arXiv:2303.01442v1 [math.GT] 2 Mar 2023

关于 $\mathbb{S}^3$中溶胶补空间的基本群

Xueming Hui

2023年3月3日

摘要

我们证明， $\mathbb{S}^3$ 中打结溶胶补空间的基本群完全由一列规范的纽结群决定。此外，除镜像反射外，该基本群由嵌入决定。

关键词。纽结；溶度；3-流形理论；JSJ分解；基本群；纽结群的结子群。

1 引言

纽结按定义是将 $\mathbb{S}^1$ 嵌入到 $\mathbb{S}^3$中的同伦类。纽结理论最初的主要目的，是区分不同的纽结。例如，如下图所示，（右手）三叶结不同于平凡结。纽结有许多不变量，例如着色不变量、架与拟群、纽结补空间的基本群、亚历山大多项式、琼斯多项式和HOMFLY多项式等。

本文讨论纽结的特殊序列，更具体地说，讨论满足以下条件的纽结序列 $\{K_n\}_{n=0}^{\infty}$ ： K_{n+1} 由 K_n 通过卫星构造得到。我们将范围限定在闭辫型的情形。在这种情况下，该序列给出了一个称为溶胶的拓扑对象的嵌入。溶胶是一种拓扑空间，是由拓扑群及连续同态构成的逆系统的逆极限

$$(S_i, f_i), f_i : S_{i+1} \mapsto S_i.i \geq 0$$

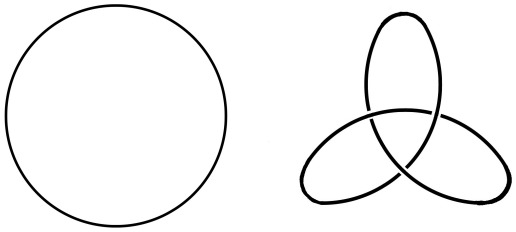


图 1：平凡结和（右手）三叶结。

其中每个 S_i 都是一个圆，而 f_i 是将圆 S_{i+1} n_i均匀绕着圆 S_i缠绕 $n_i > 1$次的映射。换言之，若将 S_i视为复平面中的单位圆，则 $f_i(z) = z^{n_i}$。L. Vietoris[9]最先在 $n_i = 2$ 的情形下引入了溶胶；D. van Dantzig[8] 则研究了 $n_i = n$ 固定的情形。n_i 非常数的一般情形由 R.H. Bing 研究，他在 [1]中给出了溶度的完整分类。另见 M.C. McCord[7]。下图展示了嵌入 $\mathbb{S}^3$ 中的一个 2-溶度。

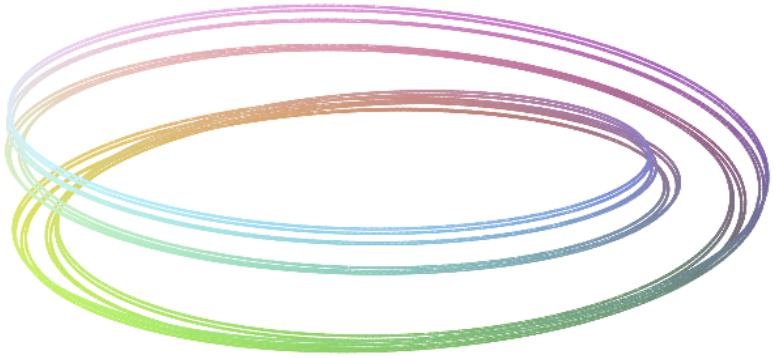


图 2：嵌入在 $\mathbb{S}^3$ 中的索列诺（图片来自 [3]）。

对于溶胶 Σ在 $\mathbb{S}^3$中的嵌入，我们可以研究溶胶的补空间，即 $\mathbb{S}^3-\Sigma$。与纽结理论类似，我们希望利用补空间的基本群来研究溶胶的不同嵌入。此前，B. Jiang、S. Wang、H. Zheng 和 Q. Zhou [2]研究了溶胶在$\mathbb{S}^3$中的嵌入。本文关注的是 G. Conner、M. Meilstrup 和 Du˘san D. Repov˘s [3]曾研究过的基本群。我们扩展了他们的结果，并回答了一些猜想。

为简便起见，驯顺溶胶嵌入的同位类称为**索结**。我们将在下一节讨论驯顺的确切含义。

对于给定的索结 Σ，存在一个典范的纽结群与同态序列，

$$K_0 \overset{\varphi_0}{\longmapsto} K_1 \overset{\varphi_1}{\longmapsto} K_2 \overset{\varphi_2}{\longmapsto} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\longmapsto} K_n \overset{\varphi_n}{\longmapsto} \ldots$$

其中所有的 φ_n' 都自然地由纽结补空间的包含映射诱导。我们称这个序列为索结 Σ的**滤过**。下面给出的是第4节中的定理4.8。

定理 1.1. 设 Σ 和 Σ' 是两个打结的孤结，(K_n, φ_n) 和 (K'_n, ψ_n) 分别是 $\pi_1(\mathbb{S}^3-\Sigma)$ 和 $\pi_1(\mathbb{S}^3-\Sigma')$ 的滤过。那么，对于每个 $n \geq 0$，$\pi_1(\mathbb{S}^3-\Sigma) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^3-\Sigma')$当且仅当 $K_n \simeq K'_n$。

