \vec{e}_{w(i)} \rangle \subsetneq \cdots \subsetneq \mathbb{C}^n. \tag{5}$$

习题2.27。 证明：

(a) 方程（5）给出了 S_n 与 Flags($\mathbb{C}^n$) 的 T-不动点之间的双射。(b) GL_n/B 的每个 B-轨道都包含一个唯一的 T-不动点。

因此，我们得到了 S_n 与舒伯特胞腔之间的双射，并可以给出以下定义：

定义 2.28。 给定 $w \in S_n$，舒伯特胞腔 X_w° 是 B-轨道 $B \cdot E_\bullet^{(w)}$。

定义 2.29。 舒伯特簇 X_w 是 X_w° 的闭包。

2.2.2. 通过关联条件定义；布鲁哈特序。 与格拉斯曼流形的情形一样，我们可以用交集的维数来描述舒伯特胞腔和舒伯特簇，也可以用适当矩阵的列阶梯形来描述。为了解释这一点，我们先定义一个编码这些维数的矩阵。

Defi定义 2.30。 给定 $w \in S_n$， w 的秩矩阵记为 R_w，是矩阵 x

$$R_w := [r_{p,q}^{(w)}]_{p,q=1}^n$$

其中元素 $r_{p,\ q}^{(w)} = \#\{k \mid k \le q, w(k) \le p\}$。

可以将 将秩矩阵想象如下。首先给出以下定义 ：

定义 2.31。 置换矩阵 w 为

$$P_{i,j}^{(w)} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = w(j), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

秩矩阵的第 (p,q) 个元素是 w 的置换矩阵 $P^{(w)}$ 中位于第 (p,q) 个元素西北方（即不低于且不位于其右侧）的 1 的个数。

命题 2.32。 舒伯特胞腔由下式给出

$$X_w^\circ = \{F_\bullet \mid \dim(E_p \cap F_q) = r_{p,q}^{(w)} \ \forall p, q\}.$$

证明。 T-不变的旗 $E^{(w)}$ 满足给定条件，而 B 的作用保持该条件不变。□

与格拉斯曼流形中的情形一样，可以将等式放宽为不等式来定义舒伯特簇，因此

$$X_w = \{F_\bullet \mid \dim(E_p \cap F_q) \ge r_{p,q}^{(w)} \ \forall p, q\}. \tag{6}$$

定义 2.33. 布鲁哈特序 在 S_n 上是由以下条件定义的偏序：若 $r_{p,\ q}^{(u)} \le r_{p,\ q}^{(v)}$，则对所有满足 $1 \le p$、$q \le n$ 的 p、q 均成立。

结合 (6) 和定义 2.33 可得布鲁哈特分解，即将X_w 分解为舒伯特胞腔的不交并：

$$X_w = \coprod_{v \le w} X_v^\circ, \text{ where } \le \text{ denotes Bruhat order.}$$

以下是一些 关于 S_n 的补充定义和习题，我们之后会用到。 r.

定义 2.34。集合 逆序： $w \in S_n$ 是

$$\mathrm{Inv}(w) = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n, w(i) > w(j)\}.$$

定义 2.35。考克斯特长度： w 是 ℓ（w）：$=$ #逆序(w)。
定义 2.36。 S_n 中长度最长的唯一置换$\binom{n}{2}$ i

s

$$w_0 := n\ n-1\ n-2 \cdots 3\ 2\ 1.$$

习题2.37。 (a) 布鲁哈特序 也定义为覆盖关系 $u \le ut_{ij}$ if $\ell(ut_{ij}) = \ell(u)+1$的传递、自反、反对称闭包，其中 $t_{ij} = (i\ j)$ 是一个对换。证明布鲁哈特序的这两个定义一致。

(b) 证明覆盖关系 $u \le ut_{ij}$ 当且仅当 $i < j$ if $w(i) < w(j)$ 且不存在 $i < k < j$ 使得 $w(i) < w(k) < w(j)$。
习题2.38。 (a) 证明对称群具有如下表示：它是自由群 $\langle \sigma_1、...、\ \sigma_{n-1} \rangle$ 对关系的商群

$$\sigma_i^2 = id,\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},\ \text{and } \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ if } |i-j| > 1.$$

（这就是 S_n 的考克斯特群表示。）

(b) 将 $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_L}$ 分解为简单对换 $s_i = (i\ i+1)$ 的一个因子式，如果其长度最短，则称为 $w \in S_n$ 的约化词。证明任意两个这样的表达式都可以利用 (a) 中的关系相互转换。

(c) 证明 $w \in S_n$ 的任意约化词的长度都是 $\ell(w)$。

关于作为 Coxeter 群的对称群，更多内容请参阅 [BB05]。

2.2.3. 覆盖与转移方程。 与格拉斯曼流形一样，通过提供由仿射坐标图构成的覆盖以及光滑的转移函数，我们可以赋予旗簇复流形或复代数簇的结构。

给定一个旗 $F_\bullet$，写出一个矩阵 M，使得对所有 i， M 的前 i 列构成 F_i的一组基。基的不同选择可通过对 M进行向右列变换相互关联，这对应于在 M 右乘一个上三角矩阵。也就是说，我们只允许将某一列的倍数加到其右侧的列上，以及将某一列乘以非零常数；特别地，我们不允许交换列，这意味着主元不一定会按阶梯顺序出现。

给定 $w \in S_n$，我们定义一个开集

$$U_w \subseteq \mathrm{Flags}(\mathbb{C}^n)$$

为所有满足以下条件的旗所组成的集合：其矩阵可以通过列变换化为列阶梯形（只能使用将某列的倍数加到其右侧列上，以及将某列乘以非零常数这两种操作），且主元为 $P^{(w)}$ 中的 1 元素。由于每个可逆矩阵都可以通过列变换化为具有某组主元的列阶梯形（且每个旗都由一个可逆矩阵表示），因此，对于所有 $w \in S_n$，开集 U_w 覆盖 Flags($\mathbb{C}^n$)。此外，根据简化列阶梯形的唯一性，我们在U_w 上有局部坐标函数 $x_{ab}^{(w)}$。进一步地， C_w 由 U_w 中不属于某个 $v \ge w$ 的所有点组成，其中 U_v 按布鲁哈特序排列。

例 2.39。 对于 Flags($\mathbb{C}^3$)，图册由以下部分组成：

$$U_{123} = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{213} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, U_{132} = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix},$$

$$U_{231}=\begin{bmatrix}0&0&1\\1&*&*\\0&1&*\end{bmatrix},U_{312}=\begin{bmatrix}0&1&*\\0&0&1\\1&*&*\end{bmatrix},U_{321}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&*\\1&*&*\end{bmatrix}.$$

我们还可以按如下方式从格拉斯曼流形拉回 Pl¨ucker 坐标。给定一个旗 $F_\bullet = F_1 \subsetneq \cdots \subsetneq F_{n-1}$，和一个具有 k 个元素的子集 $I \subseteq [n]$，“定义” $p_I(F_\bullet)$ 为 $p_I(F_k)$。

习题 2.40：(a) 证明，在 U_w 上，$x_{ab}^{(w)}$ 是 Pl¨ucker 坐标的一个特定比值，类似于格拉斯曼流形的情形（见第 2.1.2 节）。

(b) 将 U_v 上的坐标写成 U_w 上坐标的有理函数，从而证明 Flags($\mathbb{C}^n$) 是一个复流形，也是一个代数簇。

2.2.4. 舒伯特胞腔的描述。 我们还可以使用列阶梯形来描述每个 X_w°。给定一个旗 $F_\bullet$，写出一个矩阵 M，使得对于所有 i，M 的前 i 列构成 F_i 的一个基。在这里，我们从左到右进行列消元，并在每一步选择最底部的主元。然后，给定一个置换 $w \in S_n$，舒伯特胞腔 X_w°由对应于矩阵 M 的旗组成，这些矩阵的列阶梯形在置换矩阵 $P^{(w)}$ 中值为 1 的位置处具有主元。

例 2.41。 对于 Flags($\mathbb{C}^3$)，舒伯特胞腔为：

$$X_{123}^\circ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},X_{213}^\circ=\begin{bmatrix}*&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},X_{132}^\circ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&*&1\\0&1&0\end{bmatrix},$$

$$X_{231}^\circ=\begin{bmatrix}*&*&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},X_{312}^\circ=\begin{bmatrix}*&1&0*&0&1\\1&0&0\end{bmatrix},X_{321}^\circ=\begin{bmatrix}*&*&1*&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}.$$

习题2.42。 对于每个 $w \in S_n$，证明上述对 X_w° 的描述中的每个矩阵都表示 BP_wB/B 中唯一的右 B 陪集。也就是说，证明对 X_w° 的这种描述与定义 2.28 一致。

习题 2.43。 简化列阶梯形在 (i, j) 处有一个可能非零的元素，当且仅当 $w(j) > i$ 且 $w^{-1}(i) > j$。这给出了可能非零元素与 Inv(w) 之间的一个双射。

习题 2.43 与定义 2.35 结合可得

$$X_w^\circ \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}.$$

舒伯特胞腔 $X_{w_0}^\circ = U_{w_0}$ 在 Flags($\mathbb{C}^n$) 中稠密；因此称其为大胞腔。

2.2.5. 作为射影代数簇的旗簇。 回忆一下，在第 2.2.3 节中，我们对每个 $F_\bullet \in$Flags($\mathbb{C}^n$) 和每个 $I \in \mathcal{S}_{k,\ n}$定义了 Pl ¨ucker 坐标 $p_I(F_\bullet)$，意为 $p_I(F_k)$。将 Flags($\mathbb{C}^n$) 视为格拉斯曼流形的乘积的子集

$$Gr := Gr_1(\mathbb{C}^n) \times Gr_2(\mathbb{C}^n) \times \cdots \times Gr_{n-1}(\mathbb{C}^n),$$

我们可以先利用普吕克坐标将旗簇($\mathbb{C}^n$)嵌入射影空间的乘积中

$$\mathbb{P} := \mathbb{P}^{\binom{n}{1}-1} \times \mathbb{P}^{\binom{n}{2}-1} \times \cdots \times \mathbb{P}^{\binom{n}{n-1}-1}.$$

接下来可以利用塞格雷嵌入，将 $\mathbb{P}$ 嵌入单个（维数非常大！）射影空间 $\mathbb{P}'$ 中。事实上，每个 U_w 都是该嵌入与 $\mathbb{P}'$上的一个标准坐标图的交。虽然可以利用这种嵌入求出舒伯特簇的局部方程，但我们将在下一节采用另一种方法。

2.2.6. 反舒伯特胞腔。 舒伯特胞腔和簇是根据参考旗的选择（等价地，根据博雷尔子群 B 的选择）任意定义的。采用 $B =$ 可逆上三角矩阵这一标准选择后，在第 3 节中使用 " 相反的"博雷尔子群选择将十分重要，即 $B_- =$ 可逆下三角矩阵构成的群。

定义 2.44。 对于 $w \in S_n$，反舒伯特胞腔 是 B_--轨道

$$\Omega_w^\circ := B_- \cdot E_\bullet^{(w)} \subseteq \mathrm{Flags}(\mathbb{C}^n) \cong GL_n/B.$$

以下 习题讨论的是舒伯特胞腔相关命题的类似结论 s.

习题2.45。 证明 Ω_w° 是这样一组旗的集合：其矩阵代表具有简化列阶梯形，且当我们在每一列都选择最上方而非最下方的主元时，主元位于 P_w 中的 1 处。进而推导出，表示 Ω_w° 中旗的矩阵的列阶梯形（采用这种主元选择方式）在 (i, j) 处可能有非零元素，当且仅当 $w(j) < i$ 且 $w^{-1}(i) > j$，由此可得 $\Omega_w^\circ \cong \mathbb{C}^{\binom{n}{2}-\ell(w)}$。

根据习题 2.45，如果 $w = id$，反舒伯特胞腔 $\Omega_{id}^\circ \cong \mathbb{C}^{\binom{n}{2}-\ell(w)}$ 在 Flags($\mathbb{C}^n$) 中稠密。它被称为 Flags($\mathbb{C}^n$) 的反大胞腔。

例 2.46。 对于 Flags($\mathbb{C}^3$)，反舒伯特胞腔为：

$$\Omega_{123}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}, \Omega_{213}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 \end{bmatrix}, \Omega_{132}^\circ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & 0 & 1 \\ * & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Omega_{231}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 \end{bmatrix}, \Omega_{312}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Omega_{321}^\circ = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

设 $\widetilde{R}_w$ 为矩阵 $\widetilde{R}_w :=$ $[\widetilde{r}_{p,q}^{(w)}]_{p,\ q=1}^{n}$ 其中元素

$$\widetilde{r}_{p,q}^{(w)} = \#\{k \mid k \le q, w(k) \ge p\}. \tag{7}$$

习题 2.47。 证明 $\Omega_w^\circ = \{F_\bullet \mid E^{(w_0)_p} \cap F_q = \widetilde{r}_{p,\ q}(w)\}$，其中 $E^{(w_0)_p} = \langle e_{n+1-p}, \ldots\ldots, e_n \rangle$。

定义对偶舒伯特簇为 $\Omega_w = \Omega_{w_0}^\circ$。反舒伯特胞腔和对偶舒伯特簇是通常的舒伯特胞腔和舒伯特簇的平移像：$\Omega_w^\circ = P_{w_0} \cdot X_{w_0 w}^\circ$。

例 2.21 中行列式理想的类似物是 *Kazhdan-Lusztig* 理想 [WY08]。这些理想最初用于研究仿射舒伯特簇在 T-不动点 [KL79] 处的开邻域。

反大胞腔 Ω_{id}°（定义 2.44）是 Flags($\mathbb{C}^n$) 的一个仿射开邻域。因此，$v\Omega_{id}^{\circ} \cap X_w$ 是以 e_v 为中心的 X_w 的一个仿射开邻域。设 $X \subset$Flags($\mathbb{C}^n$) 是任意一个子簇。

定义 3.1. X 在任意点 $gB \in GL_n/B$ 处的局部片 是仿射开邻域$g\Omega_{id}^{\circ} \cap X$。

D. Kazhdan-G. Lusztig 的这个引理是本章方法的基础:

引理 3.2（[KL79] 的引理 A.4）。 $X_w \cap x\Omega_{id}^{\circ} \cong (X_w \cap \Omega_x^{\circ}) \times \mathbb{A}^{\ell(x)}$.

习题3.3。 将 Ω_x° 视为第 2.2.6 节中描述的矩阵空间。此外，将 $\mathbb{A}^{\ell(x)}$ 视为单位下三角矩阵空间 $m = [m_{ij}]_{i,\ j=1}^{n}$ 其中$m_{ij} = 0$（对于 $i > j$），除非 $x(j) > x(i)$。

（a）定义映射 $\eta\colon \Omega_x^{\circ} \times \mathbb{A}^{\ell(x)} \to x\Omega_{id}^{\circ}$，使得 $\eta(m, a) = ma$（矩阵乘法）。证明 η 是同构。

(b) 假设 $m \in (X_w \cap \Omega_x^{\circ})$ $a \in \mathbb{A}^{\ell(x)}$。证明 $\eta(m, a) \in X_w \cap x\Omega_{id}^{\circ}$，由此完成引理 3.2 的证明。

根据引理 3.2，可以忽略无关的仿射因子 $\mathbb{A}^{\ell(x)}$，将局部片 $X_w \cap x\Omega_{id}^{\circ}$ 替换为一个维数更小的簇。也就是说，只需研究:

定义 3.4。 *Kazhdan-Lusztig* 簇是 $\mathcal{N}_{v,\ w} := X_w \cap \Omega_v^{\circ}$。

$\mathcal{N}_{v,\ w}$ 的显式坐标和方程已在 [WY08] 中研究。令 Mat$_{n\times n}$ 为所有 $n \times n$ 复矩阵构成的空间。坐标环为 $\mathbb{C}[\mathbf{z}]$，其中 $\mathbf{z} = \{z_{ij}\}_{i,\ j=1}^{n}$是一般矩阵 Z各元素上的函数。这里

$z_{ij} =$ 是从底部数起第 i 行、第 j 列（从左 ft.

沿用第 2.2.6 节的记号，我们将 Ω_v° 识别为 Mat$_{n\times n}$ 中的仿射子空间，它由满足以下条件的矩阵组成： $Z^{(v)}$ 其中 $z_{n-v(i)+1,\ i} = 1$，且 $z_{n-v(i)+1,\ s} = 0, z_{t,\ i} = 0$，对于$s > i$ 和 $t > n - v(i) + 1$。令 $\mathbf{z}^{(v)} \subseteq \mathbf{z}$ 为未特化变量。此外，令$Z_{st}^{(v)}$ 为 $Z^{(v)}$的西南 $s \times t$ 子矩阵。

定义 3.5. *Kazhdan-Lusztig* 理想 是由$I_{v,\ w} \subset \mathbb{C}[\mathbf{z}^{(v)}]$ 的所有 $Z_{st}^{(v)}$ 子矩阵的 $\widetilde{r}_{st}^{(w)} + 1$ 子式生成的，其中 $1 \le s, t \le n$ 且 $\widetilde{r}_{st}^{(w)} = \#\{k \mid k \le q, w(k) \ge p\}$，如式 (7) 所示。

习题3.6。 证明 $\mathcal{N}_{v,\ w}$ 在集合论意义下由 $I_{v,\ w}$定义。也就是说，$P \in \mathcal{N}_{v,\ w}$ 当且仅当 P是$I_{v,\ w}$ 的生成元的零点。

~例 3.7。 设 $w = 7234615$、$v = 2136457$（采用单行记号）。秩矩阵 R_w和变量矩阵 $Z^{(v)}$ 如下:

$$\widetilde{R}_w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad Z^{(v)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_{51} & z_{52} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & 0 & z_{35} & 1 & 0 \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} & z_{15} & z_{16} & 1 \end{pmatrix}$$

Kazhdan-Lusztig 理想 $I_{v,\ w}$ 的生成元中包含 $Z_{52}^{(v)}$ 的所有 2×2 阶子式。此外，它还具有如下非齐次生成元:

$$\begin{vmatrix} z_{33} & 0 & z_{35} \\ z_{23} & 1 & 0 \\ z_{13} & z_{14} & z_{15} \end{vmatrix} = z_{33}z_{15} + z_{35}z_{23}z_{14} - z_{35}z_{13}. \tag{8}$$

定义 3.8。 如果存在齐次多项式生成$I_{v,\ w}$，则称其为标准齐次 。在这种情况下，我们也称$\mathcal{N}_{v,\ w}$ 是标准齐次的。

习题3.9。 找出一个 Kazhdan-Lusztig 理想 $I_{v,\ w}$的例子，其定义生成元（定义 3.5 中的那些生成元）并非全都是齐次的（如（8）中所示），但该理想是标准齐次的。

问题 3.10。 分类所有$(v,\ w) \in S_n \times S_n$，使得$I_{v,\ w}$ 是标准齐次的。

关于问题 3.10 的一些分析，参见 [WY12，第 5.1 节和第 5.2] 节。关于这一问题较新的研究，参见 [N21，命题 6.3]。

习题3.11*。证明 $\mathcal{N}_{v,\ w} \cong \mathcal{N}_{v^{-1},\ w^{-1}}$。也就是说， X_w 的所有 Kazhdan-Lusztig 簇都同构于 $X_{w^{-1}}$的 Kazhdan-Lusztig 簇。 $X_w \cong X_{w^{-1}}$ 是否总是成立?

问题 3.12 ([WY08])。 证明或反驳：若 $[u,v]$ 和 $[u',v']$ 分别是 S_n和 $S_{n'}$ 中的 ***Bruhat*** 偏序区间，且 $[u,v] \cong [u',v']$ （作为偏序集），那么 $\mathcal{N}_{u,\ v} \cong \mathcal{N}_{u',\ v'}$。

若问题 3.12 的答案是肯定的，那么本文中每一种奇点数值测度都会受到影响。[12]

习题3.13。 为与局部片$v\Omega_{id}^{\circ} \cap X_w$相关的补丁理想 定义坐标和方程。

以下概念由 W. Fulton [F92]引入:

定义 3.14. 舒伯特行列式理想 I_w 的定义与 $I_{v,w}$ 类似，只不过我们用矩阵 $Z = (z_{ij})$替换 $Z^{(v)}$ 。

示例 3.15。 设 $w = 3412$，则

$$\widetilde{R}_w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ Z = \begin{pmatrix} z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44} \\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \end{pmatrix}, I_w = \left\langle z_{11}, \begin{vmatrix} z_{31} & z_{32} & z_{33} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} \end{vmatrix} \right\rangle.$$

定义 3.1　　6. I_w 在 Mat$_{n\times n}$ 中的零点集是矩阵舒伯特簇，记作 $\mathfrak{X}_w$　　.

习题3.17. 舒伯特行列式理想和矩阵舒伯特簇是其 Kazhdan-Lusztig 对应对象的特例。（事实上，请用两种不同的方法证明这一点。）

习题 3.18*。理想 I 的单项式化，记作 mono(I)，是包含在 I 中的最大单项式理想。求 mono(I_w)。

[12]据我们所知，关于如何分类 Bruhat 区间的同构类，或用于判定两个此类区间是否同构的算法效率，目前似乎鲜有研究。然而，M. Dyer 的一个定理[D91] 表明，对于任意 $k \in \mathbb{N}$，高度为$\ell(w) - \ell(v) = k$的非同构区间 $[v,w]$ 只有有限多个。

4. 区间模式避免

区间模式嵌入/避免为研究舒伯特簇的奇点提供了一种通用的组合语言。

我们从排列模式回避的经典概念开始。设 $v \in S_m$ 和 $w \in S_n$ 是两个置换，其中 $m \leq n$。

定义 4.1. 若存在指标 $1 \leq \phi_1 < \phi_2 < \ldots < \phi_m \leq n$，使得 $w(\phi_1)\ w(\phi_2)\ldots\ldots,\ w(\phi_m)$ 与 $v(1)\ldots\ldots,\ v(m)$ 具有相同的相对顺序，则置换 $v \in S_m$ 嵌入于 $w \in S_n$。

换句话说，我们要求 $w(\phi_j)$、$< w(\phi_k)$、$\iff v(j)$、$< v(k)$。

定义 4.2. 置换 w（经典地）避免 v，如果不存在这样的嵌入 .

