arXiv:2303.01445v1 [math.NT] 2 Mar 2023

论 Jacobi–Weierstrass 模拟模形式

CLAUDIA ALFES-NEUMANN、JENS FUNKE、MICHAEL. H. MERTENS 和 EUGENIA ROSU

摘要。我们构造了调和弱 Maass 形式，它们在 ξ-算子作用下映到具有有理系数的权为 $k \geq 2$ 的尖点形式。这推广了第一作者、Griffin、Ono 和 Rolen 的工作；他们利用经典椭圆函数魏尔斯特拉斯理论，构造了与有理椭圆曲线相关的权 2 新形式在该微分算子下的特殊原像。我们扩展了这一理论，并构造了一个向量值 Jacobi–Weierstrass ζ函数，它是经典魏尔斯特拉斯 ζ函数的推广。

1. 引言

调和弱 Maass 形式是经典模形式的实解析推广，在组合学、数论、表示论和物理学中有应用（例如参见 [BFOR17] 及其中的参考文献）。它们最初由 Bruinier 和第二作者 [BF04] 在 theta 提升的背景下引入。对于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的同余子群 Γ，权为 $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 的调和弱 *Maass* 形式是一个光滑函数 $F\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$，它在 Γ 下的变换方式与经典模形式相同，但它是调和的，而非全纯的（精确定义见第 2.1 节）。如果 F 在 $\mathbb{H}$ 中有极点，则称其为极点调和弱 *Maass* 形式。

调和弱 Maass 形式本质上与深刻的数论问题密切相关。一个精妙的例子是 Zwegers 的工作 [Zwe02]，他证明了拉马努金模拟 theta 函数是调和弱 Maass 形式的全纯部分。这类函数也称为拟模形式 [Zag09]。调和弱 Maass 形式也在 Kudla 纲领及数学中的许多其他领域占有重要地位。

ξ-算子

$$\xi_k = -2iv^k \overline{\frac{\partial}{\partial \overline{\tau}}}, \quad \tau = u + iv,$$

在将经典模形式理论与调和弱 Maass 形式联系起来方面发挥着关键作用。它定义了一个满射，将权为 k 的调和弱 Maass 形式空间 H_k 映射到权为 $2-k$ 的尖点形式空间 S_{2-k}。在 ξ-算子作用下得到的像称为

日期：2023年3月3日。第一作者部分获得戴姆勒与本茨基金会和 Klaus Tschira Boost Fund 的资助，并获得德国研究联合会（DFG，德国研究基金会）资助——SFB-TRR 358/1 2023——491392403。第四作者部分获得德国研究联合会（DFG）通过协同研究中心 TRR 326“一致化结构的几何与算术”项目（编号 444845124）的资助。

相应调和弱 Maass 形式或拟模形式的影子。特别地，对于 S_{2-k} 中任意给定的尖点形式，在空间 H_k 中都有无穷多个原像，但要构造它们却出奇地困难。寻找 ξ-算子下具有特殊性质的原像是一个基本问题；由于尖点形式在数论中无处不在，构造具有特殊性质的原像为解决相关问题提供了新的途径。

解决这个问题有多种方法：Bruinier [Bru02] 以及 Bringmann 和 Ono[BO07]证明，某些最初由 Niebur[Nie74], 引入的实解析庞加莱级数，在 ξ- 算子作用下会映射为对偶权的经典指数型庞加莱级数，前提是这些级数收敛，例如权为负时。然而，尖点庞加莱级数的系数在实践和理论上都不易处理。

解决这个问题的另一种方法使用非全纯艾希勒积分

$$g^*(\tau) = \int_{-\overline{\tau}}^{\infty} \frac{\overline{f(-\overline{z})}}{(-i(z-\tau))^k} dz$$

对于权为 $2-k$ 的尖点形式 g，这一方法最早由 Andrews、Rhoades 和 Zwegers [ARZ13] ，以及 Dabholkar、Murthy 和 Zagier [DMZ23] 在他们的工作中提出并使用。通过采用适当的辅助全纯尖点形式 h 并进行全纯投影，他们构造出一个权为 k 的调和弱 Maass 形式 $F(\tau)$，使得 $\xi_k F = cg$，其中 c 为某个常数。当 g 是一元 theta 函数时，这种方法尤其适用，因为此时可以显式计算全纯投影的傅里叶系数（另见 [MOR21, MMR22]）。

最近，Ehlen、Li 和 Schwagenscheidt [ELS22] 利用某种 theta 提升，给出了一种明确的方法来寻找复乘模形式的一个良好原像。Bruinier、Ono 和 Rhoades [BOR08] 先前的工作表明，这种良好原像总是存在，特别是其全纯部分在 ∞处具有代数傅里叶系数。利用他们的显式构造，Ehlen、Li 和 Schwagenscheidt 得以确定包含这些傅里叶系数的确切代数数域。

本文聚焦于几何方法，并推广 Griffin、Ono、Rolen 和第一作者的工作 [AGOR15]。他们构造了影子由具有有理系数的权 2 新形式给出的调和弱 Maass 形式，从而推广了 Guerzhoy [Gue15]先前的工作。

设 E 是定义在 $\mathbb{Q}$ 上的椭圆曲线，并设 G_E 是根据模性定理与之对应的、属于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的同余子群 $\Gamma_0(N)$ 的权 2 新形式。在 $\mathbb{C}$ 上， E 同构于环面 $\mathbb{C}/\Lambda_E$，该同构由下式给出

$$\wp'(z)^2 = 4\wp(z)^3 - g_2\wp(z) + g_3,$$

其中， $\wp$ 是格 Λ_E 的 Weierstrass $\wp$ 函数，而 g_2、 g_3 是格 Λ_E 的归一化 Eisenstein 级数。

该*Weierstrass* ζ 函数

$$\zeta_{\Lambda_E}(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\omega\in\Lambda_E\setminus\{0\}} \left(\frac{1}{z-\omega} + \frac{1}{\omega} + \frac{z}{\omega^2}\right), \tag{1.1}$$

本身并不在格点平移下保持不变，但它有一个著名的非解析补全 $\zeta^*_{\Lambda_E}(z)$，该补全确实在 Λ_E 下保持不变。借助这一补全，可以通过取 ..... 构造模形式 G_E 在算子 ξ_0 下的规范原像 Z_E

$$Z_E(\tau) = \zeta^*_{\Lambda_E}(\mathcal{E}_E(\tau)),$$

其中 $\mathcal{E}_E(\tau) = \int_\tau^\infty G_E(t)dt$ 是全纯 Eichler 积分。Eichler 积分的 模性误差 由格决定，即 $\mathcal{E}_E(\gamma\tau) = \mathcal{E}_E(\tau) + \omega$，对于 $\gamma \in \Gamma_0(N)$ 以及某个 $\omega \in \Lambda_E$，从而得到 $Z_E(\tau)$ 的 $\Gamma_0(N)$-不变性。我们在第 3 节回顾这一构造的细节。

这些原像 Z_E 可以非常高效地计算出来，而且在理论上也很有意义。在 [AGOR15]，中，它们被用来得到一个判据，以确定二次扭曲的 E 的临界 L-阶导数何时为零。关于顶点算子代数背景下的另一项应用，可参见 [BM21]。

在本研究中，我们将上述构造推广到权为 $k \geq 2$、具有有理傅里叶系数的同余子群 $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上的新形式 f，其中 $\Gamma_1(N) \subset \Gamma$，且 N 为某个整数。我们的构造涉及向量值形式。为求简明，我们在引言中仅讨论最简单的情形，并着重阐述本研究的核心思想。

我们首先指出，权为 $k \geq 2$ 的模形式 f 可通过下式给出权为 2 的向量值模形式 $f\colon \mathbb{H} \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$:

$$G(\tau) = cf(\tau)(\tau e_1 + e_2)^{k-2}, \tag{1.2}$$

其中 (e_1, e_2) 是 $\mathbb{C}^2$ 的一组固定基，$\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 是 $\mathbb{C}^2$ 的第 $(k-2)$ 对称幂，可视为由 e_1 和 e_2 构成的 $k-2$ 次齐次多项式空间，而 c 是一个常数。注意，这种向量值模形式的构造可追溯至 Kuga 和 Shimura 的经典研究 [KS60]。更多细节请见第 2.3 节。

该构造涉及两个核心元素：Weier-$\widehat{\ }$strass ζ函数 ζ 的向量值推广，以及多项式 Eichler 积分 $\mathcal{E}_f$。

在最简单的情形下（见第 6 节），我们定义多变量函数 $\zeta\colon\ \mathbb{H}\times\mathbb{C}^{k-1} \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$，其定义如下:

$$\zeta(\tau, \boldsymbol{z}) = \sum_{j=0}^{k-2} \zeta_{\Lambda_\tau}(z_j) c_j e_1^j e_2^{k-2-j}, \quad c_j = \binom{k-2}{j}, \quad \Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau. \tag{1.3}$$

它有一个自然的补全

$$\widehat{\zeta}(\tau, \boldsymbol{z}) = \sum_{j=0}^{k-2} \zeta^*_{\Lambda_\tau}(z_j) c_j e_1^j e_2^{k-2-j}, \tag{1.4}$$

其中 $\zeta^*_{\Lambda_\tau}$ 是经典魏尔斯特拉斯 ζ 函数的补全。我们的第一个主要结果是雅可比–魏尔斯特拉斯 ζ函数 ζ的一般构造。

定理1.1。 函数 ζ 是一个权为 1 、指标为 0的不变于格 Λ_τ^{k-1}的（非全纯）雅可比形式。

为了构造完备化 Weierstrass ζ-函数的高次推广 ζ，我们遵循 Rolen [Rol16]。关键在于将 ζ-函数写成 Weierstrass σ-函数的对数导数，而后者本质上是雅可比θ函数的一个倍数。通过使用一个具有格指标的雅可比θ函数进行类似构造，这一定义可推广到高次的 σ-函数。将对数导数替换为适当的升权算子，我们得到雅可比–Weierstrassζ-函数。

随后，我们利用雅可比–Weierstrass ζ-函数，通过在多项式 Eichler 积分 $\mathcal{E}_f$ 处对其求值，构造 f 的自然原像： $\mathbb{H}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$,

$$\mathcal{E}_f(\tau,(X_1,X_2)) = \int_\tau^\infty f(t)(tX_1+X_2)^{k-2}dt, \tag{1.5}$$

对于 $\tau\in\mathbb{H}$, $M=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $(X_1,X_2)=(e_1,e_2)M$是 $\mathbb{C}^2$的换基，而 f是权为 k的尖点形式。

为实现这一点，我们首先扩展 Jacobi–Weierstrass ζ函数，以包含空间 $\mathbb{C}^2$的可能换基，该换基由 $M=\left(\begin{smallmatrix} a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 给出，如下所示

$$\widehat{\zeta}_M(\tau,\boldsymbol{z}) = \sum_{j=0}^{k-2}\zeta^*_{\Lambda_\tau}(z_j)X_1^jX_2^{k-2-j},\quad (X_1,X_2)=(e_1,e_2)M. \tag{1.6}$$

这给出了向量值雅可比形式 $\widehat{\zeta}$： $\mathbb{H}\times\mathbb{C}^{k-1}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$，其中我们写作 $\widehat{\zeta}(\tau,\boldsymbol{z},M)=\widehat{\zeta}_M(\tau,\boldsymbol{z})$。进一步固定 $\mathbb{C}^2$的标准基后，我们取自然同构 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)\simeq\mathbb{C}^{k-1}$，从而得到最一般的 Jacobi–Weierstrass 函数$\widehat{\zeta}$： $\mathbb{H}\times\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$。定义这一形式时，我们仔细考虑了子群 Γ 在上半平面 $\mathbb{H}$ 和 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 上的各种作用（参见第5节）。

最后，我们通过取下式来定义向量值形式 F： $\mathbb{H}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$

$$F(\tau,M) = \widehat{\zeta}_M(\Lambda_f,\mathcal{E}(\tau,(e_1,e_2)M^{-1})), \tag{1.7}$$

