arXiv:2303.01472v1 [math.NA] 2 Mar 2023

针对对流 Brinkman–Forchheimer 问题的增广混合有限元方法：先验与后验误差分析*

Sergio Caucao† Johann Esparza†

摘要

我们针对 R^d, $d \in \{2,3\}$ 中定常对流 Brinkman–Forchheimer 问题的伪应力-速度形式，提出并分析了一种增广混合有限元方法。由于对流项和 Forchheimer 项迫使速度属于比通常更小的空间，我们在变分形式中加入了适当的 Galerkin 型项。所得增广格式可等价地写成一个不动点方程，因此结合 Lax–Milgram 定理以及众所周知的 Schauder 定理和 Banach定理，可以证明连续问题具有唯一解。有限元离散化采用阶数为 $k \geq 0$ 的 Raviart–Thomas 空间表示伪应力张量，并采用次数为 $\leq k+1$的连续分片多项式表示速度。我们得到了相应 Galerkin 格式的稳定性、收敛性以及先验误差估计。此外，我们针对任意多边形和多面体区域上的该问题，推导了两个可靠且高效的基于残差的后验误差估计子。所提出估计子的可靠性主要依赖于相关形式的一致椭圆性、关于数据的适当假设、稳定的亥姆霍兹分解，以及 Cl´ement 算子和 Raviart–Thomas 算子的局部逼近性质。另一方面，逆不等式、基于泡函数的局部化技术，以及先前工作中的已知结果，是得到效率估计的主要工具。最后，报告了一些数值算例，用于说明混合有限元方法的性能、验证理论收敛阶和估计子的性质，并展示相应自适应算法的行为。特别地，我们考虑了具有裂隙网络的二维多孔介质中的流动情形。

关键词：对流 Brinkman–Forchheimer 方程、伪应力-速度形式、不动点理论、混合有限元方法、先验误差分析、后验误差分析

数学主题分类（2000）：65N30, 65N12, 65N15, 35Q79, 80A20, 76R05, 76D07

1 引言

本文采用定常对流 Brinkman–Forchheimer 方程，重点研究高雷诺数下流体在高孔隙率多孔介质中流动的数学与计算建模。这类流动广泛存在于各种应用中，其中包括石油、化学和环境工程领域中的过程预测与控制。地下快速流动可能发生在裂缝状或溶洞状含水层或储层中，也可能发生在地下水修复或油气生产过程中注入井和生产井附近。许多

*本研究部分获得智利国家研究与发展署资助，资助项目为 Centro de Modelamiento Matemático(FB210005)，以及国家科学技术发展基金项目 11220393。

†智利圣西马康塞普西翁天主教大学应用数学与物理系，邮政信箱297，康塞普西翁，智利；以及数值分析与科学计算研究组 GIANuC$_2$，康塞普西翁，智利。电子邮箱：scaucao@ucsc.cl，jesparza@magister.ucsc.cl

多孔介质研究主要集中于达西定律的应用。然而，对于高雷诺数多孔介质中的流体流动，或高孔隙率介质中的流动，这一基本方程可能无法进行准确建模。为克服这一局限，可以考虑对流 Brinkman–Forchheimer 方程（例如参见 [11, 33, 28, 32]），在达西定律中加入相关项，以考虑高速流动和高孔隙率的影响。

据作者所知， [11]是最早分析对流 Brinkman–Forchheimer（CBF）方程的研究之一。该研究中，作者证明了解关于 Forchheimer 系数在 H^1 范数下连续依赖性的完整分析。随后， [33], 提出并分析了通过人工可压缩性方法对不可压缩 CBF 方程的解进行逼近的方法，并引入了一族扰动的可压缩 CBF 方程，用以逼近不可压缩 CBF 方程。研究证明了可压缩 CBF 方程的解存在，且收敛于不可压缩 CBF 方程的解。最近， [28]分析了二维定常 CBF 方程。该研究聚焦于相应速度-压力变分形式的适定性。具体而言，研究获得了混合有限元逼近的误差估计，并提出了一种以不动点迭代为初值的单步牛顿迭代算法。另一方面， [32]证明了三维不可压缩 CBF 方程的轴对称解存在且唯一。同时， [10] 分析了非定常 Brinkman–Forchheimer 方程的混合伪应力-速度形式。该研究在巴拿赫空间框架下建立了弱形式解的存在唯一性，并提出了半离散的连续时间逼近和全离散混合有限元逼近，证明其收敛率未达最优。

本文旨在针对定常对流 Brinkman–Forchheimer 问题构建并分析一种新的混合形式，并采用增广混合有限元方法研究其数值逼近。为此，不同于已有工作，我们如 [4] 中那样引入伪应力张量（另见 [3, 2, 21]），随后利用不可压缩性条件消去压力未知量。此外，通过如 [4, 14, 21, 6] 中那样，以源于本构方程和速度狄利克雷边界条件的残差增广变分形式，解决了流体速度属于 $\mathbf{H}^1$ 而非通常的 $\mathbf{L}^2$ 所带来的困难。然后，我们结合经典不动点论证与 Lax–Milgram 定理，证明连续形式和离散形式的适定性。特别地，对于连续形式，在小数据假设下，我们采用不动点策略证明解的存在性和唯一性，其中分别利用 Schauder（用于存在性）和 Banach（用于唯一性）不动点定理。对于数值格式，其可解性以类似于连续情形的方式得到证明，但在存在性结果中使用布劳威尔不动点定理替代 Schauder 不动点定理；我们采用 $k \geq 0$ 阶 Raviart–Thomas 空间逼近伪应力张量，并采用 $k+1$ 次连续分片多项式逼近速度。此外，通过应用一个特设的 Strang 型引理，我们能够推导相应的先验误差估计，并证明该方法以最优速率收敛。

接下来，我们采用 [20], [22], [21], [15], [5],和 [7] 中针对希尔伯特空间上的增广混合公式所发展的后验误差分析技术，并针对当前的增广混合有限元方法，在二维和三维情形下发展两种可靠且高效的基于残量的后验误差估计子。更确切地说，在每种情形下，我们都推导出一个全局量 Θ ，该全局量由定义在给定三角剖分 $\mathcal{T}$的每个单元 T 上的可计算局部指标 Θ_T 表示。随后，可以利用这些信息定位误差源，并构造一种算法以高效地调整网格。这样，如果存在一个与网格尺寸无关的正数常量 Θ ，使得

正数常量 $C_{\mathtt{eff}}$ （分别为 $C_{\mathtt{rel}}$），则称估计子是高效的（分别是可靠的），满足

$$C_{\mathtt{eff}}\,\Theta \;+\; \mathtt{h.o.t.} \;\le\; \|\mathrm{error}\| \;\le\; C_{\mathtt{rel}}\,\Theta \;+\; \mathtt{h.o.t.}\,,$$

其中 h.o.t. 是表示一个或多个高阶项的通用表达式。据我们所知，本文首次对定常对流 Brinkman–Forchheimer 方程的混合有限元方法进行了先验和后验误差分析。