作为一个有用的热身习题，我们来考察余 vexillary 和余格拉斯曼排列这两类。[13] 本章讨论的许多问题在这些特殊情形下会更容易，因此我们会多次提到这几类置换。

定义 4.3。 $w \in S_n$ 若避免 3412，则称为余 *vexillary*。

定义 4.4。 $w \in S_n$ 若至多有一个上升，则称为余格拉斯曼；也就是说，至多存在一个指标 k 使得 $w(k) < w(k+1)$。

下面的习题将用一个与置换相关的重要组合对象来刻画余 vexillary 和余格拉斯曼置换。

习题4.5。 (a) *Fulton* 本质集是

$$E(w) = \{(i,j) \in D(w) : (i,j+1), (i-1,k) \notin D(w)\}.^{14}$$

用 $E(w)$ 刻画 w 余 vexillary。对 w 余格拉斯曼也做同样的事。

(b) 证明：如果 w 是余格拉斯曼置换，那么它就是余 vexillary。

组合意义上的模式回避概念，随着引言中提到的 V. Lakshmibai–B. Sandhya 定理 [LS90]进入了舒伯特簇的研究。尽管模式回避此后一直用于舒伯特簇的研究，但它的出现仍有些神秘，直到 S. Billey–T. Braden [BB03] 定义了模式映射，并用它给出了一个几何解释，说明为何若 X_v 是奇异的，且 v 模式嵌入于 w，则 X_w 必定是奇异的。作者在 [WY06], 中利用基于模式回避的概念刻画了 Gorenstein 舒伯特簇，但同时证明，模式回避不足以刻画 Gorenstein 舒伯特簇。为部分解释模式回避思想为何会出现，作者在 [WY08]中证明，区间模式回避——模式回避的一种推广——足以刻画满足某些非常宽松假设的任意局部性质。本节余下部分将介绍这一概念。

[13]在文献中，更常用的是 vexillary 置换和 Grassmann 置换。如果 $w_0 w$ 是余 vexillary（分别地，余格拉斯曼），那么 $w \in S_n$ 就是 vexillary（分别地，Grassmann）。[14]这与 Fulton 最初的定义 [F92] 正好相反。在文献中，这有时称为 余本质集。[15]模式映射也由 N. Bergeron–F. Sottile 在舒伯特演算的背景下独立定义。 [BS98]

令 $[u,v]$ a_n d $[x,w]$ 分别是 S_m 和 S_n 上 Bruhat 序中的偏序集区间 .

定义 4.6. 区间 $[u,v] \subseteq S_m$ 区间模式嵌入于 $[x,w] \subseteq S_n$，当且仅当存在一个公共嵌入 $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$，将 u 嵌入到 x 中，并将 v 嵌入到 w中，其中 x 和w 在 Φ 之外的元素相同；此外，$\ell(v) - \ell(u) = \ell(w) - \ell(x)$。

下面给出一道简单的习题。

习题 4.7. 给定一个区间 $[u,v] \in S_m$、一个置换 $w \in S_n$以及一列嵌入指标 $\Phi = (\phi_1, \ldots, \phi_m)$，它们使 v 嵌入到 w中。存在唯一的置换x，使得 Φ 给出将 u 嵌入到 x 中的一个嵌入，并且 x 和 w 在 Φ 之外的元素相同。

鉴于练习 4.7，我们用 $\Phi(u)$ 表示这个唯一的置换 x。（注意，这种记法略有误导性，因为确定 x还需要 w。）

习题4.8. 设 $u = 21453 = s_3s_4s_1$ 和 $v = 45132 = s_2s_3s_2s_4s_3s_1s_2$。注意 $u \leq v$。现在令Φ 为将 v 嵌入$w = \underline{7}8\underline{12}\underline{9}\underline{5}\underline{6}\underline{3}4$ 的嵌入，其中带下划线的位置表示该嵌入。也就是说，$\phi_1 = 1$、$\phi_2 = 2$、$\phi_3 = 4$、$\phi_4 = 6$、$\phi_5 = 8$。那么 $\Phi(u) = \underline{3}\underline{2}1\underline{7}9\underline{8}\underline{6}\underline{5}4$。验证 $[u,v]$ 嵌入 $[\Phi(u)\ w]$。

练习 4.7使我们可以作出如下定义：

定义 4.9. 区间 $[u,v]$ 嵌入 w，当且仅当 $[u,v]$ 嵌入 $[\Phi(u)\ w]$。

习题 4.10. 将 $[u,v]$ 嵌入 $[\Phi(u)\ w]$ 的嵌入 Φ 是区间模式嵌入，当且仅当 $[u,v]$ 与 $[\Phi(u)\ w]$ 作为偏序集同构。

现在可以自然地引入以下术语。

定义 4.11。 置换 w 区间模式避免 $[u,v]$，当且仅当对于任意 $x \leq w$，都不存在将 $[u,v]$ 嵌入 $[x,w]$ 的区间模式嵌入。

注意，经典模式避免确实是区间避免的一种特殊情况，因为 w 避免 v，当且仅当 w 避免区间 $[v,v]$。

习题4.12。设 $u = 21534$ 和 $v = 31524$。构造一个 w，使其在经典意义下包含 v，但区间模式避免 $[u,v]$。

为陈述区间模式避免的普适性定理，令 $S_\infty = \bigcup_{r \geq 1} S_r$ 为由 $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$ 上的置换构成的无限对称群，其中只有有限多个点不是不动点。定义

$$\mathfrak{S} = \{[u,v] : u \leq v \text{ in some } S_r\} \subseteq S_\infty \times S_\infty.$$

定义 4.13。 定义 $\prec_I$ 为由以下关系生成的 $\mathfrak{S}$上的偏序：

(1) $[u,v] \prec_I [x,w]$ 如果存在从 $[u,v]$ 到 $[x,w]$的区间模式嵌入，并且 (2) $[u,v] \prec_I [u',v]$ 如果 $u' \leq u$。

定义 4.14. A_n上序理想 $\mathcal{I}$（在偏序 $\prec_I$下）是 $\mathfrak{S}$ 的一个子集，满足：若 $[u,v] \in \mathcal{I}$且 $[u,v] \prec_I [x,w]$，则 $[x,w] \in \mathcal{I}$。

定义 4.15。 簇的一种局部代数性质 $\mathcal{P}$ 若满足以下条件，则称为半连续稳定性质(SSP)：在任意簇上，该性质成立的点集是该簇的闭子集，且该性质在与仿射空间作乘积后仍然成立。

习题4.16（“沿布鲁哈特序向下移动，只会变得更糟。”）。 证明：若 $\mathcal{P}$是 SSP，且在 $E_\bullet^{(v)} \in X_w$ 处成立，那么对于布鲁哈特序中满足 $v' \le v$ 的任意 $E^{(v')}_\bullet \in X_w$，它也成立。

定理 4.17. 设 $\mathcal{P}$ 是 *SSP*。使得 $\mathcal{P}$ 在舒伯特簇 X_v 上的 T-固定点 $E^u_\bullet$ 处成立的区间 $\{[u,v]\} \subseteq \mathfrak{S}$ 集合，在 $\prec$ 下构成一个上序理想 $\mathcal{I}_\mathcal{P}$。

下面的习题概述了 [WY12] 中定理 4.17 的证明。

习题 4.18. 设 u、v、w、Φ 如习题 4.8 中所述。按照第 2.2.6 节，将反舒伯特胞腔视为矩阵空间。

令 $[9] - \{\phi_1 < \phi_2 < \phi_3 < \phi_4 < \phi_5\} = \{\overline{\phi}_1 < \overline{\phi}_2 < \overline{\phi}_3 < \overline{\phi}_4\}$ 为非嵌入指标。定义代数映射

$$\Psi : \mathcal{N}_{\Phi(u),w} \to \Omega^\circ_u$$

为如下投影：从元素 $g \in \mathcal{N}_{\Phi(u),w}$ 中删除列 $\overline{\phi}_1$、.....、$\overline{\phi}_4$ 以及行 $w\,(\overline{\phi}_1)$ .....、$w\,(\overline{\phi}_4)$。

(a) 对于这个例子，证明 $\mathcal{N}_{u,\ v} \cong \mathcal{N}_{\Phi(u),\ w}$（代数簇同构）。

(b) 将 (a) 中的推理推广，证明只要 $[u,v]$ 区间嵌入 $[\Phi(u)\ w]$，就有 $\mathcal{N}_{u,\ v} \cong \mathcal{N}_{\Phi(u),\ w}$。

(c) 利用 (b) 和练习 4.16 证明定理 4.17。

我们还希望刻画全局避免 $\mathcal{P}$ 的舒伯特簇，换言之，即在任何点都不满足 $\mathcal{P}$ 的舒伯特簇。下面的推论说明，可以用区间模式避免来完成这一刻画。

推论 4.19 ([WY08，推论 2.7])。 设 $\mathcal{P}$ 是一个 *SSP*。那么，使得 $\mathcal{P}$ 在 X_w 的任何点都不成立的置换 w 所构成的集合，正是由那些避免某个（可能是无限）集合 $A_\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{S}$ 中所有区间$[u_i, v_i]$ 的置换 w 所构成的集合。

本节余下部分将介绍区间模式回避在舒伯特簇研究之外的一项有趣应用。我们首先回顾著名的辛普森对应。这是一种双射

$$\mathsf{Schensted} : S_n \xrightarrow{\sim} \bigcup_\lambda \mathsf{SYT}(\lambda) \times \mathsf{SYT}(\lambda),$$

其中并集取遍所有大小为 n 的整数分拆 λ，而 SYT(λ) 是形状为 λ的标准杨表集合。该对应通过将 $w = w_1 w_2 \dots w_n$（w的一行记法）进行列插入，得到一对杨表（$P(w)$ $Q(w)$）。详情请参阅例如[S99，第 7] 章。不过，作为一个例子，$w = 31524$ 插入后得到

$$\left(\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}\,,\,\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline\end{array}\,,\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}\,,\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}\,,\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&2&5\\\hline 2&3&4\\\cline{1-3}4\\\cline{1-1}\end{array}\,,\,\begin{array}{|c|c|}\hline 1\\\hline\\\cline{1-1}5\\\cline{1-1}\end{array}\right) = (P(w)\ Q(w)).$$

（不熟悉这种对应关系的读者，不妨从这个例子中弄清楚这个双射是什么，并进一步证明其正确性。）以下定义和习题见 [LM21]。

定义 4.20. $x, y \in S_n$ 属于同一个 Kazhdan-Lusztig 右胞腔 当且仅当 $P(x) = P(y)$。

习题 4.21*. (a) 给定 $x, y \in S_n$，存在 $v, w \in S_N$，使得对于某个 $N \geq n$， v, w 属于同一个右胞腔， $v(i) = w(i)$ 对于 $i \leq N - n$ 成立，并且 x, y（经典意义下）分别模式嵌入到最后 n 个位置中的 v, w。

(b) 此外，如果 $x \leq y$（布鲁哈特序），$\mathcal{N}_{v,\ w} \cong \mathcal{N}_{x,\ y}$。

练习 4.21 被用于为组合表示论中的问题构造无穷多个否定答案 [LM21]。其中包括 0-1 猜想；参见第 7.7 节，特别是定理 7.66。

5. 组合交换代数

本节将介绍组合交换代数中的概念，以研究 Kazhdan-Lusztig 理想的性质。我们将讨论 [WY12] 的结果，这些结果推广了 [KM05] 关于舒伯特行列式理想的情形中的结果。我们的讲述将贯穿一个简单示例（下文例 5.6）。

5.1. Gr¨obner 基。 我们先简要概述 Gr¨obner 基，相关内容可见例如 [CLO]。设 $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 和 $I \subseteq R$ 为理想。

定义 5.1. A 项序 $\prec$ 是 R 上单项式 x^γ 的全序，并满足：

- $1 \prec x_i$ 对于 $1 \leq i \leq n$；并且
- 若 $x^\alpha \prec x^\beta$，则 $x^\alpha \cdot x^\gamma \prec x^\beta \cdot x^\gamma$。

例 5.2。纯字典序是这样一种项序：$x^\alpha \succ x^\beta$ 若 $\alpha_i > \beta_i$，则取满足 $\alpha_i \neq \beta_i$（如果存在）的最小 i。

定义 5.3. 对于 $f \in R$，关于项序 $\prec$ 的首项记作 $\mathsf{init}_\prec(f)$，是 f 中 $\prec$ 最大的项。

定义 5.4. I 关于项序 $\prec$ 的初始理想为

$$\mathsf{init}_\prec(I) := \{\mathsf{init}_\prec(f) : f \in I\}.$$

定义 5.5. $g_1, g_2, \ldots, g_m$ 是 I 的格雷¨布纳基，相对于项序 $\prec$，若 $\langle \mathsf{init}_\prec(g_i) : i = 1, \ldots, m \rangle = \mathsf{init}_\prec(I)$。

布赫伯格判据 是一种测试，用于判断生成集 $\{g_1, \ldots, g_m\}$ 是否为 I 关于项序 $\prec$ 的格雷布纳基。反复应用该判据，就得到计算 I 的格雷布纳基的布赫伯格算法。

格雷布纳基描述了 R/I 到 $R/\mathsf{init}_\prec(I)$ 的一种“平坦”退化。对于 SSP（定义 4.15），$R/\mathsf{init}_\prec(I)$ 只能比 R/I“更差”。

关于上述断言的完整论述，请参见 [E96]。

例 5.6（贯穿全文的例子）。设 $R = \mathbb{C}[z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{31}, z_{32}, z_{33}]$ 为 $\mathsf{Mat}_{3\times 3}$ 的坐标环。设 $I_{\text{Ex. } 5.6}$ 由一个泛型 3×3 矩阵 $\begin{bmatrix} z_{31} & z_{32} & z_{33} \\ z_{21} & z_{22} & z_{23} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} \end{bmatrix}$ 的 2×2 子式生成。设 $\prec$ 为满足 $z_{11} \prec z_{12} \prec z_{13} \prec z_{21} \prec z_{22} \prec z_{23} \prec z_{31} \prec z_{32} \prec z_{33}$ 的纯字典序。

请注意 th 任意子式的首项都是“反对角项”。例如，

$$\mathsf{init}_{\prec}\left(\begin{vmatrix} z_{21} & z_{22} \\ z_{11} & z_{12} \end{vmatrix}\right) = z_{11}z_{22}.$$

习题5.7。 证明例 5.6 是舒伯特行列式理想的一个特例，同时也是 Kazhdan-Lusztig 理想的一个特例。

习题 5.8。 证明 $I_{\text{Ex. } 5.6}$ 的定义子式关于项序 $\prec$构成一个 Gr¨obner 基。

因此，

$$\mathsf{init}_{\prec}(I_{\text{Ex. } 5.6}) = \langle z_{11}z_{22}, z_{11}z_{23}, z_{11}z_{32}, z_{11}z_{33}, z_{12}z_{23}, z_{12}z_{33}, z_{21}z_{32}, z_{21}z_{33}, z_{22}z_{33}\rangle.$$

定义 5.9。 理想 I 的根理想 为 $\sqrt{I} := \{g \in R : \ g^k \in I$，其中 $k \geq 1\}$。如果 $I = \sqrt{I}$，则称理想为根理想 。

> 如果理想 I 是根理想，则它“没有隐藏方程”：不存在一个在其零点集 $V(I)$ 上消失的 $f \in R - I$。证明一个理想是根理想通常很困难。由于根性是半连续性质，一种方法是证明 $\mathsf{init}_{\prec}(I)$ 是根理想。

上述原理的第一句话是希尔伯特零点定理，其正式表述为：若 $\mathcal{I}(V(I))$ 是所有在 $V(I)$ 上取值为零的多项式构成的理想，则 $\mathcal{I}(V(J)) = \sqrt{J}$。如果$V(I) = V(\sqrt{I}) := X$ 我们就说 I 在集合论意义下定义了 X。

例 5.10。 一个非根理想是 $I = \langle x^2, xy, y^2\rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$。例如， $x \notin I$ 但$x \in \sqrt{I}$。现在， $V(I) = \{(0, 0)\}$。 x 和 y 在 $V(I)$ 上都取值为零，但 $x, y \notin I$。

定义 5.11. 多项式环 $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 的无平方单项式理想 I 是由无平方因子单项式生成的理想。

例5.12。 从定义中并不能明显看出 $I_{\text{Ex. } 5.6}$ 是根理想。然而，无平方单项式理想显然是根理想，因此例。5.6 := $\mathsf{init}_{\prec}(I_{\text{Ex. } 5.6})$ 是根理想，进而根据上述原理，$I_{\text{Ex. } 5.6}$ 也是根理想。

例 5.13。利用 Gr¨obner 基证明理想 I 是根理想的方法对项序 $\prec$的选择很敏感。例如，令 $I = \langle x_1x_2 - x_3^2\rangle \subset \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3]$；这个理想是根理想。若 $\prec$ 是满足 $x_1 \succ x_2 \succ x_3$ 的纯字典序，则 $\mathsf{init}_{\prec}(I) = \langle x_1x_2\rangle$是无平方的。另一方面，若 $\prec'$ 是满足 $x_1 \prec' x_2 \prec' x_3$的纯字典序，则 $\mathsf{init}_{\prec'}(I) = \langle x_3^2\rangle$ 不是根理想，因此无法应用上述原理。

现在我们说明如何将习题 5.8 推广到 Kazhdan-Lusztig 理想。令 $\prec$ 为由下式诱导的 $\mathsf{z}^{(v)}$ 中单项式上的纯字典序项序

$$z_{ij} \succ z_{kl} \text{ if } j > l, \text{ or if } j = l \text{ and } i < k. \tag{9}$$

定理 5.14 ([WY12])。定义 *3.5* 中的定义子式构成一个 *Gr¨obner* 基，其首项均无平方，对 $I_{v,\ w} \subseteq \mathbb{C}[\mathbf{z}^{(v)}]$ 而言，相对于 $\prec$。特别地，$I_{v,\ w}$ 是根理想。

E. Neye [N21] 给出了定理 5.14 的另一种证明，并得到了一个类似的格雷布纳基结果，适用于舒伯特簇的补丁理想。

习题 5.15. [KM05] 的格雷布纳基定理表明，舒伯特行列式理想 I_w（定义 3.14）的定义生成元构成一个格雷布纳基，其所依的纯字典序满足（9）。假设定理 5.14，证明这一结论。

A_n反对角项序 是一种对一般矩阵的任意子式都选取其反对角项的项序。

问题 5.16. 求 I_w 在反对角项序下的一个 *Gr¨obner* 基。[16]

当 w 为余 vexillary 时， [KMY09] 中给出了一个解；另见 [HPW22,K20, KW21] 中的最新进展。

问题 5.17. 求 $I_{v,\ w}$ 在某种反对角项序下的一个 *Gr¨obner* 基。

5.2. **素分解**。

定义 5.18. 理想 I 是素数当且仅当 $ab \in I \implies a \in I$ 或 $b \in I$。

定义 5.19. 理想 J 的一个素分解 是 $J = \bigcap_{t=1}^{\ell} J_t$，其中每个 J_t 都是素理想，且对 $s \neq t$, $J_s \not\subseteq J_t$。

理想 $I \subset R$ 有素分解，当且仅当它是根理想（这是本章唯一关注的情形）。不过，根据拉斯克-诺特定理 [CLO，第 4 节，8]，所有理想都有一种更一般的分解，称为初等分解。习题5.20*. 证明 $I_{v,w}$ 是素理想。

习题5.21. 验证 I' 习题. 5.6 的素分解为:

$$
\begin{aligned}
I'_{\text{Ex. } 5.6} =& \langle z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}\rangle \cap \langle z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{33}\rangle \cap \langle z_{11}, z_{12}, z_{32}, z_{33}\rangle \\
& \langle z_{11}, z_{21}, z_{23}, z_{33}\rangle \cap \langle z_{11}, z_{23}, z_{32}, z_{33}\rangle \cap \langle z_{22}, z_{23}, z_{32}, z_{33}\rangle.
\end{aligned} \tag{10}
$$

从几何角度看，素分解（10）表明 $V(I'$ 习题. 5.6) 是等维的（所有不可约分支的维数都相同），因为分解中的所有素理想所定义的簇维数相同。等维性在闭子集上也成立，因此 $I_{\text{Ex. } 5.6}$ 本身也是等维的（实际上， $I_{\text{Ex. } 5.6}$ 是素理想，因此 $V(I_{\text{Ex. } 5.6})$ 不可约，但这一点不容易证明）。

读者 可以使用 Macaulay2（或获得）答案。[17] 命令如下: :

```
R=QQ[z11,z12,z13,z21,z22,z23,z31,z32,z33, MonomialOrder=>Lex]
M=matrix({{z31,z32,z33},{z21,z22,z23},{z11,z12,z13}})
I=minors(2,M)
J=gb I
K=ideal leadTerm(J)
P=primaryDecomposition(K)
```

[16]按照 [KM05] 的约定，这对应于他们的对角项序；而我们的对角项序则是他们的反对角项序（正是因为我们的约定将 z_{11} 置于矩阵的西南角）。[17]作者的网站提供了用于研究 Kazhdan-Lusztig 簇的 Macaulay2 代码。

形状为某形状的半标准杨表是指用 1、2、3 填入杨表，并满足元素沿行弱递增、沿列严格递增。读者可以验证，这样的杨表共有六个，分别是：

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&2\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&3\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 3&3\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2&3\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&3\\\hline\end{array},\quad \begin{array}{|c|c|}\hline 2&2\\\hline 3&3\\\hline\end{array},$$

即 I' 习题。5.6 中分解（10）的素理想分量数量！

习题5.22。解释上一段中六这一巧合。对于（5.21）中的每个分量，如果 z_{ij} 作为生成元出现，则在 3×3 网格的矩阵位置（i，j）处放置一个 $+$。例如，与分量 $\langle z_{11}、\ z_{23}、\ z_{32}、\ z_{33}\rangle$ 对应的“加号图”是 $\begin{bmatrix} \cdot & + & + \\ \cdot & \cdot & + \\ + & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$。在这 6 个加号图与 6 个杨表之间给出一个自然的双射。

习题 5.22 是 [KM05，定理 B] 的特殊情形；该定理讨论 I_w 的初始理想。在那里，研究对象不是杨表，而是 管道梦，它们自然地标记了 I_w 的初始理想的素理想分量。也可以将习题 5.22 看作 [KMY09] 的特殊情形。在[WY12，定理 3.2]中，利用定义在罗特图 $D(v)$ 上的管道梦，可以得到关于 $I_{v,\ w}$ 的类似结果。

5.3. 单纯复形。

定义 5.23. 集合 $[n]$ 上的（抽象）单纯复形 Δ 是一个子集族$\{F\}$，它对取子集运算封闭；也就是说，若 $F\in\Delta$ 且 $F'\subseteq F$，则 $F'\in\Delta$。每个子集 $F\in\Delta$ 都是一个面。按包含关系极大的面称为极大面。

> *Stanley-Reisner* 对应是单纯复形 Δ 与平方自由单项式理想 I 之间的双射，其构造方式是将每个极小非面 $\{i_1,\dots,i_d\}$ 对应到一个生成元 $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_d}$。这一对应为代数与单纯拓扑之间提供了一套对照。

习题5.24. (a) 证明 Stanley-Reisner 对应确实是一个双射。

(b) 将 Stanley-Reisner 对应应用于无平方单项式理想 I' 习题. 5.6。证明所得的单纯复形 $\Delta_{\text{Ex. }5.6}$ 有六个极大面。这与习题 5.22 中的六个杨表有什么对应关系?