其中， Λ_f 是与 f 对应的格（见第2.4节，特别是注2.3）。

注意， F 也可以写成一个向量值形式 F： $\mathbb{H}\to V$，其取值于无限维向量空间 $V=$ 函数 $\{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\to\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)\}$；它将 $F(\tau)$映射为 V中的函数 $M\to F(\tau,M)$。

本文的主要结果如下：

定理 1.2. 函数 $F\colon \mathbb{H}\to V$ 是一个权为0 的向量值极点调和弱 *Maass* 形式，其在 ξ_0 下的像由下式给出

$$G(\tau)=\frac{2\pi i}{\mathrm{Vol}(\Lambda_f)}f(\tau)(\tau e_1+e_2)^{k-2}.$$

注意，在 $k=2$ 的情形下，我们通过构造得到的函数实际上与 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 变量无关，因此我们恢复了 [AGOR15]的结果。 F 的极点已在命题 6.3 中明确计算。

注 1.3。 直接固定 $\mathbb{C}^2$ 的一组基 (e_1,e_2)，并将 Eichler$\widehat{}$积分直接代入 $\zeta(\Lambda_f,\mathcal{E}_f(\tau,(e_1,e_2)))$，这种简单做法会失去 Γ-不变性。一般而言，外部和内部的 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$作用并不相容

$$\widehat{\zeta}\left(\Lambda_f,\mathcal{E}_f\left(\tau,(e_1,e_2)\right)\right)\neq\gamma\cdot\widehat{\zeta}\left(\Lambda_f,\mathcal{E}_f\left(\gamma\tau,(e_1,e_2)\right)\right).$$

通过借助额外变量 $M\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 控制换基，我们确保向量值形式 F具有 Γ-不变性。

本文结构如下。第 2 节介绍调和弱 Maass 形式的概念，给出表示论的必要背景，并引入向量值 Eichler 积分。第 3 节回顾权为 2 时魏尔斯特拉斯调和弱 Maass 形式的构造。第 4 节给出已完成的魏尔斯特拉斯 ζ-函数向高次情形的推广。第5节包含我们的主要结果，即构造向量值雅可比–魏尔斯特拉斯调和弱 Maass 形式$F\colon \mathbb{H}\to V$。第 6 节计算雅可比–魏尔斯特拉斯 ζ-函数的洛朗展开，以及极点调和弱 Maass 形式 F的极点。第 7 节给出我们构造的两个例子。

2. 预备知识

本文中，令 Γ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的一个同余子群，使得 $\Gamma_1(N)\subset\Gamma$，其中 N 为某个正整数；并且 $\Gamma_1(N)=\{\gamma\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\colon\ \gamma\equiv\left(\begin{smallmatrix}1&*\\0&1\end{smallmatrix}\right)\bmod N\}$。若 f 是 Γ 的新形式，则称其为 $\Gamma_1(N)$ 的新形式。

2.1. 调和弱 Maass 形式。我们用 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R})$ 表示元辛群，它由形如 (γ,ϕ) 的有序对组成，其中 $\gamma=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$，且 $\phi\colon\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ 是一个全纯函数，满足 $\phi(\tau)^2=c\tau+d$。令 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 在覆盖映射 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{R})\to\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ 下的逆像。

称二次连续可微函数 $F\colon\mathbb{H}\to\mathbb{C}$ 为 $\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 $k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$ 的调和弱 *Maass* 形式，如果它满足

(1) $\Delta_k F=0$，其中 $\Delta_k=-v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)+ikv\left(\frac{\partial}{\partial u}+i\frac{\partial}{\partial v}\right)$ 是双曲权 k拉普拉斯算子，记作 $\tau=u+iv\in\mathbb{H}$。(2) $F(\tau)|_k(\gamma,\phi):=\phi(\tau)^{-2k}F(\gamma\tau)=F(\tau)$，适用于 $(\gamma,\phi)\in\mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z})$。

(3) 存在一个傅里叶多项式 $P_F(\tau) = \sum_{n\leq 0} a^+(n)q^n$，称为 F的主部，使得

$$F(\tau) - P_F(\tau) = O(e^{-\varepsilon v})$$

as $v \to \infty$，关于 u 一致，对某个 $\varepsilon > 0$ 成立。所有尖点处也有类似条件 ps.

我们相应地定义关于群 Γ 变换的整数权 $k \in \mathbb{Z}$ 调和弱 Maass 形式。如果 F 在 $\mathbb{H}$ 上有极点，则称其为极点调和弱 *Maass* 形式。

2.2. **雅可比θ函数**。设 $L \simeq \mathbb{Z}^g$ 是一个具有正定内积的偶格，该内积由 $(v,w) := v^t G_L w$ 定义，其中 G_L 是 L 的格拉姆矩阵，它是一个对称矩阵，具有整数项且对角线上的元素为偶数；再设 $V = L \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^g$ 的二次型为 $Q(v) = (v,v)/2$。

定义 2.1。设 $\tau \in \mathbb{H}$ 和 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^g$。我们将雅可比θ函数定义为

$$\theta(\tau, \boldsymbol{z}) = \sum_{\ell \in L} e^{\pi i(\ell,\ell)\tau} e^{2\pi i(\ell,\boldsymbol{z})}.$$

以下是 $\theta(\tau,\boldsymbol{z})$ 的两个众所周知的变换性质

$$\theta(\tau, \boldsymbol{z} + \boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{n}) = e^{-\pi i\tau(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})} e^{-2\pi i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{m})} \theta(\tau,\boldsymbol{z}), \quad \boldsymbol{m},\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^g, \tag{2.1}$$

$$\theta(\tau+1,\boldsymbol{z}) = \theta(\tau,\boldsymbol{z}). \tag{2.2}$$

在附加假设 L 为幺模的情况下，参见例如 [Boy15], ，由泊松求和可得

$$\theta\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{\boldsymbol{z}}{\tau}\right) = (\tau/i)^{g/2} e^{2\pi i \frac{Q(\boldsymbol{z})}{\tau}} \theta(\tau,\boldsymbol{z}). \tag{2.3}$$

这些函数方程表明，按照 [BK93] 的定义， $\theta(\tau,\boldsymbol{z})$ 是完整雅可比群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^g)^2$ 上权为 $g/2$、指标为 $\frac{1}{2}G_L$ 的雅可比形式。若 L 不是幺模的，则 $\theta(\tau,\boldsymbol{z})$ 是完整雅可比群的某个适当同余子群 $\mathcal{J}_L = \Gamma_L \ltimes (\mathbb{Z}^g)^2$ 上的雅可比形式（比较 [Boy15，推论 3.34，3.35]）。

我们沿用 Böcherer–Kohnen [BK93] 的定义，将斜线算子定义为

$$(\phi|_{k,mL}A)(\tau,\boldsymbol{z}) := \phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{\boldsymbol{z}+\boldsymbol{m}\tau+\boldsymbol{n}}{c\tau+d}\right)(\sqrt{c\tau+d})^{-2k} \\ e^{2\pi i m\left(-c\frac{2Q(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{m}\tau+\boldsymbol{n})}{(c\tau+d)} + (\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})\tau + 2(\boldsymbol{m},\boldsymbol{z})\right)},$$

其中 $A = \left[\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{c\tau+d}\right), (\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\right] \in \mathrm{Mp}_2(\mathbb{Z}) \ltimes (\mathbb{Z}^g)^2$，且 $k, m \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$。那么， θ 是雅可比子群 $\mathcal{J}_L$ 上的雅可比形式这一条件等价于

$$\theta|_{g/2,1/2}A = \theta, \quad \text{for } A \in \mathcal{J}_L. \tag{2.4}$$

如同在 [BRR15] 中，我们现在定义 Jacobi 形式的升权算子如下:

$$Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + 2\pi i \frac{\mathrm{Im}((G_L\boldsymbol{z})_j)}{\mathrm{Im}(\tau)}, \tag{2.5}$$

其中 $\boldsymbol{z}=(z_1,\dots,z_g)\in\mathbb{C}^g$。正如我们将在命题 4.6 中证明的，我们有

$$Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta=(Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta)|_{g/2+1,1/2}A \tag{2.6}$$

对于 $A=\left[\left(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right),\sqrt{c\tau+d}\right),(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})\right]\in\mathcal{J}_L$ 和 $k\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}$。

2.3. 一点表示论。 我们令 $W(=\mathbb{C}^2)$ 为 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的标准复表示，并令 $\langle,\rangle$ 为 W 上具有标准基 e_1,e_2 的通常辛形式。这在 W 上定义了一个整结构。我们令 $W_m=\mathrm{Sym}^m W$ 为最高权为 m、维数为 $m+1$ 的不可约表示。权向量为（$e_1^je_2^{m-j}$ 的倍数），其相对于标准有理分裂环面 $S=\{\left(\begin{smallmatrix}t&0\\0&t^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ 的对应权为 $j:\ t\in\mathbb{R}\}$。这里我们用 v^k 表示对称张量 $v\bullet v\bullet\cdots\bullet v$。

注意， W_m 是自对偶的，即 $W_m\simeq W_m^*$，其中该同构由 W上的辛形式诱导。我们将不区分 W_m与 W_m^*。

$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 在 $W_{k-2}=\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 上的作用，是通过作用于 $\mathbb{C}^2$上的基来定义的，即

$$M\circ(e_1,e_2):=\begin{pmatrix}e_1&e_2\end{pmatrix}M=\begin{pmatrix}ae_1+ce_2&be_1+de_2\end{pmatrix},\ \text{for } M=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}).$$

我们回顾 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 通过分式线性变换 $M\tau=\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$ 对上半平面 $\mathbb{H}$ 的通常作用，其中 $M=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。此外，我们用 $j(M,\tau)=c\tau+d$表示自守因子。

于是我们有

$$M^{-1}\circ((M\tau)e_1+e_2)^{k-2}=j(M,\tau)^{2-k}(\tau e_1+e_2)^{k-2} \tag{2.7}$$

其中 $M\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。

对于同余子群 Γ 上权为 k 的模形式 f，这直接意味着 $\mathbb{H}$ 上由下式给出的全纯1-形式

$$\eta_f:=f(\tau)d\tau\otimes(\tau e_1+e_2)^{k-2}$$

满足 $\gamma^{-1}\circ\eta_f(\gamma\tau)=\eta_f(\tau)$，其中 $\gamma\in\Gamma$。

2.4. Eichler 积分。 本节中，设 f 是某个有限指标子群 Γ of $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上权为 k 的尖点形式，并设 (X_1,X_2) 是 W 的一组基。我们将 f 的 *Eichler* 积分 定义为

$$\mathcal{E}_f(\tau,(X_1,X_2))=\int_\tau^\infty f(t)(tX_1+X_2)^{k-2}dt. \tag{2.8}$$

它定义了一个函数 $\mathcal{E}_f:\ \mathbb{H}\times\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\to\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$，其中上文的基 (X_1,X_2) 对应于一个矩阵 $M\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，使得 $(X_1,X_2)=M\circ(e_1,e_2)$。注意，将 W_m 与由两个变量 X、Y 构成的 m 次齐次多项式空间等同，并将 X_1 替换为 1、将 X_2 替换为 τ，即可得到通常的（标量值）Eichler 积分。

对于 $\gamma\in\Gamma$，我们考虑

$$\mathcal{E}_f(\gamma\tau,\gamma^{-1}\circ(X_1,X_2))=\int_{\gamma\tau}^\infty f(t)\left[\gamma^{-1}\circ(tX_1+X_2)^{k-2}\right]dt,\ \gamma\in\Gamma.$$

引理 2.2。 设 f 是权为 k 、属于 Γ 的尖点形式，则有

$$\mathcal{E}_f(\gamma\tau, \gamma^{-1} \circ (X_1, X_2)) = \mathcal{E}_f(\tau, (X_1, X_2)) - \sum_{\ell=0}^{k-2} \binom{k-2}{\ell} X_1^{\ell} X_2^{k-2-\ell} \int_{\gamma^{-1}\infty}^{\infty} f(t) t^{\ell} dt.$$