我们将在后文给出打结的孤结、滤过等概念的精确定义。上述定理所需的一个重要事实如下（第 3 节中的定理 3.5）

定理 1.2. 具有绕数大于1 的闭辫型的卫星结是素结。

对于素纽结，有 C. Gordon 和 J. Lueck 的以下定理 e,

定理 1.3. *[6]* 如果两个素纽结的群同构，那么它们在镜像意义下等价。

结合 F. Gonz´alez-Acu˜na 和 W. Whitten[5], 关于纽结群的结子群的一些结果，我们能够证明定理1.1。

C. Gordon 和 J. Luecke 的定理[6] 表明，除镜像外，基本群能够区分素纽结。一个自然的问题是：独结补空间的基本群能否将它们区分开来？下面的定理（第4节中的定理4.9）肯定地回答了这个问题。这证明了文献[3]中的猜想4.4。

定理 1.4。 当且仅当它们等价或其镜像等价时， Σ和 Σ'才是 $\mathbb{S}^3$、 π_1（$\mathbb{S}^3-\Sigma$） $\simeq \pi_1$（$\mathbb{S}^3-\Sigma'$）中的两个有结的索结。

2 预备知识

本节将介绍所需的3-流形基础知识以及有关螺线管嵌入的定义。

设 S 是紧致定向 3-流形 M 中适当嵌入的连通紧曲面。**压缩盘** D 是嵌入于 M 中的一个圆盘，使得 $D \cap S = \partial D$，且交集是横截的。如果曲线 ∂D 不在S内围成一个圆盘，那么 D 称为**非平凡**压缩盘。如果 S 有一个非平凡压缩盘，那么我们称 S 在 M 中是**可压缩曲面**。如果 S 既不是 2-球面，也不是可压缩曲面，那么我们称该曲面为**不可压缩**。假设 $\chi(S) \leq 0$，如果 S 是不可压缩的、 ∂-不可压缩的，且不与 ∂平行，则称其为**本质的**。

现在我们可以定义本文所用的核心概念——卫星结。若纽结 $K \subset \mathbb{S}^3$ 的补空间包含一个本质环面，则称它为**卫星**结。一个等价且更直观的定义如下，

设 K_2 是 $\mathbb{S}^3$ 中一个非平凡定向结， V 是 K_2 的闭正则邻域。设 $\tilde{V}$ 是 $\mathbb{S}^3$ 中一个定向的无结闭实心环面， K_1 是 V 内部的一个定向~结。 V 的一个子午盘与 K_1 相交于有限个点。 V 的一个子午盘与 K_1 相交的最少次数，称为该型的缠绕数。假设该型的缠绕数大于~零，并设 $h : (V, K_1) \mapsto (V, K)$ 是一对的保定向同胚。 K_1 在 h 下的像记为 K，它是 $V \subset \mathbb{S}^3$ 中的一个纽结，称为卫星结。纽结 K_2 称为 K 的伴随纽结，环面 ∂V 称为伴随~环面。对 (K_1, V) 称为 K 的一个型。

当卫星结的型是环面结时，我们称该卫星结为缆结。**缆结**。**环面结**是位于 $\mathbb{S}^3$中一个无结的环面的表面上的纽结。显然，卫星结构造并不唯一，因为存在无穷多种方式来识别型的边界环面与伴随环面。我们将限制于无扭卫星结的情形，即将型的边界环面的标准经线映射到伴随环面的标准经线的情形。标准性由它们在 $\mathbb{S}^3$中的嵌入所确定。

JSJ分解用于主定理的证明中。

定理 2.1（JSJ分解）。 不可约、可定向且边界不可约的*3*-流形具有唯一的（在同痕意义下）极小不交嵌入不可压缩环面集合，使得沿这些环面切割所得的*3*-流形的每个分支或者是（同伦意义下）非环面的，或者是塞弗特纤维化的。

若每个包含在 M 内部的球面 S 都界定一个球体，则 3-流形 M **不可约** 。

本节其余所有定义均出自 [2]。其中一些定义在 [2] 中的表述有所不同，但可以证明它们是等价的。这些定义引出了一个重要概念，称为索结的极大定义序列。

定义 2.2。设 N 是一个实心环面，β 是嵌入在 N 中的非平凡闭辫。β 在 N 中的闭正则邻域称为 N 中的粗辫。

这本质上是卫星结结构造的辫版本。接下来，我们给出溶胶的一个等价定义。与本文前面给出的定义相比，这个定义更具构造性。特别是，这个定义还给出了溶胶在实心环面或 $\mathbb{S}^3$ 中的嵌入。

定义 2.3。设 $\{N_n\}_{n=0}^{\infty}$ 是一个实心环面的嵌套序列，使得对于每个 $n \geq 1$，N_n 都作为粗辫嵌入在 N_{n-1} 中。如果 N_n 的子午圆盘直径随着 n 趋于无穷而一致趋于零，那么我们称 $\Sigma = \bigcap_{n=0}^{\infty} N_n$ 为溶胶。