习题 5.24 中的单纯复形是一个子词复形 [KM04]。这类复形的实例包括 [KM05、KMY09、WY12]中出现的 Stanley-Reisner 复形。一个相关但不同的概念是杨图复形 [KMY08]。

5.4. 多重分次与希尔伯特级数。 本小节参考文献为 [MS05]。

定义 5.25。 在 R 上的 $\mathbb{Z}^r$-多重分次 由一个多重次数映射 $\deg:\ \mathbb{N}^n\to\mathbb{Z}^r$定义，其中 $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$。假定该映射是可加的，因此，对于所有 $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$，

$$\deg(\alpha+\beta)=\deg(\alpha)+\deg(\beta).$$

多重分次为单项式 $\prod_{i=1}^n x_i^{u_i}\in R$赋予多重次数 $\deg(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{Z}^r$。

可加性条件意味着我们有一个分解

$$R = \bigoplus_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^r} R_{\mathbf{a}}$$

其中 $R_{\mathbf{a}}$ 是由多重次数为 a 的单项式张成的向量空间（在 $\mathbb{C}$上），且此分解是分次的，也就是说，若 $f \in R_{\mathbf{a}}, g \in R_{\mathbf{b}}$，则对所有 a、b $\in \mathbb{Z}^r$，有 $fg \in R_{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$。

例5.26。标准分次定义为 deg：$\mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}$

$$\deg(u_1, \ldots, u_n) = u_1 + u_2 + \cdots + u_n.$$

定义 5.27。若多重分次 deg：$\mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}^r$ 定义在 R 上满足：对所有 a $\in \mathbb{Z}^r$，$\dim_{\mathbb{C}} R_{\mathbf{a}} < \infty$，则称其为正的。

本章中我们只使用正多重分次。定义 5.27 等价于其他若干条件；参见 [MS05，定理 8.6]。

定义 5.28。若多项式 $f = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^r} c_\alpha x^\alpha \in R$ 满足对某个 a $\in \mathbb{Z}^r$ 有 $f \in R_{\mathbf{a}}$，则称其为齐次。若理想 I 属于 R，且由齐次元素生成，则称其为齐次。

设 $S = R/I$ 其中 I 是齐次的，且 R 是正多重分次的。对于一个 $\in \mathbb{Z}^r$，令 $S_{\mathbf{a}} \subset S$ 为由次数为 a 的单项式（等价类）张成的向量子空间。因此

$$S = \bigoplus_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^r} S_{\mathbf{a}}. \tag{11}$$

根据 [MS05，第 8.1-8.2] 节，在这种情况下，$\dim_{\mathbb{C}}(S_{\mathbf{a}}) < \infty$。因此，下面的定义是有意义的：

定义 5.29. S 的希尔伯特级数（相对于正多重分次 deg） is

$$\mathsf{Hilb}(S; t) = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^r} \dim(S_{\mathbf{a}}) t^{\mathbf{a}},$$

其中 $t = \{t_1, \ldots, t_r\}$ 且 $t^{\mathbf{a}} := t_1^{\mathbf{a}_1} \cdots t_r^{\mathbf{a}_r}$。

定理 5.30 ([MS05，定理 8.20]). 设 $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个分次为deg：$\mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}^r$的正多重分次环，且 I 是 R的一个齐次理想。则

$$\mathsf{Hilb}(R/I; t) = \frac{\mathcal{K}(R/I; t_1, \ldots, t_r)}{\prod_{i=1}^n (1 - t^{\deg(x_i)})},$$

其中 $\mathcal{K}(R/I; t_1, \ldots, t_r) \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_r]$。

若要解释为何希尔伯特级数会呈现“分数形式”，我们需要了解自由分解的概念，下一节将对此进行讨论。参见习题 6.10。

定义 5.31。在 R/I 的假设下，多项式 $\mathcal{K}(R/I; t)$ 是 K-多项式。多重次数 $\mathcal{C}(R/I; t) \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_r]$ 是通过取 $\mathcal{K}(R/I; 1 - t_1, \ldots, 1 - t_r)$ 中最低（总）次数项而得到的多项式。

虽然 K-多项式等价于希尔伯特级数所编码的信息，但多重次数仅追踪关于 $V(I) \subset \mathbb{C}^n$ 的最高维分量的信息。

习题5.32. (a) 如果 R 是标准分次的，那么次数为 k 的单项式有多少个?

(b) 证明

$$\mathsf{Hilb}(R; t_1, \ldots, t_r) = \frac{1}{(1 - t^{\deg(x_1)}) \cdots (1 - t^{\deg(x_n)})}.$$

Gr¨obner 基保持多重分次希尔伯特级数:

定理 5.33 ([MS05，定理 8。36])。 设 R 是一个正多重分次环， I 是一个齐次理想。那么 $\mathsf{init}_\prec$ 关于相同的分次也是（显然）齐次的，并且

$$\mathsf{Hilb}(R/I; t) = \mathsf{Hilb}(R/\mathsf{init}_\prec(I); t).$$

习题 5.34。 设 $R = \mathbb{C}[z_{11}, z_{12}, z_{21}, z_{22}]$ 带有多重分次 $\deg : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{Z}^4$ ，该分次将 z_{ij} 的多重次数赋为 $\vec{e}_i - \vec{e}_{2+j}$。 设 $I = \langle z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} \rangle$ 和 $S = R/I$。

(a) 证明该多重分次是正的。

(b) 验证 I 是齐次的。

(c) $S_{(1,0,-1,0)}$的向量空间基是什么? 那么 $S_{(1,1,-1,-1)}$呢?

(d) 选取项序 $\prec$，使得 $\mathsf{init}_\prec(z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}) = z_{11}z_{22}$。显然， $\{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}\}$是关于 $\prec$的 Gr¨obner 基。令 $I' = \mathsf{init}_\prec(I) = \langle z_{11}z_{22} \rangle$。令 $S' = R/I'$。通过计算 $S'_{(1,0,-1,0)}$ 和 $S'_{(1,1,-1,-1)}$的维数，确认定理 5.33 是有意义的。

(e) 使用满足 $\mathsf{init}_\prec(z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}) = z_{12}z_{21}$的项 $\prec$ 重复 (d)。令 I'' 为初始理想，并令 $S'' = R/I''$。

(f) 设 $t = (x_1, x_2, y_1, y_2)$。证明

$$\mathsf{Hilb}(S'; t) = \frac{(1 - \frac{x_1}{y_1}) + (1 - \frac{x_2}{y_2}) - (1 - \frac{x_1}{y_1})(1 - \frac{x_2}{y_2})}{(1 - \frac{x_1}{y_1})(1 - \frac{x_1}{y_2})(1 - \frac{x_2}{y_1})(1 - \frac{x_2}{y_2})}$$

and

$$\mathsf{Hilb}(S'', t) = \frac{(1 - \frac{x_1}{y_2}) + (1 - \frac{x_2}{y_1}) - (1 - \frac{x_1}{y_2})(1 - \frac{x_2}{y_1})}{(1 - \frac{x_1}{y_1})(1 - \frac{x_1}{y_2})(1 - \frac{x_2}{y_1})(1 - \frac{x_2}{y_2})}.$$

注意，$\mathsf{Hilb}(S', t) = \mathsf{Hilb}(S'', t)$（因此，根据定理 5.33，二者都等于 $\mathsf{Hilb}(S; t)$）。

现在我们完成对例 5.6 的讨论。这道习题与习题 5.34 类似，但更加复杂。

习题 5.35。 通过 $\deg(z_{ij}) = \vec{e}_i - \vec{e}_{3+j} \in \mathbb{Z}^6$ 定义一个（正的）多重分次。这里令$t = (x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$。

(a) 证明 $I_{\text{Ex. } 5.6}$ 关于此分次是齐次的。

(b) 计算 $\mathsf{Hilb}(R/I_{\text{Ex. } 5.6}; t)$。（难）

(c) 证明 $\mathcal{C}(R/I_{\text{Ex. } 5.6}) = \sum_P \mathsf{wt}(P)$，其中求和遍历习题 5.22 中的六个加号图，且

$$\mathsf{wt}(P) = \prod_{+ \text{ in position } (i,j)} x_i - y_j.$$

例如，对于例 5.22 中描绘的加号图 P，$\mathsf{wt}(P) = (x_1 - y_1)(x_2 - y_3)(x_3 - y_2)(x_3 - y_3)$。

也就是说，多重次数是关于加号图的生成级数。

命题 5.36。令 $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ 为 $\mathbb{Z}^n$中的标准基向量。固定 $v \in S_n$，并令 $w \in S_n$满足 $v \leq w$。理想 $I_{v,w}$ 在多重分次 次数$(z_{ij}) = e_{v(j)} - e_{n-i+1}$下是齐次的，其中每个 z_{ij} 都属于 $\mathbf{z}^{(v)}$。

习题5.37。证明命题 5.36。

读者可能会问，习题 5.34/习题 5.35 和命题 5.36 中的多重分次从何而来？对于习题 5.34 中的多重分次，它来自 $(\mathbb{C}^*)^2 \times (\mathbb{C}^*)^2$ 代数环面[18] 的作用，其中左因子通过缩放 2×2 矩阵的行发挥作用，右因子则通过缩放列（取逆）发挥作用。习题 5.35 中也有类似的 $(\mathbb{C}^*)^3 \times (\mathbb{C}^*)^3$ 作用。对于命题 5.36，这种作用来自 T 对$\mathcal{N}_{v,\ w}$的左乘作用。更一般地，代数环面$T = (\mathbb{C}^*)^r$ 对仿射簇 V的作用，使其坐标环 $\mathbb{C}[V] = R/I$ 成为一个 T-模。变量 $z \in \mathbb{C}[V]$ 的次数恰好是环面特征 $\chi(t_1, \ldots, t_r)$，它作用在由 z张成的一维表示上。

为了给出 $S = R/I_{v,w}$ 的多重分次希尔伯特级数公式，我们需要引入一族在代数组合学中具有重要意义的多项式。设 $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ 和 $\mathbf{y} = \{y_1, y_2, \ldots\}$ 是两组可数的不定元。令 Pol 为系数属于整数的 x、y 的劳伦多项式集合。

定义 5.38. 等压差分算子 为

$$\begin{aligned} \pi_i : \mathrm{Pol} &\to \mathrm{Pol} \\ f &\mapsto \frac{x_{i+1} f(\cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots) - x_i f(\cdots, x_{i+1}, x_i, \cdots)}{x_{i+1} - x_i}. \end{aligned}$$

习题 5.39. 验证 $\pi(f)$ 确实属于 Pol。

定义 5.40. 格罗滕迪克多项式 (x, y) 对每个 $w \in S_n$ 按照以下递推关系定义。若 $w = w_0$，则

$$\mathfrak{G}_{w_0} := \prod_{i+j \leq n} 1 - \frac{x_i}{y_j}.$$

否则，存在 $1 \leq k < n$，使得 $w(k) < w(k+1)$，并且

$$\mathfrak{G}_w = \pi_i(\mathfrak{G}_{wt_{i\ i+1}}).$$

例5.41。对于 $n = 3$,

$$\mathfrak{G}_{w_0} = \left(1 - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(1 - \frac{x_1}{y_2}\right)\left(1 - \frac{x_2}{y_1}\right).$$

因此

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{231} &= \pi_1 \mathfrak{G}_{w_0} \\ &= \frac{x_2\left(1 - \frac{x_1}{y_1}\right)\left(1 - \frac{x_1}{y_2}\right)\left(1 - \frac{x_2}{y_1}\right) - x_1\left(1 - \frac{x_2}{y_1}\right)\left(1 - \frac{x_2}{y_2}\right)\left(1 - \frac{x_1}{y_1}\right)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - y_1)(x_1 - y_1)}{y_2^2}. \end{aligned}$$

习题5.42。计算 $\mathfrak{G}_{312}$ 和 $\mathfrak{G}_{132}$。

[18]这意味着一个与 $(*\mathbb{C}^*)$ 同构的代数群 ^{r}，其中某个正整数 r

习题 5.43。 (a) 证明，对于 $|i-j|>1$， $\pi_i\pi_{i+1}\pi_i=\pi_{i+1}\pi_i\pi_{i+1}$ 和 $\pi_i\pi_j=\pi_j\pi_i$。现在利用习题 2.38(a) 得出结论： $\mathfrak{G}_w$ 的定义不依赖于定义 5.40 中k 的选择。

(b) Show $\pi_i^2=\pi_i$.

定义 5.40 于 1982 年由 A. Lascoux-M.-P. Sch¨utzenberger 提出，用于研究 GL_n/B 的舒伯特演算。在适当的特化下，可以得到舒伯特多项式 （关于 x 和 y 两组变量，或仅关于 x 变量）。这些多项式有许多非消去公式，直到今天仍是代数组合学领域备受关注的研究对象。关于参考文献和更多背景，我们请读者参阅 [M01c、K16] ，同时指出，近年来还开展了大量工作（例如参见 [KW21] 及其中的参考文献）。

下面将说明，经过一次代换后，格罗滕迪克多项式是 Kazhdan-Lusztig 理想的 K- 多项式。

定理 5.44. 设 $R=\mathbb{C}[z_{ij},1\le i,j\le n]$ 和 $I_{v,\ w}$ 是 $v,\ w\in S_n$ 的 ***Kazhdan-Lusztig*** 理想。相对于命题 *5.36* 中的正多重分次，$S=R/I_{v,\ w}$ 的多重分次希尔伯特级数多项式为

$$\mathsf{Hilb}(R/I_{v,w},t_1,\dots,t_n)=\frac{\mathfrak{G}_{w_0w}(t_{v(1)},\dots,t_{v(n)};t_n,t_{n-1},\dots,t_1)}{\prod_{1\le i,j\le n}(1-t_{v(j)}/t_{n-i+1})},$$

其中分母中的乘积遍历所有满足 $z_{ij}\in\mathbf{z}^{(v)}$ 的 $(i,\ j)$。

定理 5.44 重新表述了 [WY12，定理 4.5] 的一部分。在 [WY12], 中，该陈述是通过对“未特化的格罗滕迪克多项式”进行特化来表述的。其优点在于，命题 5.36 以及习题 5.34 和 5.35（它们本质上是伪装起来的舒伯特行列式理想）的多重分次，都是从另一种多重分次的特化推导而来的。在 [KM05], 中，格罗滕迪克多项式（视为一个 K-多项式）和舒伯特多项式（视为多重次数）的“管道梦”组合公式，自然地源自 Gr¨obner 退化以及初始概形的素分解。这个结果（或者 [KMY09] 中一个类似但更切题的结果）推广了习题 5.35 ； 该习题将 “ 加号图 ” 与 $R/I_{\text{Ex. }5.6}$ 的多重次数联系起来。在 [WY12] 中，我们对这些多项式的特化也做了同样的处理。

例 5.45。 设 $v=id,w=213$。由于 $w_0w=231$，利用例 5.41 中的 $\mathfrak{G}_{231}$ 计算可得

$$\mathsf{Hilb}(R/I_{id,231};t_1,t_2,t_3)=\frac{(t_3-t_1)(t_3-t_2)/t_3^2}{(1-\frac{t_1}{t_3})(1-\frac{t_1}{t_2})(1-\frac{t_2}{t_3})}.$$

习题 5.46。 计算 $\mathcal{K}(R/I_{132,\ 132};\ t_1,t_2,t_3)$。

6. 分解子与（极小）自由分解

为了具体定义下一节中舒伯特簇的性质，我们需要自由分解这一概念。一般理论见 [E96], ， 更具体的论述见 [E05], ； 多重分次情形见 [MS05]; 最近的一篇综述论文见 [FMP16]。我们将以本章所需的一般性程度介绍这一理论。

与第 5 节一样，我们假设 $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, $I \subseteq R$ 是一个理想；将 $S = R/I$ 和 I 视为 R-模。

定义 6.1。 S 的**自由分解** 是由有限生成自由 R-模之间的同态构成的正合列

$$\cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} F_i \xrightarrow{\partial_i} F_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} S \longrightarrow 0,$$

th即 $\mathrm{im}(\partial_{i+1}) = \ker(\partial_i)$，对于 $i \geq 0$。每个映射 ∂_i 都是微分。

如果 F_i 的秩为 r ank β_i，那么我们将 ∂_i 视为一个元素来自 R 的矩阵。

定义 6.2。 如果自由分解具有以下形式，则称其为有限

$$0 \longrightarrow F_n \xrightarrow{\partial_n} \cdots \longrightarrow F_{i+1} \xrightarrow{\partial_{i+1}} F_i \xrightarrow{\partial_i} F_{i-1} \xrightarrow{\partial_{i-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\partial_0} S \longrightarrow 0. \tag{12}$$

D. Hilbert 证明了著名的结果，用现代语言重述如下：每个R-模 S 都有一个长度至多为 n [H90] 的自由分解。因此，可以通过与自由模进行比较来研究 S 。

如果像我们现在这样，假设 R 具有多重分次 $\deg : \mathbb{N}^n \to \mathbb{Z}^r$，并且 I 关于该分次是齐次的，那么还可以说得更多。此时 S 是多重分次的，也就是说，(11) 成立。接下来我们会使用一种无害的“记账技巧”，使微分成为保次数映射：

定义 6.3（次数移位）。对于 $\alpha \in \mathbb{Z}^r$，令 $R(-\alpha)$ 为秩为 1 的自由 R-模，使得 $R(-\alpha)_\beta = R_{\beta-\alpha}$。

我们将记作：

$$F_i = \bigoplus_{j=1}^{k} R(-\alpha^{i,j}) \tag{13}$$

其中 k 是 F_i 的秩，且每个 $\alpha^{i,\,j} \in \mathbb{Z}^r$。

定义 6.4。如果有限自由分解 (12) 中的每个微分 ∂_i 都是多重分次的 R-同态，即我们还要求这些映射保持多重次数，那么称该分解是**多重分次的**。

为了讨论 R/I 的不变量，我们需要这个定义：

定义 6.5. 若对每个 i， ∂_i 中都没有非零常数元素，则有限自由分解 (12) 称为**极小的**。

若 R 是正的多重分次的，则极小自由分解存在。此外，在这种情况下，极小自由分解确实具有以下意义上的“极小性”：复形中自由模的秩尽可能小。下面的例子阐释了行列式理想所涉及的定义背后的思想。

例 6.6. 设 F_0 具有标准分次。令 I 为由一般 2×3 矩阵的 2×2 阶子式生成的理想。也就是说，

$$I = \langle z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}, z_{11}z_{23} - z_{13}z_{21}, z_{12}z_{23} - z_{13}z_{22} \rangle.$$

为便于后文参考，请注意这些生成元是极小的（去掉任何一个生成元都会改变理想）。目前，存在从 $F_0 = R \to S$ 出发的投影。

这个映射的核是 I。我们通过定义 $F_1 = R(-2)^{\oplus 3}$ 来表述这一事实，并令

$$\partial_0(f_1,\ f_2, f_3) = f_1(z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}) + f_2(z_{11}z_{31} - z_{21}z_{13}) + f_3(z_{12}z_{23} - z_{22}z_{31}) \in R.$$

次数移位"记账技巧"的要点在于，如果（f_1, f_2, f_3）是次数为 d 的齐次多项式，即（f_1, f_2, f_3） $\in (R(-2)^{\oplus 3})_{d+2}$，那么它们的像属于 R_{d+2}。最后，为了记录起见，我们将 ∂_0 编码为如下矩阵 1×3

$$\partial_0 = [z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21} \ \ z_{11}z_{31} - z_{21}z_{13} \ \ z_{12}z_{23} - z_{22}z_{31}]$$

事实上，$\mathrm{im}(\partial_0) = I$，正如所期望的那样。

现在，$\ker(\partial_1)$ 非平凡。也就是说，∂_0 的各列之间存在代数关系。两个关系为

$$z_{23} \cdot (z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}) - z_{22} \cdot (z_{11}z_{31} - z_{21}z_{13}) + z_{21} \cdot (z_{12}z_{23} - z_{22}z_{31}) = 0,$$

$$-z_{13} \cdot (z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}) + z_{12} \cdot (z_{11}z_{31} - z_{21}z_{13}) - z_{21} \cdot (z_{12}z_{23} - z_{22}z_{31}) = 0.$$

这些称为一阶系数关系。

类似地，我们将这些关系编码为矩阵 ∂_1 的列：$= \begin{bmatrix} z_{23} & -z_{13} \\ -z_{22} & z_{12} \\ z_{21} & -z_{21} \end{bmatrix}$，并将其视为从 $F_2 = R(-3)^{\oplus 2}$ 到 $F_1 = R(-2)^{\oplus 3}$ 的映射。读者可以自行验证，$\mathrm{im}(\partial_1) = \ker(\partial_0)$，并且 ∂_1 也是保持次数的。

最后，在这种情况下不存在二阶系数关系，也就是说，∂_1 的列之间没有代数关系。因此，$\ker(\partial_1)$ 就是 (0,0)。于是，若将 ∂_2 定义为零映射，我们就得到一个分次有限自由解

$$0 \xrightarrow{\partial_2} F_2 = R(-3)^{\oplus 2} \xrightarrow{\partial_1} F_1 = R(-2)^{\oplus 3} \xrightarrow{\partial_0} F_0 = R \longrightarrow S \longrightarrow 0.$$

Hilbert [H90] 证明，这种确定分解子、二阶分解子、三阶分解子等的过程总会在 n 步后终止，从而得到一个分次自由解。

> 极小自由分解的长度，甚至其中出现的自由模的秩（以及次数移位），都是不变量，前提是整个过程中都采用极小选择。

习题 6.7. 现在令 I 为由 $\begin{bmatrix} z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24} \\ z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14} \end{bmatrix}$ 的 2×2 阶子式生成的理想。在这里确实可以看到二阶系数关系。

(a) 求出 $S = R/I$ 的最小自由分解。(b) 按如下方式使用 `Macaulay 2` 对其进行验证：

```
R=QQ[z11,z12,z13,z14,z21,z22,z23,z24]
M=matrix{{z21,z22,z23,z24}, {z11,z12,z13,z14}}
rs=res minors(2,M)
rs.dd
```

我们用以下定理作总结（参见 [MS05，第 8 节.3]）：

定理 6.8。 若 $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 是正分次的，且 I 是一个齐次理想，则存在如下形式的最小有限自由分解

$$0 \to \bigoplus_j R(-\alpha^{n,j})^{\oplus \beta_{n,j}} \to \bigoplus_j R(-\alpha^{n-1,j})^{\oplus \beta_{n-1,j}} \to \cdots \to \bigoplus_j R(-\alpha^{0,j})^{\oplus \beta_{0,j}} \to R \to R/I \to 0$$

其中 n， $\alpha^{i,\,j} \in \mathbb{Z}^r$， $\beta_{i,\,j} \in \mathbb{N}$ 仅依赖于 R/I。

定义 6.9。 对于固定的 i, $\beta_i := \sum_j \beta_{i,\,j}$ 称为贝蒂数。每个 $\beta_{i,\,j}$ 都是一个分次贝蒂数。

下面的习题解释了希尔伯特级数中“分数形式”的由来（定理 5.30）：

习题 6.10。 (a) 求出 Hilb(R(0); $t_1, \ldots, t_r$)、Hilb($R(-\alpha)$; $t_1, \ldots, t_r$) 和 Hilb(F_i; $t_1, \ldots, t_r$)，其中 F_i 如 (13) 所示。

(b) 假设 S 是标准分次的，且 (12) 是分次的。给出 Hilb(S, t) 的公式，使其表示为 Hilb(F_i, t) 的交错和。

(c) 现在利用 (a) 证明，对于某个 $K(t) \in \mathbb{Z}[t]$, Hilb$(S, t) = \frac{K(t)}{(1-t)^n}$。

（d）对一般的多重分次环重复（b）和（c）。

习题6.11：使用 `Macaulay2` 计算当 $I = I_{v,\,w}$ 为 Kazhdan-Lusztig 理想时的分次贝蒂数，其中采用命题 5.36 给出的正多重分次。

根据定理 6.8, （分次）贝蒂数是 $S = R/I$（作为 R-模）的不变量。它们的重要性可以表述如下：

> Many important properties of R/I or $V(I)$ are encoded by the (graded) Betti numbers.