对于 $\gamma \in \Gamma$ 和 $(X_1,\ X_2)$ $\mathbb{C}^2$的一个基。

证明。 恒等式 (2.7) 意味着

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_f(\gamma\tau, \gamma^{-1} \circ (X_1, X_2)) &= \int_{\gamma\tau}^{\infty} f(t) \cdot \left[\gamma^{-1} \circ (tX_1 + X_2)^{k-2}\right] dt \\ &= \int_{\tau}^{\gamma^{-1}\infty} f(t)(tX_1 + X_2)^{k-2} dt.\end{aligned}$$

我们将积分拆分为

$$\int_{\tau}^{\gamma^{-1}\infty} f(t)(tX_1 + X_2)^{k-2} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t)(tX_1 + X_2)^{k-2} dt - \int_{\gamma^{-1}\infty}^{\infty} f(t)(tX_1 + X_2)^{k-2} dt$$

并利用二项式展开得到结果。 □

现在我们回顾一些关于模符号的事实。更多细节和背景可参见 [Ste07] 的第 8 章和第 10 章。令 $\mathbb{M}_k$ 表示模符号模，即由符号 $P\{\alpha, \beta\}$ 生成的 $\mathbb{Z}$-模，其中 $P \in \mathbb{Z}[X, Y]_{k-2}$ 是一个次数为 $k-2$、系数为整数的齐次多项式，且 α、$\beta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ 是尖点，并对由以下关系生成的关系取商

$$\{\alpha, \beta\} + \{\beta, \gamma\} + \{\gamma, \alpha\} = 0$$

以及所有扭元。群 Γ 通过结合莫比乌斯变换对 $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ 的通常作用，以及对齐次多项式的作用，从左侧作用于模符号，后者定义如下

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), P\right) \mapsto P(dX - bY, -cX + aY).$$

我们用 $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ 表示模去所有扭元以及由 $x - \gamma.x$ 得到的所有关系后的模符号模，其中 $x \in \mathbb{M}_k$ 且 $\gamma \in \Gamma$。每个尖点形式 $f \in S_k(\Gamma)$ 都定义了一个配对

$$\Phi_f : \mathbb{M}_k(\Gamma) \to \mathbb{C}, \quad (f, P\{\alpha, \beta\}) \mapsto \int_{\alpha}^{\beta} f(t) P(t, 1) dt, \tag{2.9}$$

这与赫克算子的作用相一致。如果 f 是一个系数为整数的归一化新形式，那么像 $\Phi_f(\mathbb{M}_k(\Gamma))$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个格 Λ_f。

注2.3. 我们记作

$$\mathcal{E}_f(\tau, (X_1, X_2)) = \sum_{\ell=0}^{k-2} \mathcal{E}_{\ell, f}(\tau) c_{\ell} X_1^{\ell} X_2^{k-2-\ell}, \tag{2.10}$$

其中 $c_{\ell} = \binom{k-2}{\ell}$ 和 $\mathcal{E}_{\ell,\ f}(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} f(t) t^{\ell} dt$。若 f具有整数系数，则上述讨论意味着

$$\mathcal{E}_{\ell, f}(\gamma\tau) - \mathcal{E}_{\ell, f}(\tau) \in \Lambda_f. \tag{2.11}$$

对于 $k=2$ 和 $\Gamma=\Gamma_0(N)$，格 Λ_f 与和 f相关联的有理椭圆曲线的周期格重合。

现在我们选取 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 的基 $\{c_\ell X_1^\ell X_2^{k-2-\ell}\}_{0\le\ell\le k-2}$。在这些坐标下，Eichler 积分表示为

$$\mathcal{E}_f(\tau,(X_1,X_2))=(\mathcal{E}_{0,f}(\tau),\dots,\mathcal{E}_{k-2,f}(\tau))_{(X_1,X_2)}. \tag{2.12}$$

为便于后续使用，我们以略有不同的方式重新表述引理 2.2 n.

引理 2.4。*Eichler* 积分 $\mathcal{E}_f(\tau,(X_1,X_2))$ 在 Γ 作用下具有 Λ_f^{k-1}-不变性，也就是说，对于 $\gamma\in\Gamma$，有

$$(\mathcal{E}_{0,f}(\gamma\tau),\dots,\mathcal{E}_{k-2,f}(\gamma\tau))_{\gamma^{-1}\circ(X_1,X_2)}=(\mathcal{E}_{0,f}(\tau),\dots,\mathcal{E}_{k-2,f}(\tau))_{(X_1,X_2)}+\omega,$$

其中 $\omega=(\lambda_0,\ \dots\dots,\ \lambda_{k-1})_{(X_1,X_2)}$ 且每个 $\lambda_i\in\Lambda_f$。

一个直直接计算可得系数 $\mathcal{E}_{f,\ \ell}(\tau)$ 的傅里叶展开。

引理 2.5. 对于具有傅里叶展开 $f(\tau)=\sum a_nq^n$ 的尖点形式 $f\in S_k(\Gamma)$，我们有$n\ge1$

$$\mathcal{E}_{f,\ell}(\tau)=\int_\tau^\infty f(t)t^\ell dt=\sum_{n\ge1}\frac{a_n}{2\pi n}\left(\sum_{j=0}^{\ell}\frac{\ell!}{(\ell-j)!}\left(\frac{i}{2\pi n}\right)^j\tau^{\ell-j}\right)q^n.$$

从定义中也可直接看出，$\mathcal{E}_{f,\ \ell}$ 除非 $\ell=0$，否则不是 1-周期的。一般而言，$\mathcal{E}_{f,\ \ell}$ 的傅里叶系数是关于 τ 的多项式。

2.5. **换基**。注意到，$\mathbb{C}^2$ 的每一组基 (X_1,X_2) 都导出 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 的一组基 $\{c_\ell X_1^\ell X_2^{k-2-\ell}\}_{0\le\ell\le k-2}$。令 $\boldsymbol{z}=(z_0,\dots,\ z_{k-2})\in\mathbb{C}^{k-1}$。我们记

$$(\boldsymbol{z})^{\mathrm{t}}_{(X_1,X_2)}=(z_0,\dots,z_{k-1})^{\mathrm{t}}_{(X_1,X_2)}=\sum_{\ell=0}^{k-2}z_\ell c_\ell X_1^\ell X_2^{k-2-\ell} \tag{2.13}$$

为 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 中相应的元素。则 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的作用由下式给出

$$M\circ(\boldsymbol{z})^{\mathrm{t}}_{(e_1,e_2)}:=(\boldsymbol{z})^{\mathrm{t}}_{M\circ(e_1,e_2)}.$$

这给出了从 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 的标准基 $\{c_\ell e_1^\ell e_2^{k-2-\ell}\}_{0\le\ell\le k-2}$ 到基 $\{c_\ell X_1^\ell X_2^{k-2-\ell}\}_{0\le\ell\le k-2}$ 的换基，其中 $(X_1,X_2)=M\circ(e_1,e_2)$。我们显式描述这一换基。

引理 2.6。设 $M=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。那么

$$(\boldsymbol{z})^{\mathrm{t}}_{M\circ(e_1,e_2)}=N(M)(\boldsymbol{z})^{\mathrm{t}}_{(e_1,e_2)}$$

对于矩阵 $N(M)\in\mathrm{GL}_{k-1}(\mathbb{Z})$，其元素$(N_{\ell t})_{0\le\ell,\ t\le k-2}$由下式给出

$$N_{\ell t}=\sum_{\substack{0\le i\le t\\0\le\ell-i\le k-2-t}}\binom{\ell}{i}\binom{k-2-\ell}{t-i}a^ic^{t-i}b^{\ell-i}d^{k-2-t-\ell+i}.$$

证明。 注意到

$$(\boldsymbol{z})^{\mathrm{t}}_{M\circ(e_1,e_2)} = \sum_{t=0}^{k-2} z_t c_t (ae_1 + ce_2)^t (be_1 + de_2)^{k-2-t}.$$

利用两次二项式定理并重新排列各求和式，我们得到所述公式。

由下面注记 2.7 中提到的性质可立即得到 $N(M) \in \mathrm{GL}_{k-1}(\mathbb{Z})$ 的断言：对于每个 $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$， $N(M)$ 的所有项都是整数，且它是一个群同态，这意味着 $N(M)^{-1} = N(M^{-1})$ 的项也都是整数，从而证明了该断言。□

我们注意到，该公式实际上已经包含在 Kuga-Shimura 于 20 世纪 50 年代末所做的经典工作中 [KS60]。

注记 2.7。 对于 M、 M_1、 $M_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 以及引理 2.6 中的记号，我们注意到以下性质

$$\begin{aligned} N(M_1M_2) &= N(M_2)N(M_1), \\ N(M)^{\mathrm{t}} &= N(M^{\mathrm{t}}), \\ N(M)^{-1} &= N(M^{-1}). \end{aligned}$$

由于 $N(M) \in \mathrm{GL}_{k-1}(\mathbb{Z})$，由引理 2.6 可立即得到以下观察结果 n.

Le引理 2.8。 设 $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ ，并采用引理 *2.6* 中的记号。那么我们有 e

$$N(M)\Lambda_f^{k-1} = \Lambda_f^{k-1}.$$

这里，我们将 Λ_f^{k-1} 中的元素视为列向量。

3. Weierstrass mock modular forms

我们回顾 Guerzhoy [Gue15] 和 Alfes–Griffin–Ono–Rolen [AGOR15] 对魏尔斯特拉斯拟模形式的经典构造。

3.1. 魏尔斯特拉斯补全 ζ函数。 本节回顾 Rolen [Rol16] 对魏尔斯特拉斯 ζ函数的艾森斯坦完备化的构造。

令 $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$对于 $\tau \in \mathbb{H}$，并对 $z \in \mathbb{C}$ 定义经典的 魏尔斯特拉斯 σ-函数 n

$$\sigma_{\Lambda_\tau}(z) = z \prod_{w \in \Lambda_\tau \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{w}\right) \exp\left(\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}\right).$$

它的对数导数是 $Weierstrass$ ζ函数

$$\zeta_{\Lambda_\tau}(z) = \frac{\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{\Lambda_\tau}(z)}{\sigma_{\Lambda_\tau}(z)}.$$

此外，我们还需要下面这个经典恒等式（参见 [Pol03] 的定理 3.9），它将 Weierstrass σ-函数与标准雅可比θ函数联系起来

$$\vartheta(\tau,z)=-2\pi\eta(\tau)^3\exp\left(-\frac{\eta_1 z^2}{2}\right)\sigma_{\Lambda_\tau}(z). \tag{3.1}$$

这里，$\vartheta(\tau,z)$ 是权为 $1/2$ 、指标为 $1/2$ 的雅可比形式，其定义为

$$\vartheta(\tau,z)=\sum_{n\in\frac{1}{2}+\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau+2\pi i n\left(z+\frac{1}{2}\right)},$$

η_1 是由下式定义的拟周期

$$\eta_1=\eta_1(\tau):=\zeta_{\Lambda_\tau}(z+1)-\zeta_{\Lambda_\tau}(z),$$

而 $\eta(\tau)=q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ 是 Dedekind η 函数。

于是我们得到

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z}\vartheta(\tau,z)}{\vartheta(\tau,z)}=\zeta_{\Lambda_\tau}(z)-\eta_1 z.$$

由于 $\vartheta(\tau,z)$ 是关于 z 的全纯函数，因此可以考虑它的导数。然而，导数不再是雅可比形式。因此，我们用雅可比形式上的典范升算子$_1\ {}_1Y^{\overline{2}}_{+}\ {}^{\overline{2}}$替代导数 $\frac{\partial}{\partial z}$，并将其作用于雅可比θ函数

$$Y_+^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\vartheta(\tau,z))=\frac{\partial}{\partial z}\vartheta(\tau,z)+2\pi i\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Im}(\tau)}\vartheta(\tau,z)$$

于是得到一个权为 $3/2$ 、指标为 $1/2$ 的雅可比形式（参见第 2.2 节）。考虑对数导数的相应类比，我们得到

$$\frac{Y_+^{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(\vartheta(\tau,z))}{\vartheta(\tau,z)}=\zeta_{\Lambda_\tau}(z)-\eta_1 z+\frac{2\pi i\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Im}(\tau)}, \tag{3.2}$$