嵌入 $\Sigma \subset N_0$ 称为 Σ 在 N_0 中的标准嵌入。

我们将 $\{N_n\}_{n=1}^{\infty}$ 称为标准嵌入 $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$的**定义序列**。正如纽结有驯结和野结之分，溶胶也有驯嵌入和野嵌入之分。

定义 2.4. 设 Σ 是嵌入在实心环面 N_0中的一个溶胶。如果存在某个标准嵌入 $\Sigma' \subset N_0$，使得有同胚 $f : (N_0, \Sigma) \mapsto (N_0, \Sigma')$，则称嵌入为驯嵌入。

称 $\{f^{-1}(N_n')\}_{n=1}^{\infty}$为嵌入 $\Sigma \subset N_0$的**定义序列**，其中$\{N_n'\}_{n=1}^{\infty}$ 是 Σ'的定义序列。

定义 2.5. 若一个溶胶的嵌入 $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ 可以分解为 $\Sigma \subset N_0 \subset \mathbb{S}^3$，且其中的 $\Sigma \subset N_0$ 是驯嵌入，则称该嵌入为驯嵌入。

序列 $\{N_n\}_{n=0}^{\infty}$ 称为嵌入 $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$的**定义序列**。

定义 2.6。若溶胶 $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ 的一个驯化嵌入，其定义序列为$\{N_n\}_{n=0}^{\infty}$，且某个定义实心环面 $N_n \subset \mathbb{S}^3$ 是有结的，则称该嵌入为有结的；否则称该嵌入为无结的。

对于 $\mathbb{S}^3$中的两个驯化溶胶嵌入，我们可以讨论它们何时等价。

定义 2.7。若存在一个保定向同胚 f： $\mathbb{S}^3 \mapsto \mathbb{S}^3$，使得 f（Σ）$= \Sigma'$，则称两个驯化溶胶 Σ、$\Sigma' \subset \mathbb{S}^3$ 为等价。

驯顺溶胶嵌入的一个等价类称为索结。

在不存在歧义的情况下，驯顺溶胶嵌入的像也称为索结。

定义2.8. 如果存在一个保定向同胚 $f_0:(\mathbb{S}^3, N_0) \mapsto (\mathbb{S}^3, N_0')$ 以及保定向同胚 $f_n:(N_{n-1}, N_n) \mapsto (N_{n-1}', N_n')$，使得对于 $n \geq 1$ 有 $f_n|\partial N_n = f_{n-1}|\partial N_{n-1}$，那么我们称 $\mathbb{S}^3$ 中两个驯顺溶胶嵌入的定义序列 $\{N_n\}_{n=0}^{\infty}$ 和 $\{N_n'\}_{n=0}^{\infty}$ 强等价。

以下结论见于 [2]。它指出， Σ和 Σ' 具有强等价的定义序列，意味着 Σ 等价于 Σ'。

命题2.9. *[2]* 在强等价意义下，每个有结的驯顺溶胶 $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ 都有唯一的极大定义序列 $\{N_n\}$, $n \geq 0$，使得 N_0 有结；并且，任何其他满足 N_0' 有结的定义序列 $\{N_n'\}, n \geq 0$ 都是 $\{N_n\}$, $n \geq 0$ 的子序列。

我们所说的**极大**定义序列，是指对于每个 $n \geq 0$， $N_n \setminus N_{n+1}$ 都不包含本质环面。

3 具有辫型的卫星结是素结

本节将证明一个后文会用到的事实，即具有辫型的卫星结是素结。

考虑它在其有环面股的辫的闭包。令 $D^\wedge$为 W 的一个子午圆盘，则 $W-\beta$ 是 $D-\cup_{i=1}^{n}\{p_i\}$的映射环面 M_f。对于每个 i， p_i 是 D 内部的一个点，而 f 是由 β 确定的 $D-\cup_{i=1}^{n}\{p_i\}\hat{}$的映射类。令 $U^\wedge\beta$ 为 β 在 W 中的一个管状邻域，则 $U_{\hat{\beta}}$ 与 D 相交于 n 个开球 B_1， B_2、.....、 B_n。令 $D_n := D-\cup_{i=1}^{n}B_i$。按照图3所示，为 D_n 选取一个基点。

β作为自同构作用于$\pi_1(D_n)$。见图3。容易看出， $\pi_1(D_n)$同构于秩为 n的自由群，并且 $\pi_1(W-U_{\hat{\beta}}) \simeq \langle\, x_1, x_2, \ldots, x_n, t \mid t^{-1}x_it = \beta(x_i) \,\rangle$ ，它是由 β对 $\pi_1(D_n)$作HNN扩张得到的。在这种情况下，它实际上是一个半直积。

^**引理 3.1**。 设 β 是一个有 n 股的辫，使得 β 是一个纽结。设 $\pi_1(W-U_{\hat{\beta}}) = \langle\, x_1, x_2, \ldots, x_n, t \mid t^{-1}x_it = \beta(x_i) \,\rangle$ 是上述 $\pi_1(W-U_{\hat{\beta}})$ 的一个表示。

x_1在 $\pi_1(W-U^\wedge\beta)$中的中心化子是 $\{(t^nw)^kx_1^l \mid k,\ l \in \mathbb{Z}\}$其中 w是满足 $\beta^n(x_1) = wx_1w^{-1}$的唯一元素（其末尾不以 x_1的幂结尾）。