这一原理将在第 7 节中变得显而易见。由此引出以下问题：

问题 6.12。 确定舒伯特行列式理想的贝蒂数（或者更好地，描述其最小自由分解；更一般地，描述 *Kazhdan-Lusztig* 簇的情形）。

问题 6.12 总体而言似乎非常困难。贝蒂表 是组织分次贝蒂数的一种标准方式。对于舒伯特行列式理想，我们目前只知道贝蒂表的行数（对于标准分次） [PSW21] 以及（隐含地）该表第一列的值 [GY22]。后者的理解源于这样一个事实： I_w 的极小生成元已在同上中确定；参见习题 7.23。唯一完全解决的特殊情形是 $m \times n$ 矩阵中的 $k \times k$ 子式（在特征 0 上）；参见[L78、W03]。S. Sam [S11] 的舒伯特复形提供了第一种近似以及可能的构件。在我们关于奇点度量的结果中，我们实际上并不求助于最小自由分解或贝蒂数，尽管我们将利用其存在性来定义这些问题。

7. 奇异性测度

定义 7.1。 A 局部环 是一个环 R，它有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$；其剩余域为 $\Bbbk = R/\mathfrak{m}$。有时我们用 $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ 表示局部环，以便通过记号完整记录所有信息。

设 X 是一个复代数簇，且 $p \in X$。 X 在 p处的局部环，记作 $\mathcal{O}_{X,\ p}$，由以下部分构成：在 p 的某个邻域内定义且在 p处正则的正则函数芽环、由在 p处消失的正则函数构成的极大理想 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$，以及 $\Bbbk = \mathbb{C}$。它刻画了 X 在 p 处的局部性质，并且是 X 与点 p的同构不变量；精确定义见[H77, I.3] 。对于熟悉这些概念的读者，我们确实会用局部环来定义代数簇的性质，并参考 [E96, BH93]等一般性文献。不过，对于舒伯特簇，我们主要给出等价定义，采用 Kazhdan-Lusztig 理想来表述。接着，我们将陈述通过区间模式避免解决（P1）或（P2）的定理和猜想。

7.1. **光滑性**。

定义 7.2. 在 p 处的 扎里斯基余切空间是 $\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2$。

余切空间是定义在 $\Bbbk$ 上的向量空间（在我们的情形中，$\Bbbk$ 是 $\mathbb{C}$）。

定义 7.3. 在 p 处的扎里斯基切空间 在 X 中是 $\left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right)^*$（向量空间对偶）。

定义 7.4. $p \in X$ 是 光滑的 当且仅当 维数$_{\mathbb{C}}$ $\left(\left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right)^*\right)$ $=$ 维数$_{\mathbb{C}}$ X。

由于维数$_{\mathbb{C}}$(X_w) $= \ell(w)$， X_w 在 $p = E_\bullet^{(v)}$ 处光滑，当且仅当维数$_{\mathbb{C}}$ $\left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right)^* = \ell(w)$。

习题7.5。 X_w 在 $E_\bullet^{(v)}$处光滑，当且仅当$\mathcal{N}_{v,\ w}$ 在 0 处光滑。

我们重述 V. Lakshmibai–B. Sandhya [LS90] 在引言中提到的如下刻画：

定理 7.6 （[LS90]）。 X_w 光滑，当且仅当 w 不含模式3412 和4231。

关于判定 X_w 是否光滑的其他判据的总结，请参见 [BL00] 。

下面的习题给出了 X_w 在 $E_\bullet^{(v)}$处光滑性的另一种定义：

习题 7.7（雅可比判别法）。 给定$I_{v,\ w}$的生成元 g_1、 g_2、 ……、 g_t，令 J 为 $t \times \ell(w_0 v)$阶矩阵 J $= (\frac{\partial g_i}{\partial x_j})$，其中 x_1、 x_2、 ……、 $x_{\ell(w_0 v)}$ 是 $\mathsf{z}^{(v)}$中不定元 z_{ab} 的某种排列。则 X_w 在 $E_\bullet^{(v)}$处光滑，当且仅当 J 在 0 处取值时满秩。

习题7.8。 将习题 7.7 中的雅可比判别法应用于 $I_{1234,\ 3412}$ 和 $I_{1234,\ 4231}$，并确认 X_{3412} 和 X_{4231} 是奇异的。

定义 7.9。 簇 X 的奇异轨迹 为

$$\operatorname{sing}(X) := \{p \in X : \dim(\left(\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2\right)^*) > \dim X\}.$$

若 $Y \subset GL_n/B$ 是闭的，且在 B 的左乘作用下稳定，则

$$Y = \bigcup_{u \in I} X_u,$$

对某个 I 成立。特别地， $Y =$ sing(X_w) 是闭的，且在 B 下稳定。

描述 sing(X_w) 的第一个组合判据由 V. Lakshmibai–C. S. Se- shadri [LS84] 给出：

定理 7.10 ([LS84])。 X_w 在 e_v 处光滑，当且仅当

$$\mathcal{R}(v, w) := \{(i, j) : v < v\, t_{ij} \leq w\} = \ell(w) - \ell(v).$$

如引言中所述，V. Lakshmibai–B. Sandhya [LS90] 猜想了 sing(X_w) 的模式回避描述，随后由 [BW03, C03, KLR03, M01a]分别独立证明。在 [WY08] 中，我们用区间模式避免重新表述了这一结果。设 $\mathcal{I}_{\text{singular}}$ 为满足以下条件的有序对 (v, w) 的集合： X_w 在 e_v 处奇异。下文中的片段"$j\cdots i$"表示 $j, j-1, j-2, \ldots, i+1, i$（若 $j<i$，则该片段为空）。

定理 7.11。 偏序集 $(\mathfrak{S}, \prec_I)$ 中的序理想 $\mathcal{I}_{\text{singular}}$ 由以下区间族极小生成：

(1) $\big[(a+1)a\cdots 1(a+b+2)\cdots(a+2), (a+b+2)(a+1)a\cdots 2(a+b+1)\cdots(a+2)1\big]$对所有整数 $a, b>0$成立。(2) $\big[(a+1)\cdots 1(a+3)(a+2)(a+b+4)\cdots(a+4), (a+3)(a+1)\cdots 2(a+b+4)1(a+b+3)\cdots(a+4)(a+2)\big]$ 对所有整数 $a, b\geq 0$成立。(3) $\big[1(a+3)\cdots 2(a+4), (a+3)(a+4)(a+2)\cdots 312\big]$ 对所有整数 $a>1$成立。

定理 *7.11* 证明中使用的技巧： [BW03、KLR03、M01a] 的证明本质上是组合性的，并归结为定理 7.10，或归结为 V. Gasharov 先前对这些条件充分性的证明。 [C03] 中的证明与其他证明在性质上截然不同。它是几何性的，通过构造舒伯特簇的奇点的部分解消来进行。

习题7.12。 (a) 利用定理 7.11 证明

$$\operatorname{sing}(X_{461253}) = X_{142653}\cup X_{241365}\cup X_{143265}.$$

现在对定理 7.10 做同样的事情；比较二者并说明其异同。

(b) 确定 sing(X_{523614})。

习题7.13。 sing(X_w) $= X_{id}$可能吗？（也就是说， X_w 可能具有孤立奇点吗？）

习题7.14*。证明或否证：$\mathcal{N}_{v,\ w}\cong\mathbb{C}^{\ell(w)-\ell(v)}$ 当且仅当 X_w 在 $E_\bullet^{(v)}$处光滑。

习题7.15。证明： w 避开定理 7.11 中的那些族，当且仅当 w 避开 3412 和 4231。[19]

7.2. **局部完全交** 。设 S 是一个交换环。我们将 [BH93]称为：

定义 7.16。 S的正则序列是一个序列 $s_1, s_2, \ldots, s_d\in S$，满足对于 $i=1, 2, \ldots, d$， s_i不是 $S/(s_1, \ldots, s_{i-1})$ 上的零因子。

定义 7.17。局部环 $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ 若存在正则局部环 $(S, \mathfrak{n})$（即 $\dim_{S/n}\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ 是 S的克鲁尔维数）以及 S的正则序列 $s_1, \ldots, s_d$，使得 $R=S/(s_1, \ldots, s_d)$，则称其为局部完全交（简称"lci"）。

定义 7.18. 代数簇 X 是局部完全交空间，当且仅当其中每个局部环 $\mathcal{O}_{X,p}$都是局部完全交。

例 7.19. 余维为 d 的仿射代数簇 X 是完全交，当且仅当它可以由 d 个方程定义。这样的簇也是局部完全交。

[19]定理 7.6 和习题 7.15 表明，当 $\mathcal{P}$ ="奇异"时，会发生一些特殊情况。在 $\mathcal{I}_{\text{singular}}$ 中作为区间顶元出现的置换集合，是由 4231 和 3412 生成的序理想；这里的偏序由经典模式回避给出，其中"u 小于 v"是指 u 经典嵌入 v。

下面的习题为我们的目的提供了局部完全交的另一种定义。

练习7.20. $\mathcal{O}_{X_w,\ E_\bullet^{(v)}}$是局部完全交，当且仅当$\mathcal{N}_{v,\ w}$是完全交。

H. Ulfarsson 和第一作者 [WU13] 已根据经典模式回避，对哪些 X_w 是局部完全交进行了分类。

定理 7.21. X_w 是局部完全交，当且仅当 w 回避53241、52341、52431、35142、42513和351624。

为证明定理 7.21 的"⇐"，假设 w 回避所述模式，则根据练习 7.20，只需通过描述$I_{v,\ w}$的生成元$\binom{n}{2} - \ell(w)$，证明$\mathcal{N}_{id,\ w}$是完全交即可。反过来， [WU13] 的作者证明了下文猜想 7.22 中的点 $E_\bullet^{(u)}$不是局部完全交，并且每当w 包含上述模式之一时， w 区间就包含那些区间之一。

确定 X_w 的非局部完全交轨迹仍未确定；这一猜想见前引文献 :

猜想 7.2 2 ([WU13，第 7]节。 偏序集$(\mathfrak{S}, \prec_I)$中的理想 $\mathcal{I}_{non\text{-}lci}$ 由以下元素生成

(1) $[(a+1)a\cdots 1(a+b+2)\cdots(a+2), (a+b+2)(a+1)a\cdots 2(a+b+1)\cdots(a+2)1]$，其中 a、$b > 0$ 和 $a > 1$ 或 $b > 1$；以及 (2) $[(a+1)\cdots 1(a+3)(a+2)(a+b+4)\cdots(a+4), (a+3)(a+1)\cdots 2(a+b+4)1(a+b+3)\cdots(a+4)(a+2)]$，其中 a、$b \geq 0$ 和 $a+b \geq 1$。

以及十一种例外情形:

$$[21354, 52341], [132546, 351624], [421653, 642531], [326154, 635241],$$

$$[215436, 526314], [215436, 524613], [143265, 364152], [143265, 461352], [215436, 526413],$$

$$[143265, 463152], [2154376, 5274163].$$

习题 7.23. (a) 证明，舒伯特行列式理想 I_w 由所有 $r_{st}^w + 1$子式生成，其中 $(s,t) \in E(w)$（Fulton 本质集，定义见习题 4.5(a)。）

(b) 举例说明，(a) 中的生成元确实少于定义 3.14 中的完整生成元集合。

(c) 举例说明，(a) 中 I_w 的生成元集合通常不是极小的，即 I_w 可由一个严格更小的子集生成。

下一道习题的内容是 [GY22]:

习题7.24*. (a) 确定 I_w 的一组极小生成元。

(b) 利用 (a) 的解法，分类哪些矩阵舒伯特簇是 lc i.

针对更一般的 Kazhdan-Lusztig 理想情形，习题 7.24(a) 的一种解法应能解决猜想 7.22。

问题 7.25。 给出 $I_{v,w}$ 的一组极小生成元。

S. Gao–Y. Gao（私人通信）报告称，他们已在 v 避免 123 模式、且 w 为 cov-exillary 的特殊情形下解决了这个问题（并证明了猜想 7.22）。

7.3. **Gorenstein 性**。对于具备交换代数所需预备知识的读者，请回顾：

定义 7.26. 局部环 $(R, \mathfrak{m}, \Bbbk)$ 若满足 $\operatorname{Ext}_R^i(\Bbbk, R) = 0$ for $i \leq \dim R$，则称为科恩–麦考利环。若此外 $\dim_{\Bbbk} \operatorname{Ext}_R^{\dim R}(\Bbbk, R) = 1$，则称为*Gorenstein* 环。

定义 7.27. 若一个簇在每一点处的局部环都是科恩–麦考利环（分别为 Gorenstein 环），则称该簇为科恩–麦考利（分别为 Gorenstein）簇。

关于这两个定义的参考资料见 [BH93]。

所有舒伯特簇都是科恩–麦考利的。我们可以利用 Kazhdan-Lusztig 理想来判定（或将其作为定义）舒伯特簇的 Gorenstein 性，如下所示。

命题 7.28. *X_w 在 $E_\bullet^{(v)}$处是 Gorenstein 的，当且仅当 $R/I_{v,w}$ 的最小自由分解的最后一个 Betti 数（相对于由自然的 T-作用给出的正分次计算）为1。*

例子 7.29 ([WY08，例 2.8])。 $X_{42513} \subseteq$ 旗簇$(\mathbb{C}^5)$不是 Gorenstein 的（读者可以验证这一点，例如使用命题 7.28 和习题 6.11 的解）。现在，42513 在所标示的位置嵌入 526413。然而， $X_{\overline{526413}} \subseteq$ 旗簇$(\mathbb{C}^6)$是 Gorenstein 的。由此可知，不可能仅用经典模式避免来刻画 Gorenstein 舒伯特簇。

定理 7.30 ([WY06, WY08])。 舒伯特簇 X_w 是 *Gorenstein* 的，当且仅当 w 避免以下区间

(1) $\big[(a+1)a\cdots 1(a+b+2)\cdots(a+2),\ (a+b+2)(a+1)a\cdots 2(a+b+1)\cdots(a+2)1\big]$对所有满足 $a \neq b$ 的整数 $a, b > 0$ 均成立。*(2)* $\big[(a+1)\cdots 1(a+3)(a+2)(a+b+4)\cdots(a+4),\ (a+3)(a+1)\cdots 2(a+b+4)1(a+b+3)\cdots(a+4)(a+2)\big]$ 对所有整数 $a, b \geq 0$ 均成立，其中 $a > 0$ 或 $b > 0$。

等价地， X_w 是 *Gorenstein* 的，当且仅当其奇异轨迹的一般点是 *Gorenstein* 的。

注意，定理 7.30(1)与定理 7.11(1)几乎相同，而定理 7.30(2)与定理 7.11(2)也几乎相同。

猜想 7.31。 偏序集 $(\mathfrak{S},\ \prec_I)$中的序理想 $\mathcal{I}_{\text{not Gorenstein}}$ 由定理 *7.30* 中的族 *(1)* 和 *(2)* 生成。

习题 7.32*。证明猜想 7.31 等价于以下断言： $E_\bullet^{(v)} \in X_w$是非 Gorenstein 的，当且仅当 $v \leq v'$，其中 $X_{v'}$ 是 sing(X_w) 的一个不可约分支，且 X_w 在 $E^{(v')}_\bullet$ 处是非 Gorenstein 的。

猜想 7.31 对 $n \leq 6$成立。N. Perrin 证明了 [P07]猜想 7.31 在格拉斯曼流形舒伯特簇这一类簇上成立。这些是满足 X_w 、其中 w是余格拉斯曼的舒伯特簇。他的定理还包括其他类型中的微型舒伯特簇情形（见第 8 节中关于这些簇的讨论）。最近，S. Da Silva 的工作 [D18] 描述了舒伯特簇的一个“Gorenstein 化过程”（奇点解消的部分过程），这或许有助于证明猜想 7.31。

习题7.33。 一般而言，局部环的性质满足以下包含关系：

$$\text{regular} \subset \text{lci} \subset \text{Gorenstein} \subset \text{Cohen-Macaulay}.$$

(a) 证明定理 7.11、猜想 7.31 和猜想 7.22 与这些包含关系一致。

(b) 给出无穷多个不是局部完全交的 Gorenstein 环的例子。

定义 7.34. X_w 在 $E_\bullet^{(v)}$处的科恩–麦考利型是 $R/I_{v,\ w}$的 Betti 数 β_n。 X_w 的科恩–麦考利型是其在 $E_\bullet^{(id)}$处的科恩–麦考利型。

问题 7.35. 刻画哪些 X_w 具有 *CM* 型 $\geq k$。

如果科恩–麦考利型为 1，则舒伯特簇是 Gorenstein 的，因此，问题 7.35 中的情形 k =2 要求刻画非 Gorenstein 性，而定理 7.30 给出了答案。

Pr问题 7.36. 确定 X_w 中 *CM* 型为 $\geq k$ 的点构成的轨迹 .

类似地，情形 $k = 2$ 的答案可由猜想 7.31 给出。

7.4. **唯一分解性**。

定义 7.37。 如果一个簇在每一点处的局部环都是唯一分解整环，则称该簇具有唯一分解性 。

为了解决 [WY08], M. Bousquet-M´elou-S. Butler [B-MB07] 提出的猜想，他们用以下定理刻画了具有唯一分解性的舒伯特簇:

定理 7.38 ([B-MB07])。 舒伯特簇 X_w 具有唯一分解性，当且仅当 w 经典地避开4231 且区间避开 $[3142, 3412]$。

引出猜想 7.31 的考量也导出了以下猜想。

猜想 7.39 ([WY08，猜想 6.14])。 偏序集$(\mathfrak{S}, \prec_I)$中的阶乘性 序理想 $\mathcal{I}_{\text{not}}$ 由以下各族生成:

(1) $\big[(a+1)a\cdots 1(a+b+2)\cdots(a+2),\quad (a+b+2)(a+1)a\cdots 2(a+b+1)\cdots(a+2)1\big]$ *for all integers* $a, b > 0$.
(2) $\big[(a+1)\cdots 1(a+3)(a+2)(a+b+4)\cdots(a+4),\quad (a+3)(a+1)\cdots 2(a+b+4)1(a+b+3)\cdots(a+4)(a+2)\big]$ *for all integers* $a, b \geq 0$.