它是一个权为 1、指标为 0 的实解析 Jacobi 形式。特别地，它是关于 z的椭圆函数。利用权为 2 的 Eisenstein 级数的关系式 $G_2=\eta_1$ ，其中常数项归一化为 $2\zeta(2)$，可以证明函数

$$\zeta^*_{\Lambda_\tau}(z)=\zeta_{\Lambda_\tau}(z)-zG_2^*(\tau)-\pi\frac{\overline{z}}{\operatorname{Im}(\tau)}$$

是关于格 Λ_τ的双周期函数。这里，$G_2^*(\tau)=G_2(\tau)-\pi/\operatorname{Im}(\tau)$ 是权为 2 的 Eisenstein 级数的非全纯补全。

我们注意到

$$\operatorname{Im}(\tau)=\operatorname{Vol}(\Lambda_\tau).$$

3.2. **魏尔斯特拉斯拟模形式**。 完备的魏尔斯特拉斯 ζ-函数可用于构造权为 0 的调和弱 Maass 形式。令 f 为权为 2、对应于$\Gamma_0(N)$且具有有理傅里叶系数的新形式。采用第2.4节的记号， Λ_f 是与之关联的格，而 $\mathcal{E}_f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^{a_f(n)}{}_n \quad q^n$是 $f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n)q^n$的 Eichler 积分。特别地，我们有 ——

$$\mathcal{E}_f(\gamma\tau) = \mathcal{E}_f(\tau) + \omega,\, \omega \in \Lambda_f,$$

对于 $\gamma \in \Gamma_0(N)$。接着我们将魏尔斯特拉斯形式定义为

$$Z_f(\tau) = \zeta^*_{\Lambda_f}(\mathcal{E}_f(\tau)).$$

以下定理已在 [Gue15] 和 [AGOR15]中证明。

定理3.1。 假设采用上述记号和假设。以下结论成立：

(1) $Z_f(\tau)$ 的全纯部分 $Z_f^+(\tau)$ 的极点恰好是满足$\mathcal{E}_f(\tau) \in \Lambda_f$的那些点。*(2)* 若 $Z_f^+(\tau)$ 在 $\mathbb{H}$ 中有极点，则存在一个在 $\Gamma_0(N)$ 上具有代数系数的典范模函数 $M_f(\tau)$，使得 $Z_f^+(\tau) - M_f(\tau)$ 在 $\mathbb{H}$ 上全纯。*(3)* 函数 $Z_f(\tau) - M_f(\tau)$ 是 $\Gamma_0(N)$ 上权为 *0* 的调和弱 *Maass* 形式。*(4)* 我们有

$$\xi_0(Z_f(\tau)) = -\frac{2\pi i}{\mathrm{vol}(\Lambda_f)} f(\tau).$$

4. 向量值雅可比–魏尔斯特拉斯形式

我们首先在第4.1节构造雅可比–魏尔斯特拉斯 ζ函数，它是魏尔斯特拉斯 ζ函数的高次类比。在第4.2节中，我们基于Rolen的方法构造其补全，并在第4.3节中定义一个向量值类比。

4.1. **高次椭圆函数**。 将（3.1）推广后，我们定义魏尔斯特拉斯 σ函数的一个高次类比。令 $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$，其中 $\tau \in \mathbb{H}$。

定义4.1。 令 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^g$。我们将 雅可比–魏尔斯特拉斯 σ函数定义为

$$\sigma_{\Lambda_\tau}(\boldsymbol{z}) = e^{-u(\tau)Q(\boldsymbol{z})}\theta(\tau, \boldsymbol{z}), \tag{4.1}$$

其中， $u(\tau)$是 τ 中的一个函数，其定义见（4.7）。

注意，对于 $g = 1$，上述定义与魏尔斯特拉斯σ函数的经典定义相差一个依赖于格的（非零）常数因子。不过，这在此处并无进一步影响。

令 $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^g$。利用 (2.1) 中雅可比θ函数的性质，我们可以直接看出

$$\sigma_{\Lambda_\tau}(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{n}) = e^{-u(\tau)(Q(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{m}\boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{n})-Q(\boldsymbol{z}))}e^{-\pi i\tau(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})}e^{-2\pi i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{m})}\sigma_{\Lambda_\tau}(\boldsymbol{z}) \tag{4.2}$$

f或 $\boldsymbol{m}$、 $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^g$。现在我们定义 $\wp$-函数和 ζ-函数的高次类似物。

定义 4.2。 设 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^g$。我们将 *Jacobi–Weierstrass* ζ-函数定义为

$$\zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial}{\partial z_j} \log \sigma_{\Lambda_\tau,}(\boldsymbol{z}),\ 1 \le j \le g, \tag{4.3}$$

以及*Jacobi–Weierstrass* $\wp$函数 由

$$\wp_{ji}(\boldsymbol{z}) = \wp_{\Lambda_\tau,ji}(\boldsymbol{z}) = \frac{\partial}{\partial z_i}\zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z}),\ 1 \le i,j \le g. \tag{4.4}$$

我们首先证明，$\wp_{ji}$ 在格 Λ_τ^g下是不变的。

引理 4.3. 对于 $1 \le i,\ j \le g$，*Jacobi–Weierstrass* $\wp$函数 $\wp_{ji}$ 具有 Λ_τ^g不变性，即有

$$\wp_{ji}(\tau, \boldsymbol{z} + \boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{n}) = \wp_{ji}(\tau, \boldsymbol{z}), \tag{4.5}$$

对于 $\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}^g$。

证明。 设 $\boldsymbol{m} = (m_1, \dots, m_g)$ $\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_g) \in \mathbb{Z}^g$。利用高次 σ函数的变换性质（参见 (4.2)），我们得到

$$\frac{\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\sigma_{\Lambda_\tau}\right)(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{n})}{\sigma_{\Lambda_\tau}(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{n})} = \frac{\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\sigma_{\Lambda_\tau}\right)(\boldsymbol{z})}{\sigma_{\Lambda_\tau}(\boldsymbol{z})} + (-u(\tau)(G_L(\boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{n}))_j - 2\pi i (G_L \boldsymbol{m})_j),$$

其中，如前所述（见第 2.2 节）， G_L 表示用于定义 theta 级数的格 L 的格拉姆矩阵。这意味着

$$\zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{n}) - \zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z}) = -u(\tau)(G_L(\boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{n}))_j - 2\pi i (G_L \boldsymbol{m})_j. \tag{4.6}$$

上式右边与 $\boldsymbol{z}$ 无关，只取决于格，因此

$$\frac{\partial}{\partial z_i}\zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{m}\tau + \boldsymbol{n}) - \frac{\partial}{\partial z_i}\zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z}) = 0.$$

这意味着 $\wp_{ji}$具有所需的不变性。 □

(4.6) 中差值与 $\boldsymbol{z}$ 无关，这为以下定义提供了依据。

定义 4.4. 我们将拟周期定义为

$$\eta_{jl,1}(\tau) = \zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z} + e_l) - \zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z}) = 0, \text{ if } j \ne l,$$

$$\eta_{jj,1}(\tau) = \zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z} + e_j) - \zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z}) =: u(\tau). \tag{4.7}$$

这里， $e_i \in \mathbb{Z}^g$ 表示第 i个单位向量。

注 4.5. 这推广了经典情形中拟周期的定义，在该情形下我们有

$$\eta_1(\tau) = \zeta_{\Lambda_\tau}(z+1) - \zeta_{\Lambda_\tau}(z).$$

4.2. 雅可比–魏尔斯特拉斯 ζ-函数的补全。 本节将补全雅可比–魏尔斯特拉斯 ζ-函数，使其具有格不变性。这推广了式 (3.2) 中的构造。令 $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$，其中 $\tau \in \mathbb{H}$。我们定义

$$\zeta^*_{z_j}(\boldsymbol{z}) = \zeta^*_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z}) = \frac{(Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta)(\tau,\boldsymbol{z})}{\theta(\tau,\boldsymbol{z})},\ \boldsymbol{z}\in\mathbb{C}^g. \tag{4.8}$$

命题 4.6。 函数 $\zeta^*_{z_j}(z)$ 是权为 1 、指标为 0 的雅可比形式（非全纯），对应于雅可比子群 $\mathcal{J}_L$ （见第 *2.2* 节）。特别地，$\zeta^*_{z_j}(z)$ 在格 Λ^g_τ下不变。

证明。 我们首先指出，要证明 $\zeta^*_{z_j}(\boldsymbol{z})$ 是权为 1 的雅可比形式，只需证明恒等式 (2.6)。为验证 $\zeta^*_{z_j}(\boldsymbol{z})$ 是椭圆的，我们先计算 (2.1) 的偏导数 $\frac{\partial}{\partial z_j}$，即

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\theta\right)(\tau,\boldsymbol{z}+\boldsymbol{m}\tau+\boldsymbol{n}) &= e^{-\pi i\tau(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})}e^{-2\pi i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{m})}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\theta\right)(\tau,\boldsymbol{z})\\ &\quad - 2\pi i(G_L\boldsymbol{m})_j e^{-\pi i\tau(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})}e^{-2\pi i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{m})}\theta(\tau,\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

将 $2\pi i^{(\mathrm{Im}(G_{L_{\cancel{(\boldsymbol{z}+\boldsymbol{m}\tau+\boldsymbol{n})))j}}\mathrm{Im}(\tau)}}e^{-\pi i\tau(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})}e^{-2\pi i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{m})}\theta(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z})$ 相加，并利用 $\mathrm{Im}(\cancel{G_L(\boldsymbol{m}\tau+\boldsymbol{n}))}\mathrm{Im}(\tau)$ $= G_L\boldsymbol{m}$，得到

$$(Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta)(\tau,\boldsymbol{z}+\boldsymbol{m}\tau+\boldsymbol{n}) = e^{-\pi i\tau(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})}e^{-2\pi i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{m})}(Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta)(\tau,\boldsymbol{z}). \tag{4.9}$$

两边除以 $\theta(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z}+\boldsymbol{m}\tau+\boldsymbol{n}) = e^{-\pi i\tau(\boldsymbol{m},\boldsymbol{m})}e^{-2\pi i(\boldsymbol{z},\boldsymbol{m})}\theta(\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{z})$，得到

$$\frac{(Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta)(\tau,\boldsymbol{z}+\boldsymbol{m}\tau+\boldsymbol{n})}{\theta(\tau,\boldsymbol{z}+\boldsymbol{m}\tau+\boldsymbol{n})} = \frac{(Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta)(\tau,\boldsymbol{z})}{\theta(\tau,\boldsymbol{z})}$$

由此完成了 $\zeta^*_{z_j}(\boldsymbol{z})$ 是椭圆的这一证明。

现在我们计算矩阵 $B = [\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right), \sqrt{c\tau+d}] \in \mathcal{J}_L$ 作用下的变换。只需证明恒等式 (2.6)，这等价于证明

$$(c\tau+d)^{-g/2-1}e^{-\pi ic\frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})}{c\tau+d}}(Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{\boldsymbol{z}}{c\tau+d}\right) = Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta,$$

我们计算 $Y^{g/2}$、$+$ $^{1/2L}$、z_j $= \frac{\partial}{\partial z_j} + 2\pi i^{\mathrm{Im}(G_L\boldsymbol{z}}{}_{\tau})_j$ 上半平面 作用的两个分量。变换性质 (2.4) 表明

$$\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{\boldsymbol{z}}{c\tau+d}\right) = (c\tau+d)^{g/2}e^{\pi ic\frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})}{c\tau+d}}\theta(\tau,\boldsymbol{z}).$$

求导后得到

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\theta\right)\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{\boldsymbol{z}}{c\tau+d}\right) &= (c\tau+d)^{g/2}2\pi ic(G_L\boldsymbol{z})_j e^{\pi ic\frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})}{c\tau+d}}\theta(\tau,\boldsymbol{z})\\ &\quad + (c\tau+d)^{g/2+1}e^{\pi ic\frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})}{c\tau+d}}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\theta\right)(\tau,\boldsymbol{z}).\end{aligned}$$