本文的组织结构如下。本节其余部分介绍一些标准记号和函数空间。在第 2 节中，我们介绍模型问题，并推导其增广混合变分形式。接下来，在第 3 节中，我们通过不动点策略以及 Schauder 不动点定理和 Banach 不动点定理，建立该连续格式的适定性。第 4 节给出了 Galerkin 有限元逼近及其相应的先验分析。第 5 节开展后验误差分析。在第 5.1 节中，我们利用所涉及双线性形式的一致椭圆性、适当的亥姆霍兹分解、Cl´ement 算子和 Raviart–Thomas 算子的局部逼近性质，推导出一个基于残量的可靠后验误差估计子。随后，在第 5.2 节中，利用逆不等式以及基于单元泡函数和边泡函数的局部化技术，证明该估计子的有效性。第6节给出了若干数值结果，以展示所提出混合有限元方法的性能，验证后验误差估计子的可靠性和有效性，并说明相关自适应算法的良好性能。最后，在附录 A 中分析通过后处理恢复的其他感兴趣变量；附录 B 则给出了用于推导可靠性和有效性估计的进一步性质。随后，在附录 C 中引入并研究了第二个（同样可靠且有效的）基于残量的后验误差估计子；在相应的可靠性证明中并未使用亥姆霍兹分解。

预备记号

设 $\Omega \subset \mathrm{R}^d, d \in \{2,3\}$ 是一个边界为多面体边界 Γ 的有界区域，且 n 是 Γ 上的外法向单位向量。对于 Lebesgue 空间 $\mathrm{L}^p(\Omega)$ 和 Sobolev 空间 $\mathrm{W}^{s,p}(\Omega)$，采用标准记号，其中 $s \in \mathrm{R}$ 和 $p > 1$；相应的范数分别记为 $\|\cdot\|_{0,p;\Omega}$ 和 $\|\cdot\|_{s,p;\Omega}$，适用于标量、向量或张量情形。特别地，给定一个非负整数 m，$\mathrm{W}^{m,2}(\Omega)$ 也记作 $\mathrm{H}^m(\Omega)$，其范数和半范数分别简记为 $\|\cdot\|_{m,\Omega}$ 和 $|\cdot|_{m,\Omega}$。用 M 和 $\mathbb{M}$ 表示一般标量函数空间 M 对应的向量和张量空间，而 M' 表示其对偶空间，其范数定义为 $\|f\|_{\mathrm{M}'} := \sup_{0\neq v\in \mathrm{M}} \frac{|f(v)|}{\|v\|_{\mathrm{M}}}$。进而，对于任意向量场 $\mathbf{v} = (v_i)_{i=1,d}$ 和 $\mathbf{w} = (w_i)_{i=1,d}$，我们将梯度、散度和张量积算子定义为

$$\nabla \mathbf{v} := \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)_{i,j=1,d}, \quad \mathrm{div}(\mathbf{v}) := \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial v_j}{\partial x_j}, \quad \text{and} \quad \mathbf{v}\otimes\mathbf{w} := (v_i w_j)_{i,j=1,d}\,.$$

此外，对于任意张量场 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_{ij})_{i,j=1,d}$ 和 $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_{ij})_{i,j=1,d}$，我们令 $\mathbf{散度}(\boldsymbol{\tau})$ 表示沿 $\boldsymbol{\tau}$ 的各行作用的散度算子，并分别将转置、迹、张量内积和偏张张量定义为

$$\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{t}} := (\tau_{ji})_{i,j=1,d}, \quad \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) := \sum_{i=1}^{d} \tau_{ii}, \quad \boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\zeta} := \sum_{i,j=1}^{d} \tau_{ij}\,\zeta_{ij}, \quad \text{and} \quad \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} := \boldsymbol{\tau} - \frac{1}{d}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau})\,\mathbb{I},$$

其中 $\mathbb{I}$ 是 $\mathrm{R}^{d\times d}$ 中的单位矩阵。下文中，在不致混淆时，$|\cdot|$ 表示 R^{d} 或 $\mathrm{R}^{d\times d}$ 中的欧几里得范数。此外，我们回顾希尔伯特空间

$$\mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega) := \Big\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{L}^2(\Omega) : \quad \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbf{L}^2(\Omega) \Big\},$$

赋予通常范数 $\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{\mathbf{div};\Omega} := \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{0,\,\Omega} + \|\mathbf{散度(}\boldsymbol{\tau}\mathbf{)}\|^2_{0,\,\Omega}$。此外，$\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ 是由 $\mathbf{H}^{1}(\Omega)$ 中函数的迹构成的空间，而 $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 表示其对偶空间。另外，我们用 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\Gamma}$ 表示 $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 与 $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ 之间相应的对偶配对。

2 连续形式

本节将介绍模型问题，并推导其相应的弱形式。

2.1 模型问题

下文考虑 [28] 中分析的模型（另见 [11, 33, 32]），该模型由定常对流 Brinkman–Forchheimer 方程给出。具体而言，给定体力 $\mathbf{f}$，我们着重求解速度场 $\mathbf{u}$ 和压力场 p，使得

$$-\nu\,\Delta\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})\mathbf{u} + \alpha\,\mathbf{u} + \mathrm{F}\,|\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \qquad \text{in} \quad \Omega\,, \tag{2.1a}$$

$$\mathrm{div}(\mathbf{u}) = 0 \qquad \text{in} \quad \Omega\,, \tag{2.1b}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{D}} \quad \text{on} \quad \Gamma\,, \tag{2.1c}$$

其中，$\nu > 0$ 为 Brinkman 系数（或有效黏度），$\alpha > 0$ 为 Darcy 系数，$\mathrm{F} > 0$为 Forchheimer 系数，且 p 为给定数，满足 $\mathrm{p} \in [3,4]$。由于流体的不可压缩性以及对$\mathbf{u}$施加的狄利克雷边界条件，给定数据$\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ $\in\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$必须满足相容条件

$$\int_{\Gamma} \mathbf{u}_{\mathrm{D}} \cdot \mathbf{n} \;=\; 0\,. \tag{2.2}$$

此外，由于（2.1a），并为保证压力的唯一性，将在空间中求取这一未知量

$$\mathrm{L}^2_0(\Omega) \;:=\; \Big\{ q \in \mathrm{L}^2(\Omega) : \quad \int_{\Omega} q = 0 \Big\}\,.$$

接下来，为了推导（2.1）的伪应力-速度混合形式，使狄利克雷边界条件成为自然边界条件，我们现在按照 [4]（参见 [3, 2, 21]中的类似方法）进行处理，并引入非线性伪应力张量 $\boldsymbol{\sigma}$作为另一个未知量，其定义为

$$\boldsymbol{\sigma} := \nu\,\nabla\mathbf{u} - (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - p\,\mathbb{I}\,. \tag{2.3}$$

这样，对张量 $\boldsymbol{\sigma}$ 取矩阵迹，并利用不可压缩条件（2.1b），可得

$$p = -\frac{1}{d}\,\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\,. \tag{2.4}$$