习题7.40。由于正则局部环是唯一分解整环，因此每个光滑簇都是具有阶乘性的。此外，所有唯一分解整环都是 Gorenstein 环。证明猜想 7.39 与猜想 7.31 相容。

我们没有检验猜想 7.39 的显式方法。

7.5. **切锥与希尔伯特-塞缪尔重数**。非正式地说，射影簇 $X \subseteq \mathbb{P}^n$ 的次数 是与一个“泛型”的、维数等于 codim(X) 的子空间相交所得的点数。

定义 7.41。标准分次环 $S = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/I(V)$ 的希尔伯特多项式 h_S是唯一的多项式，使得当 k 充分大时

$$h_S(k) = \dim_{\mathbb{C}} S_k$$

其中，$S = \bigoplus_k S_k$ 是 S的分次分解。

希尔伯　　存在 t 多项式，而且 $\deg h_S = \dim(X)$。此外，如果写作　　s

$$h_S = a_d \frac{k^d}{d!} + \text{lower degree terms},$$

首项系数 a_d 是一个正整数。

定义 7.42。 次数 X 为 a_d。

设 $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$，并设 $I \subset R$ 是定义仿射簇 $X = V(I)$ 的一个理想。

定义 7.43。 在 $p = 0$ 处，$X = V(I)$ 的射影化切锥 $TC_p(X)$ 是由每个 $f \in I$ 的最低次数形式生成的（标准）齐次理想 $\overline{I}$ 所定义的 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的射影簇。

定义 7.44。 希尔伯特-塞缪尔重数 $X = V(I)$ 在 $p = 0$ 处的重数是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中 $TC_p(X)$ 的次数。

现在假设 X 是一个任意的簇，并且 $p \in X$。我们通过先选择一个围绕 p 的仿射开邻域，使其具有这样的坐标：p 变为 0，然后使用上述定义，来定义 X 在 p 处的射影化切锥和希尔伯特-塞缪尔重数。如果 R 是该仿射开邻域所在环境仿射空间的坐标环，那么我们将 $\mathsf{PS}_{p,\ X}(t)$ 定义为$R/\overline{I}$的分次希尔伯特级数。可以证明

$$\mathsf{PS}_{p,X}(t) = \frac{H_{p,X}(t)}{(1-t)^{\dim(X)}}, \tag{14}$$

其中 $H_{p,\ X}(t) \in \mathbb{Z}[t]$，并且此外，$H_{p,\ Y}(1)$ 是 X 在 p处的希尔伯特-塞缪尔重数；例如参见 [KR05，定理 5.4.15]。

$H_{p,\ X}(1) = 1$ 当且仅当 p 是 X的一个光滑点。$H_{p,\ X}(1)$ 的值越大，就越能衡量 X 在 p处“有多奇异”。

定义 7.45。 *Kazhdan-Lusztig* 切锥理想

$$\overline{I}_{v,w} \subset R = \mathbb{C}[\mathbf{z}^{(v)}]$$

是由任意 $f \in I_{v,w}$ 的所有最低次数项生成的理想。

可使用格罗布纳基 [WY08，第 6.5] 节进行显式计算。在 Macaulay2 中，可以使用函数 `TangentCone`。令 $H_{v,w}(t) = H_{E^{(v)}_\bullet, X_w}(t)$。

命题 7.46 ([WY08，第 6.5])。$H_{v,w}(1) =$ 的次数 $V(\overline{I}_{v,w})$。

问题 7.47。 给出一个组合计数规则，用于$H_{v,w}(1)$。[20]

更一般地，L. Li 和第二作者猜想 [LY11, LY12]：

猜想 7.48。 $R/\overline{I}_{v,w}$ 是科恩–麦考利的。因此$H_{v,w}(t) \in \mathbb{N}[t]$。

问题 7.49。 假设 $H_{v,\ w}(t) \in \mathbb{N}[t]$ *(例如，猜想 7.48 成立)*，给出一种用于计算 $H_{v,\ w}(q)$ 系数的组合计数规则。

[20]一个听起来相似但实际不同的已解决问题，是确定舒伯特簇在其射影嵌入中的次数；参见 [PS09] 及其中的参考文献。更一般地，可以考虑这种嵌入的希尔伯特多项式。

如果$I_{v,\ w}$是标准齐次的，那么$\overline{I}_{v,\ w} = I_{v,\ w}$（取切锥不会产生任何影响）。因此，当$I_{v,\ w}$是标准齐次时，重数问题可以很容易地根据关于$R/I_{v,\ w}$的希尔伯特级数的结果（第 5 节）推导出来。

关于重数的这一观察是 A. Knutson 向我们指出的；他注意到，只要 v 避免 123 模式，这一结论就成立。根据习题 4.5，这也包括 v 为余格拉斯曼的情形。这对应于 $Gr_k(\mathbb{C}^n)$ 中舒伯特簇的重数问题，相关的早期工作见 V. Lakshmibai–J. Weyman [LW90],J. Rosenthal–A. Zelevinsky [RZ01], V. Kreiman-V. Lakshmibai [KR04], 以及 C. Krattenthaler [K05]。

在 [LY11, LY12], 中，问题 7.47、猜想 7.48 和问题 7.49 在 w 为余 vexillary 的情形下得到了解决。这种情形很有意思，因为 $I_{v,\ w}$ 关于标准分次并非齐次。证明思路是将 $\overline{I}_{v,\ w}$ 关于一种特殊项序的 Gröbner 退化，与矩阵舒伯特簇的初始概形联系起来；后者曾在 [KMY09] 中得到研究。最近，D. Anderson-T. Ikeda-M. Jeon-R. Kawago [AIJK21] 给出了这些结果的新证明。他们的证明从几何角度解释了为何余格拉斯曼组合学会出现在 [LY11, LY12]的余 vexillary 公式中。

令 $\overline{\mathcal{N}}_{v,\ w} = \mathrm{Spec}(R/\overline{I}_{v,\ w})$。D. Fuchs–A. Kirillov–S. Morier-Genoud-V. Ovsienko [FKMO17]提出了以下问题（$v = id$ 情形）：

问题 7.50。 哪些 $\overline{\mathcal{N}}_{v,\ w}$ 是同构的?

习题 7.51。 证明 $\overline{\mathcal{N}}_{v,\ w} \cong \overline{\mathcal{N}}_{v^{-1},\ w^{-1}}$。

问题 7.52。 确定偏序集 $(\mathfrak{S},\ \prec_I$ 中理想 $\mathcal{I}_{multiplicity\ \geq k}$ 的生成元).

对于 $k = 2$, 问题 7.52 可由定理 7.11 解决，因为 X_w 在 $E_\bullet^{(v)}$ 处光滑，当且仅当 $H_{v,\ w}(1) = 1$。K. Meek [M20] 的一项相关结果确定了哪些舒伯特簇 X_w 在 $E_\bullet^{(id)}$ 处具有重数 ≥ 3（因而在 X_w 上处处如此）。

7.6. **Castelnuovo-Mumford 正则性**。 *Castelnuovo-Mumford* 正则性在某种意义上是分次模“复杂度”的度量。[21] 设 $R = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_N]$ 且$S = R/I$ 对于一个标准分次齐次理想 $I \subseteq R$。如第 6 节所述， $S = R/I$ 有一个最小自由分解

$$0 \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{i,j}} \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{i-1,j}} \to \cdots \to \bigoplus_j R(-j)^{\beta_{0,j}} \to S \to 0.$$

这里 $i \leq N$ 且 $R(-j)$ 是自由 R-模，其中 R 的次数按 j 进行了平移（定义 6.3）。

定义 7.53。$\mathrm{Reg}(S)\colon = \max\{j - i\colon\ \beta_{i,\ j}(S)\ \neq 0\}$。

根据习题 6.10,

$$\mathsf{PS}_S(t) = \frac{\mathcal{K}_S(t)}{(1-t)^N},$$

[21]这可以精确地表述为：正则性为 Gröbner 基的规模提供了界，从而也为涉及一个模的各种判定问题的算法时间复杂度提供了界。

其中 $\mathcal{K}(S,t) \in \mathbb{Z}[t]$。如果 S 是科恩–麦考利的，那么

$$\operatorname{Reg}(S) = \deg \mathcal{K}(S,t) - \operatorname{ht}_R(I), \tag{15}$$

其中，$\operatorname{ht}_R(I)$ 是 R 中 I 的高度。如果 $V(I)$ 是等维的（Cohen-Macaulay 模的情形便如此），那么 $\operatorname{ht}_R(I)$ 就是 $V(I) \subseteq \mathbb{C}^N$ 的余维。

J. Rajchgot、Y. Ren、C. Robichaux、A. St. Dizier 和 A. Weigandt [RRRSW21]的工作开启了对矩阵舒伯特簇正则性的研究，并将其与格罗滕迪克多项式的次数联系起来。上述文献中的结果确定了 w 为余格拉斯曼置换时的正则性。J. Rajchgot 、 C. Robichaux 和 A. Weigandt [RRW22] 将他们的公式推广到了余 vexillary 置换以及某些 Kazhdan-Lusztig 理想$I_{v,\ w}$ 这些理想关于标准分次是齐次的。他们还修正（并证明）了 M. Kummini、V. Lakshmibai、P. Sastry 和 C. S. Seshadri [KLSS15]提出的一个正则性猜想。O. Pechenik、D. Speyer 和 A. Weigandt [PSW21] 已经证明了任意矩阵舒伯特簇的正则性公式。

以下问题在 [Y21] 中提出：

问题 7.54。 确定一个 $\operatorname{Reg}(R/\overline{I}_{v,w})$ 的组合规则。

这将确定 X_w 在 $E_\bullet^{(v)}$ 处的切锥的正则性。问题 7.54 的解将推广 [RRRSW21、RRW22、PSW21]。

如果猜想 7.48 成立，那么可以应用 (15) 并得出

猜想 7.55。 $\operatorname{Reg}(R/I'_{v,w}) = \deg H_{v,w}$。

利用 [RRW22], 的余旗簇置换表公式，并结合与 L.Li 合作的成果 [LY11、LY12], ，问题 7.54 和猜想 7.55 对 w 余 vexillary [Y21] 得到了解决。

7.7. **Kazhdan-Lusztig 多项式**。 我们讨论的最后一个度量与其他度量的性质不同：它是拓扑度量，而非代数度量；虽然原则上由 Kazhdan–Lusztig 理想决定，却无法轻易从该理想中计算出来。然而，它意义重大，若不予讨论，实在有失妥当。

对于每一对满足 $v \le w$ 的置换 v、$w \in S_n$，都有 ***Kazhdan-Lusztig*** 多项式 $P_{v,w}(q) \in \mathbb{N}[q]$。这些多项式最初出现于表示论，而非舒伯特几何；它们与 $\mathfrak{S}_n$ 的群代数的一种特定变形有关（更一般地说，也与任意 Coxeter 群的群代数变形有关）。我们将遵循 [H90]; [BB05] 中也有类似（但不完全相同）的论述。

定义 7.56。 ***Hecke*** 代数 $\mathcal{H}_{n-1}$ （类型为 A_{n-1}）是环$\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 上的自由模，其基由 $\{T_w$ 给出：$w \in W\}$。它满足以下关系

$$T_{s_i} T_w = \begin{cases} T_{s_i w} & \text{if } \ell(s_i w) > \ell(w) \\ (q-1)T_w + qT_{s_i w} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

习题 7.57。 (a) 证明：如果 $s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}$ 是 w 的一个约化词（按照习题 2.38 的意义），那么 $T_w = T_{s_{i_1}} \cdots T_{s_{i_\ell}}$。

(b) 证明 T_{id} 是 $\mathcal{H}_{n-1}$ 的幺元 "1"。(c) 证明 $(T_{s_i})^{-1} = \frac{1}{q}(T_s - (q-1)T_{id})$。

(d) Conc .....存在次数为 $\ell(w) - \ell(x)$ 的多项式 $R_{x,\ w} \in \mathbb{Z}[q]$，使得 at

$$(T_{w^{-1}})^{-1} = (-1)^{\ell(w)} q^{\ell(w)} \sum_{x \le w} R_{x,w}(q) T_x,$$

其中"$\le$"指布鲁哈特序。（这些称为*Kazhdan-Lusztig* R多项式。）

定义*bar* 映射 $\bar{\cdot}$： $\mathcal{H}_{n-1} \to \mathcal{H}_{n-1}$，令 $q \mapsto q^{-1}$ 映到.....，并令 T_{s_i} 映到 $T_{s_i}^{-1}$。通过加法扩张 bar，可得到一个半线性映射。由习题 7.57， $\overline{T_{s_i}} = T_{s_i}$。因此，bar 是一个环对合。请完成下面的计算习题（或参见 [H90，第 7.7] 节）：

习题7.58。证明 $\overline{T_s T_w} = \overline{T_s}\ \overline{T_w}$。

习题7.59。 (a) 通过变换习题 7.57(c) 中的表达式，你能构造一个元素 C_{s_i}，使得 $\overline{C_{s_i}} = C_{s_i}$ 吗?

(b) 现在将 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ 替换为 $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$ 后，重复 (a)。

正因为有习题 7.59，Hecke 代数通常用 $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$而不是 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$来定义。这两种选择都不是"标准"的，下面我们采用前一种约定。现在我们来到了以下定理，这是 Kazhdan-Lusztig 理论的核心:

定理 7.60 ([KL79])。 对每个 $w \in S_n$，都存在唯一的元素 C_w，使得 $\overline{C_w} = C_w$；若记为

$$C_w = (-1)^{\ell(w)} \left(q^{\frac{-1}{2}}\right)^{\ell(w)} \sum_{v \le w} (-1)^{\ell(x)} q^{-\ell(x)} P_{v,w}(q) T_v$$

then

(i) $P_{v,w}(q) \in \mathbb{Z}[q]$
(ii) $P_{w,w}(q) = 1$
(iii) $\deg P_{v,w}(q) \le \frac{\ell(w)-\ell(v)-1}{2}$ *if* $v < w$; *and*
(iv) $P_{v,w}(q) = 0$ *if* $v \not\le w$.

习题 7.　61。 (a) 验证定理 7.60 中的 C_{s_i} 与习题 7.59(b) 一致).

(b) 证明 $\{C_w : \ w \in S_n\}$ 构成 $\mathcal{H}_{n-1}$ 的一个 $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{\frac{-1}{2}}]$-基。

(c) 定理 7.60 还有一种看起来更简单的表述。证明存在 $\mathcal{H}_{n-1}$（在 $\mathbb{Z}[q^{\frac{1}{2}}, q^{-\frac{1}{2}}]$ 上）的一个基 C'_w，使得

$$C'_w = \left(q^{\frac{-1}{2}}\right)^{\ell(w)} \sum_{v \le w} P_{v,w}(q) T_v.$$

定义 7.62。 对于 v、$w \in S_n$，*Kazhdan-Lusztig* 多项式 是定理 7.60 中的多项式 $P_{v,\ w}(q)$。

存在一种计算 $P_{v,\ w}$ 的算法，前提是已知 R-多项式。对于 $P_{v,\ w}(q)$， [KL79] 中还给出了一个显式的递归定义。

对于对称群（或更一般地，对于有限型 Weyl 群），从上述表述中会惊讶地发现，事实上 $P_{v,\ w} \in \mathbb{N}[q]$。同样令人惊讶的是，这种正性可以从舒伯特簇的几何／拓扑角度得到解释。特别是,

$P_{v,w}(q)$ 是 X_w 在 $E_\bullet^{(v)}$[KL80] 处的局部交叉上同调的 Poincar´e 多项式。因此，$P_{v,w}(q)$ 衡量了 $E_\bullet^{(v)} \in X_w$ 的奇点。[22]

定义 7.63。 $E_\bullet^{(v)}$在 X_w 中 有理光滑，若 $P_{v,w}(q) = 1$。

有理光滑性与代数几何中通常意义上的光滑性并不相同。不过，对于对称群（以及 ADE 型）而言，两者是一致的。因此

$$P_{v,w}(q) = 1 \iff X_w \text{ is smooth at } E_\bullet^{(v)}.$$

局部交叉上同调群的维数通常并非（上或下）半连续。不过，Irving [I88] 利用 Kazhdan-Lusztig 多项式的表示论解释证明，它们在舒伯特簇上呈上半连续变化。（后来， [BM03] 给出了一个更具几何意味的证明。）因此，可以从区间模式避免的角度分析 Kazhdan-Lusztig 多项式的系数。

问题 7.64。 令 $\mathcal{P}_{k,\ell}$ 表示性质“$P_{u,v}(q)$ 中 q^ℓ 的系数至少为 k”（或等价地，“维数$_{\mathbb{C}}\, IH^\ell_{E_\bullet^{(v)}}(X_v) \geq k$”）。对于 k 和 ℓ 的各种取值，求出 $\mathcal{I}_{\mathcal{P}_{k,\ell}}$。

这是一个长期以来广为人知的公开问题：

问题 7.65. 给出一个组合计数规则，用来计算 $P_{v,w}(q)$ 的系数。

迄今为止，这类规则只在类型 A （例如[BW01、L95]）的少数情形中已知。后者处理了协凸余情形，以及 w 为 Grassmannian 的子情形。在类型 A 之外，凸余情形[23]以及极小 G/P 的舒伯特簇也有类似结果。V. V. Deodhar 的掩码为研究这一问题提供了一个框架；参见 [BW03、JW13].[24]

与习题 7.57(d) 中的 R-多项式不同，$P_{v,w}(q)$ 的次数不容易确定。曾有一段时间，人们猜想最高可能次数项的系数（即 $\ell_{(w)-\ell(\ v\ -1\ )}$）不是 0 就是 1。这就是“0-1 猜想”。

定理 7.66([MW03])。 对于 $n \leq 9$，*0-1* 猜想成立；对于 $n = 10$，则不成立。具体而言，当 $w = 10\,578293461$ 和 $v = 54321\,10\,98764$ 时，最高次项的系数为4。

关于 Kazhdan-Lusztig 多项式的反例可能只会在 n很大时出现。

[LM21] 的近期工作（见练习 4.21）加强了定理 7.66，给出了无穷多个反例，其中 v和 w 属于同一个 Kazhdan-Lusztig 右胞腔。

这是一个 始终有$P_{v,\ w}(0) = 1$。P. Polo 已证明了一个引人注目的否定性结果 t:

[22]对于任何具有底层舒伯特几何的魏尔群 W，同样的证明都适用。然而，对于一般的 Coxeter 群 W，这一结论并不成立；相对较近以来，人们已利用 *Soergel* 双模 [EW14]以代数方法证明了正性。[23]在这种情况下，Kazhdan-Lusztig 多项式与 H-多项式之间存在一些类比；参见 [LY12]中的讨论。[24]将 $\mathcal{H}_{n-1}$的 C'_w基中的元素相乘，并用同一基展开所得结果，其结构系数也是 $q^{\pm\frac{1}{2}}$ [S82]中的正劳伦多项式。另一个重要问题是找到能够解释这一点的组合规则。

定理 7.67 （[P99]）。 任何具有非负整数系数且常数项系数为1 的多项式 p（q）都是某一对（显式构造的） v， $w \in S_{1+\deg(p)+p(1)}$的 ***Kazhdan-Lusztig*** 多项式。

以下是定理 4.17 的一个推论（更确切地说，是证明该定理的 Kazhdan–Lusztig 簇同构的一个推论）。从 T. Braden–R. Macpherson 通过矩图上的层计算 Kazhdan–Lusztig 多项式的方法中，也可以观察到这一点 [BM03]。

命题 7.68 ([WY08])。 **</style}设 和 由于区间模式嵌入而作为偏序集同构。则，** $_w(q) = P_{u,\ v}$ (q)。

Lusztig 的区间猜想是一个更强的断言：

猜想 7.69。 $P_{a,\ b}(q) = P_{v,\ w}(q)$ 只要 ***Bruhat*** 序区间 $[a, b]$ 和 $[v, w]$ 作为偏序集同构。

猜想 7.69 在 [B03, BB05] 中有进一步的讨论和参考文献。该猜想可以由对问题 3.12 的肯定回答推出。最近的一项进展是，人工智能已被用于攻克这一猜想；参见 [DVB+21, BBDVW21]。

由于 Kazhdan–Lusztig 多项式是舒伯特簇的局部交叉上同调 Poincar´e 多项式，因此，作为 Hecke 代数元素的 Kazhdan–Lusztig 元素与作为反常层范畴元素的舒伯特簇交叉上同调层之间存在精确的关系。这远超出本综述的讨论范围；更多内容请参见例如 [S82、R04] 。

8. 其他李型的类似物

8.1. 背景。 我们不必局限于旗簇 GL_n/B，而可以将群 GL_n 替换为任意复半单李群（甚至任意半单（仿射）代数群） G。虽然许多一般背景仍然适用，但对于这一更一般情形下舒伯特簇的奇点，我们所知甚少。尤其值得关注的是其他几族经典群，即 $G = SO_{2n+1}$ （类型 B_n）、 $G = Sp_{2n}$ （类型 C_n）以及 $G = SO_{2n}$ （类型 D_n）。[25] （群 SO_N 在 N 为奇数或偶数时表现迥异，因此这两种情形分开讨论。）这些群通常实现为 GL_N 的子群（其中，类型 B_n 对应 $N = 2n + 1$ ，类型 C_n和 D_n对应 $N = 2n$ ），但可采用多种不同的实现方式。我们采用的实现方式至少自 S. Billey–M. Haiman [BH95] 和 W. Fulton–P. Pragacz [FP98], 的研究以来，便已成为舒伯特簇研究中的标准做法；这种方式有若干优点，将在下文阐述。

我们不提供一般性的抽象定义，而是针对这些类中的每一类给出具体定义。不过，首先了解一下术语的整体概况会有所帮助；关于一般性内容的总结及相关参考文献，请参阅 [BL00，第 2] 章。给定一个群 G，有一个博雷尔子群 B 和一个相反的博雷尔子群 B_-。我们选择以这种方式实现这些子群，其优点是 B 和 B_-分别是 G中由上三角矩阵和下三角矩阵构成的子群。广义旗簇是 G/B。对于每个群 G，都有一个有限群 $W \subseteq G$ ，称为魏尔群，它在情形 $G = GL_n$中起到 S_n 的作用。我们选择以这种方式表示 G ，其优点还在于 W 将是 S_N的一个子群，并以置换矩阵实现。

[25]“类型”指复半单李代数的嘉当–基林分类。

定义 8.1。对于每个元素 $w \in W$，舒伯特胞腔为 $X_w^\circ := BwB/B$。反舒伯特胞腔为$\Omega_w^\circ := B_-wB/B$。舒伯特簇为 $X_w := \overline{X}_w^\circ$，而 Kazhdan–Lusztig簇为$\mathcal{N}_{v,\ w} := X_w \cap \Omega_v^\circ$。

反大胞腔 Ω_{id}° 也是 G/B 的一个仿射开邻域。因此，定义 3.1 在此处同样适用。引理 3.2 在这一更一般的情形下也成立。[26] 因此，与 $G = GL_n$ 的情形一样，可以通过研究 Kazhdan–Lusztig 簇和 Kazhdan–Lusztig 理想来研究舒伯特簇的奇点。

8.2. **经典群的 Kazhdan-Lusztig 理想**。

8.2.1. 类型 B_n。此处的群是 $G = SO_{2n+1}$。一般而言，选取一个非退化对称双线性型 Q：$\mathbb{C}^{2n+1} \times \mathbb{C}^{2n+1} \to \mathbb{C}$。

定义 8.2。$G = SO_{2n+1} \subseteq SL_{2n+1}$ 是由满足以下条件的线性变换 M 构成的群：$Q(Mv, Mw) = Q(v, w)$，对所有 $v, w \in \mathbb{C}^{2n+1}$ 均成立。

不同的 Q 选择会给出共轭子群。Q 的标准选择如下，其中 e_i 表示第 i 个基向量：

$$Q(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i + j = 2n + 2 \\ 0 & i + j \neq 2n + 2 \end{cases}.$$

令 $J = [j_{ab}]$ 为一个矩阵：当 $a + b = 2n + 2$ 时，其元素为 $j_{ab} = 1$；否则为 $j_{ab} = 0$。（形象地说，这意味着 J 在主反对角线上为 1，其余位置均为 0。）那么，对于我们特定选择的子群 SO_{2n+1}，矩阵 $M \in SO_{2n+1}$ 当且仅当$M^T JM = J$。

采用这一 SO_{2n+1}选择后，可以将魏尔群 W_{B_n} 视为置换群

$$W_{B_n} = \{w \in S_{2n+1} \mid w_0 w w_0 = w\},$$

其中 w_0 是 S_{2n+1}中长度最大的置换 $w_0 = (2n + 1)(2n) \cdots 1$。等价地，对于所有 $i, 1 \leq i \leq n + 1$，若 $w(i) + w(2n + 2 - i) = 2n + 2$，则 $w \in W_{B_n}$。特别地，$w(n + 1) = n + 1$。

下面是一个关于将 W_{B_n} 视为置换的简单组合练习：

练习 8.3. (a) 给定 $1 \leq i < j \leq 2n+1$，我们有 $w(i) > w(j)$ 当且仅当 $w(2n+2-j) > w(2n+2-i)$。

(b) 给定满足 $i + j = 2n + 2$ 的 $1 \leq i < j \leq 2n + 1$，我们有 $w(i) > w(j)$ 当且仅当$w(i) > w(n + 1) > w(j)$。

练习 8.3 为下述定义提供了直观的依据。

定义 8.4. 长度为 $w \in W_{B_n}$ 是

$$\ell_B(w) := \frac{\#\{1 \leq i < j \leq 2n + 1 : i + j \neq 2n + 2, w(i) > w(j)\}}{2}.$$

这个定义的实际依据如下：

[26] [KL79], 中没有证明，但可由 [H75，第 28 节1]轻易推出。

习题 8.5。 证明舒伯特簇 X_w in SO_{2n+1}/B 满足 $\ell_B(w) = \dim_{\mathbb{C}}(X_w$.