两边乘以 $(c\tau+d)^{-g/2-1}e^{-\pi ic\frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})}{c\tau+d}}$，得到

$$2\pi ic(G_L\boldsymbol{z})_j(c\tau+d)^{-1}\theta(\tau,\boldsymbol{z})+\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\theta\right)(\tau,\boldsymbol{z}). \tag{4.10}$$

对于第二部分，我们必须将该项

$$(c\tau+d)^{-g/2-1}e^{-\pi ic\frac{(\boldsymbol{z},\boldsymbol{z})}{c\tau+d}}\theta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d},\frac{\boldsymbol{z}}{c\tau+d}\right)=(c\tau+d)^{-1}\theta(\tau,\boldsymbol{z})$$

乘以 $2\pi i(\mathrm{Im}\,\underline{(G_L\boldsymbol{z})}_{\underline{c\tau+d}^{j}})/(\mathrm{Im}\,\frac{a\tau+b}{c\tau+d})=(c\tau+d)\underline{\mathrm{Im}(G_L\boldsymbol{z})_j\mathrm{Im}\,\tau}\quad-c(G_L\boldsymbol{z})_j$，从而得到

$$2\pi i\frac{\mathrm{Im}(G_L\boldsymbol{z})_j}{\mathrm{Im}\,\tau}\theta(\tau,\boldsymbol{z})-2\pi ic(G_L\boldsymbol{z})_j(c\tau+d)^{-1}\theta(\tau,\boldsymbol{z}). \tag{4.11}$$

将 (4.10) 和 (4.11) 相加，得到 $Y^{g/2}{}_{,\,+z_j}{}^{1/2L}\theta_{,}$，正如所需。这就完成了证 f. □

我们得到已完成的 Jacobi–Weierstrass ζ-函数的类似描述，与次数为 1 的情形相同。

引理 4.7。 已完成的 *Jacobi–Weierstrass* ζ-函数可写为

$$\zeta^*_{z_j}(\tau,\boldsymbol{z})=\zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z})-u(\tau)z_j+2\pi i\frac{\mathrm{Im}((G_L\boldsymbol{z})_j)}{\mathrm{Vol}(\Lambda_\tau)}.$$

证明。 根据升权算子 $Y^{g/2}{}_{,+}{}^{1/2L}{}_{,z_j}$ 的定义，我们得到

$$\frac{(Y^{g/2,1/2L}_{+,z_j}\theta)(\tau,\boldsymbol{z})}{\theta(\tau,\boldsymbol{z})}=\frac{(\frac{\partial}{\partial z_j}\theta)(\tau,\boldsymbol{z})}{\theta(\tau,\boldsymbol{z})}+2\pi i\frac{\mathrm{Im}((G_L\boldsymbol{z})_j)}{\mathrm{Im}(\tau_j)}.$$

为了计算雅可比 theta 函数的对数导数，我们注意到

$$\frac{\partial}{\partial z_j}\sigma_{\Lambda_\tau}(\boldsymbol{z})=c(\tau)e^{-u(\tau)Q(\boldsymbol{z})}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}\theta\right)(\tau,\boldsymbol{z})-z_ju(\tau)c(\tau)e^{-u(\tau)Q(\boldsymbol{z})}\theta(\tau,\boldsymbol{z}),$$

这意味着

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z_j}\sigma_{\Lambda_\tau}(\boldsymbol{z})}{\sigma_{\Lambda_\tau}(\boldsymbol{z})}=e^{-u(\tau)Q(\boldsymbol{z})}\frac{(\frac{\partial}{\partial z_j}\theta)(\tau,\boldsymbol{z})}{\sigma(\tau,\boldsymbol{z})}-z_ju(\tau)e^{-u(\tau)Q(\boldsymbol{z})}\frac{\theta(\tau,\boldsymbol{z})}{\sigma(\tau,\boldsymbol{z})}.$$

因此，利用雅可比–魏尔斯特拉斯 σ-函数的定义 (4.1)，我们得到

$$\frac{\frac{\partial}{\partial z_j}\theta(\tau,\boldsymbol{z})}{\theta(\tau,\boldsymbol{z})}=\zeta_{\Lambda_\tau,j}(\boldsymbol{z})+z_ju(\tau). \tag{4.12}$$

□

4.3. 向量值雅可比–魏尔斯特拉斯形式。 现在我们固定 $g = k-2$，并引入向量值 Jacobi–Weierstrass 形式。令 $z \in \mathbb{C}^{k-1}$ 和 $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。令 (e_1, e_2) 表示 $\mathbb{C}^2$ 的标准基。我们回顾第 2.5 节中的记号，并将 $(\boldsymbol{z})_{(e_1,e_2)}$ 记作 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 中与 $\boldsymbol{z}$ 对应的元素。

定义 4.8。 沿用上述记号。我们定义向量值雅可比–魏尔斯特拉斯形式 如下:

$$(\widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}))_{(X_1,X_2)} = \sum_{j=0}^{k-2} \zeta^*_{z_j}(\boldsymbol{z}) c_j X_1^j X_2^{k-2-j}$$

其中 $c_j = \binom{k-2}{j}$ 同前，且 $(X_1, X_2) = M \circ (e_1, e_2)$。

在由标准基给出的同构 $\mathbb{C}^{k-1} \simeq \mathrm{Sym}^{k-1}(\mathbb{C}^2)$ 下，我们可以将$\widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}}$ 写为 $\widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}}((\boldsymbol{z})_{(e_1,e_2)})_{(X_1,X_2)}$。它定义了一个函数 $\widehat{\zeta} : \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2) \times \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$,$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$其中 $\zeta((\boldsymbol{z})_{(e_1,e_2)} M) = \zeta_{\boldsymbol{z}}((\boldsymbol{z})_{(e_1,e_2)})_{M\circ(e_1,e_2)}$。在定义中，我们省略了对格 $\Lambda_\tau = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$, $\tau \in \mathbb{H}$ 的依赖。固定一组基 (X_1, X_2)，我们得到以下直接由命题 4.6 推出的结果

$\widehat{\ }$**定理 4.9。** 函数 $(\zeta_{\boldsymbol{z}})_{(X_1,X_2)}$ 是一个权为 1 、指标为 0、关于格 Λ_τ^{k-1} 不变的（非全纯）雅可比形式。

注 4.10。 请注意，雅可比–魏尔斯特拉斯形式的定义涉及两组坐标。首先，我们有标准基下与 $\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{k-2}$ 对应的 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 中的元素。其次，雅可比–魏尔斯特拉斯函数本身是基 (X_1, X_2) 下 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 中的元素。

现在我们来考察雅可比–魏尔斯特拉斯形式的方向导数。回顾一下,

$$(\boldsymbol{z})^{\mathrm{t}}_{(e_1,e_2)} = \sum_{\ell=0}^{k-2} z_\ell c_\ell e_1^\ell e_2^{k-2-\ell}.$$

接着，我们将沿方向 $N(M)(\boldsymbol{z})^{\mathrm{t}}_{(e_1,e_2)}$的方向导数定义为

$$\zeta_{(N(M)\boldsymbol{z})_i}(\boldsymbol{z}) = \frac{\frac{\partial}{\partial (N(M)\boldsymbol{z})_i}\theta(\tau,\boldsymbol{z})}{\theta(\tau,\boldsymbol{z})}.$$

这里， $N(M)$ 是引理 2.6 中定义的矩阵，我们用 $(N(M)\boldsymbol{z})_i$ 表示向量 $N(M)\boldsymbol{z}$ 中的 i^{th} 项。我们考察全局雅可比–魏尔斯特拉斯 ζ-函数

$$(\zeta_{M^{-1}}(\boldsymbol{z}))_{(e_1,e_2)} = \sum_{\ell=0}^{k-2} \zeta_{(N(M)\boldsymbol{z})_\ell}(\boldsymbol{z}) c_\ell e_1^\ell e_2^{k-2-\ell}, \tag{4.13}$$

以及全局完备的 Jacobi–Weierstrass ζ-函数

$$\left(\widehat{\zeta}_{M^{-1}}(\boldsymbol{z})\right)_{(e_1,e_2)} = \sum_{\ell=0}^{k-2} \zeta^*_{(N(M)\boldsymbol{z})_\ell}(\boldsymbol{z}) c_\ell e_1^\ell e_2^{k-2-\ell}. \tag{4.14}$$

$\widehat{}$当我们想强调指标时，偶尔会使用记号 $\zeta_{N(M)\boldsymbol{z}}$ 和 $\zeta_{N(M)\boldsymbol{z}}$。为简化记号，在某些地方我们也将 $\left(\widehat{\zeta}_{M^{-1}}(\boldsymbol{z})\right)_{(e_1,e_2)}$ 写作 $\widehat{\zeta}_{M^{-1}}(\boldsymbol{z})$。

$\widehat{}$ $\widehat{}$我们注意到，在此记号下，$\zeta_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}) = \zeta_{Id}(\boldsymbol{z})$，并且我们证明，全局方向$\widehat{}$导数对应于 $\zeta_{\boldsymbol{z}}$ 的坐标变换。

引理 4.11。对于 $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，$\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^{k-1}$ 以及(X_1, X_2) 构成 $\mathbb{C}^2$ 的一组基，我们有

$$\left(\widehat{\zeta}_M(\boldsymbol{z})\right)_{(X_1,X_2)} = \left(\widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z})\right)_{M\circ(X_1,X_2)}.$$

证明。我们首先考虑定义 4.8 的非完备版本，即

$$(\zeta_M(\boldsymbol{z}))_{(X_1,X_2)} = \sum_{\ell=0}^{k-2} \zeta_{(N(M^{-1})\boldsymbol{z})_\ell}(\boldsymbol{z}) c_\ell X_1^\ell X_2^{k-2-\ell}.$$

根据定义，这等于（用向量记号表示）

$$\frac{1}{\theta(\tau,\boldsymbol{z})}\left(\frac{\partial}{\partial(N(M^{-1})\boldsymbol{z})_0}\theta(\tau,\boldsymbol{z}),\ldots,\frac{\partial}{\partial(N(M^{-1})\boldsymbol{z})_{k-2}}\theta(\tau,\boldsymbol{z})\right)^{\mathrm{t}}_{(X_1,X_2)}.$$

利用多变量微积分进行简单计算可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial(N(M^{-1})\boldsymbol{z})_0}\theta(\tau,\boldsymbol{z}),\ldots,\frac{\partial}{\partial(N(M^{-1})\boldsymbol{z})_{k-2}}\theta(\tau,\boldsymbol{z})\right)^{\mathrm{t}}_{(X_1,X_2)}\\ &\quad = N(M)\left(\frac{\partial}{\partial z_0}\theta(\tau,\boldsymbol{z}),\ldots,\frac{\partial}{\partial z_{k-2}}\theta(\tau,\boldsymbol{z})\right)^{\mathrm{t}}_{(X_1,X_2)}.\end{aligned}$$

因此，我们有

$$(\zeta_M(\boldsymbol{z}))_{(X_1,X_2)} = N(M)\,(\zeta_{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{z}))_{(X_1,X_2)}.$$

将此代入 Jacobi–Weierstrass 函数的补全中，即得所需结果。

□

5. 向量值 Jacobi–Weierstrass 作为极点调和弱 Maass 形式

在本节中，我们定义 Weierstrass 调和弱 Maass 形式的高权类比。全文中，设 f 是一个权为 k、属于 Γ 且具有有理傅里叶系数的新形式，其中 $\Gamma_1(N) \subset \Gamma$，且 N为某个整数。我们将使用 Eichler 积分 $\mathcal{E}_f(\tau,(X_1,X_2))$ 以及与第2.4节中的 f 相关的格 Λ_f。

我们用 V 表示无限维向量空间

$$V = \mathrm{Functions}\{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)\}.$$

Γ 在 V 上的作用由下式给出

$$\rho(\gamma)F(M) = \gamma \circ F(\gamma^{-1}M), \tag{5.1}$$

其中 $\gamma \in \Gamma$。这里，Γ 通过矩阵乘法作用于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，并按照第 2.5 节所述通过作用于基来作用于 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$。

定义 5.1。 令 $\tau \in \mathbb{H}$ 和 $M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。我们将向量值 *Jacobi–Weierstrass* 形式 定义为

$$F(\tau) := \left[M \mapsto \left(\widehat{\zeta}_M(\mathcal{E}_f(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2)))_{(e_1,e_2)} \right) \right]. \tag{5.2}$$