因此，将 (2.4) 代回 (2.3)，可知 (2.1) 等价地改写如下：求取合适空间中的 ($\boldsymbol{\sigma}$,$\mathbf{u}$)，具体空间将在下文给出，使其满足

$$\frac{1}{\nu}\,\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} + \frac{1}{\nu}\,(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{d}} = \nabla\mathbf{u} \quad \text{in} \quad \Omega\,, \tag{2.5a}$$

$$\alpha\,\mathbf{u} + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u} - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{f} \qquad \text{in} \quad \Omega\,, \tag{2.5b}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\mathrm{D}} \quad \text{on} \quad \Gamma\,, \tag{2.5c}$$

$$\int_{\Omega} \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) = 0\,. \tag{2.5d}$$

此处我们强调，正如 (2.4) 所示， p 已从当前公式中消去，之后将利用该恒等式根据 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 $\mathbf{u}$ 计算得出（详情见附录 A）。这一事实说明了 (2.5d) 的合理性；该条件旨在确保所得压力属于 $\mathrm{L}^2_0(\Omega)$。

2.2 变分形式

本节推导由 (2.5) 给出的问题的混合变分形式。为此，我们将 (2.5a) 乘以张量 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega)$，对所得表达式进行分部积分，并利用恒等式 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}}$ 以及狄利克雷边界条件 (2.5c)，得到

$$\frac{1}{\nu}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} + \int_{\Omega} \mathbf{u}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{\nu}\int_{\Omega} (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau} \;=\; \langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{u}_{\mathrm{D}}\rangle_{\Gamma} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega)\,. \tag{2.6}$$

为了在选择有限元子空间时有更大的灵活性，同时避免在所得变分方程中引入新项，我们现在采用与 [19]（另见 [21, 6]）类似的方法，将 (2.6) 左端第二项中的 $\mathbf{u}$ 替换为由 (2.5b) 得到的表达式，即

$$\mathbf{u} \;=\; \frac{1}{\alpha}\Big\{\, \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}) - \mathtt{F}\,|\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u} + \mathbf{f} \,\Big\} \quad \text{in} \quad \Omega\,.$$

由此，我们得到如下变分形式：求 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega)$ 和 $\mathbf{u}$（属于下文将要指定的适当空间），使得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\nu}\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} + \frac{1}{\alpha}\int_{\Omega} \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \frac{1}{\nu}\int_{\Omega} (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau} - \frac{\mathtt{F}}{\alpha}\int_{\Omega} |\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) \\ &\quad =\; -\frac{1}{\alpha}\int_{\Omega} \mathbf{f}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{u}_{\mathrm{D}}\rangle_{\Gamma} \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega)\,. \end{aligned} \tag{2.7}$$

由于 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega)$ 且 $\mathrm{p} \in [3,4]$，项 $(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}$ 和 $|\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})$ 迫使速度$\mathbf{u}$，进而使测试函数 $\mathbf{v}$ 属于 $\mathbf{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$，其中 $\mathrm{q} = 2(\mathrm{p}-1) \in [4,6]$。为处理这一事实，我们首先注意到，应用柯西–施瓦茨不等式和 H¨older 不等式，再利用 $\mathbf{H}^1(\Omega)$ 到$\mathbf{L}^4(\Omega)$（分别到 $\mathbf{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$）的连续嵌入$\mathbf{i}_4$（分别为 $\mathbf{i}_{\mathrm{q}}$）（参见 [29, 定理 1.3.4]），可得

$$\left|\int_{\Omega} (\mathbf{w}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}\right| \;\le\; \|\mathbf{w}\|_{0,4;\Omega}\,\|\mathbf{u}\|_{0,4;\Omega}\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{0,\Omega} \;\le\; \|\mathbf{i}_4\|^2\,\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\,\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div};\Omega} \tag{2.8}$$

and

$$\left|\int_{\Omega} |\mathbf{w}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\right| \;\le\; \|\mathbf{w}\|^{\mathrm{p}-2}_{0,\mathrm{q};\Omega}\,\|\mathbf{u}\|_{0,\mathrm{q};\Omega}\,\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{0,\Omega} \;\le\; \|\mathbf{i}_{\mathrm{q}}\|^{\mathrm{p}-1}\,\|\mathbf{w}\|^{\mathrm{p}-2}_{1,\Omega}\,\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div};\Omega}\,, \tag{2.9}$$

对所有 $\mathbf{w},\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ 以及 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega)$，其中 $\|\mathbf{i}_4\|$（分别为 $\|\mathbf{i}_{\mathrm{q}}\|$）是将 $\mathbf{H}^1(\Omega)$ 嵌入 $\mathbf{L}^4(\Omega)$（分别为 $\mathbf{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$）的注入范数。然而，从式 (2.7) 可知，由于缺少一个属于 $\mathbf{u}$ 所在空间（现在为 $\mathbf{H}^1(\Omega)$）的测试函数，式 (2.7) 的适定性分析无法进行。因此，为了

克服这一不便，我们提议在原有形式中加入以下由本构方程 (2.5a) 和狄利克雷边界条件 (2.5c) 导出的残差项:

$$\kappa_1 \int_\Omega \left\{ \nabla \mathbf{u} - \frac{1}{\nu}\, \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} - \frac{1}{\nu}\, (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})^{\mathrm{d}} \right\} : \nabla \mathbf{v} = 0 \quad \text{and} \quad \kappa_2 \int_\Gamma \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \kappa_2 \int_\Gamma \mathbf{u}_{\mathrm{D}} \cdot \mathbf{v} \quad \forall\, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)\,, \tag{2.10}$$

其中， κ_1 和 κ_2 是稍后指定的正参数。根据前述分析，对流 Brinkman–Forchheimer 问题 (2.5) 的弱形式首先可化为：求 $(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u}) \in \mathbb{H}$**(散度; Ω)** $\times \mathbf{H}^1(\Omega)$，使得对所有 $(\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{v}) \in \mathbb{H}$**(散度; Ω)** $\times \mathbf{H}^1(\Omega)$，(2.5d)、(2.7) 和 (2.10) 均成立。

不过，为便于后续分析，我们考虑如下分解（例如参见 [17, 23]）：

$$\mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) \ = \ \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) \oplus \mathrm{R}\, \mathbb{I}\,,$$

其中

$$\mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) \ := \ \left\{ \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\mathbf{div}; \Omega) : \quad \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) = 0 \right\}.$$

更确切地说，每个 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}$**(散度; Ω)** 均可唯一分解为:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_0 + \jmath\, \mathbb{I}\,, \quad \text{with } \boldsymbol{\tau}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) \quad \text{and} \quad \jmath := \frac{1}{d\,|\Omega|} \int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathrm{R}\,.$$

特别地，由 (2.5d) 可知 $\int_\Omega$ **tr(**$\boldsymbol{\sigma}$**)** $= -\int_\Omega$ **tr(**$\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}$**)**，因此得到

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_0 + \ell\, \mathbf{I} \quad \text{with} \quad \boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) \quad \text{and} \quad \ell := -\frac{1}{d\,|\Omega|} \int_\Omega \mathrm{tr}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u})\,, \tag{2.11}$$