我们用 $\ell_A(w)$ 表示 w considered as a permutation in S_{2n+1} 时的长度。

由于引理 3.2 普遍成立， B 和 B_- 仍然是上三角矩阵和下三角矩阵的子群，而 W_{B_n} 是一个显式的置换矩阵集合，因此我们可以像之前一样给出反舒伯特胞腔的坐标，不过一般而言，我们只能给出卡兹丹–卢斯蒂格簇的集合论方程。

给定 $v \in W_{B_n}$，可以如下将反舒伯特胞腔 Ω_v° 识别为 $\mathrm{Mat}_{2n+1\times 2n+1}$ 的一个子集。将 $\Omega_v^{A\circ}$（以前在第 2.2.6 节中称为 Ω_v°）视为由矩阵 $Z^{(v,A)}$ 构成的仿射子空间，其中 $z_{n-v(i)+1,i} = 1$，且 $z_{n-v(i)+1,s} = 0$，$z_{t,i} = 0$ 对于 $s > i$ 和 $t > n - v(i) + 1$ 成立。令 $\mathbf{z}^{(v,A)} \subseteq \mathbf{z}$ 为未特化变量。现在令 K 为由 $(2n+1)^2$ 个元素生成的理想，这些元素来自 $(Z^{(v,A)})^T J(Z_A^{(v,A)}) - J$。

现在令 $Z_{st}^{(v,A)}$（原为 $Z_{st}^{(v)}$）表示 $Z^{(v,A)}$ 的西南角 $s \times t$ 子矩阵。我们可以将 w 定义为由 $Z_{st}^{(v,A)}$ 的所有 $r_{st}^w + 1$ 子式生成的 $\mathbb{C}[z^{(v,A)}]$ 理想，其中 $1 \le s$、$t \le n$，且 r_{st}^w 在定义 2.30 中定义。现在我们有如下结论。

定义 8.6。 大集合论意义下的 B ***Kazhdan-Lusztig*** 理想为 $I_{v,\ w} = I'_{v,\ w} + K$。

实际上，可以在变量更少的集合中定义一个理想：

习题8.7。 若 $z_{ij} \in \mathbf{z}^{(v,A)}$，则 $z_{v(j),\ v^{-1}(i)} \in \mathbf{z}^{(v,A)}$，并且存在一个 K的生成元 f，其仅有的线性项为 z_{ij} 和 $z_{v(j),\ v^{-1}(i)}$。不失一般性，假设$j \le v^{-1}(i)$，并令 f_{ij} 表示这个生成元。那么，所有出现在 f_{ij} 中的变量 $z_{i'j'}$ 都具有$j' > j$，或者同时具有 $j' = j$ 和 $i' \ge i$。

鉴于练习 8.7，我们令 $\mathbf{z}^{(v)} \subseteq \mathbf{z}^{(v,A)}$ 为未特化变量 z_{ij}的集合，其中 $j > v^{-1}(i)$。接着，我们令 $Z^{(v)}$ 为从 $Z^{(v,A)}$ 构造出的矩阵：从西南角开始，每当 $j \le v^{-1}(i)$时，就递归地用 $f_{ij} - z_{ij}$（若 $i = v(j)$，则用 $f_{ij}/2 - z_{ij}$）替换 z_{ij}。现在令 $Z_{st}^{(v)}$ 为 $Z^{(v)}$ 的西南角 $s \times t$ 子矩阵（其中$Z_{st}^{(v,A)}$ 采用相同的替换）。然后我们作如下定义：

定义 8.8。 小型集合论型 B ***Kazhdan-Lusztig*** 理想 是由 $Z_{st}^{(v)}$ 的所有 $r_{st}^w + 1$ 子式生成的 $\mathbb{C}[\mathbf{z}^{(v)}]$的理想 $\tilde{I}_{v,\ w}$。

现在我们有如下同构：

$$\mathbb{C}[z^{(v,A)}]/I_{v,w} \cong \mathbb{C}[\mathbf{z}^{(v)}]/\tilde{I}_{v,w}.$$

此外，鉴于 B 和 B_- 实际上可以与 SO_{2n+1}中的上三角矩阵和下三角矩阵的子集相对应，下面这个结论并不太难证明。

习题8.9。 证明 $\mathcal{N}_{v,\ w}$ 在集合论意义下由 $I'_{v,\ w}$ 切出。

~习题8.10。 举例说明 $I'_{v,\ w}$ 和 $I_{v,\ w}$ 不总是根理想。

问题 8.11。 求 $\sqrt{I'_{v,\ w}}$ 的一组生成元，或求 $\sqrt{\tilde{I}_{v,\ w}}$ 的一组生成元。

A. Knutson 的 [K08] 描述了 Bott–Samelson 坐标；对于给定的项序，它明确描述了初始理想，但没有给出 Gröbner 基本身。

8.2.2. 类型 C_n。 现在群为 $G = Sp_{2n}$。我们选取一个非退化反对称双线性型 Q。

定义 8.12。 $G = Sp_{2n} \subset SL_{2n}$ 是满足条件$Q(Mv, Mw) = Q(v, w)$的线性变换 M 群，其中该条件对所有 $v, w \in \mathbb{C}^{2n}$均成立。

标准选择为

$$Q(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i < j, i + j = 2n + 1 \\ -1 & i > j, i + j = 2n + 1 \\ 0 & i + j \neq 2n + 1 \end{cases}.$$

若 $a \leq n$ 且 $a + b = 2n + 1$, $j_{ab} = -1$ $a > n$ 和$a + b = 2n + 1$，则定义矩阵 $J = [j_{ab}]$ 为 $j_{ab} = 1$；若 $a + b \neq 2n + 1$，则定义为 $j_{ab} = 0$。（图示而言， J在主反对角线的上半部分为 1，在主反对角线的下半部分为 -1，其余位置为 0。与 B 型一样，当且仅当 $M^T JM - J = 0$时， $M \in Sp_{2n}$。

魏尔群是置换群

$$W_{C_n} = \{w \in S_{2n} \mid w_0 w w_0 = w\},$$

其中 w_0是 S_{2n}中长度最大的置换 $w_0 = (2n)(2n) \cdots 1$。等价地，对所有 $i, 1 \leq i \leq n$，若 $w(i) + w(2n + 1 - i) = 2n + 1$，则$w \in W_{C_n}$。

定义 8.13. 长度对 $w \in W_{C_n}$ 而言为

$$\ell_C(w) := \frac{\#\{1 \leq i < j \leq 2n : i + j \neq 2n + 1, w(i) > w(j)\}}{2} + \#\{1 \leq i \leq n : w(i) < w(2n + 1 - i)\}.$$

我们将用记号 $\ell_A(w)$ 表示将 w 视为 S_{2n}中的置换时的长度。

由于引理 3.2 普遍成立， B和 B_- 仍然是上三角矩阵和下三角矩阵的子群，而 W_{C_n} 是一个明确给出的置换矩阵集合，因此我们再次像之前一样给出反舒伯特胞腔的坐标。

给定 $v \in W_{C_n}$，我们将反舒伯特胞腔 Ω_v° 视为 $\mathrm{Mat}_{2n \times 2n}$的一个子集。我们像之前一样定义 $\Omega_v^{A\circ}$（在第 2.2.6 节中曾称为 Ω_v°）和 $\mathbf{z}^{(v,A)} \subseteq \mathbf{z}$，并再次令 K为由 $(Z^{(v,A)})^T J(Z_A^{(v,A)}) - J$的 $(2n)^2$ 个元素生成的理想。

现在令 $Z_{st}^{(v,A)}$ （原记作 $Z_{st}^{(v)}$）为 $Z^{(v,A)}$的西南 $s \times t$ 子矩阵。我们可以将$I'_{v,\ w}$ 定义为由 $Z_{st}^{(v,A)}$ 的所有 $r_{st}^w + 1$ 子式生成的 $\mathbb{C}[z^{(v,A)}]$ 的理想，其中 $1 \leq s$、 $t \leq n$ 和r_{st}^w 在定义 2.30 中定义。现在我们有如下结论。

定义 8 .14. 大型集合论类型 C ***Kazhdan-Lusztig*** 理想是 $I_{v,\ w} = I'_{v,\ w} + K$。

练习 8.7 在这种情况下也成立（尽管多项式 f_{ij}有所不同）。因此，我们令 $\mathbf{z}^{(v)} \subseteq \mathbf{z}^{(v,A)}$ 为未特化变量 z_{ij} 的集合，其中 $j > v^{-1}(i)$。然后，我们令$Z^{(v)}$为从 $Z^{(v,A)}$构造的矩阵，方法是从西南角开始，每当 $j \leq v^{-1}(i)$时，递归地用 $f_{ij} - z_{ij}$（如果 $i = v(j)$，则用 $f_{ij}/2 - z_{ij}$）替换 z_{ij}。最后，我们令$Z_{st}^{(v)}$为 $Z^{(v)}$ 的西南角 $s \times t$ 子矩阵（即经过相同替换后的 $Z_{st}^{(v,A)}$）。然后定义如下：

定义 8.15. 小型集合论类型 C ***Kazhdan-Lusztig*** 理想是由 $r_{st}^w + 1$ 个 $Z_{st}^{(v)}$ 的子式生成的 $\mathbb{C}[\mathbf{z}^{(v)}]$ 的理想 $\tilde{I}_{v,\ w}$。

现在我们有如下同构：

$$\mathbb{C}[z^{(v,A)}]/I_{v,w} \cong \mathbb{C}[\mathbf{z}^{(v)}]/\tilde{I}_{v,w}.$$

对于类型 C_n，由 [LR08，命题 6.1.12]可知，Kazhdan–Lusztig 理想确实是根理想。（另见 [EFRW21，命题 412]。）当 v 避免 123 模式时， [EFRW21] 证明，删除若干仅由 1 和 0 组成的行与列后， $Z^{(v)}$ 是一个对称矩阵（事实上，是某些元素取 0 的一般对称矩阵）。此外，他们还证明了以下结论。

定理 8.16 ([EFRW21]). 当 v 避免 123 模式时，定义 *8.15* 中的定义子式˜构成 I_v 的一个 *Gr¨obner* 基，且所依据的是适当（明确指定的）项序 w。

由此可得，在这种情况下，对 [WY12，定理 45]的类似结论有一个组合交换代数证明（参见定理 5.44 后的评论）。正如定理 5.44 与关于 GL_n 的（双）舒伯特多项式和（双）格罗滕迪克多项式公式相关，它也与所有经典群的类似多项式相关[IMN11，KN17]。

8.2.3. 类型 D_n。 这里的群是 $G = SO_{2n}$。非退化对称双线性形式的标准选择为

$$Q(e_i, e_j) = \begin{cases} 1 & i+j = 2n+1 \\ 0 & i+j \neq 2n+1 \end{cases}.$$

魏尔群为

$$W_{D_n} = \{w \in S_{2n} \mid w_0 w w_0 = w, \#(\{w(1), \ldots, w(n)\} \cap \{1, \ldots, n\}) \equiv 0 \pmod 2\}.$$

可以像在类型 B_n 和 C_n 中那样处理，从而得到一个 Kazhdan–Lusztig 理想，但在这种情况下，朴素的选择既不是根理想，甚至在集合论意义下也不正确！这部分是因为 W_{D_n} 上的布鲁哈特序并非置换上的布鲁哈特序的限制。对于类型 D_n，我们在其他类型中讨论过的那些结果和问题，似乎还遥不可及。

8.3. **Billey–Postnikov 模式避免**。 S. Billey–A. Postnikov [BP05] 定义了一种基于根子系的模式回避概念，现在通常称为*Billey–Postnikov* 模式回避。他们的定义以晶体根系为基础。我们不在此定义根系，而是只概述这一概念对经典群的含义。将根系语言下的一般定义转化为下文具体的模式嵌入定义，其大部分细节可见 K. Haenni [H19]未发表的研究报告。类型 A 的细节也见于 Billey 和 Postnikov 的原始论文 [BP05]，，而类型 B 的细节可见 [W18]。

下文中，重要的是考虑元素所属的群，而不只是将其视为一个置换。例如，置换 $w \in W_{C_n}$ 与作为 $S_n = W_{A_{n-1}}$的一个元素来考虑的同一置换w 并不相同。因此，在下方的定义中，我们将魏尔群元素写作 (w, W)，其中 W表示我们所考虑的魏尔群 w 所属的群。为简便起见，我们在定义中将这些魏尔群称为 A_{n-1}、 B_n、 C_n和 D_n。

定义 8.17。 给定经典群 V, W 及元素 $v \in V$ 和 $w \in W$，若 (v, V) （*Billey–Postnikov*）嵌入于 (w, W)，则称 $m \leq n$，且存在指标 $1 \leq \phi_1 < \phi_2 < \ldots < \phi_m$，使得以下任一条件成立：

(1) $V = A_{m-1}, W = A_{n-1}, \phi_m \le n$ 和 $w(\phi_1) \dots, w(\phi_m)$ 的相对顺序与 $v(1) \dots, v(m)$ 相同。[27](2) $V = A_{m-1}, W = A_{n-1}, \phi_m \le n$ 和 $w(\phi_1) \dots, w(\phi_m)$，使得 $w(\phi_1) \dots, w(\phi_m)$ 的相对顺序与 $v(1) \dots, v(m)$ 相反。[28](3) $V = A_{m-1}, W = B_n, \phi_m \le 2n+1$ 和 $\phi_i + \phi_j \ne 2n+2$ 对任意 i, j 均成立，其中 $w(\phi_1) \dots, w(\phi_m)$ 的相对顺序与 $v(1) \dots, v(m)$ 相同。（特别地，由于 $\phi_i + \phi_j \ne 2n+2$，对任意 i，我们不能有 $\phi_i = n+1$。）(4) $V = A_{m-1}, W = C_n, \phi_m \le 2n$ 和 $\phi_i + \phi_j \ne 2n+1$ 对任意 i, j 均成立，其中 $w(\phi_1) \dots, w(\phi_m)$ 的相对顺序与 $v(1) \dots, v(m)$ 相同。(5) $V = A_{m-1}, W = D_n, \phi_m \le 2n$，且对任意 i, j，$\phi_i + \phi_j \ne 2n+1$ 均成立，其中 $w(\phi_1) \dots, w(\phi_m)$ 的相对顺序与 $v(1) \dots, v(m)$ 相同。(6) $V = B_m, W = B_n, \phi_m \le n$ 和 $w(\phi_1) \dots, w(\phi_m)\ w(n+1)\ w(2n+2-\phi_m) \dots, w(2n+2-\phi_1)$ 的相对顺序与 $v(1) \dots, v(2m+1)$ 相同。(7) $V = C_m, W = C_n, \phi_m \le n$ 和 $w(\phi_1) \dots, w(\phi_m)\ w(2n+1-\phi_m) \dots, w(2n+1-\phi_1)$ 的相对顺序与 $v(1) \dots, v(2m)$ 相同。(8) $V = D_m, W = D_n, \phi_m \le n$ 和 $w(\phi_1) \dots, w(\phi_m)\ w(2n+1-\phi_m) \dots, w(2n+1-\phi_1)$ 的相对顺序与 $v(1) \dots, v(2m)$ 相同，但允许以下情况之一或两者同时发生：(a) $w(\phi_m)$ 和 $w(2n+1-\phi_m)$ 的顺序与 $v(m)$ 和 $v(m+1)$ 不同；或 (b) $w(\phi_a)$ 和 $w(2n+1-\phi_a)$ 的顺序与 $v(a)$ 和 $v(2m+1-a)$ 不同，其中 a 是 $v^{-1}(m)$ 和 $v^{-1}(m+1)$ 中小于或等于 m 的那个。[29](9) ϕ 之间存在魏尔群同构：$W_{A_3} = S_4 \to W_{D_3}$，因此，在考察 (v, A_3) 嵌入到 (w, D_n) 时，必须同时考虑按 (5) 的 (v, A_3) 的嵌入，以及按 (8) 的 $\phi(v)$ D_3 的嵌入。(10) 存在额外的魏尔群自同构 ϕ_1, ϕ_2：$W_{D_4} \to W_{D_4}$，因此，在考察 (v, D_4) 嵌入到 (w, D_n) 时，必须根据 (8) 考虑 v,$\phi_1(v)$ 和 $\phi_2(v)$ 的嵌入。

Billey–Postnikov 避免最近出现在一些纯组合学语境中，例如 C.Gaetz–Y. Gao [GG20] 以及第一作者 [W18]的工作中。

8.4. **区间模式避免**。利用 Billey–Postnikov 模式避免，第一作者 [W10] 将关于区间模式避免的结果推广到了任意李型。证明使用了 Billey–Braden [BB03] 的模式映射。设 $[u, v]$ 是某个魏尔群 V中的一个 Bruhat 区间，$[x, w]$ 是 W中的一个 Bruhat 区间。

定义 8.18. $[u, v]$ 区间模式嵌入 $[x, w]$，当且仅当存在一个公共嵌入$\Phi = (\phi_1, \dots, \phi_m)$，使得 u 嵌入到 x 中，且 v 嵌入到 w中，其中 x 和 w 在 Φ 之外的元素相同；此外，$\ell(v) - \ell(u) = \ell(w) - \ell(x)$。（另外，如果 $V = D_m$ 和 $W = D_n$，那么 v 与其在 w 中的嵌入之间相对次序不一致的方式，必须与 u 与其在 x 中的嵌入之间相对次序不一致的方式相匹配。）

[27]这与定义 4.1 相同。[28]根据定义 4.1，这等价于将 $w_0 v w_0$ 嵌入 w。[29]对于试图从 Billey 和 Postnikov 的原始定义推导出这一定义的读者，需要注意的是，允许这两种情形实际上混淆了两个问题：D_n的 Dynkin 图自同构，以及在 D_n 中间的元素之间不存在逆序这一事实。Billey–Postnikov 避免有左、右两个版本；在这两个版本中，对 D_n 中“缺失”的逆序的处理方式有所不同，但 Dynkin 图自同构使我们无需弄清楚究竟是哪一种。

The 练习 4.7 的推广成立，因此可以作如下表述 :

定义 8.19. $[u,\quad v]$ 区间模式嵌入于 w，若 $[u,v]$ 区间模式嵌入于 $[\Phi(u)\ w]$。

定义 6.13 和 6.14 可以逐字照搬（将所有 (w,W) 的集合替换为其中W 是一个（经典）魏尔群且 $w \in W$ 为 $\mathfrak{S}$ 的集合），而定理 6.16 的类似结果也得以证明，因此推论 6.18 亦然，见 [W10]。

8.5. **奇点分类问题**。利用模式回避对光滑舒伯特簇进行分类的问题（如定理 7.6 对 A 型 A 所做的那样），已在 S. Billey–A. Postnikov 的著作 [BP05] 中得到解决（其中大部分工作是将 Billey [B98] 早先的成果改述为 Billey–Postnikov 避免）。S. Kumar [K96] 给出了一个一般类型的代数刻画，用幂零-Hecke 环来描述哪些点是奇异点。

问题 8.20。为 $SO_{2n+1}/B, Sp_{2n}/B$ 和 SO_{2n}/B 中的每个舒伯特簇确定奇异轨迹的组合描述。

对于其他类型，只需将定义 7.56 中对称群 S_n 的作用替换为与 G 相关联的魏尔群 W，即可定义相应的***Hecke*** 代数。类似地，对于 W 的布鲁哈特序中满足 $v \leq w$ 的魏尔群元素 v、$w \in W$，可以定义 Kazhdan-Lusztig 多项式 $P_{v,w}(q)$。根据定义，如果 $P_{v,w}$ **(1)** $= 1$，则 X_w 在 e_v 处有理光滑。D. Peterson 的一个定理指出，在 ADE 类型中，光滑性与有理光滑性一致。已知在 B_n 和 C_n 类型中，有理奇异轨迹与奇异轨迹并不相同。尽管 B_n 与 C_n 类型的奇异轨迹不同，但它们的有理奇异轨迹一致，因为 Kazhdan-Lusztig 多项式仅取决于 Coxeter 群，而不取决于根的长度。参见 [BL00]。

问题 8.21. 为每个 SO_{2n+1}/B （或等价地，Sp_{2n}/B）中的舒伯特簇，给出其有理奇异轨迹的组合描述。

习题 8.22*。（参见习题 7.13） X_w 的（有理）奇异轨迹能否是 X_{id}? 也就是说， X_w 能否有孤立奇点?