我们记

$$F(\tau, M) = \widehat{\zeta}_M(\Lambda_f, \mathcal{E}_f(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2)))_{(e_1,e_2)},$$

为 F 在 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 中的像，并在 $\widehat{\zeta}$ 的定义中省略对 Λ_f 的依赖。

注 5.2. 函数 F 在两个地方依赖于 $\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 所选取的基。我们指出两个重要的坐标变换。由引理 4.11 可知

$$F(\tau, M) = \left(\widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}} \left(\mathcal{E}_f \left(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2) \right) \right) \right)_{M \circ (e_1,e_2)}. \tag{5.3}$$

这也可以作为函数 $F(\tau, M)$ 的定义。

此外，函数内部还有第二个坐标变换，即改变 Eichler 积分的基。根据定义，我们有 $\mathcal{E}_f\left(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2)\right) = N(M^{-1})\mathcal{E}_f(\tau, (e_1, e_2))$，因此

$$F(\tau, M) = \left(\widehat{\zeta}_M \left(N(M^{-1}) \mathcal{E}_f \left(\tau, (e_1, e_2) \right) \right) \right)_{(e_1,e_2)}. \tag{5.4}$$

现在我们证明， F 定义了一个权为 0 的向量值极点调和弱 Maass 形式，它通过 ξ_0映射到取值于某个系数系统中的 f。

定理5.3。 函数 $F(\tau)$ 是一个权为0 的向量值极点调和弱 *Maass* 形式，对应于表示 ρ 的 Γ，其在 ξ_0 下的像为

$$G(\tau) = \frac{2\pi i}{\mathrm{Vol}(\Lambda_f)} f(\tau)\ G_L \cdot (\tau e_1 + e_2)^{k-2}.$$

这里， G_L 是与格 L 对应的格拉姆矩阵，它在构造雅可比–魏尔斯特拉斯 ζ-函数 $\widehat{\zeta}$时被隐式使用。对于 $\boldsymbol{z} = (z_0, \dots, z_{k-2})^t$，若其在 $\mathbb{C}^2$的基 (X_1, X_2) 下表示，则 $G_L = (g_{ij})_{0 \le i, j \le k-2}$的作用为

$$G_L \cdot (\boldsymbol{z})_{(X_1,X_2)} = \sum_{\ell=0}^{k-2} \left(\sum_{i=0}^{k-2} g_{\ell i} z_i \right) c_\ell X_1^\ell X_2^{k-2-\ell} = \sum_{i=0}^{k-2} z_i \left(\sum_{\ell=0}^{k-2} g_{\ell i} c_\ell X_1^\ell X_2^{k-2-\ell} \right). \tag{5.5}$$

注意，对于配备标准内积的格 $\mathbb{Z}^{k-1}$，定理可简化为

$$G(\tau) = \frac{2\pi i}{\mathrm{Vol}(\Lambda_f)} f(\tau)(\tau e_1 + e_2)^{k-2}.$$

注5.4. (1) 函数 $G : \mathbb{H} \to \mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 是一个权为 2 的全纯向量值模形式。

(2) 对于权 $k = 2$ 的特殊情形，可以构造一个具有代数傅里叶系数的模函数 M，它消除了 F 在上半平面上的所有极点（见 [AGOR15]，或定理3.1）。于是，$F + M$ 是一个调和弱 Maass 形式，其影子是新形式 f。loc. cit. 中给出的证明利用了如下众所周知事实的证明：$j(\tau)$ 和 $j(N\tau)$ 生成群 $\Gamma_0(N)$ 的模函数域（例如见 [Cox13，定理11.9]）。然而，据作者所知，关于(5.1)中的（无限维）表示 ρ，目前尚无模函数的系统理论能够一般性地证明类似结果。

我们分几个步骤证明定理5.3。首先证明各项 $\widehat{\zeta}_M\left(\mathcal{E}_f\left(\tau, M^{-1}\circ(e_1,e_2)\right)\right)$ 的 Γ-不变性。

引理 5.5。采用上述记号。对于 $\gamma\in\Gamma$，有

$$\widehat{\zeta}_M\left(\mathcal{E}_f\left(\tau,(\gamma^{-1}M)^{-1}\circ(e_1,e_2)\right)\right)=\widehat{\zeta}_M\left(\mathcal{E}_f\left(\gamma\tau,M^{-1}\circ(e_1,e_2)\right)\right).$$

证明。我们写作 $(X_1,X_2)=M^{-1}\circ(e_1,e_2)$，并注意到

$$(\gamma^{-1}M)^{-1}\circ(e_1,e_2)=(e_1,e_2)\,M^{-1}\gamma=(X_1,X_2)\,\gamma.$$

根据换基矩阵 $N(\cdot)$ 的定义，对于 Eichler 积分，我们有

$$\mathcal{E}_f\left(\tau,\gamma\circ(X_1,X_2)\right)=N(\gamma)\mathcal{E}_f(\tau,(X_1,X_2))\quad\text{and}\quad\mathcal{E}_f(\tau,(X_1,X_2))=N(M^{-1})\mathcal{E}_f(\tau,(e_1,e_2)).$$

此外，由引理 2.4 可得

$$\mathcal{E}_f(\gamma\tau,(X_1,X_2))=\mathcal{E}_f(\tau,\gamma\circ(X_1,X_2))-\omega,\tag{5.6}$$

其中 $\omega\in\Lambda_f^{k-1}$ 由基 $\gamma\circ(X_1,X_2)=(e_1,e_2)M^{-1}\gamma$ 表示，因此它是 $N(M^{-1}\gamma)\Lambda_f^{k-1}$ 的一个元素。由引理 2.8 可知 $N(M^{-1}\gamma)\Lambda_f^{k-1}=\Lambda_f^{k-1}$。因此我们得到

$$\mathcal{E}_f(\gamma\tau,M^{-1}\circ(e_1,e_2))-\mathcal{E}_f(\tau,(\gamma^{-1}M)^{-1}\circ(e_1,e_2))\in\Lambda_f^{k-1}.$$

由于根据命题 4.6，$\widehat{\zeta}_M$ 是 Λ_f^{k-1} -不变的，因此得证。 □

定理*5.3* 的证明。我们首先证明 F 在 Γ 的作用下不变。调和性（除可能的极点外）将由以下事实推出：$\xi_0(F)$ 是一个全纯尖点形式（取值于一个系数系统），因为拉普拉斯算子等于 $\Delta_k=-\xi_{2-k}\circ\xi_k$。

令 $\gamma\in\Gamma$。对于 $M\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 和 $\tau\in\mathbb{H}$，我们需要证明

$$F(\gamma\tau,M)=\rho(\gamma)F(\tau,M),$$

其中作用 $\rho\colon\Gamma\to\mathrm{End}(V)$ 已在（5.1）中定义，因此

$$\rho(\gamma)F(\tau,M)=\gamma\circ\left(\widehat{\zeta}_{(\gamma^{-1}M)}\left(\mathcal{E}_f\left(\tau,\left((\gamma^{-1}M)^{-1}\right)\circ(e_1,e_2)\right)\right)\right)_{(e_1,e_2)}.$$

根据引理 4.11，这等于

$$\gamma \circ \widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}} \left(\mathcal{E}_f(\tau, \left(\gamma^{-1} M\right)^{-1} \circ (e_1, e_2)) \right)_{(e_1,e_2)\gamma^{-1}M}$$

并且这个表达式化简为

$$\widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}} \left(\mathcal{E}_f(\tau, \left(\gamma^{-1} M\right)^{-1} \circ (e_1, e_2)) \right)_{(e_1,e_2)\gamma\gamma^{-1}M} = \widehat{\zeta}_M \left(\mathcal{E}_f(\tau, \left(\gamma^{-1} M\right)^{-1} \circ (e_1, e_2)) \right)_{(e_1,e_2)}.$$

最后，我们使用引理 5.5，得到

$$\rho(\gamma) F(\tau, M) = \widehat{\zeta}_M \left(\mathcal{E}_f \left(\gamma\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2) \right) \right)_{(e_1,e_2)} = F(\gamma\tau, M).$$

Now 我们将计算 $F(\tau, M)$ 在 $\xi_0 = -2i\overline{\frac{\partial}{\partial \tau}}$ 下的像。这给出了一个函数 n

$$g(\tau, M) = \xi_0 F(\tau, M),$$

其中 $g\colon\ \mathbb{H} \to V$。我们将显式计算 g，并证明它在 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 上确为常数。我们写作

$$F(\tau, M) = \left(\widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}} \left(\mathcal{E}_f(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2)) \right) \right)_{(Y_1,Y_2)}, \tag{5.7}$$

其中 $(Y_1, Y_2) = M \circ (e_1, e_2)$，并考虑基 (Y_1, Y_2) 中的每个坐标 $\zeta^*_{z_\ell}$。由引理 4.7 得到

$$\zeta^*_{z_\ell}(\boldsymbol{z}) = \zeta_{z_\ell}(\boldsymbol{z}) - u(\tau_f) z_\ell + 2\pi i \frac{\mathrm{Im}((G_L \boldsymbol{z})_\ell)}{\mathrm{Im}(\tau_f)}.$$

将 $\mathrm{Im}(z) = (z - \overline{z})/2i$ 代入 $\boldsymbol{z} = \mathcal{E}_f(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2)))$，我们得到

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \overline{\tau}} \zeta^*_{z_\ell} \left(\mathcal{E}_f \left(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2) \right) \right)} = -\frac{\pi}{\mathrm{Im}(\tau_f)} \overline{\left(G_L \frac{\partial}{\partial \overline{\tau}} \overline{\mathcal{E}_f \left(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2) \right)} \right)_\ell}.$$

由于 G_L 计入了从 (5.5) 的基变换

$$G_L \cdot (\boldsymbol{z})_{(Y_1,Y_2)} = \sum_{i=0}^{k-2} z_i \left(\sum_{\ell=0}^{k-2} g_{\ell i} c_\ell Y_1^\ell Y_2^{k-2-\ell} \right),$$

只需计算各个分量 $\frac{\partial}{\partial \overline{\tau}} \left(\mathcal{E}_f(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2)) \right)_\ell$，其中

$$\left(\mathcal{E}_f \left(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2) \right) \right)_\ell = \int_\tau^\infty f(t)(dt - b)^\ell (-ct + a)^{k-2-\ell} dt,$$

以及 $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。由此可得

$$\overline{\frac{\partial}{\partial \tau} \overline{\left(\mathcal{E}_f \left(\tau, M^{-1} \circ (e_1, e_2) \right) \right)_\ell}} = f(\tau)(d\tau - b)^\ell (-c\tau + a)^{k-2-\ell}$$

并且通过 G_L 的作用，我们得到

$$\begin{aligned}\xi_0 F(\tau,M) &= \frac{2\pi i}{\operatorname{Im}(\tau_f)} G_L \cdot \sum_{\ell=0}^{k-2} f(\tau)(d\tau-b)^{\ell}(-c\tau+a)^{k-2-\ell} c_\ell Y_1^{\ell} Y_2^{k-2-\ell} \\ &= \frac{2\pi i}{\operatorname{Im}(\tau_f)} f(\tau)\ G_L \cdot \Big((dY_1 - cY_2)\tau + (-bY_1 + aY_2)^{k-2}\Big) \\ &= \frac{2\pi i}{\operatorname{Im}(\tau_f)} f(\tau)\ G_L \cdot \Big(M^{-1} \circ (Y_1\tau + Y_2)^{k-2}\Big) \\ &= \frac{2\pi i}{\operatorname{Im}(\tau_f)} f(\tau)\ \Big(G_L \cdot (e_1\tau + e_2)^{k-2}\Big).\end{aligned}$$

最后一个表达式与 M 无关。全纯性显然，而模性由 (2.7) 推出。此外，我们看到 $F(\tau)$ 是调和的。

剩下需要证明的是，当 τ 趋近于 Γ 的一个尖点时， F 至多呈线性指数增长。为此，任取 $\sigma \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$。如引理 2.2 的证明中所作的相同计算表明，

$$\mathcal{E}_f(\sigma\tau, M^{-1}\circ(e_1,e_2)) = \mathcal{E}_{f|\sigma}(\tau, M^{-1}\sigma\circ(e_1,e_2)) + C$$