这表明 ℓ 可由$\mathbf{u}$显式表示。因此，为了完全确定 $\boldsymbol{\sigma}$，只需找出其 $\mathbb{H}_0$**(散度; Ω)** 分量 $\boldsymbol{\sigma}_0$。此外，注意到 $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}} = \boldsymbol{\tau}_{\mathrm{d}0}$ 且 **散度(**$\boldsymbol{\tau}$**)** $=$**散度(**$\boldsymbol{\tau}_0$**)**，再利用相容条件 (2.2)，可推知此后 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 和 $\boldsymbol{\tau}$ 均可视为属于 $\mathbb{H}_0$**(散度; Ω)**。因此，结合上述讨论，我们将 $\boldsymbol{\sigma}_0$ 简记为 $\boldsymbol{\sigma}$，并得到对流 Brinkman–Forchheimer 方程的如下混合形式：求 $(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0$**(散度; Ω)** $\times \mathbf{H}^1(\Omega)$，使得

$$\mathbf{A}_{\mathbf{u}}((\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) \ = \ \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)\,, \tag{2.12}$$

其中，给定$\mathbf{w}$ $\in \mathbf{H}^1(\Omega)$，双线性形式$\mathbf{A}_{\mathbf{w}} :$ ($\mathbb{H}_0$**(散度; Ω)** $\times \mathbf{H}^1(\Omega)$) $\times$ ($\mathbb{H}_0$**(散度; Ω)** $\times \mathbf{H}^1(\Omega)$) $\to$ R定义为

$$\mathbf{A}_{\mathbf{w}}((\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) := \mathbf{A}((\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) + \mathbf{B}_{\mathbf{w}}((\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}))\,, \tag{2.13}$$

with

$$\mathbf{A}((\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) := \frac{1}{\nu} \int_\Omega \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{d}} + \frac{1}{\alpha} \int_\Omega \mathbf{div}(\boldsymbol{\zeta}) \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \kappa_1 \int_\Omega \left\{ \nabla \mathbf{z} - \frac{1}{\nu} \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{d}} \right\} : \nabla \mathbf{v} + \kappa_2 \int_\Gamma \mathbf{z} \cdot \mathbf{v} \tag{2.14}$$

and

$$\mathbf{B}_{\mathbf{w}}((\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) := \frac{1}{\nu} \int_\Omega (\mathbf{w} \otimes \mathbf{z})^{\mathrm{d}} : \left\{ \boldsymbol{\tau} - \kappa_1\, \nabla \mathbf{v} \right\} - \frac{\mathtt{F}}{\alpha} \int_\Omega |\mathbf{w}|^{\mathrm{p}-2} \mathbf{z} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\,, \tag{2.15}$$

对所有$(\boldsymbol{\zeta},\ \mathbf{z})$，$(\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0$**(散度; Ω)** $\times \mathbf{H}^1(\Omega)$。反过来，$\mathbf{F} \in$ ($\mathbb{H}_0$**(散度; Ω)** $\times \mathbf{H}^1(\Omega)$)$'$定义为$_{\mathrm{y}}$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := -\frac{1}{\alpha} \int_\Omega \mathbf{f} \cdot \mathbf{div}(\boldsymbol{\tau}) + \langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{u}_{\mathrm{D}} \rangle_\Gamma + \kappa_2 \int_\Gamma \mathbf{u}_{\mathrm{D}} \cdot \mathbf{v}\,. \tag{2.16}$$

3 连续问题的分析

本节结合 Lax–Milgram 定理与经典的 Schauder 和 Banach 不动点定理，在对数据施加适当的小性假设下，证明（2.12）的适定性。

3.1 预备结果

我们首先讨论（2.12）中所涉及形式的稳定性。为此，并为表述清晰起见，记

$$\|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\|^2 := \|\boldsymbol{\tau}\|^2_{\mathbf{div};\Omega} + \|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\,.$$

接下来，给定 $\mathbf{w}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$，利用（2.8）–（2.9）并进行简单计算，由（2.14）和（2.15）可推出，双线性形式 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}_\mathbf{w}$ 有界，具体如下

$$\big|\mathbf{A}((\boldsymbol{\zeta},\mathbf{z}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}))\big| \,\leq\, C_{\mathbf{A}}\,\|(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{z})\|\|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\| \quad \text{and} \tag{3.1}$$

$$\big|\mathbf{B}_\mathbf{w}((\boldsymbol{\zeta},\mathbf{z}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}))\big| \,\leq\, \left(\frac{1}{\nu}\,(1+\kappa_1)\,\|\mathbf{i}_4\|^2\,\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + \frac{\mathtt{F}}{\alpha}\,\|\mathbf{i}_\mathrm{q}\|^{\mathrm{p}-1}\,\|\mathbf{w}\|^{\mathrm{p}-2}_{1,\Omega}\right)\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega}\,\|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\|\,, \tag{3.2}$$

其中，$C_{\mathbf{A}}$ 是一个正数常量，取决于 ν,α,κ_1 和 κ_2。此外，利用柯西–施瓦茨不等式、$\mathbb{H}(\mathbf{div};\Omega)$ 的法向迹连续性（参见 [17, 定理 1.7]）以及迹不等式（例如参见 [17, 定理 1.5]）：$\|\mathbf{v}\|_{0,\Gamma} \leq C_\Gamma\,\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\quad\forall\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega)$，容易看出，$\mathbf{F}$（参见（2.16））是有界的：

$$|\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})| \,\leq\, C_{\mathbf{F}}\left\{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_\mathrm{D}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_\mathrm{D}\|_{0,\Gamma}\right\}\|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\|\,, \tag{3.3}$$

其中 $C_{\mathbf{F}} := \max\left\{1, 1/\alpha, \kappa_2\,C_\Gamma\right\}$。另一方面，为便于后续使用，我们回顾 [24, 引理 5.3]：对于所有 $p>2$ 和 $\mathbf{z},\ \mathbf{y}\in\mathrm{R}^d$，存在一个常数 $c_p>0$，它与 $\mathbf{z}$ 和 $\mathbf{y}$ 无关，使得

$$\big||\mathbf{z}|^{p-2}\mathbf{z} - |\mathbf{y}|^{p-2}\mathbf{y}\big| \,\leq\, c_p\,\big(|\mathbf{z}|+|\mathbf{y}|\big)^{p-2}|\mathbf{z}-\mathbf{y}|\,. \tag{3.4}$$

最后，我们回顾一下，存在正常数 $c_1(\Omega)$ 和 $c_2(\Omega)$，使得（详情分别见 [17, 引理 2.3]和 [27, 定理 5.11.2],）

$$\|\boldsymbol{\tau}^\mathrm{d}\|^2_{0,\Omega} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{0,\Omega} \,\geq\, c_1(\Omega)\,\|\boldsymbol{\tau}\|^2_{0,\Omega} \quad \forall\,\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega) \tag{3.5}$$

$$\text{and}\quad \|\nabla\mathbf{v}\|^2_{0,\Omega} + \|\mathbf{v}\|^2_{0,\Gamma} \,\geq\, c_2(\Omega)\,\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} \quad \forall\,\mathbf{v}\in\mathbf{H}^1(\Omega). \tag{3.6}$$

接下来，我们证明双线性形式$\mathbf{A}$的椭圆性。

引理 3.1 假设 $\kappa_1\in(0,2\,\nu)$ 和 $\kappa_2\in(0,+\infty)$。那么，存在 $\alpha_{\mathbf{A}}>0$，使得有

$$\mathbf{A}((\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \,\geq\, \alpha_{\mathbf{A}}\,\|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\|^2 \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\in\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\,. \tag{3.7}$$