即使是以下特殊情形，一般来说也尚未解决:

问题 8.23. 在 w 只有一个上升[30]的情形下，解决问题 ***8.20*** 和 ***8.21***（其中，在W_{B_n}中， i 和 $2n+2-i$ 处的上升（对于 W_{B_n}）只计一次；而在 W_{C_n} 和 W_{D_n}中， i 和 $2n+1-i$ 处的上升也只计一次）。

对于格拉斯曼流形，A. Zelevinsky [Z83] 已隐含地解决了问题 8.23。关于迷你型抛物子，参见 V. Lakshmibai-J. Weyman [LW90] 和 M. Brion-P. Polo [BP99]。

就更一般的问题 **(P1)** 和 **(P2)** 而言，关于本文所讨论的测度，在 A 型之外所知甚少。在大多数情况下，甚至连猜想都没有。例如:

问题 8.24。确定 SO_{2n+1}/B、Sp_{2n}/B 和 SO_{2n}/B 中哪些舒伯特簇是 ***Gorenstein*** 和/或具有阶乘性。

[WY06、B-MB07]中用于刻画 A型中 Gorenstein 或阶乘性舒伯特簇的论证，首先将问题归结为求解一个由

[30]这些是 W 的某个极大标准抛物子子群的最长陪集代表元。

线性方程组成的系统。该论证的这一部分可推广到所有李型，但一个具体的组合猜想至今仍未解决。虽然在 A型中，这些线性系统的所有解都是整数解，但在 C型中存在非整数解，因此可以分别刻画 $\mathbb{Q}$-Gorenstein 或 $\mathbb{Q}$-阶乘性的舒伯特簇。现在，人们还希望描述非戈伦斯坦轨迹，并为所有李型给出统一答案。由于区间模式回避有助于回答 A型中的问题 8.24，因此可以利用本节推广后的概念，在其他李型中寻求类似的答案。

由于在类型 B, C, D 中，Kazhdan-Lusztig 理想难以处理，切锥就更难处理了。在第 7.5 节中，我们提出了一条原则：在情况良好、Kazhdan-Lusztig 理想为标准齐次的情形下，该理想本身就定义了切锥。正如 A. Knutson 告知我们的，这对任意（余）极小舒伯特簇都成立。这包括普通格拉斯曼簇，以及所有极大正交格拉斯曼流形和拉格朗日格拉斯曼流形。因此，在所有这类情形中，T-固定点处的希尔伯特-塞缪尔重数可以由与该点相关联的 K 多项式确定；参见 W. Graham-V. Kreiman 的工作 [GK15, GK17] 及其中的参考文献。话虽如此，类比 [RRRSW21]，以下问题值得探讨：

问题 8.25。为（余）极小舒伯特簇中的 T-固定点的正则性，确定一条显式且统一适用于各根系统的组合规则（推广 [RRRSW21] 的规则）。

在经典型中，余 vexillary 舒伯特簇的希尔伯特–塞缪尔重数 [AIJK21] 和 Kazhdan–Lusztig 多项式 [J21] 已经得到确定，分别给出了 [LY11、LY12] 以及 [L95] 结果的类似结论。这里，余 vexillary 的定义是通过本质集的一个类似物 [AF18], 给出的，但它等价于 w 避免作为置换的 3412 [AF20]。（这也可以用 Billey–Postnikov 避免来重新表述，但代价是需要更多元素。）

人们可以超越经典型，研究例外型，甚至无限维 Kac-Moody 群中的类似问题。特别是在仿射 A 型中，已经有一些重要工作。E. Richmond–W. Slofstra [RS18] 刻画了仿射 A 型中的光滑舒伯特簇，此前 S. Billey–A. Crites [BC10] 已经刻画了有理光滑的舒伯特簇。B. Elek–D. Huang [EH22] 将定理 5.14 推广到了仿射 A 型旗簇。

9. 关于其他簇的备注

也可以使用局部片的类似物来研究旗流形的其他子簇。

9.1. 理查森簇。在下文中，可以假设 $G = GL_n$，不过，对于与任意复半单李群G相关的（部分）旗流形，结论同样成立（参见第 8 节）。

定义 9.1。相反舒伯特簇是 $X^w := \Omega^\circ_w$。

定义 9.2。理查森簇 是 $X_v \cap X^w$。

当 $w \leq v$ 时，它非空；此时它是一个维数为$\ell(v) - \ell(w)$ 的不可约簇。已知它是正规的且具有科恩–麦考利性质。当 $w = w_0$， $X^w_v = X_v$。因此

理查森簇是舒伯特簇的推广。因此，关于舒伯特簇奇点的大多数问题也可以针对理查森簇提出。[31]

A. Knutson 与作者 [KWY13] 的以下结果表明，许多问题实际上都归结为舒伯特情形。即：

X_v^w点 p 处的局部片是 X_v与 X_w在 p处的 Kazhdan–Lusztig 簇的笛卡尔积。

这一结果的统一证明是引理 3.2 的推广。该结果有若干直接推论。例如，由于舒伯特簇已知具有这些性质，它证明了理查森簇是正规、科恩–麦考利的，并且具有有理奇点。它还意味着

Coro推论 9.3。 Singlocus$(X_w^v) = ($Singlocus$(X_w) \cap X^v) \cup (X_w \cap$ Singlocus$(X^v))$

此外还可看出 理查森簇的希尔伯特–塞缪尔重数事实上 r:

花冠 **理 9.4**。 设 $xB \in X_w^v$。[32] 则 mult$(xB, X_w^v) =$ mult$(xB, X_w) \cdot$ mult(xB, X^v).

然而，关于理查森簇的问题仍然存在。例如：

问题 9.5。 确定 G/B 中哪些理查森簇是 *Gorenstein*?

对于 GL_n/B，问题 9.5 仍未解决，不过，若猜想 7.31 得到解决，该问题也将迎刃而解。对于格拉斯曼流形（以及极小 G/P），该结论可由 [P07] 结合 [KWY13] 得出。

与其取相对于相反旗的两个舒伯特簇的交，不如对一组舒伯特簇也采用同样的做法，只不过它们相对于参考旗的"循环置换"。这就是正拟阵簇。S. Billey-J. Weaver[BW22] 近期的工作给出了格拉斯曼流形中这些簇的光滑性模式回避判据。更细致地说，可以取相对于参考旗的所有置换的 $n!$ Bruhat 分解的公共细化。这就是拟阵分层[GGMS87]。然而，Mn¨ev 的普适性定理意味着，对于格拉斯曼流形，这些分层可以包含几乎任意 奇点 [M88]。

9.2. **Peterson簇与Hessenberg簇**。

定义 9.6. *Peterson*簇是

$$\text{Pet}_n := \{F_\bullet \in \text{Flags}(\mathbb{C}^n) : N \cdot F_n \subset F_{i+1}\},$$

其中 N i 是由单个 Jordan块构成的正则幂零 $n \times n$ 矩阵。

D. Peterson 在研究 Flag 旗簇($\mathbb{C}^n$)的量子上同调时引入了 Pet$_n$ 。 [IY12] i 的内容如下：

利用局部片，可以证明奇异 轨迹 Pet$_n$，并且 Pet$_n$ 是局部完全交。

[31]Richardson 类在 Schubert 基中的上同调类展开，即 $[X_v^w] = \sum_{u \in W} C_{v,u}^w [X_u]$ 正是舒伯特演算研究的主题。系数 $C_{v,u}^w$ 是非负整数，而对于大多数 G/P，如何为它们给出组合计数规则仍是一个开放问题。

[32]xB 不必是一个 T-不动点。

即使对于彼得森簇，奇点问题仍然存在。例如 e:

问题 9.7 ([IY12，第 6]节)。 求出Pet_n的 *Hilbert-Samuel* 重数的组合公式。

更多细节和参考文献请参见同上。

彼得森簇是黑塞堡簇的特殊情形。这类簇有多种一般性定义；我们采用 F. de Mari–C. Procesi–M. A. Shayman[dMPS92] 对旗簇($\mathbb{C}^n$)给出的定义。令 M 为 $\mathbb{C}^n$上的任意线性算子。取一个非递减函数 h： $[n] \to [n]$，满足对于每个 $i \in [n]$， $h(i) \geq i$；此函数称为黑塞堡函数。

定义 9.8。 黑塞堡簇是

$$\mathrm{Hess}(M,h) = \{F_\bullet \in GL_n/B : M \cdot F_i \subseteq F_{h(i)},\ \forall i \in [n]\}.$$

例 9.9。 若 M 是单位矩阵且 $h(i) = i$，则 Hess(M,h) = 旗簇($\mathbb{C}^n$)。 □

例 9.10. 若 $M = N$ 是正则幂零元，且 $h(i) = i+1$，则 Hess$(M,h) = \mathrm{Pet}_n$. □

例 9.11. 若 N 是幂零矩阵，且 $h(i) = i$，则 Hess(M,h) 是一个施普林格纤维，它是对称群几何表示论中一个重要的研究对象。

J. Tymoczko [T06]证明了 Hessenberg 簇“由仿射空间铺成”，其推论之一是 Hess(M,h) 的拓扑贝蒂数存在一个组合公式。关于 Hess(M,h) 的奇点结构的问题在 [IY12 第 7] 节中提出。利用补丁理想，同上。中进行了一些初步探索；例如，参见 H. Abe–L. Dedieu–F. Galetto–M. Harada 的后续工作 [ADGH16]，以及 E. Insko–M. Precup 的工作 [IP19]。L. Escobar-M. Precup-J. Shareshian [EPS21] 对属于舒伯特簇的 Hessenberg 簇进行了分类。关于 Hessenberg 簇的更多讨论和参考文献，请参见该论文。

9.3. **球面对称轨道闭包**。

定义 9.12。 K 是 G 的一个子群，若 $K = G^\theta$ 是 G的某个对合自同构 θ 的不动点子群，则称其为对称子群。此外，若K 通过左乘作用于 G/B 时只有有限多个轨道，则这样的 K 称为球面子群。这样的（G， K）称为球面对称对。

例9.13。 对于 $G = GL_n$，存在三个这样的球面对称子群 K，分别是$K = O_n$（正交群）、$K = Sp_n$（辛群，假设 n 为偶数）和$K = GL_p \times GL_q$（可逆 $p+q=n$ 分块矩阵）。

我们关注有限多个 K轨道闭包的奇点。再次强调，对于 K轨道闭包，我们考虑过的许多问题同样成立于舒伯特簇。例如，以下问题尚未解决：

问题 9.14。 确定三个球面对称对$(GL_n,\ O_n)$、$(GL_{2n},\ Sp_{2n})$、$(GL_n,\ GL_p \times GL_q)$的轨道闭包的奇异轨迹。

[WWY18] 的内容为：

> 研究 B 在 G/K 上的轨道是等价的。对于后者，关于对偶 $(GL_n, GL_p \times GL_q)$ 的闭包，存在与 Kazhdan-Lusztig 簇类似的对象。这种类似对象是 *Mars-Springer* 簇。此外，在此背景下还可以找到与区间模式避免类似的概念。

关于 Kazhdan-Lusztig 簇，已知的结果寥寥无几。除了 $K = Sp_n$ [MP22] 的某些情形外，我们不知道 Mars-Springer 理想的 Gr¨obner 基。

9.4. **箭图轨迹**。 我们的上一个例子并不属于旗簇，但仍然与舒伯特簇的研究密切相关。

定义 9.15。 箭图 Q 是一个有向图。我们称 Q 为类型为 A_n 的等向箭图，如果Q是一条有向路径 $\bullet \to \bullet \to \bullet \to \cdots \to \bullet$，且具有 n 个顶点。

定义 9.16。 具有维数向量 $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 的箭图 Q 表示 具有如下形式：
$V_1 \xrightarrow{M_1} V_2 \xrightarrow{M_2} \cdots \xrightarrow{M_{n-1}} V_n$ 其中 V_i 是一个定义在 $\mathbb{C}$ 上的、维数为 d_i的向量空间，且 M_i：
$V_i \to V_{i+1}$ 是一个线性变换。

定义 9.17。 维数向量 $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 的表示空间 Rep$_Q(d)$为

$$\mathsf{Rep}_Q(d) := \prod_{a \in \mathsf{arc}(Q)} \mathsf{Mat}_{d(ha),d(ta)}(\mathbb{C})$$

其中，arc(Q) 是 Q 的弧 $a = ha \to ta$ 集合。

定义 9.18。维数向量 $d = (d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 的基变换群 $GL(d)$ 为

$$GL(d) := \prod_{v \in \mathsf{vertices}(Q)} GL_{d(v)}(\mathbb{C}).$$

$GL(d)$ 在 Rep$_Q(d)$ 上的作用如下：设 $(M_1, \ldots, M_n) \in \mathsf{Rep}_Q(d)$，且 $g = (g_1, \ldots, g_n) \in GL(d)$，则 $g \cdot (M_1, \ldots, M_n) = (g_{ha} V_a g_{ta}^{-1})_{a \in \mathsf{arc}(Q)}$。

定义 9.19。 箭图轨迹是 Rep$_Q(d)$ 中（有限多个） $GL(d)$-轨道闭包之一 .

这与舒伯特簇有关联。A. Zelevinsky [Z85] 证明，等向型 A_n 箭图的箭图轨迹在集合论意义下与某个舒伯特簇的某些开子集双射对应。Lakshmibai-Magyar [LM98] 证明该映射是一个概形论同构。

R. Kinser-J. Rajchgot [KR15] 证明：

对于任意定向的 A_n 型箭图，箭图轨迹同构于部分旗流形中的一个 Kazhdan-Lusztig 簇，差一个显式的光滑因子。

R. Kinser-A. Knutson-J. Rajchgot [KKR19]利用上述与 Kazhdan-Lusztig 簇之间的关系，结合 [WY12] 的希尔伯特级数定理，给出了箭图轨迹的希尔伯特级数公式。因此，通过将问题化归到舒伯特簇的情形，详细研究箭图轨迹的奇点将会很有意义。

对于其他 Dynkin 类型的箭图，也可以提出类似的问题；例如可参见[KR21]及其中的参考文献。在那里，箭图轨迹与 Kazhdan-Lusztig 簇无关，而是与对称簇的一个类比对象有关 $GL_{p+q}/GL_p \times GL_q$（见第 9.3 节）。

习题 *2.18*：在 $k=2, n=4$ 情形下，1 的各行构成“I”。

练习 *2.25* 对于 (b)，答案是 gBg^{-1}。旗簇 $\mathbb{C}^n$ 中的点与其稳定子 $\mathcal{B}=\{gBg^{-1}$ 之间存在双射：$g \in GL_n\}$。所有博雷尔子群（一般意义下）都彼此 G-共轭。因此，旗簇 $\mathbb{C}^n$ 可视为 GL_n 的所有博雷尔子群组成的集合，在描述中不偏袒任何一个博雷尔子群。

习题 *2.37*：解答见 [M01c，第 63–64] 页。

习题 *2.38*：若 S_n 被描述为 $[n]$ 的置换集合，则它由简单对换 $s_i := (i\ i+1)$ 生成。因此，将 $\sigma_i \to s_i$ 映射到.....的映射是满射。可以写出一个“字典序最小”的分解 F，它具有长度 $\ell(w)$。部分 (b) 和 (c) 要求证明，任意约化词都可以通过这些关系“移至”F。

习题 *2.42*：在左侧乘以 B 是向上的行变换，在右侧乘以 B 则是向右的列变换。

习题 *3.3*：若 $x=3421$，(a) 表示

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\1&0&0&0*&1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0*&*&1&0*&*&*&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}*&*&*&1*&*&1&0\\1&0&0&0*&1&0&0\end{bmatrix}.$$

练习 *3.6*：条件 $\dim(F_j \cap E_i) \geq k$ 等价于 $\dim(\pi_i(F_j)) \leq n-k$，其中 π_i 是投影到除第一个 i 个坐标以外的所有坐标上的投影。

习题 *3.9*：$I_{1324,\ 3412}$。

练习 *3.11*：对于第一部分，令 $\mathcal{O}_w$ 为 $(E_\bullet^{(w)}, E_\bullet) \in G/B \times G/B$ 在 G 的对角作用下的轨道，并令 $\overline{\mathcal{O}_w}$ 为其闭包。注意，投影到第一和第二因子分别给出纤维为 $X_{w^{-1}}$ 和 X_w 的纤维丛。现在考虑点 $(E_\bullet^{(v)}, E_\bullet) \in \overline{\mathcal{O}_w}$ 的一个仿射邻域。对于第二部分，$X_w \cong X_{w^{-1}}$ 未必成立。E. Richmond–W. Slofstra [RS21] 对舒伯特簇的同构分类进行了研究。

习题 *3.18*：结合习题 5.20 和 3.17，I_w 是素数。现在使用 [C17，命题 1.2]。

习题 *4.5*：（a）在余格拉斯曼情形中，本质集中的方框都位于同一列。（b）由（a）可得。

习题 *4.10*：使用习题 2.37(b)。

练习 *4.12*：一个例子是 $w=413625$。

练习 *4.18*：参见 [WY08，定理 4.2]。

练习 *4.21*：这是 [LM21，定理 2.4]。

习题 *5.7*：思考一下 $w=52143$。

习题 *5.8*：看看布赫伯格算法是如何运作的。其中一步是确认“S-对” $S\left(\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_{11} & x_{13} \\ x_{21} & x_{23} \end{vmatrix}\right)$ 属于由九个 2×2 子式生成的理想（这是真的，因为它等于 $-x_{21}\begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}$）。读者可以对$S\left(\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{23} \end{vmatrix}\right)$ 做同样的检查，并根据这些例子猜猜布赫伯格算法中的 S-对检验是什么，除非你已经知道。

习题 *5.15*：使用习题 3.17。

习题 *5.20*：根据定理 5.14，$I_{v,\ w}$ 是根理想。现在利用 X_w 不可约这一事实（为什么这 是真的？），以及 $\mathcal{N}_{v,\ w}$（本质上）是 X_w 的一个仿射开邻域。

习题 *5.22*：例如，

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ + & + & \cdot \\ + & + & \cdot \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 2&2\\\hline\end{array} \text{ and } \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & + \\ + & \cdot & + \\ + & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 2&3\\\hline\end{array}.$$

习题 *5.35*：F 或者 (c) 参见 [KMY09，第 5] 节，尤其是该论文的定理 5.8 .

练习 *5.42*：$\mathfrak{G}_{312} = \frac{(x_1-y_1)\ (x_1-y_2)}{y_1y_2}$ 和 $\mathfrak{G}_{132} = -\frac{x_1x_2-y_1y_2}{y_1y_2}$。

Exercise 5.46: $\mathcal{K}(R/I_{132,132}; t_1, t_2, t_3) = \frac{(t_1-t_3)(t_1-t_2)}{t_2t_3}$.

习题 *6.11*： 参见作者网站上提供的 `Schubsingular` 软件包。

习题 *7.12*： (a) 参见 [WY08，例 6.2]。(b) sing(X_{523614}) $= X_{215634} \cup X_{321546}$。

习题 *7.13*：否。可以利用定理 7.11 来论证。另一种论证使用“抛物移动”；参见 [WY12，第 5 节1]。

习题 *7.23*： (a) 参见 [F92，引理 3.10]。(b) 和 (c)： $w = 3142$。

习题 *7.32*：这需要了解最大奇异轨迹中各点的 Gorenstein 性；参见 L. Manivel [M01b] 或 A.Cortez [C03] 的结果。

习题*7.33*： 根据习题 4.16，X_w 是 Gorenstein（分别地，是局部完全交）当且仅当 $\mathcal{N}_{id,\ w}$ 是 Gorenstein（分别地，是局部完全交）。现在比较定理 7.21 和 7.30 的模式。

练习 *7.51*：使用练习 3.11。对于 $v = id$，该断言由 D. Eliseev-A. Panov [EP13]提出猜想，并在 [FKMO17，第 5 节7]中给出了证明。

致谢

我们感谢包括 AllenKnutson、Ezra Miller 和 William Fulton 在内的众多数学家。在过去二十年间，他们塑造了我们对这一主题的看法，其思想也直接或间接地体现于本文之中。关于这份具体文稿，我们感谢 Casey Appleton、Justin Chen、Shiliang Gao、Abigail Price、Ryan Roach、

Ada Stelzer、John Stembridge、Avery St. Dizier 和 Zhuo Zhang 提供的有益交流。我们还感谢参加在 UIUC 举行的 2022年ICLUE暑期项目（主题为表示论与组合学）的各位参与者；他们营造了富有启发性的环境，也对本文的阐述产生了影响。我们感谢 Erik Insko、Martha Precup 和 Edward Richmond，正是他们促使作者撰写了本章。我们对部分基础材料的阐述受到了 Richard Borcherds 在线代数几何讲座系列的影响。A W 得到了西蒙斯合作基金的部分支持。AY 得到了西蒙斯合作基金和美国国家科学基金会研究培训组基金的部分支持，并受聘于伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校高等研究中心。

参考文献

[AB12] H. Abe 和 S. Billey，《Lakshmibai-Sandhya定理》的推论：舒伯特演算及相关几何中置换模式的普遍性。舒伯特演算–大阪 2012，1–52，《纯数学进展研究》，71，日本数学会，[东京], 2016。[ADGH 16] H. Abe、L. Dedieu、F. Galetto 和 M. Harada，Hessenberg 簇的几何及其在 Newton-Okounkov体中的应用，预印本，2016。arXiv:1612.08831[AJS94] H. H. Andersen、J. C. Jantzen 和 W. Soergel，p 次单位根处量子群及特征 p 中半单群的表示：与 p 无关。Ast´erisque，（220）：321，1994。[AF18] D. Anderson 和 W. Fulton，经典型退化轨迹的陈类公式。《数学汇编》154（2018），1746–1774。[AF20] D. Anderson 和 W. Fulton，重新审视旗形有符号置换。代数组合学 3（2020），1041–1057。[AIJK21] D. Anderson、T. Ikeda、M. Jeon 和 R. Kawago，旗形舒伯特簇中奇点的重数，预印本，2021。arXiv:2112.07375[A69] M. F. Atiyah 和 I. G. Macdonald，《交换代数引论》。Addison-Wesley 出版公司，Reading，Mass.-London-Don Mills，Ont.，1969，ix+128页。[BS98] N. Bergeron 和 F. Sottile，舒伯特多项式、布鲁哈特序与旗流形的几何。《杜克数学杂志》95（1998），373–423。[B96] S. Billey，Kostant多项式与 G/B 的上同调环。《杜克数学杂志》96(1)：205–224，1999。[B98] S. Billey，舒伯特簇的模式回避与有理光滑性。《数学进展》，第 139 卷（1998），第 141–156 页。[BB03] S. Billey 和 T. Braden，利用模式给出 Kazhdan-Lusztig 多项式的下界。《变换群》8（2003），第 4 期，321–332。[BC10] S. Billey 和 A. Crites，A 型仿射舒伯特簇有理光滑性的模式刻画。《代数杂志》361（2012），107–133。[BH95] S. Billey 和 M. Haiman，经典群的舒伯特多项式。《美国数学会杂志》8（1995），第 2 期，443–482。[BL00] S. Billey 和 V. Lakshmibai，《舒伯特簇的奇异轨迹》，《数学进展》第 182 卷。Birkh¨auser Boston 公司，波士顿，马萨诸塞州，2000。[BP05] S. Billey 和 A. Postnikov，利用根子系中的模式研究舒伯特簇的光滑性。《应用数学进展》34（2005），第 3 期，447–466。[BW01] S. Billey 和 G. Warrington，321-六边形避免置换的 Kazhdan-Lusztig 多项式，《代数组合学杂志》13（2001），111–136。MR 2002f:05161[BW03] S. Billey 和 G. Warrington，SL(n)/B 中舒伯特簇的极大奇异轨迹，《美国数学会汇刊》335（2003），3915–3945。[BW22] S. Billey 和 J. Weaver，正子拟阵簇光滑性的模式回避刻画，预印本，2022。arXiv:2204.09013[BB05] A. Bj¨orner 和 F. Brenti，《Coxeter 群的组合学》，《数学研究生教材》第 231 卷。Springer-Verlag，纽约–海德堡，2005。[BBDVW21] C. Blundell、L. Biuesing、A. Davies、P. Veli˘ckovi´c 和 Geordie Williamson，迈向 Kazhdan-Lusztig 多项式的组合不变性，预印本，2021。arXiv:2111.15161[BS58] R. Bott 和 H. Samelson，Morse 理论在对称空间中的应用。《美国数学杂志》80（1958），964–1029。