对于某个常向量 C。由于 f 是尖点形式，并且根据定义， $f|\sigma$ 给出了 f 在尖点 $\sigma\infty$ 处的傅里叶展开，因此当 $\tau\to\infty$ 时它呈指数衰减。由于 θ 关于所有椭圆变量都是全纯的，因此 θ 的偏对数导数在 θ 的除子处至多具有有限阶极点。但这意味着，当 $\tau\to\infty$ 时，如果 C 位于 θ 的除子中， $F(\sigma.\tau, M)$ 的解析部分至多呈线性指数增长；否则它有界。这就证明了该结论，因为非解析部分显然有界。□

6. 洛朗展开与极点

在雅可比θ函数的定义中，我们允许在 $\mathbb{Z}^g$ 上取任意正定整双线性形式。尤其是在计算例子时（见第 7 节），采用标准双线性形式并允许非平凡特征会最为方便。接下来我们定义

$$\theta(\tau,\boldsymbol{z}) = \sum_{n\in\left(\frac{1}{2}+\mathbb{Z}\right)} e^{\pi i\left(\sum_i n_i^2\right)\tau + 2\pi i\sum_i n_i z_i} = \prod_{i=1}^{g}\vartheta(\tau,z_i). \tag{6.1}$$

在这种设定下，我们立即从 (4.8) 得到

$$\zeta^*_{z_j}(\tau,\boldsymbol{z}) = \frac{Y_{+,z_j}^{g/2,1/2}\theta(\tau,\boldsymbol{z})}{\theta(\tau,\boldsymbol{z})} = \frac{Y_{+,z_j}^{1/2,1/2}\vartheta(\tau,z_j)}{\vartheta(\tau,z_j)} = \zeta^*_{\Lambda_\tau}(z_j),$$

其中， ζ^* 这里表示通常的 $g=1$ Weierstrass ζ-函数的补全。

同样，定义式 (5.2) 中函数 F 所涉及的方向导数可显式表示为

$$\widehat{\zeta}_{(N(M^{-1})\boldsymbol{z})_j}(\tau,\boldsymbol{z})=\sum_i N(M)_{ij}\zeta^*_{\Lambda_\tau}(z_i),$$

这直接由方向导数的定义得出，其中 $N(M)=\{N(M)_{ij}\}_{0\le i,\ j\le k-2}$。我们回顾完备 Weierstrass ζ 函数的洛朗展开

$$\zeta^*_{\Lambda_\tau}(z)=\frac{1}{z}-\sum_{n\ge1}G_{2n+2}(\Lambda_\tau)z^{2n+1}-S(\Lambda_\tau)z-\frac{\pi}{\mathrm{Im}(\tau)}\overline{z},$$

其中 $G_{2n}(\Lambda)=\sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}}\omega^{-2n}$ 是权为 $2n$ 的经典 Eisenstein 级数，而 $S(\Lambda_\tau)=\lim_{s\to0^+}\sum_{\omega\in\Lambda_\tau\setminus\{0\}}\frac{1}{\omega^2|\omega|^{2s}}$。

对于 Jacobi–Weierstrass ζ 函数的洛朗展开

$$\widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}}(\tau,\boldsymbol{z})=\sum_{\ell=0}^{k-2}\zeta^*_{\Lambda_\tau}(z_\ell)e_1^\ell e_2^{k-2-\ell}c_\ell$$

于是我们得到以下结果

引理 6.1. 采用标准格的选取，*Jacobi–Weierstrass*ζ函数 $\zeta_{\boldsymbol{z}}$ 的洛朗展开为

$$\zeta_{\boldsymbol{z}}(\tau,\boldsymbol{z})=\sum_{\ell=0}^{k-2}\frac{1}{z_\ell}e_1^\ell e_2^{k-2-\ell}c_\ell+\sum_{n\ge1}G_{2n+2}(\Lambda_\tau)\sum_{\ell=0}^{k-2}z_\ell^{2n+1}e_1^\ell e_2^{k-2-\ell}c_\ell.$$

此外，其补全的洛朗展开为

$$\widehat{\zeta}_{\boldsymbol{z}}(\tau,\boldsymbol{z})=\zeta_{\boldsymbol{z}}(\tau,\boldsymbol{z})-S(\Lambda_\tau)\sum_{\ell=0}^{k-2}z_\ell e_1^\ell e_2^{k-2-\ell}c_\ell-\frac{\pi}{\mathrm{Im}(\tau)}\overline{z_\ell}e_1^\ell e_2^{k-2-\ell}c_\ell.$$

注意，代入 $\mathcal{E}_f(\tau,(e_1,e_2))$ 后，我们得到向量值函数$F(\tau,Id):\ \mathbb{H}\to\mathrm{Sym}^{k-2}(\mathbb{C}^2)$ 的极点，其中 $\tau\in\mathbb{H}$ 满足

$$\mathcal{E}_\ell(\tau,(e_1,e_2))\in\Lambda_f.$$

该理论很容易推广到一般的 $M\in\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$，其中

$$\zeta_{M^{-1}}(\Lambda_\tau,N(M^{-1})\boldsymbol{z})=\sum_{\ell=0}^{k-2}\zeta_{\Lambda_\tau}((N(M^{-1})\boldsymbol{z})_\ell)X_1^\ell X_2^{k-2-\ell}c_\ell,$$

其中 $(X_1,X_2)=M\circ(e_1,e_2)$，以及其补全版本。

引理 6.2。 *Jacobi–Weierstrass* ζ-函数 $\zeta_{M^{-1}}(\Lambda,\ (\boldsymbol{z})_{M^{-1}})$的洛朗展开为

$$\zeta_{M^{-1}}(\Lambda,(\boldsymbol{z})_{M^{-1}})=\sum_{\ell=0}^{k-2}\frac{1}{(\boldsymbol{z})_{M^{-1},\ell}}X_1^\ell X_2^{k-2-\ell}c_\ell+\sum_{k\ge0}G_{k-2}(\Lambda)\sum_{\ell=0}^{k-2}(\boldsymbol{z})_{M^{-1},\ell}^{k-1}X_1^\ell X_2^{k-2-\ell}c_\ell,$$

其中 $(X_1,\ X_2) = M\circ(e_1,\ e_2)$，且 $(\boldsymbol{z})_{M^{-1}},\ \ell =(N(M^{-1})(\boldsymbol{z}))_l$是向量 $N(M^{-1})(\boldsymbol{z})$的第 ℓ^{th} 个分量。我们可对补全得到类似的展开

$$\widehat{\zeta}_{M^{-1}}(\Lambda,(\boldsymbol{z})_{M^{-1}}) = \zeta_{M^{-1}}(\Lambda,(\boldsymbol{z})_{M^{-1}}) + S(\Lambda_\tau)\sum_{\ell=0}^{k-2} z_\ell X_1^\ell X_2^{k-2-\ell} c_\ell - \frac{\pi}{\operatorname{Im}(\tau)}\overline{z_\ell} X_1^\ell X_2^{k-2-\ell} c_\ell.$$

我们回顾，$F(\tau,M) = \widehat{\zeta}_{M^{-1}}\left(\Lambda_f, N(M^{-1})\mathcal{E}_f(\tau,(e_1,e_2))\right)$。因此，对于$\mathbb{Z}^{k-1}$ 上对称形式的标准选取，我们可以显式计算 Jacobi–Weierstrass ζ-函数的极点。

命题 6.3. 在上述条件下，极点调和弱 *Maass* 形式 $F\colon\ \mathbb{H}\to V$在满足以下条件的值 $\tau\in\mathbb{H}$ 处有一阶极点1：存在 $M\in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 以及 $0\le \ell\le k-1$，使得

$$(N(M^{-1})\mathcal{E}_f(\tau,(e_1,e_2)))_\ell \in \Lambda_f.$$

7. 例子

我们考虑上一节的设定。具体而言，在 Jacobi–Weierstrass ζ-函数的定义中，我们将格L 选为标准格 $\mathbb{Z}^{k-1}$，并采用标准双线性形式。我们还只需将单位矩阵代入函数 F，即可求出其像。

7.1. 的魏尔斯特拉斯形式 Δ。考虑拉马努金 -函数,

$$\Delta(\tau) := q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24} = \sum_{n\ge1}\tau(n)q^n.$$

利用 Pari/Gp [BBB$^+$] 中内置的模符号函数，我们可以计算 Δ 的周期格。由于 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 由 $T=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ 和 $S=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ 生成，周期格由周期多项式 $\int_0^\infty \Delta(t)(e_1+te_2)^{10}dt$ 的系数生成，它等于

$$\alpha\left(e_1^{10} - \frac{691}{1620}\binom{10}{8}e_1^8e_2^2 + \frac{691}{2520}\binom{10}{6}e_1^6e_2^4 - \frac{691}{2520}\binom{10}{4}e_1^4e_2^6 + \frac{691}{1620}\binom{10}{2}e_1^2e_2^8 - e_2^{10}\right)$$
$$+\beta\left(\binom{10}{9}e_1^9e_2 - \frac{25}{48}\binom{10}{7}e_1^7e_2^3 + \frac{5}{12}\binom{10}{5}e_1^5e_2^5 - \frac{25}{48}\binom{10}{3}e_1^3e_2^7 + \binom{10}{1}e_1e_2^9\right).$$

with

$$\alpha = 0.00595896\ldots i \quad\text{and}\quad \beta = 0.00370771\ldots.$$

因此我们看到，Δ 的周期格为

$$\Lambda_\Delta = \omega_1\mathbb{Z}\oplus\omega_2\mathbb{Z}$$

其中 $\omega_1 = \frac{1}{48}\beta = 7.7243968...\cdot 10^{-7}$ 和 $\omega_2 = 2.6274096...\cdot 10^{-7}i$。

^根据这些数据，我们可以计算完备函数 $\zeta_{\Lambda_\Delta}(z)$ 的洛朗展开，近似为

$$\begin{aligned}\widehat{\zeta}_{\Lambda_\Delta}(z) = z^{-1} + 0.0016910\ldots z - 45423002964178858961307673 4.309657\ldots z^3 + O(z^5)\\ - 154795208574.9957812\ldots \overline{z}.\end{aligned}$$

为便于说明，我们只考虑 Eichler 积分

$$\mathcal{E}_{\Delta,0}(\tau) = \frac{1}{2\pi}(q - 12q^2 + 84q^3 - 368q^4 + 966q^5 - 1008q^6) + O(q^7)$$

因为它有适当的傅里叶展开。将其代入上述洛朗展开的全纯部分，可得到向量值调和弱 Maass形式F 的第 0 个分量，其中 Δ是函数（或者说，是它的全纯部分），

$$\begin{aligned}\pi\big(q^{-1} + 12 + 60.0000428\ldots q + 79.999485\ldots q^2\\ -2914448389904588269407 12.635494\ldots q^3 + O(q^4)\big).\end{aligned}$$

我们注意到，傅里叶系数增长非常快。例如， q^{10} 的系数约为 $1.33163 \cdot 10^{61}$.