证明。令 $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\in\mathbb{H}_0(\mathbf{散度};\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)$。那么，根据 $\mathbf{A}$ 的定义（参见（2.14）），利用杨氏不等式并进行简单的代数计算，可得

$$\mathbf{A}((\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \,\geq\, \frac{1}{\nu}\left(1-\frac{\kappa_1}{2\,\nu}\right)\|\boldsymbol{\tau}^\mathrm{d}\|^2_{0,\Omega} + \frac{1}{\alpha}\,\|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|^2_{0,\Omega} + \frac{\kappa_1}{2}\,\|\nabla\mathbf{v}\|^2_{0,\Omega} + \kappa_2\,\|\mathbf{v}\|^2_{0,\Gamma}\,.$$

然后，在假设 κ_1 和 κ_2 满足规定范围，并应用不等式（3.5）和（3.6）后，我们可以定义正常数

$$\alpha_0 := \min\left\{\frac{1}{\nu}\left(1-\frac{\kappa_1}{2\,\nu}\right), \frac{1}{2\,\alpha}\right\}, \quad \alpha_1 := \min\left\{\alpha_0\, c_1(\Omega), \frac{1}{2\,\alpha}\right\}, \quad \text{and} \quad \alpha_2 := c_2(\Omega)\,\min\left\{\frac{\kappa_1}{2}, \kappa_2\right\},$$

由此可得（3.7），其中 $\alpha_{\mathbf{A}} := \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$。 □

注 3.1 我们注意到，出于计算目的，并为了使椭圆性常数 $\alpha_{\mathbf{A}}$ 最大（参见 (3.7)），可以通过将 κ_1 取为其可行范围的中点，并令 $\kappa_2 \geq \frac{\kappa_1}{2}$，显式地选取参数 κ_1 和 κ_2。更确切地说，我们只需取

$$\kappa_1 = \nu \quad and \quad \kappa_2 \geq \frac{\nu}{2}.$$

3.2 不动点策略

我们首先研究 （2.12）的可解性分析，定义算子 $\mathbf{T}: \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{H}^1(\Omega)$，如下：

$$\mathbf{T}(\mathbf{w}) := \mathbf{u} \quad \forall\, \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega), \tag{3.8}$$

其中 $\mathbf{u}$ 是问题的唯一解（将在下文确认）的第二个分量：求 $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$，使得

$$\mathbf{A}_{\mathbf{w}}((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \quad \forall (\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega). \tag{3.9}$$

因此，不难看出，$(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ 是 (2.12) 的一个解，当且仅当$\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ 是$\mathbf{T}$的不动点，即

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}. \tag{3.10}$$

因此，接下来我们着重证明$\mathbf{T}$ 存在唯一不动点。不过，我们先指出，只有在$\mathbf{H}^1(\Omega)$ 的某个闭球内，$\mathbf{T}$ 的定义才有意义。

我们首先给出一个结果，说明在何种充分条件下，算子$\mathbf{T}$（参见 (3.8)）定义良好，或者等价地，问题 (3.9) 适定。

引理 3.2 设 κ_1 和 κ_2 满足引理 *3.1* 中的条件。令 $r \in (0,\ r_0]$，其中 $r_0 = \min\{r_1, r_2\}, d$

$$r_1 = \frac{\nu\,\alpha_{\mathbf{A}}}{4\,(1+\kappa_1)\,\|\mathbf{i}_4\|^2} \quad and \quad r_2 = \left(\frac{\alpha\,\alpha_{\mathbf{A}}}{4\,\mathrm{F}\,\|\mathbf{i}_{\mathrm{q}}\|^{\mathrm{p}-1}}\right)^{1/(\mathrm{p}-2)}, \tag{3.11}$$

并令$\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 且$\mathbf{u}_{\mathrm{D}} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$。那么，对于每个满足 $\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \leq r$ 的$\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$，问题(3.9) 都有唯一解$(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$。此外，有

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{w})\|_{1,\Omega} = \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq \|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})\| \leq \frac{2\,C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}}\left\{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma}\right\}, \tag{3.12}$$

其中 $C_{\mathbf{F}}$ 和 $\alpha_{\mathbf{A}}$ 分别满足 (3.3) 和 (3.7)。

证明。首先，给定$\mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$，由（2.13）、（2.14）和（2.15）可知，$\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$,$\mathbf{A}$以及$\mathbf{B}_{\mathbf{w}}$ 显然都是双线性型。然后，利用$\mathbf{A}$ 的椭圆性和$\mathbf{B}_{\mathbf{w}}$ 的连续性界（参见（3.7）、（3.2）），我们得到，对于所有 $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{散度};\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$，有

$$\mathbf{A}_{\mathbf{w}}((\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \geq \left\{\alpha_{\mathbf{A}} - \left(\frac{1}{\nu}\,(1+\kappa_1)\,\|\mathbf{i}_4\|^2\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + \frac{\mathrm{F}}{\alpha}\,\|\mathbf{i}_{\mathrm{q}}\|^{\mathrm{p}-1}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^{\mathrm{p}-2}\right)\right\}\|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\|^2.$$

因此，r 此时要求 $\|\mathbf{w}\|_{1,\,\Omega} \le r_0$，其中 $r_0 := \min\{r_1, r_2\}$ 且 r_1，r_2 如 (3.11) 中所示，我们得到 et

$$\frac{1}{\nu}\,(1+\kappa_1)\,\|\mathbf{i}_4\|^2\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \;\le\; \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{4} \quad \text{and} \quad \frac{\mathrm{F}}{\alpha}\|\mathbf{i}_{\mathrm{q}}\|^{\mathrm{p}-1}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^{\mathrm{p}-2} \;\le\; \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{4}\,, \tag{3.13}$$

由此可得

$$\mathbf{A}_{\mathbf{w}}((\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \;\ge\; \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{2}\,\|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\|^2 \quad \forall\,(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)\,. \tag{3.14}$$

进而，利用 (3.1)、(3.2) 和 (3.13)，可推得$\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$ 有如下界

$$\left|\mathbf{A}_{\mathbf{w}}((\boldsymbol{\zeta},\mathbf{z}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}))\right| \;\le\; \left(C_{\mathbf{A}} + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{2}\right)\|(\boldsymbol{\zeta},\mathbf{z})\|\,\|(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})\|\,, \tag{3.15}$$

对所有 $(\boldsymbol{\zeta},\ \mathbf{z})$，$(\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\,\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)$。

综上，并根据关于 κ_1 和 κ_2 的假设，我们已证明：对于任意满足 $\|\mathbf{w}\|_{1,\,\Omega} \le r_0$ 的 $\mathbf{w}$ $\in\mathbf{H}^1(\Omega)$，双线性形式 $\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$ 和泛函 $\mathbf{F}$ 满足 Lax– Milgram 定理的假设（例如，参见 [17, 定理 1.1]），从而保证 (3.9) 适定。最后，以 $(\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u})$ 作为 (3.9) 的测试函数，利用 (3.14) 以及 $\mathbf{F}$ 的连续性界（参见 (3.3)），即可得到

$$\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{2}\,\|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})\| \;\le\; C_{\mathbf{F}}\left\{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma}\right\},$$