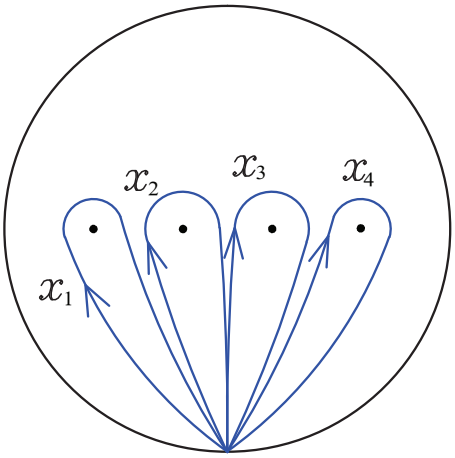


图3： D_4 和 $\pi_1(D_4)$的生成元。

证明。 设 $y \in \pi_1(W - U_{\hat{\beta}})$是任意一个与 x_1可交换的元素。

$$x_1 y = y x_1$$

$$y^{-1} x_1 y = x_1$$

作为 $\pi_1(W - U_{\hat{\beta}})$的一个元素， y 可以唯一地写成 $y = t^m z$ ，其中 m 是某个整数，且 $z \in \pi_1(D_n)$。因此，

$$t^{-m} x_1 t^m = z x_1 z^{-1}$$
$$\beta^m(x_1) = z x_1 z^{-1}$$

辫群自同构将 x_i 映射为 x_j的共轭子群。它自然诱导出 π 在 $\{1, 2, \ldots, n\}$上的一个置换。 π 的循环分解中的循环数，就是辫子的闭包的连通分支数。每个循环的长度，是将 x_i 映射为其自身的共轭子群所需的最小迭代次数。由于由 U 给出的辫是一个纽结，因此它只有一个连通分支。因此，该辫诱导的置换是一个 n-循环，并且对于某个整数 k有 $m = kn$ 。如果 $k = 1$，那么对于自由群中由 $x_1, x_2, \ldots, x_n$生成的某个 w， $\beta^n(x_1) = w x_1 w^{-1}$。 w 在右侧乘以x_1^l 的意义下唯一。我们断言，对于每个整数 k， $\beta^{kn}(x_1) = t^{-kn}(t^n w)^k x_1 (t^n w)^{-k} t^{kn}$，这意味着与$x_1$ 交换的唯一元素是 $(t^n w)^k x_1^l, k, l \in \mathbb{Z}$。 $k = 0$，这显然成立。对于 $k > 0$，注意到

$$t^{-kn}(t^n w)^k x_1 (t^n w)^{-k} t^{kn} = \beta^{(k-1)n}(w) \ldots \beta^n(w) w x_1 w^{-1} \beta^n(w^{-1}) \ldots \beta^{(k-1)n}(w^{-1})$$

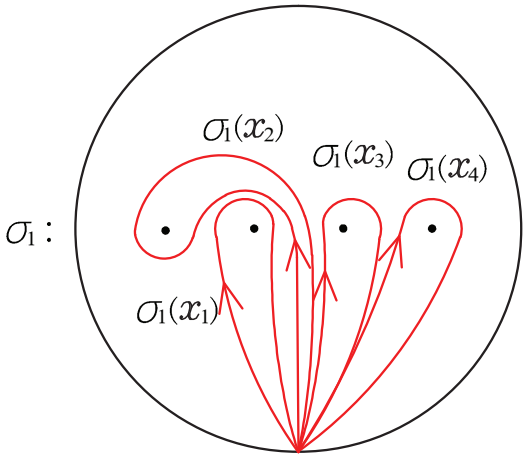


图 4: σ_1 作用于 $\pi_1(D_4)$。

对于 $k = 1$，根据 w的定义， $\beta^n(x_1) = wx_1w^{-1}$ 。我们假设该断言对 $k = i$成立。那么

$$\begin{aligned}\beta^{(i+1)n}(x_1) &= \beta^n(\beta^{in}(x_1)) \\ &= \beta^n(\beta^{(i-1)n}(w)\dots\beta^n(w)wx_1w^{-1}\beta^n(w^{-1})\dots\beta^{(i-1)n}(w^{-1})) \\ &= \beta^{in}(w)\dots\beta^{2n}(w)\beta^n(w)\beta^n(x_1)\beta^n(w^{-1})\beta^{2n}(w^{-1})\dots\beta^{in}(w^{-1}) \\ &= \beta^{in}(w)\dots\beta^{2n}(w)\beta^n(w)wx_1w^{-1}\beta^{2n}(w^{-1})\dots\beta^{in}(w^{-1})\end{aligned}$$

将 k 替换为 $-k$ ，得到

$$t^{kn}(t^nw)^{-k}x_1(t^n\ w)^kt^{-kn} = \beta^{-kn}(w^{-1})\dots\beta^{-2n}(w^{-1})\beta^{-n}(w^{-1})x_1\beta^{-n}(w)\beta^{-2n}(w)\dots\beta^{-kn}(w)$$