由于可以相当高效地计算 Eichler积分 $\mathcal{E}_{\Delta,\ \ell}(\tau)$，我们可以通过对所构造的函数 F 进行数值计算，并让 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的元素作用于这些数值，来展示其模性。

例如，设 $\tau = 2i$ 和 $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$。在标准基 $\{\binom{10}{\ell} e_1^\ell e_2^{10-\ell}\}$ 中， $\mathcal{E}_\Delta(\tau, (e_1, e_2))$的系数为

$$v = \begin{pmatrix} -17511.494570\ldots i \\ 7431.817430\ldots \\ 3204.517440\ldots i \\ -1400.899032\ldots \\ -619.775633\ldots i \\ 277.055319\ldots \\ 124.975219\ldots i \\ -56.821709\ldots \\ -26.014701\ldots i \\ 11.983426\ldots \\ 5.550045\ldots i \end{pmatrix} \cdot 10^{-7}.$$

另一方面，我们计算得，在标准基下， $\mathcal{E}_\Delta(\gamma\tau)$为

$$\begin{pmatrix} -68.879683\ldots + 42.252473\ldots i \\ 36.852496\ldots - 27.426477\ldots i \\ -19.386784\ldots + 17.474359\ldots i \\ 9.977402\ldots - 10.932230\ldots i \\ -4.995272\ldots + 6.715450\ldots i \\ 2.416272\ldots - 4.051512\ldots i \\ -1.118039\ldots + 2.402667\ldots i \\ 0.4863669\ldots - 1.402420\ldots i \\ -0.191789\ldots + 0.806993\ldots i \\ 0.062025\ldots - 0.458557\ldots i \\ -0.009620\ldots + 0.257699\ldots i \end{pmatrix} = N(\gamma^{-1})v + \begin{pmatrix} -23814000\omega_1 \\ 11895660\omega_1 + 12960\omega_2 \\ -5251302\omega_1 - 12912\omega_2 \\ 1943634\omega_1 + 9159\omega_2 \\ -503319\omega_1 - 5456\omega_2 \\ -14030\omega_1 + 2860\omega_2 \\ 136923\omega_1 - 1336\omega_2 \\ -123396\omega_1 + 551\omega_2 \\ 81046\omega_1 - 192\omega_2 \\ -45360\omega_1 + 48\omega_2 \\ 22680\omega_1 \end{pmatrix}.$$

I确实，将 $\zeta^*_{\Lambda_\Delta}(z)$作用于这些向量的每个分量，得到的近似值为 y

$$\begin{pmatrix} -11432504.181072\ldots - 6.201719\ldots\cdot 10^{-12}i \\ 6701461.733071\ldots \\ -6966824.048050 \\ 2360012.1697371\ldots \\ 6631363.825398 \\ 10786753.122386\ldots + 8.786101\ldots\cdot 10^{-33}i \\ -8634302.260257\ldots \\ -92484.930082\ldots \\ 9744076.055919\ldots + 5.980872\ldots\cdot 10^{-68}i \\ -11495943.166401 - 2.586110\ldots\cdot 10^{-9}i \\ 1267421.546264\ldots \end{pmatrix}.$$

应用 ζ^* 后，这些向量所得结果之间的差小于 10^{-96}；计算精度为 115 位有效数字。

7.2. **复乘形式的一个魏尔斯特拉斯形式**。我们考虑新形式

$$f(\tau) = \eta(3\tau)^8 = q - 8q^4 + 20q^7 - 70q^{13} + 64q^{16} + 56q^{19} + O(q^{21}) \in S_4(\Gamma_0(9)).$$

注意，此形式具有由域 $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ 给出的复乘。注意，存在一个定义在 $\mathbb{Q}$ 上的刚性卡拉比–丘三维簇 X，使得 $L(X,s) = L(f,s)$（比较 [WvG90]）。

群 $\Gamma_0(9)$ 由抛物元素 T 和 $-I_2$以及矩阵$\sigma_1 = \left(\begin{smallmatrix} 4 & -1 \\ 9 & -2 \end{smallmatrix}\right)$ 和 $\sigma_2 = \left(\begin{smallmatrix} 7 & -4 \\ 9 & -5 \end{smallmatrix}\right)$生成。因此， f的周期格由下列多项式中的系数生成

$$\begin{aligned} p_1 &= \int_{\sigma_1.\infty}^{\infty} f(t)(te_1 + e_2)^2 dt \\ &= -0.693005\binom{2}{2}e_1^2 + (0.288752 + 0.033342i)\binom{2}{1}e_1e_2 \\ &\quad + (-0.115500 - 0.022228i)\binom{2}{0}e_2^2 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} p_2 &= \int_{\sigma_2.\infty}^{\infty} f(t)(te_1 + e_2)^2 dt \\ &= (0.346502 - 0.600160i)\binom{2}{2}e_1^2 + (-0.288752 + 0.433449i)\binom{2}{1}e_1e_2 \\ &\quad + (0.231001 - 0.311194i)\binom{2}{0}e_2^2. \end{aligned}$$

一个基底，用于 由这些系数生成的格为 $\mathbb{C}$，其基由 $\Lambda_f = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$ 给出 h

$$\omega_1 = 0.057750 \quad \text{and} \quad \omega_2 = 0.011114i.$$

$\widehat{}$由此，我们可以计算 $\zeta_{\Lambda_f}(z)$ 的洛朗展开，得到

$$z^{-1} + 21739.040942z - 141870582.946988z^3 + 1079581634085.963275z^5 + O(z^7) + 4894.639140\overline{z}.$$

由于系数 $\mathcal{E}_{f,\ 0}(\tau)$ 具有傅里叶展开，我们可以将其代入这个展开式，从而得到我们的调和弱 Maass 形式的全纯部分的第 0 个分量的表达式，

$$\pi\left(q^{-1}+21739.040942q+8q^2-141870582.946988q^3-173912.327537q^4++O(q^5)\right).$$

现在我们选取上半平面中的某个点，例如 $\tau=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$。在标准基 $\{e_1^2,2e_1e_2,e_2^2\}$ 中，我们得到值

$$\mathcal{E}_f(\tau,(e_1,e_2))=\begin{pmatrix}5.792643+7.706733i\\-5.792643+1.954292i\\-3.908585i\end{pmatrix}\cdot 10^{-5}.$$

另一方面，我们计算

$$\mathcal{E}_f(\sigma_1\tau,(e_1,e_2))=\begin{pmatrix}-0.115037-0.020877i\\0.287651+0.030313i\\-0.690398+0.006789i\end{pmatrix}=v_1+\begin{pmatrix}-2\\5\\-12\end{pmatrix}\omega_1+\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}\omega_2$$

and

$$\mathcal{E}_f(\sigma_2\tau,(e_1,e_2))=\begin{pmatrix}0.230596-0.306949i\\-0.288288+0.427988i\\0.345981-0.593136i\end{pmatrix}=v_2+\begin{pmatrix}4\\-5\\6\end{pmatrix}\omega_1+\begin{pmatrix}-28\\39\\-54\end{pmatrix}\omega_2.$$

$\widehat{\ }$将上述任一向量代入 $\zeta_{\Lambda_f}(z)$，得到

$$\begin{pmatrix}235.526014-626.338523i\\-129.035666+208.728000i\\165.268142+59.208840i\end{pmatrix}\quad\text{resp.}\quad\begin{pmatrix}-33.090396-108.245540i\\32.306903+7.539680i\\-44.064442+121.275441i\end{pmatrix}.$$

参考文献

[AGOR15] Claudia Alfes, Michael Griffin, Ken Ono, and Larry Rolen. 魏尔斯特拉斯拟模形式与椭圆曲线。数论研究, 1:Paper No. 24, 31, 2015.[ARZ13] George E. Andrews, Robert C. Rhoades, and Sander P. Z wegers. 凹合成生成函数的模性。代数与数论, 7(9):2103–2139, 2013.[BBB+] C. Batut, K. Belabas, D. Benardi, H. Cohen, and M. Olivier. *PARI-GP* 用户指南. 可通过匿名 ftp 从 ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/pari 获取。[BF04] Jan H. Bruinier and Jens Funke. 关于两个几何 θ 提升。《杜克数学杂志》, 125(1):45–90, 2004.[BFOR17] Kathrin Bringmann, Amanda Folsom, Ken Ono, and Larry Rolen. 调和 *Maass* 形式与拟模形式：理论与应用，载于美国数学会专题讲座出版物第 64 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2017.[BK93] Siegfried Böcherer and Winfried Kohnen. Siegel 尖点形式傅里叶系数的估计。《数学年刊》, 297(3):499–517, 1993.[BM21] Lea Beneish and Michael H. Mertens. 关于魏尔斯特拉斯拟模形式及某些顶点算子代数的维数公式。《数学杂志》, 297(1-2):59–80, 2021.[BO07] Kathrin Bringmann and Ken Ono. 将尖点形式提升为 Maass 形式及其在分拆中的应用。《美国国家科学院院刊》, 104(10):3725–3731, 2007.[BOR08] Jan H. Bruinier, Ken Ono, and Robert C. Rhoades. 调和弱 Maass 形式的微分算子与 Hecke 特征值的消失。《数学年刊》, 342(3):673–693, 2008.[Boy15] Hatice Boylan.数域上的雅可比形式、有限二次模与 *Weil* 表示，载于《数学讲义》第 2130 卷。Springer，开姆尼茨，2015。附有 Nils-Peter Skoruppa 撰写的序言。

[BRR15] Kathrin Bringmann, Martin Raum, and Olav K. Richter. 具有奇点的调和 Maass-雅可比形式及其类 theta 分解。《美国数学会汇刊》, 367(9):6647–6670, 2015.[Bru02] J. H. Bruinier. O(2, *l*) 上的 Borcherds 乘积与 Heegner 除子的陈类，载于《数学讲义》第 1780 卷。Springer-Verlag，柏林，2002.[Cox13] David A. Cox. 形如 $x^2 + ny^2$ 的素数。纯粹与应用数学（霍博肯）。John Wiley & Sons, Inc.，霍博肯，新泽西州，第二版，2013。费马、类域论与复乘。[DMZ23] Atish Dabholkar, Sameer Murthy, and Don B. Zagier. 量子黑洞、壁穿越与拟模形式。《剑桥数学物理专著》，即将出版，2023.[ELS22] Stephan Ehlen, Yingkun Li, and Markus Schwagenscheidt. 与复乘新形式相关的调和 Maass 形式。预印本，见 https://arxiv.org/abs/2210.07341，2022.[Gue15] Pavel Guerzhoy. Kaneko-Zagier 方程的混合模拟模解。《拉马努金期刊》, 36(1-2):149–164, 2015.[KS60] Michio Kuga and Goro Shimura. 附属于自守形式的向量微分形式。《日本数学会杂志》, 12:258–270, 1960.[MMR22] Joshua Males, Andreas Mono, and Larry Rolen. 极点调和 Maaß 形式与全纯投影。《国际数论杂志》, 18(9):1975–2004, 2022.[MOR21] Michael H. Mertens, Ken Ono, and Larry Rolen. 具有 Nebentypus 特征的模拟模 Eisenstein 级数。《国际数论杂志》, 17(3):683–697, 2021.[Nie74] Douglas Niebur. 自守形式与积分的构造。《美国数学会汇刊》, 191:373–385, 1974.[Pol03] Alexander Polishchuk. 阿贝尔簇、theta 函数与傅里叶变换，载于《剑桥数学丛书》第 153 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2003.[Rol16] Larry Rolen. 魏尔斯特拉斯 ζ 函数的艾森斯坦完备化的一种新构造。《美国数学会会刊》, 144(4):1453–1456, 2016.[Ste07] William Stein. 模形式：一种计算方法，载于《数学研究生丛书》第 79 卷。美国数学会，普罗维登斯，罗德岛州，2007。附录由 Paul E. Gunnells 撰写。[WvG90] Jürgen Werner and Bert van Geemen. 具有 $c_1 = 0$ 的三维簇新例子。《数学杂志》, 203(2):211–225, 1990.[Zag09] Don B. Zagier. 拉马努金模拟 theta 函数及其应用（根据 Zwegers 与 Ono- Bringmann）。第 326 期，第 986 号报告，vii–viii、143–164 页（2010）。2009。布尔巴基研讨班。2007/2008 卷。[Zwe02] Sander Zwegers. 模拟 theta 函数。博士论文，乌得勒支大学博士论文，2002。

比勒费尔德大学，数学系，邮政信箱 100 131，33501 比勒费尔德，德国，电子邮件：alfes@math.uni-bielefeld.de

杜伦大学，数学科学系，科学实验室，South Rd，杜伦 DH1 3LE，英国，电子邮件：jens.funke@durham.ac.uk

科隆大学，数学/信息学系，数学部，Weyertal 86–90，50931 科隆，德国，电子邮件：mmertens@math.uni-koeln.de

莱顿大学，数学研究所，尼尔斯·玻尔路1号，2333 CA 莱顿莱顿，荷兰电子邮件：e.rosu@math.leidenuniv.nl