这意味着（3.12）成立，从而证明完毕。 □

3.3 连续问题的适定性

在证明了问题（3.9）的适定性之后，该适定性保证算子 $\mathbf{T}$ 定义良好；现在我们旨在建立算子$\mathbf{T}$的唯一不动点的存在性。为此，下面我们验证 Schauder 不动点定理和 Banach 不动点定理的假设。我们从引理 3.2 的以下直接推论开始分析。

引理 3.3 给定 $r \in (0、\ r_0]$，其中 r_0：$=$最小值$\{r_1, r_2\}$，并令 r_1、r_2 如（3.11）所示，我们令 $\mathbf{W}_r$ 为 $\mathbf{H}^1$（Ω） 的闭凸子集，定义为

$$\mathbf{W}_r \;:=\; \left\{\mathbf{w}\in\mathbf{H}^1(\Omega):\quad \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \;\le\; r\right\}. \tag{3.16}$$

此外，取稳定化参数 κ_1 和 κ_2 如引理 *3.1* 所示，并假设数据满足

$$\frac{2\,C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}}\left\{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma}\right\} \;\le\; r\,, \tag{3.17}$$

其中 $C_{\mathbf{F}}$ 和 $\alpha_{\mathbf{A}}$ 分别满足（3.3）和（3.7）。则有$\mathbf{T}$（$\mathbf{W}r$） $\subseteq\mathbf{W}r$。

接下来，我们给出一个估计，以推导算子 $\mathbf{T}$ 的连续性和紧性性质。为此，我们首先注意到，存在 $c_{\mathrm{p}} > 0$ 使得

$$\left||\mathbf{w}|^{\mathrm{p}-2} - |\widetilde{\mathbf{w}}|^{\mathrm{p}-2}\right| \;=\; \left||\mathbf{w}|^{\mathrm{p}-3}(|\mathbf{w}|,\mathbf{0}) - |\widetilde{\mathbf{w}}|^{\mathrm{p}-3}(|\widetilde{\mathbf{w}}|,\mathbf{0})\right| \;\le\; c_{\mathrm{p}}\left(|\mathbf{w}| + |\widetilde{\mathbf{w}}|\right)^{\mathrm{p}-3}|\mathbf{w}-\widetilde{\mathbf{w}}|\,, \tag{3.18}$$

这由（3.4）在取 $p = \mathrm{p}\,-1 \in [2,3]$、$\mathbf{z} = (|\mathbf{w}|,\ \mathbf{0})$、$\mathbf{y} = (|\tilde{}\mathbf{w}|,\ \mathbf{0})$ 以及 $\mathbf{0}\in\mathrm{R}^{d-1}$ 时得到。上述结果现已证得。

引理 3.4 设 $r \in (0,\ r_0]$，其中 $r_0 := \min\{r_1, r_2\}$，且 r_1、r_2 如（*3.11*）中所定义，并令 $\mathbf{W}_r$ 由（*3.16*）给出。那么，对于每个 $\mathrm{q} \in [4,6]$，均有

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{w}) - \mathbf{T}(\widetilde{\mathbf{w}})\|_{\mathbf{l},\,\Omega}$$

$$\leq \frac{C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}\, r_0} \left\{ \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma} \right\} \left(\frac{1}{\|\mathbf{i}_4\|} \|\mathbf{w} - \widetilde{\mathbf{w}}\|_{0,4;\Omega} + \frac{2^{\mathrm{p}-3}\, c_{\mathrm{p}}}{\|\mathbf{i}_{\mathrm{q}}\|} \|\mathbf{w} - \widetilde{\mathbf{w}}\|_{0,\mathrm{q};\Omega} \right), \tag{3.19}$$

对所有$\mathbf{w}\ \widetilde{\mathbf{w}}\ \in \mathbf{W}_r$。

证明。给定$\mathbf{w}\ \widetilde{\mathbf{w}}\ \in \mathbf{W}_r$，令$\mathbf{u} := \mathbf{T}(\mathbf{w})$，以及 $\widetilde{\mathbf{u}} := \mathbf{T}(\widetilde{\mathbf{w}})$。根据$\mathbf{T}$ 的定义（参见 (3.9)）以及双线性型$\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$ 和$\mathbf{B}_{\mathbf{w}}$ 的定义（参见 (2.13)、(2.15)），可得

$$\mathbf{A}_{\widetilde{\mathbf{w}}}((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) - (\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\widetilde{\mathbf{u}}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \,=\, -(\mathbf{B}_{\mathbf{w}} - \mathbf{B}_{\widetilde{\mathbf{w}}})((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau},\mathbf{v})) \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau},\mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)\,.$$

因此，在上述恒等式中取 $(\boldsymbol{\tau},\ \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u}) - (\widetilde{\boldsymbol{\sigma}},\ \widetilde{\mathbf{u}})$，然后利用$\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$ 的椭圆性（参见 (3.14)）、$\mathbf{B}_{\mathbf{w}}$ 的连续性（参见 (3.2)）、柯西–施瓦茨不等式与 Hölder 不等式，以及 (3.18)，即可得到

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{2} \|(\boldsymbol{\sigma} - \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}})\|^2 \,\leq\, & \left(\frac{1}{\nu} (1 + \kappa_1) \|\mathbf{i}_4\| \|\mathbf{w} - \widetilde{\mathbf{w}}\|_{0,4;\Omega} \right. \\
& \left. + \frac{\mathrm{F}}{\alpha} c_{\mathrm{p}} \|\mathbf{i}_{\mathrm{q}}\|^{\mathrm{p}-2} \big(\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} + \|\widetilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega} \big)^{\mathrm{p}-3} \|\mathbf{w} - \widetilde{\mathbf{w}}\|_{0,\mathrm{q};\Omega} \right) \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|(\boldsymbol{\sigma} - \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}})\|\,.
\end{aligned}$$

然后，利用 r_1 和 r_2 的定义（参见 (3.11)），注意到 $\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}$ 和 $\|\widetilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega}$ 均由 r_2 有界，再经过简单的代数运算，可得

$$\|(\boldsymbol{\sigma} - \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \mathbf{u} - \widetilde{\mathbf{u}})\| \,\leq\, \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \left(\frac{1}{r_1 \|\mathbf{i}_4\|} \|\mathbf{w} - \widetilde{\mathbf{w}}\|_{0,4;\Omega} + \frac{2^{\mathrm{p}-3}\, c_{\mathrm{p}}}{r_2 \|\mathbf{i}_{\mathrm{q}}\|} \|\mathbf{w} - \widetilde{\mathbf{w}}\|_{0,\mathrm{q};\Omega} \right). \tag{3.20}$$

最后，由 (3.20) 可知，注意到 $1/r_1$ 和 $1/r_2$ 均由 $1/r_0$ 有界，并利用 (3.12) 而非 r 对 $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}$ 进行估计，我们得到 (3.19)，从而完成证明。□