对于 $k > 0$,

$$\beta^{kn}(x_1) = \beta^{(k-1)n}(w)\dots\beta^{2n}(w)\beta^n(w)wx_1w^{-1}\beta^{2n}(w^{-1})\dots\beta^{(k-1)}(w^{-1})$$

在方程两边应用 β^{-kn} ,

$$x_1 = \beta^{-n}(w)\dots\beta^{-(k-2)n}(w)\beta^{-(k-1)n}(w)\beta^{-kn}(w)\beta^{-kn}(x_1)\beta^{-kn}(w^{-1})\beta^{-(k-2)n}(w^{-1})\dots\beta^{-n}(w^{-1})$$

整理方程,

$$\beta^{-kn}(x_1) = \beta^{-kn}(w^{-1})\dots\beta^{-2n}(w^{-1})\beta^{-n}(w^{-1})x_1\beta^{-n}(w)\beta^{-2n}(w)\dots\beta^{-kn}(w)$$

这个 p 在每种情况下都证明了该断言，因此完成了引理的证明。 □

命题 3.2。 在 $\pi_1(W-U_{\hat{\beta}})$ 中存在唯一一个同构于 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 且包含 x_1的极大子群。此外，对于包含基点的 $W-U_{\hat{\beta}}$ 中的环面 T，该子群为 $i_*(\pi_1(T))$，并且 $i_*(\pi_1(T))$ 包含 x_1。其中， i_* 是由包含映射诱导的同态。

证明。 此类子群的唯一性已在引理 3.1 中证明。该子群的所有元素均为 $(t^nw)^kx_1^l$，k，$l\in\mathbb{Z}$。这是由 x_1 和t^nw生成的子群。满射到 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$、将 x_1 映为 (0，1) 且将 t^nw 映为 (1，0) 的同态是一个同构。显然，$(t^nw)^kx_1^l$ 被映为 $(k，l)$。

设 T为 $W-U_{\hat{\beta}}$中的一个环面，它包含基点，且 $i_*(\pi_1(T))$ 包含x_1。显然，这样的曲面存在；包含基点且与$\partial U_{\hat{\beta}}$ 平行的环面就是这样的一个曲面。

□

引理 3.3。 设 M 为 $\mathbb{S}^3$ 的一个三维子流形，具有两个不可压缩边界分支 T_1 和 T_2，它们均为环面。若 $i_*(\pi_1(T_1))$ 在 $\pi_1(M)$ 中与$i_*(\pi_1(T_2))$ 共轭，则 T_1 与 T_2平行。

证明。 </style}这样的子流形 M 要么是 $\mathbb{S}^3$ 中一个由两个连通分支组成的链环 L 的外部，要么是嵌入 $\mathbb{S}^3$中的实心环面的一个子流形。这两种情况并不互斥。如果 M 是嵌入 $\mathbb{S}^3$中的实心环面的一个子流形，那么由于我们只关心M，而不关心它如何嵌入 $\mathbb{S}^3$，因此可以构造 M 的一种新嵌入，使其可视为一个链环补空间 $\mathbb{S}^3-L$，其中 L 的一个连通分支是 $\mathbb{S}^3$中的平凡结。

将 L 的连通分支记为 K_1 和 K_2。那么， T_1 和 T_2 分别是对应于 K_1 和 K_2 的边界。 T_1 的子午线 m_1 可以变形为 T_2，因为 $i_*(\pi_1(T_1))$与 $i_*(\pi_1(T_2))$共轭。此外，m_1 可以变形为 T_2中的一条简单闭曲线；这条曲线在 $i_*(\pi_1(T_1))$中非平凡，因此在 $i_*(M)$和 $i_*(\pi_1(T_2))$中也非平凡。因此，它可以被认作曲线$\gamma=(p,q)$，其中 p 和 q 互素。对 m_1 进行德恩填充后， γ 在 K_2的外部变为平凡。若 K_2 是有结的，这便不可能，因为此时边界是 π_1-单射的。因此， K_2 必定是平凡结。特别地， m_1 与 K_2 的经线同伦。对 m_2作同样的论证，可得 K_1 也是平凡结。此外， K_1 与一张由 K_2 围成的圆盘恰好相交于一点。这意味着 L必定是霍普夫链环。因此， M与 $T\times[0,1]$ 同胚，且 T_1 与 T_2平行。

□

定理 3.4。 在 $W-U_{\hat{\beta}}$ 中不存在这样的本质环面，使得$U_{\hat{\beta}}$ 的子午线与其上的一条曲线同伦。特别地，$W-U_{\hat{\beta}}$ 中不存在吞随环面。

证明。 如果存在一个这样的本质环面，那么 $\pi_1(W - U_{\hat{\beta}})$ 中就有两个不同的 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 子群包含 x_1，因为边界环面 ∂U_{β} 也是其中之一。这与命题 3.2 和引理 3.3 矛盾。第二部分成立，因为对于 $W - U_{\hat{\beta}}$ 中的任意吞咽环面 S， U_{β} 的子午线与 S 的子午线同伦。 □