[B-MB07] M. Bousquet-M´elou 和 S. Butler，类森林置换。《组合年刊》11（2007），第 3–4 期，335–354。[BM03] T. Braden 和 R. Macpherson，从矩图到交叉上同调。《数学年刊》321（2001），533–551。MR 2003g:14030[B03] F. Brenti，Kazhdan-Lusztig 多项式：历史、问题与组合学，《Lothar 组合学研讨会》，49（2003），613–627。MR 2004g:05152´B[M. Brion，《旗簇几何讲义》。代数簇上同调研究专题，《数学趋势》，第 33–85 页。Birkhauser，巴塞尔，2005。05] BK[M. Brion 和 S. Kumar，《几何与表示论中的 Frobenius 分裂方法》。《数学进展》231。Birkh05] auser Boston 公司，波士顿，马萨诸塞州，2005。x¨页。+250 BP[M. Brion 和 P. Polo，某些舒伯特簇的一般奇点。《数学杂志》231（1999），第 2 期，301–324。99] B[M. P. Brodmann 和 R. Y. Sharp，《局部上同调：代数引论及其几何应用》。第二版。《剑桥高等数学研究》136。剑桥大学出版社，剑桥，2013。xxii13] 页。+491 BH[W. Bruns 和 J. Herzog，《Cohen-Macaulay 环》。《剑桥高等数学研究》39。剑桥大学出版社，剑桥，1993。93] CK[J. B. Carrell 和 J. Kuttler，舒伯特簇的奇点、切锥与 Bruhat 图。《美国数学杂志》128（2006），第 1 期，121–138。06] C[J. Chen，Mono：环面闭包的代数研究，预印本，2017。arXiv:1710.0461417] C[C. Chevalley，关于空间 94] 的胞腔分解 ´。（法文）G/B关于空间 [[的胞腔分解。由 Armand Borel 作序。《纯数学专题讨论会论文集》56，第 1 部分，《代数群及其推广：经典方法》（宾夕法尼亚州大学公园，1991），1–23，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1994。G/B]] C[A. Cortez，线性群的舒伯特簇的一般奇点与拟解，Adv. Math. 178（2003），396–445。03] CLO´D. A. Cox、J. Little 和 D. O’Shea，《理想、簇与算法：代数几何与交换代数计算导论》。第四版。《数学本科教材》。Springer，Cham，2015。´D´S. Da Silva，利用边界除子对舒伯特簇进行 Gorenstein 化，预印本，2018。arXiv:1807.05416v2´DVB´A. Davies、P. Veli˘ckovi´c、L. Buesing 等，通过人工智能引导人类直觉推进数学。《自然》600，70?74（2021）。´DL[C. DeConcini 和 V. Lakshmibai，舒伯特簇的算术 Cohen-Macaulay 性与算术正规性。《美国数学杂志》103（1981），835–850。MR 83e:14035] D[V. V. Deodhar，Kazhdan-Lusztig 理论问题的组合框架。《献给几何》36（1990），第 1 期，95–119。18] dMPS[F. de Mari、C. Procesi 和 M. A. Shayman，Hessenberg 簇。《美国数学会汇刊》332（1992），529–534。+21] D´M. Demazure，广义舒伯特簇的奇点消解。《高等师范学校科学年刊》（第 4 辑）7（1974），53–88。[D81] M. Dyer，关于 Coxeter 系统的“Bruhat 图”。《数学汇编》78（1991），第 2 期，185–191。[E90] D. Eisenbud，《交换代数：以代数几何为视角》。《数学研究生教材》150。Springer-Verlag，纽约，1995。[E92] D. Eisenbud，《分解子的几何：交换代数与代数几何的第二课程》。《数学研究生教材》229。Springer-Verlag，纽约，2005。xvi[页。74] EH´B. Elek 和 D. Huang，A 型仿射旗簇的 Kazhdan-Lusztig 理想的一个 Gröbner 基，预印本，2022。arXiv:1911.07760v3´EW´B. Elias 和 G. Williamson，Geordie。Soergel 双模的 Hodge 理论。《数学年刊》（第 2 辑）180（2014），第 3 期，1089–1136。´EP´D. Y. Eliseev 和 A. N. Panov，低秩 ´ 的舒伯特簇切锥，《数学科学杂志》（纽约）188（2013），第 5 期，596–600。 ´EFRW[L. Escobar、A. Fink、J. Rajchgot 和 A. Woo，Gr91] obner 基、对称矩阵与 A 型 [Kazhdan-Lusztig 簇，预印本，2021。arXiv:2104.09589

[EPS21] L. Escobar、M. Precup 和 J. Shareshian，哪些舒伯特簇是 Hessenberg 簇？，预印本，2021年。arXiv:2107.07929[FMP16] G. Fløystad、J. McCullough 和 I. Peeva，分解子的三个主题。《美国数学会通报》（新系列）53（2016），第3期，415–435。[FKMO17] D. Fuchs、A. Kirillov、S. Morier-Genoud 和 V. Ovsienko，舒伯特簇的切锥。《阿诺德数学杂志》3（2017），第4期，451–482。[F92] W. Fulton，旗簇、舒伯特多项式、退化轨迹和行列式公式。《杜克数学杂志》65（1992），第3期，381–420。[F97] W. Fulton，杨表：及其在表示论与几何学中的应用。《伦敦数学会学生教材》，第35卷。剑桥大学出版社，剑桥，1997年。[FH91] W. Fulton 和 J. Harris，表示论：入门课程。《数学研究生教材》，第129卷。《数学读物》。Springer-Verlag，纽约，1991年。xvi+551 页。[FP98] W. Fulton 和 P. Pragacz，舒伯特簇与退化轨迹。附录J由作者与 I. Ciocan-Fontanine 合作撰写。《数学讲义》，第1689卷。Springer-Verlag，柏林，1998年。xii+148 页。[GG20] C. Gaetz 和 Y. Gao，魏尔群中的可分元素。《应用数学进展》113（2020），论文编号101974。[GY22] S. Gao 和 A. Yong，矩阵舒伯特簇的极小方程，预印本，2022年。arXiv:2201.06522[G01] V. Gasharov，Lakshmibai–Sandhya 舒伯特簇奇点条件的充分性。《组合数学》126（2001），47–56。MR 2002d:14078[GGMS87] I. M. Gelfand、R. M. Goresky、R. D. MacPherson 和 V. V. Serganova，组合几何、凸多面体与舒伯特胞腔。《数学进展》63（1987），第3期，301–316。[G19] M. Gillespie，舒伯特演算主题的变奏。《代数组合学新趋势》，115–158，Assoc. Women Math. Ser.，第16卷，Springer，Cham，2019年。[G02] W. Graham，等变 KK理论与舒伯特簇。2002年。未发表。[GK15] W. Graham 和 V. Kreiman，激发杨图、等变K理论与舒伯特簇。《美国数学会汇刊》367（2015），第9期，6597–6645。[GK17] W. Graham 和 V. Kreiman，共极小点与舒伯特簇，预印本，待刊于《傅里叶研究所年刊》，2017年。arXiv:1701.05956[H19] K. Haenni，魏尔群与带符号置换中的 Wilf 等价。SPUR 结业论文，2019年。https://math.mit.edu/research/undergraduate/spur/documents/2019Haenni.pdf[HPW22] Z. Hamaker、O. Pechenik 和 A. Weigandt，通过冰研究舒伯特多项式的 Gr¨obner 几何。《数学进展》398（2022），论文编号108228，共29页。[H73] H.C. Hansen，旗流形中的圈。《斯堪的纳维亚数学杂志》33（1973），269–274（1974）。[H95] J. Harris，代数几何：入门课程。1992年原版的修订重印本。《数学研究生教材》，第133卷。Springer-Verlag，纽约，1995年。xx+328 页。[H77] R. Hartshorne，代数几何。《数学研究生教材》，第52卷。Springer-Verlag，纽约—海德堡，1977年。xvi+496 页。[H90] D. Hilbert，¨论代数形式理论。《数学年刊》36（1890），473–530。[H75] J. E. Humphreys，线性代数群。《数学研究生教材》，第21卷。Springer-Verlag，纽约—海德堡，1975年。xiv+247 页。[H90] J. E. Humphreys，反射群与 Coxeter 群。《剑桥高等数学研究》，第29卷。剑桥大学出版社，剑桥，1990年。xii+204 页。[IMN11] T. Ikeda、L. Mihalcea 和 H. Naruse，经典群的双舒伯特多项式。《数学进展》226(1):840–886，2011年。[IP19] E. Insko 和 M. Precup，半单黑森堡簇的奇异轨迹。《代数杂志》521（2019），65–96。[IY12] E. Insko 和 A. Yong，补丁理想与彼得森簇。《变换群》17（2012），第4期，1011–1036。[I88] R. Irving，Verma模的底过滤。《高等师范学校科学年刊》第四辑21（1988），第1期，47–65。[J21] M. Jeon，余 vexillary 舒伯特簇与 Kazhdan–Lusztig 多项式，预印本，2021年。arXiv:2112.06337

[JW13] B. Jones 和 A. Woo，余格拉斯曼 Kazhdan-Lusztig 多项式的掩码公式。《组合年刊》17（2013），第1期，151–203。[KLR03] C. Kassel、A. Lascoux 和 C. Reutenauer，舒伯特簇的奇异轨迹。《代数杂志》269（2003），74–108。[KL79] D. Kazhdan 和 G. Lusztig，Coxeter 群与 Hecke 代数的表示。《数学发明》53（1979），第2期，165–184。[KL80] D. Kazhdan 和 G. Lusztig，舒伯特簇与 Poincar´e 对偶性。载于《拉普拉斯算子几何》（夏威夷大学纯数学专题讨论会论文集，檀香山，夏威夷，1979），《纯数学专题讨论会论文集》，第36卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州（1980），185–203。[KKR19] R. Kinser、A. Knutson 和 J. Rajchgot，型 A 箭图多项式与 K多项式的三个组合公式。《杜克数学杂志》168（2019），第4期，505–551。[KR15] R. Kinser 和 J. Rajchgot，型 A 箭图轨迹与舒伯特簇。《交换代数杂志》7（2015），第2期，265–301。[KR21] R. Kinser 和 J. Rajchgot，型 D 箭图表示簇、双格拉斯曼簇与对称簇。《数学进展》376（2021），论文编号107454，共44页。[K16] A. N. Kirillov，关于舒伯特多项式、格罗滕迪克多项式与键多项式的札记。《SIGMA：对称性、可积性、几何方法与应用》12（2016），论文编号034，共56页。[KN17] A. N. Kirillov 和 H. Naruse，利用 idCoxeter 代数构造经典型的双 Grothendieck 多项式。《东京数学杂志》39(3):695–728，2017年。[KL72] S. L. Kleiman 和 Dan Laksov，舒伯特演算，《美国数学月刊》，第79卷，第10期，（1972年12月），1061–1082页。[K20] P. Klein，矩阵舒伯特簇的对角退化，预印本，2020年。arXiv:2008.01717[KW21] P. Klein 和 A. Weigandt，无凸点管道梦编码舒伯特多项式的 Gr¨obner 几何，预印本，2021年。arXiv:2108.08370[K08] A. Knutson，舒伯特局部片退化为子词复形。《变换群》13（2008），第3–4期，715–726。[K22] A. Knutson，舒伯特演算与箭图簇，即将刊于《2022年国际数学家大会论文集》。[KM04] A. Knutson 和 E. Miller，Coxeter 群中的子词复形。《数学进展》184（2004），第1期，161–176。[KM05] A. Knutson 和 E. Miller，舒伯特多项式的 Gr¨obner 几何。《数学年刊》（第二辑）161（2005），第3期，1245–1318。[KMY08] A. Knutson、E. Miller 和 A. Yong，杨图复形。《以色列数学杂志》163（2008），317–343。[KMY09] A. Knutson、E. Miller 和 A. Yong，顶点分解与带标记杨表的 Gr¨obner 几何。《纯粹与应用数学杂志》630（2009），1–31。[KWY13] A. Knutson、A. Woo 和 A. Yong，理查森簇的奇点。《数学研究快报》20（2013），第2期，391–400。[K05] C. Krattenthaler，格拉斯曼流形上舒伯特簇中点的重数 II，《代数组合学杂志》22（2005），273–288。[KR04] V. Kreiman 和 V. Lakshmibai，格拉斯曼流形舒伯特簇中奇异点的重数。《代数、算术与几何及其应用》（印第安纳州西拉斐特，2000），553–563，Springer，柏林，2004年。[KR05] M. Kreuzer 和 L. Robbiano，计算交换代数。第2卷。Springer-Verlag，柏林，2005年。x+586 页。[K96] S. Kumar，幂零 Hecke 环与舒伯特簇的奇点。《数学发明》123（1996），第3期，471–506。[KLSS15] M. Kummini、V. Lakshmibai、P. Sastry 和 C. S. Seshadri，若干舒伯特奇点的自由分解。《太平洋数学杂志》279(1-2):299–328，2015年。[LM98] V. Lakshmibai 和 P. Magyar，退化概形、箭图概形与舒伯特簇。《国际数学研究通报》1998年，第12期，627–640。[LR08] V. Lakshmibai 和 K. N. Raghavan，标准单项式理论：不变理论方法。《数学科学百科全书》，第137卷。《不变理论与代数变换群》，第8卷。Springer-Verlag，柏林，2008年。xiv+265 页。[LS90] V. Lakshmibai 和 B. Sandhya，Sl(n)/B中舒伯特簇光滑性的判据。《印度科学院学报：数学科学》100（1990），第1期，45–52。

[LS84] V. Lakshmibai and C. S. Seshadri，舒伯特簇的奇异轨迹，《美国数学会通报》（新系列）11(1984)，363–366。MR 85j:14095[LW90] V. Lakshmibai and J. Weyman，微型 G/P舒伯特簇上点的重数。《Adv. Math.》84 (1990)，第2期，179–208。[LM21] M. Lanini and P. J. McNamara，右胞腔内舒伯特簇的奇点，《SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.》17 (2021年)，论文编号070，共9页。[L78] A. Lascoux，行列式簇的分解子，《Adv. in Math.》30 (1978)，第3期，202–237。[L95] A. Lascoux，舒伯特旗标簇的 Kazhdan-Lusztig 多项式，《C. R. Acad. Sci. Paris S´er. I Math.》321 (1995)，667–670。MR 96g:05144[LY11] L. Li and A. Yong，Kazhdan-Lusztig 多项式与漂移构形，《Algebra Number Theory》5 (2011)，第5期，595–626。[LY12] L. Li and A. Yong，Kazhdan-Lusztig 理想的若干退化及舒伯特簇的重数。《Adv. Math.》229 (2012)，第1期，633–667。[M01a] L. Manivel，舒伯特簇的奇异轨迹，《Internat. Math. Res. Notices》16 (2001)，849–871。[M01b] L. Manivel，舒伯特簇的一般奇点，arXiv:math.AG/0105239。[M01c] L. Manivel，《对称函数、舒伯特多项式与退化轨迹》。由 John R. Swallow 从1998年法文原版译出。SMF/AMS Texts and Monographs，美国数学会，普罗维登斯，2001。[MP22] E. Marberg and B. Pawlowski，斜对称矩阵舒伯特簇的格罗布纳几何。《Adv. Math.》405 (2022)，108488。[MW03] T. McLarnan and G. Warrington，关于0-1 猜想的反例。《Represent. Theory》7 (2003)，181–195。[M20] K. Meek，《Hilbert-Samuel 重数为二的旗流形中的舒伯特簇》，博士论文，爱达荷大学，2020。[MS05] E. Miller and B. Sturmfels，《组合交换代数》。《数学研究生教材》227。Springer-Verlag，纽约，2005。xiv +417 页。[M88] N. E. Mn¨ev，构形簇和凸多胞体簇分类问题的普适性定理。《拓扑与几何？Rohlin 研讨会》，527–543，《数学讲义》1346，Springer，柏林，1988。[N21] E. Neye，舒伯特局部片理想的一个格罗布纳基，预印本，2021年。arXiv:2111.13778[PSW21] O. Pechenik, D. Speyer, and A. Weigandt，矩阵舒伯特簇的 Castelnuovo-Mumford 正则性，预印本，2021年。arXiv:2111.10681[P07] N. Perrin，微型舒伯特簇的 Gorenstein 轨迹。《Adv. Math.》220 (2009)，第2期，505–522。[P99] P. Polo，对称群中任意 Kazhdan-Lusztig 多项式的构造，《Represent. Theory》3 (1999)，90–104（电子版）。[PS09] A. Postnikov and R. P. Stanley，布鲁哈特序中的链，《J. Algebraic Combin.》29 (2009)，第2期，133–174。[RRRSW21] J. Rajchgot, Y. Ren, C. Robichaux, A. St. Dizier, and A. Weigandt，对称格罗滕迪克多项式的次数与 Castelnuovo-Mumford 正则性。《Proc. Amer. Math. Soc.》149 (2021年)，第4期，1405–1416。[RRW22] J. Rajchgot, C. Robichaux, and A. Weigandt，梯形行列式簇及格拉斯曼舒伯特簇局部片的 Castelnuovo-Mumford 正则性，预印本，2022年。arXiv:2202.03995[RR85] S. Ramanan and A. Ramanathan，旗簇与舒伯特簇的射影正规性，《Invent. Math.》79 (1985)，第2期，217–224。MR 86j:14051[R85] A. Ramanathan，舒伯特簇是算术 Cohen-Macaulay 的，《Invent. Math.》80 (1985)，283–294。MR 87d:14044[RS16] E. Richmond and W. Slofstra，Billey–Postnikov 分解与舒伯特簇的纤维丛结构。《数学年刊》366 (2016)，第1–2期，31–55。[RS18] E. Richmond and W. Slofstra，A 型仿射旗簇中的光滑舒伯特簇，《European J. Combin.》71 (2018)，125–138。[RS21] E. Richmond and W. Slofstra，舒伯特簇的同构问题，预印本，2021年。arXiv:2103.08114

[R04] K. Rietsch，《反常层导论》。《有限维代数的表示及李理论与几何相关主题》，391–429，Fields Inst. Commun.，40，美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，2004。[RYY22] C. Robichaux, H. Yadav, and A. Yong，等变上同调、舒伯特演算与边标记杨表。《代数几何的前沿》第二卷，284–335，伦敦数学会讲义丛书，473，剑桥大学出版社，剑桥，2022年。[RZ01] J. Rosenthal and A. Zelevinsky，格拉斯曼流形中舒伯特簇上点的重数。《J. Algebraic Combin.》13 (2001)，213–218。[R87] K. Ryan，关于 Sl($n, \mathbb{C}$) 的旗流形中的舒伯特簇，《数学年刊》276 (1987)，205–224。[S11] S. Sam，舒伯特复形与退化轨迹，《J. Algebra》337 (2011)，103–125。[S79] H. Schubert，《计数几何演算》。1879年原版重印本。附 Steven L. Kleiman 导言。Springer–Verlag，柏林、海德堡、纽约，1979。[S82] T. A. Springer，交叉上同调的若干应用。《Bourbaki 研讨会：1981/82 年卷》，报告579–596，Astérisque，第92–93期（1982），报告编号589，共25页。[S99] R. P. Stanley，《计数组合学》第二卷。Gian-Carlo Rota 撰写前言，附录1由 Sergey Fomin 撰写。剑桥高等数学研究丛书，62。剑桥大学出版社，剑桥，1999。xii+581 页。[T06] J. S. Tymoczko，施加于旗簇上的线性条件，《Amer. J. Math.》128 (2006)，第6期，1587–1604。[WU13] H. Ulfarsson and A. Woo，哪些舒伯特簇是局部完全交？《Proc. Lond. Math. Soc.》（第3辑）107 (2013)，第5期，1004–1052。[W03] J. Weyman，《向量丛的上同调与分解子》。剑桥数学专著，149。剑桥大学出版社，剑桥，2003。xiv+371[W04] M. Willems，Bott-Samelson 簇与旗簇的等变上同调及 K 理论，《Bull. Soc. Math. France》132(4):569–589，2004。[W89] J. Wolper，研究舒伯特簇奇点的组合方法，《Adv. Math.》76 (1989)，184–193。[W10] A. Woo，任意根系的区间模式避免，《Canad. Math. Bull.》53 (2010)，第4期，757–762。[W18] A. Woo，超八面体群的 Hultman元素。《Elect. J. Combinatorics》25，论文 P2.41，共25页。[WWY18] A. Woo, B. Wyser, and A. Yong，控制对称轨道闭包的奇点，《Algebra Number Theory》12 (2018)，第1期，173–225。[WY06] A. Woo and A. Yong，舒伯特簇何时是 Gorenstein? 《Adv. Math.》207 (2006)，第1期，205–220。[WY08] A. Woo and A. Yong，控制舒伯特簇的奇点，《J. Algebra》320 (2008)，第2期，495–520。[WY12] A. Woo and A. Yong，Kazhdan-Lusztig 理想的一个格罗布纳基，《Amer. J. Math.》134 (2012)，第4期，1089–1137。[Y21] A. Yong，Castelnuovo-Mumford 正则性与舒伯特几何，预印本，2021年。[Z83] A. V. Zelevinskiĭ，舒伯特簇奇点的小解消。（俄文）《Funktsional. Anal. i Prilozhen.》17 (1983)，第2期，75–77。[Z85] A. V. Zelevinskiĭ，关于分次幂零类的两点说明。《Uspekhi Mat. Nauk》40 (1985)，第1期（241），199–200。

数学系，爱达荷大学，莫斯科，ID 83844，美国电子邮箱地址:
awoo@uidaho.edu

数学系，伊利诺伊大学厄巴纳-香槟分校，厄巴纳，IL 61801，美国电子邮箱地址:
ayong@illinois.edu