基于上述分析，我们现在证明算子 $\mathbf{T}$ 所具有的性质。

引理 3.5 设 $r \in (0, r_0]$，其中 $r_0 := \min\{r_1, r_2\}$，且 r_1, r_2 如 (3.11) 中所定义。假设稳定化参数 κ_1 和 κ_2 取为引理 *3.1* 中的形式，且数据满足 (3.17)。则$\mathbf{T} : \mathbf{W}_r \to \mathbf{W}_r$ 连续，且 $\mathbf{T}(\mathbf{W}_r)$ 紧致。

证明。所需结果可直接由估计式 (3.19)、嵌入算子 $\mathbf{i}_4 : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^4(\Omega)$ 和 $\mathbf{i}_{\mathrm{q}} : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$ 的紧性（当 $\mathrm{q} \in [4,6]$ 时，以及当 $\mathrm{q} \in [4,6)$ 时，参见例如 [29, 定理 1.3.5]），以及希尔伯特空间中每个有界序列都存在弱收敛子序列这一众所周知的事实得到。更多细节从略，参见 [3,引理 3.8]。□

最后，本节的主要结果陈述如下。

定理 3.6 设 $\mathrm{p} \in [3,4]$。假设引理 *3.5* 的相同条件成立。则算子 $\mathbf{T}$具有一个不动点 $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_r$（参见 (3.16)）。等价地，连续问题 (2.12) 具有一个解$(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\ \Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$，且 $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_r$。此外，有

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u})\| \,\leq\, \frac{2\, C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}} \left\{ \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma} \right\}. \tag{3.21}$$

此外，如果数据满足

$$\left(1+2^{\mathrm{p}-3}\,c_{\mathrm{p}}\right)\frac{C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}r_0}\left\{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}+\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma}+\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma}\right\}<1\,,\tag{3.22}$$

then 上述不动点（等价地，式 (2.12) 的解）是唯一的。

证明。(2.12) 与不动点方程 (3.10) 的等价性，加上引理 3.3 和 3.5，根据 Schauder 不动点定理 [12, Theorem 9.12-1(b)]，可直接推出 (2.12) 的解存在。此外，显然估计式 (3.21) 可由 (3.12) 得出。另一方面，利用估计式 (3.19) 以及从$\mathbf{H}^1(\Omega)$到$\mathbf{L}^4(\Omega)$（相应地，从$\mathbf{H}^1(\Omega)$到$\mathbf{L}^{\mathrm{q}}(\Omega)$，其中 $\mathrm{q}\in[4,6]$）的连续嵌入 $\mathbf{i}_4$（相应地，$\mathbf{i}_{\mathrm{q}}$），我们很容易得到

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{w})-\mathbf{T}(\widetilde{\mathbf{w}})\|_{1,\Omega}\,\leq\,\left(1+2^{\mathrm{p}-3}\,c_{\mathrm{p}}\right)\frac{C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}\,r_0}\left\{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}+\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma}+\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma}\right\}\|\mathbf{w}-\widetilde{\mathbf{w}}\|_{1,\Omega}\,,\tag{3.23}$$

由此，结合 (3.22) 和 Banach 不动点定理，可得唯一性。 □

4 Galerkin 格式

本节介绍并分析混合公式 (2.12) 对应的 Galerkin 格式。该格式的可解性将采用与第 3 节中所用方法类似的工具进行研究。最后，我们将推导相应的 C´ea 估计以及 Galerkin 格式的收敛率。

4.1 离散设置

首先，令 $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ 为 Ω 上由三角形 T（在 R^3 中则为四面体T）构成的正则三角剖分族，并设 $h:=\max\{h_T:\ T\in\mathcal{T}_h\}$。接着，给定整数 $l\geq 0$ 和 R^d 的子集 S，记 $\mathrm{P}_l(S)$ 为定义在 S 上、总次数不超过 l 的多项式空间。因此，对每个整数 $k\geq 0$ 及每个 $T\in\mathcal{T}_h$，将 k 阶局部 Raviart–Thomas 空间定义为

$$\mathbf{RT}_k(T):=\mathbf{P}_k(T)\oplus\widetilde{\mathrm{P}}_k(T)\,\mathbf{x}\,,$$

其中 $\mathbf{x}:=(x_1,\ldots,x_d)^{\mathrm{t}}$ 是 R^d 中的一个泛向量，$\widetilde{\mathrm{P}}_k(T)$ 是定义在 T 上、总次数等于 k 的多项式空间；根据第 1 节中的约定，设 $\mathbf{P}_k(T):=[\mathrm{P}_k(T)]^d$。由此，引入有限元子空间：

$$\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}:=\left\{\boldsymbol{\tau}_h\in\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega):\quad \mathbf{c}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\tau}_h|_T\in\mathbf{RT}_k(T),\quad\forall\,\mathbf{c}\in\mathrm{R}^d,\quad\forall\,T\in\mathcal{T}_h\right\},\tag{4.1a}$$

$$\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}:=\left\{\mathbf{v}_h\in\mathbf{C}(\overline{\Omega}):\quad \mathbf{v}_h|_T\in\mathbf{P}_{k+1}(T)\,,\quad\forall\,T\in\mathcal{T}_h\right\},\tag{4.1b}$$

式（2.12）的 Galerkin 格式如下：求 $(\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\in\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}\times\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$，使得

$$\mathbf{A}_{\mathbf{u}_h}((\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h),(\boldsymbol{\tau}_h,\mathbf{v}_h))\,=\,\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}_h,\mathbf{v}_h)\quad\forall\,(\boldsymbol{\tau}_h,\mathbf{v}_h)\in\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}\times\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}\,.\tag{4.2}$$

与连续情形类似，为了分析问题 (4.2)，我们将其等价地改写为一个不动点问题。具体而言，我们定义算子 $\mathbf{T}_{\mathtt{d}}:\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}\to\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$ 为

$$\mathbf{T}_{\mathtt{d}}(\mathbf{w}_h)\,=\,\mathbf{u}_h\quad\forall\,\mathbf{w}_h\in\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}\,,$$

其中 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)$ 是问题 (3.9) 的离散形式的唯一解：求 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$，使得

$$\mathbf{A}_{\mathbf{w}_h}((\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h)) \;=\; \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}_h, \mathbf{v}_h) \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}\,, \tag{4.3}$$

其中，双线性形式 $\mathbf{A}_{\mathbf{w}_h}$ 和泛函 $\mathbf{F}$ 分别定义于 (2.13)（其中用 $\mathbf{w}_h$ 代替 $\mathbf{w}$）和 (2.16)。因此，求解 (4.2) 等价于寻找算子 $\mathbf{T}_{\mathtt{d}}$的不动点，即：求 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$，使得

$$\mathbf{T}_{\mathtt{d}}(\mathbf{u}_h) = \mathbf{u}_h\,. \tag{4.4}$$

4.2 可解性分析

首先指出，证明引理 3.2 时采用的相同工具也可用于证明 (4.2) 的唯一可解性。事实上，在满足引理 3.1 中关于稳定化参数的相同假设时，对于每个 $\mathbf{w}_h \in \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$，$\mathbf{A}_{\mathbf{w}_h}$ 在 $\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$上有界且椭圆，并分别具有 (3.15) 和 (3.14) 中得到的相同常数。进而，由 (2.16) 和 (3.3) 可知，泛函 $\mathbf{F}$ 是线性且有界的。上述讨论结合 Lax–Milgram 定理，可得以下结果。