定理 3.5。 具有绕数大于1 的闭辫型的卫星结是素结。

证明。 设 K 是一个具有伴随环面 V 和型 $P \subset W$ 的卫星结。由于型 P 是绕数大于 1 的闭辫， K 是真卫星结。反证法，假设存在一个分解球面 S ，将 K分解为两个乘积因子。我们假设 K、 S 和 ∂V 处于一般位置。

Cromwell[4] 中定理 4.4.1 的证明可以不加任何修改地应用。因此， S 必定位于 V 内部，而 V 界定一个 3-球 $B \subset V$；其原像 $h^{-1}(S)$ 在 W 中将型 P 分解为两个非平凡因子的乘积。

为型 P 赋予定向，则 P 与 $h^{-1}(S)$ 相交于两点，其中一点对应于 P 进入 B，另一点对应于其离开。设 U 是 P 的一个开管状邻域，则$T := \partial(B - U)$ 是 P 的吞咽环面。由于 P 是 W 中的闭辫，这与定理 3.4 矛盾。因此， $h(P \cap B)$ 是一个平凡缠结。所以 K 必定是素结。 □

最后一步从直觉上看或许显而易见，但作者没能找到令人满意的几何证明。我们还有一种使用 JSJ分解的证明，但我们认为在这种情况下，代数方法更清晰、更优雅。定理 3.5 或许早已为人所知，但据作者所知，文献中尚未有任何记载。

4 索结补空间的基本群在 $\mathbb{S}^3$

很容易看出，$\mathbb{S}^3$ 中索结补空间的所有高阶同伦群都是平凡的。具体如下。

定理 4.1。 设 $\Sigma \subset \mathbb{S}^3$ 是一个索结。那么 $\mathbb{S}^3 - \Sigma$ 是一个 ***Eilenberg-MacLane*** 空间 $K(G,1)$ 其中 $G = \pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma)$。

证明。令 $n \geq 2$ 和 f 为从 $\mathbb{S}^n$ 到 $\mathbb{S}^3 - \Sigma$的任意连续映射。由f的连续性以及 $\mathbb{S}^n$的紧致性可知， $f(\mathbb{S})$包含于 $\mathbb{S}^3 - \Sigma$的某个紧子集中。因此

存在一个环面 T（它是 Σ的一个定义环面）位于 $\mathbb{S}^3 - \Sigma$ 中，使得$f(\mathbb{S}^n)$包含于 $\mathbb{S}^3 - \Sigma - T$的紧致分支中。该分支是一个纽结补空间。纽结理论中的一个经典定理指出，纽结补空间是非球面的。因此， f 在该分支上的限制与一个常值映射同伦。因此，它在 $\mathbb{S}^3 - \Sigma$中与一个常值映射同伦。这表明，对于每个 $n \geq 2$，$\pi_n(\mathbb{S}^3 - \Sigma) = 0$，且 $\mathbb{S}^3 - \Sigma$ 是 Eilenberg-MacLane 空间 $K(G, 1)$，其中 $G = \pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma)$。 □

推论4.2。 索结群之间的每个同构都由一个在同伦意义下唯一的同伦等价实现。

推论4.3。 索结群的每个自同构都由一个在同伦意义下唯一的同伦等价诱导。每个自同伦等价都诱导一个除共轭外唯一的自同构。

在证明下一个定理之前，我们先介绍一些记号和术语。首先，回顾命题2.9给出了一个索结唯一的极大定义序列。对于一个有结的索结 Σ，这个极大定义序列给出了纽结外部 M_n 、纽结群 K_n 及同态组成的典范序列，

$$K_0 \overset{\varphi_0}{\longmapsto} K_1 \overset{\varphi_1}{\longmapsto} K_2 \overset{\varphi_2}{\longmapsto} \ldots \overset{\varphi_{n-1}}{\longmapsto} K_n \overset{\varphi_n}{\longmapsto} \ldots$$

其中所有的 φ_n都是由纽结补空间的包含映射自然诱导的。根据 [3], 中的引理2.1，对于 $\mathbb{S}^3$ 中的任意实心环面 T_1 和 T_2 ，若 $T_1 \subset int(T_2)$，令 J 为 T_1 的核心曲线，令 K 为 T_2的子午线曲线，则链接数 $lk(J, K) \neq 0$意味着由包含映射诱导的同态 $\pi_1(\mathbb{S}^3 - T_1) \mapsto \pi_1(\mathbb{S}^3 - T_2)$是单射。显然，任何绕数大于1的粗辫都满足该条件，因此 φ_n都是单射。所有基本群的基点都将取为 $\mathbb{S}^3 - N_0$中的一个选定点。该序列的直接极限就是 $\mathbb{S}^3 - \Sigma$的基本群。称该序列为 $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma)$的**滤过**。我们也将该滤过记为$(K_n, \varphi_n)$。

定理4.4。 设 Σ 和 Σ' 是 $\mathbb{S}^3$中的两个打结的*soleknot*，对于每个 $n \geq 0$，当且仅当它们等价或它们的镜像等价时， $K_n \simeq K_n'$ 。

证明。 我们采用前文讨论中的记号。“如果”部分直接由命题2.9推出。

接下来证明“当且仅当”中的“仅当”部分：根据定理 3.5，任意的 $n > 0$、 K_n 和 K_n' 都是某些素纽结的纽结群。若 $K_n \simeq K_n$，根据 C. Gordon 和 J. Luecke 的经典定理[6], M_n 与 M_n' 同胚。此外，除镜像反射外，

反射后， M_n 和 M'_n 是 $\mathbb{S}^3$ 中同一个纽结的纽结补空间。因此，除镜像反射外，我们可以将 M_n 和 M'_n 视为相同。 M_n 和 M'_n 的JSJ分解的唯一性意味着， M_{n-1} 在 M_n 中的嵌入与 M'_{n-1} 在 M'_n 中的嵌入同伦同位（我们已将 M_n 和 M'_n 视为相同）。这意味着 Σ 和 Σ' 具有强等价的极大定义序列。因此，除镜像反射外， Σ 和 Σ' 等价。□

定理4.8的证明依赖于来自 [5]的一些工具。在 [5], F. Gonz´alez- Acu˜na和W. Whitten研究了纽结群的结子群。所谓纽结群，是指与 $\mathbb{S}^3$中某个纽结的补空间的基本群同构的群。这里不会列出 [5] 中的所有定理和定义。我们只会简要介绍证明定理4.8时用到的内容，并尽可能解释其中的思路。建议读者阅读 [5] 以了解技术细节。我们不会尝试解释原始定理和定义表述中的所有内容。

设 M 是一个纽结外部，将 M 中与 M的边界相交的JSJ块的并记为 γM。如果对于 $M - \gamma M$的某个分支C，存在 H 的一个共轭包含于 $i_*(\pi_1(C))$中，其中 $i : C \mapsto M$是包含映射，则称 $\pi_1(M)$的子群 H是**宽松的**。否则，称 H 是**紧的**。

设 G 是一个纽结群，且设 $H < G$。若存在一个包含本质环面 T 的纽结补空间 E，并存在同构 $\phi : G \mapsto \pi_1(E)$，将 H 映到 $i_*(\pi_1(E_1))$，其中 E_1 是 $cl(E - T)$ 中作为纽结补空间的那个分支，且 $i : E_1 \mapsto E$ 是包含映射，则称 H 是 G 的**伴随结**。

注 4.5。 *[5]* 若 E 是一个素纽结 K 的补空间，则 K 的伴随结（按卫星纽结的意义）的补集 $E_1, \ldots, E_r$ 自然嵌入于 E 中，而 $\pi_1(E_1) \ldots, \pi_1(E_r)$ 在共轭意义下恰好是 $\pi_1(E)$ 的所有松伴随结。

定理 4.6。 *[5]* 纽结群 G 的任意非循环结子群，都是 G 或 G 的某个松伴随结的紧子群。

定理 4.6 将寻找纽结群的结子群这一问题，归结为寻找该纽结群及其松伴随结的紧子群。根据注 4.5，我们对松伴随结已有较深入的了解，尤其是素结的情形。下面的定理对素卫星结的所有紧子群进行了分类。

定理 4.7. *[5]* 设 G 是一个素卫星结 K的群， G_1 是一个非平凡纽结 K_1的群（若 K_1 是缆结，则假设 $G_1 \ncong G$ ）。那么， G_1能作为紧子群嵌入 G，当且仅当存在整数 s、 t、 p、 d、 ϵ和 δ，使得

1. K 是环面结 (p, q) –的 (s, t) –缆结；*2.* $pq - \frac{s}{t} = -\frac{\epsilon}{d} + \frac{\delta zw}{dt}$、 $d > 1$、$|\epsilon| = 1$和 $|\delta| \leq 1$，其中 $z = (t, d) > 1$ 且$w = (s, dpq + \epsilon)$ ；以及 *3.* 若 $|\delta| = 1$，则 K_1 是环面结 (p, q) –的 $(sw^{-1}, \epsilon\delta z)$ –缆结；若$\delta = 0$，则 K_1 是一个复合结，其每个素因子都是 (p, q) –环面结或其镜像。

该定理的技术细节并不重要，这里的关键在于，G_1 作为紧子群嵌入 G 当且仅当 K 是环面结的缆结。定理 3.5 证明了，当型是闭辫时，这正是我们所需要的，而我们正是通过这种方式构造溶胶。

定理4.8。 设 Σ 和 Σ' 是两个有结的索结，(K_n, φ_n) 和(K'_n, ψ_n) 分别是 $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma)$ 和 $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma')$ 的滤过。那么 $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma')$当且仅当对每个 $n \geq 0$都有 $K_n \simeq K'_n$ 。

证明。 我们已在定理4.4中证明，对每个 n ， $K_n \simeq K'_n$ 都成立，这意味着索结 Σ 和 Σ' 是等价的。因此，索结补空间 $\mathbb{S}^3 - \Sigma$ 和$\mathbb{S}^3 - \Sigma'$ 同胚。于是， $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma')$ 。这就证明了一个方向。

现在令 $F\colon \pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma) \mapsto \pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma')$ 为一个同构。由于所有的 ψ_n 都是单射，典范映射 $K'_n \mapsto \pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma')$ 是单射，因此 K'_n 可视为 $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma')$ 的子群。根据 C. Gordon 和 J. Luecke 的经典定理，除镜像外，基本群可以区分素纽结。因此，$\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ 两两不同构，因为根据定理 3.5，它们都是素纽结。对于每个 $i \geq 1$，K_i 是有限生成的， $F(K_i)$ 是 $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma')$ 的一个有限生成子群。因此，存在最小的自然数 n_i ，使得对某个 $g \in \pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma')$， $F(K_i) < g^{-1}K'_{n_i}g$ 。根据 [5], 中的结果，我们知道任意纽结群至多只有有限多个同构意义下不同的纽结子群。因此，我们可以选取一个 $i > 0$，使得 n_i 大于 1。

根据定理 4.6， $F(K_i)$ 是 $g^{-1}K'_{n_i}g$ 的紧子群，或者是 $g^{-1}K'_{n_i}g$ 的松伴随的紧子群。$g^{-1}K'_{n_i}g$ 的每个松伴随都会产生一个纽结补空间，它是与纽结 L 对应的伴随纽结的纽结补空间 M'_{n_i}。 （这意味着 M'_{n_i} 是 L 的纽结补空间。）其边界必定同伦同位于 M'_{n_i} 的 JSJ分解中的某个环面。M'_{n_i} 的 JSJ分解是 $\{M'_k\}_{k=0}^{n_i-1}$ 和 M'_0 的 JSJ分解的子集。因此，根据 n_i 的选取， $F(K_i)$ 不是 $g^{-1}K'_{n_i}g$ 的松伴随的紧子群，因为 $F(K_i)$ 不包含于 $g^{-1}K'_{n_i-1}g$ 的任何共轭子群中。所以 $F(K_i)$ 是 $g^{-1}K'_{n_i}g$ 的紧子群。

根据 JSJ分解的唯一性， M'_{n_i} 是环面结的缆结的纽结补空间，当且仅当 $n_i = 1$。因此，由于 $n_i > 1$，它不是环面结的缆结的补空间。根据定理 4.7，非平凡纽结的群可真嵌入素卫星结的群 K 中，且作为紧子群，当且仅当 K 是某个环面结的缆结。这意味着 $F(K_i)$ 不能真嵌入 $g^{-1}K'_{n_i}g$，因此 $F(K_i) = g^{-1}K'_{n_i}g$。$F(K_i) = g^{-1}K'_{n_i}g$ 意味着 K_i 和 K'_{n_i} 对应于同一个素纽结（相差一个镜像）。所以 M_i 与 M'_{n_i} 同胚。根据 M_i 和 M'_{n_i} 的 JSJ分解的唯一性，对于每个 $n \leq i$，$i = n_i$ 和 $K_n \simeq K'_n$。同样的论证适用于所有 $n \geq i$，因此对于所有 $n \geq 0$，$K_n \simeq K'_n$ 。 □

结合定理4.4和定理4.8，可得如下结论。

定理4.9。 Σ 和 Σ' 是 $\mathbb{S}^3$、 $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^3 - \Sigma')$ 中的两个打结的孤结，当且仅当存在 S^3 的一个同胚 f，使得 $f(\Sigma) = \Sigma'$；换言之，它们等价，或互为镜像。

定理4.9改进了文献 [3]中的定理5.4。他们利用双曲结构证明，存在不可数多个彼此不等价的打结的孤结补空间。注意，根据 [3]和 [2], ，无结的孤结补空间的基本群只能确定溶度作为拓扑空间，而不能确定其驯嵌入，也不能确定我们在此所称的索结。事实上，存在不可数多个不同的无结的孤结，它们的补空间具有同构的基本群。

致谢

作者谨向 Gregory Conner 致谢，感谢他向作者介绍这一问题并与作者讨论相关主题；同时感谢 Mark Hughes 和 Jessica Purcell 对本文的关注与评论。

参考文献

[1] R. H. Bing. 简单闭曲线是唯一包含一条弧的齐次有界平面连续统。《加拿大数学杂志》，12:209–230，1960。

[2] Hao Zheng、Boju Jiang、Shicheng Wang 和 Qing Zhou。《溶度嵌入三维空间的驯嵌入》。《数学基础》，214:57–75，2011。

[3] Gregory R. Conner、Mark Meilstrup 和 Du˘san Repov˘s。《溶胶补空间的几何与基本群》。《结理论及其分支》，24(14):1550069，2015。[4] Peter R. Cromwell。《纽结与链环》。剑桥大学出版社，2004。[5] F. Gonz´alez-Acu˜na、W.C. Whitten 和 W.C. Whitten。《三维流形群的嵌入》。《美国数学学会回忆录》。美国数学学会，1992。[6] C. McA. Gordon 和 J. Luecke。纽结由其补空间决定。美国数学学会新系列通报，20(1):83–87，1989。[7] Michael C. McCord。带覆盖映射的逆极限序列。《美国数学学会汇刊》，114:197–209，1965。[8] D. van Dantzig。关于拓扑齐性连续统。《数学基础》，15(1):102–125，1930。.[9] L. Vietoris。关于紧空间的高阶连通性及一类保持连通性的映射。《数学年刊》，97:454–472，1927。