引理 4.1 设 $r \in (0, r_0]$，其中 $r_0 := \text{最小值}\{r_1, r_2\}$，且 r_1, r_2 如 (3.11) 中所示，并假设 κ_1, κ_2 如引理 *3.1* 中所示。那么，对于每个满足 $\|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} \leq r$ 的 $\mathbf{w}_h \in \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$，问题 (4.3) 有唯一解$(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$。此外，有

$$\|\mathbf{T}_{\mathtt{d}}(\mathbf{w}_h)\|_{1,\Omega} \;=\; \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \;\leq\; \|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\| \;\leq\; \frac{2\,C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}} \left\{ \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma} \right\}, \tag{4.5}$$

其中 $C_{\mathbf{F}}$ 和 $\alpha_{\mathbf{A}}$ 分别满足(3.3)和(3.7)。

现在我们继续分析不动点方程 (4.4)。首先给出引理 3.3 的离散版本，其证明可直接由引理 4.1 得出。

引理 4.2 设 $r \in (0, r_0]$，其中 $r_0 := \text{最小值}\{r_1, r_2\}$，且 r_1, r_2 如 (3.11)中所示，并令 $\mathbf{W}_r$ 为$\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$ 中的有界子集，定义如下

$$\widetilde{\mathbf{W}}_r \;:=\; \left\{ \mathbf{w}_h \in \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}} : \quad \|\mathbf{w}_h\|_{1,\Omega} \;\leq\; r \right\}. \tag{4.6}$$

假设 κ_1 和 κ_2 满足引理 *3.1*中的条件，且数据 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ 满足 (3.17)。则 $\mathbf{T}_{\mathtt{d}}(\mathbf{W}_r) \subseteq \mathbf{W}_r$。

接下来，我们讨论 (3.23) 的离散对应形式（另见引理 3.4）。其证明与连续情形几乎完全相同，故略去。因此，我们仅陈述相应结果如下。

引理 4.3 设 $\mathrm{p} \in [3, 4]$ 和 $r \in (0, r_0]$，其中 $r_0 := \min\{r_1, r_2\}$，且 r_1, r_2 满足 (3.11)，并设$C_{\mathbf{F}}, \alpha_{\mathbf{A}}$ 分别满足 (3.3)和 (3.7)。则有

$$\|\mathbf{T}_{\mathtt{d}}(\mathbf{w}_h) - \mathbf{T}_{\mathtt{d}}(\widetilde{\mathbf{w}}_h)\|_{1,\Omega} \;\leq\; \left(1 + 2^{\mathrm{p}-3} c_{\mathrm{p}}\right) \frac{C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}\, r_0} \left\{ \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma} \right\} \|\mathbf{w}_h - \widetilde{\mathbf{w}}_h\|_{1,\Omega}\,, \tag{4.7}$$

对所有 $\mathbf{w}_h, \widetilde{\mathbf{w}}_h \in \mathbf{W}_r$均成立。

现在我们可以证明 (4.2) 的适定性。

定理 4.4 设 $\mathrm{p} \in [3,4]$。假设满足引理 *4.2* 中的相同假设。则，算子 $\mathbf{T}_{\mathtt{d}}$ 有一个不动点 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_r$（参见 (4.6)）。等价地，离散问题 (4.2) 有一个解 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$，其中 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_r$。此外，有

$$\|(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\| \leq \frac{2\,C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}} \left\{ \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma} \right\}. \tag{4.8}$$

此外，如果数据满足 (3.22)，那么上述不动点（等价地，(4.2) 的解）是唯一的。

证明。 证明过程与定理 3.6 的证明类似。事实上，由引理 4.2 可知，$\mathbf{T}_{\mathtt{d}}$ 将球$\mathbf{W}_r$ 映射到自身。进而，由 (4.7) 容易看出，$\mathbf{T}_{\mathtt{d}} : \mathbf{W}_r \to \mathbf{W}_r$ 是连续的，因此根据布劳威尔不动点定理 [12, 定理 9.9-2]可得存在性结论。此外，显然估计式 (4.8) 可由 (4.5) 得出。另一方面，估计式 (4.7) 和假设 (3.22) 表明$\mathbf{T}_{\mathtt{d}}$ 是一个压缩映射。根据 Banach 不动点定理，这意味着解唯一，从而完成证明。 □

4.3 先验误差分析

本节首先针对由 (4.1a)-(4.1b) 给出的有限元子空间，推导 Galerkin 格式 (4.2) 的 C´ea 估计，然后利用后者的逼近性质建立相应的收敛率。事实上，设 $(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$，且 $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_r$，为问题 (2.12) 的唯一解；再设 $(\boldsymbol{\sigma}_h,\ \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$，且 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_r$，为离散问题 (4.2) 的唯一解。那么，我们希望得到误差的一个 先验估计

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\|^2 := \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|^2_{\mathbf{div};\Omega} + \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|^2_{1,\Omega}\,.$$

为此，接下来我们建立一个特设的斯特朗型估计。以下，对于给定希尔伯特空间 $(H,\ \|\cdot\|_H)$ 的子空间 H_h，按通常方式记为

$$\mathrm{dist}\,(x, H_h) := \inf_{x_h \in H_h} \|x - x_h\|_H \quad \text{for all } x \in H\,.$$

引理 4.5 设 H 为希尔伯特空间，$F \in H'$，且 $a:\ H \times H \to \mathrm{R}$ 为有界且 H-椭圆的双线性形式，其相应常数为 $\|a\|$ 和 α。此外，设 $\{H_h\}_{h>0}$ 是 H 的有限维子空间序列，并对每个 $h > 0$，考虑一个有界双线性形式 $a_h:\ H_h \times H_h \to \mathrm{R}$，其有界性常数 $\|a_h\|$ 与 h 无关。假设该族 $\{a_h\}_{h>0}$ 是一致椭圆的，也就是说，存在一个与 h 无关的常数 $\widetilde{\alpha} > 0$，使得

$$a_h(v_h, v_h) \geq \widetilde{\alpha}\,\|v_h\|^2_H \quad \forall\, v_h \in H_h\,, \quad \forall\, h > 0\,.$$

反过来，设 $u \in H$ 和 $u_h \in H_h$ 满足

$$a(u, v) = F(v) \quad \forall\, v \in H \quad \textit{and} \quad a_h(u_h, v_h) = F(v_h) \quad \forall\, v_h \in H_h\,. \tag{4.9}$$

那么，对每个 $h > 0$，有

$$\|u - u_h\|_H \leq C_{S,1}\,\mathrm{dist}\,(u, H_h) + C_{S,2} \sup_{0 \neq v_h \in H_h} \frac{\big|a(u, v_h) - a_h(u, v_h)\big|}{\|v_h\|_H}\,,$$

其中 $C_{S,\ 1}$ 和 $C_{S,\ 2}$ 是由下式给出的正常数

$$C_{S,1} := \left(1 + \frac{2\,\|a\|}{\widetilde{\alpha}} + \frac{\|a_h\|}{\widetilde{\alpha}}\right) \quad \textit{and} \quad C_{S,2} := \frac{1}{\widetilde{\alpha}}\,.$$

证明。 这基本上是对 [6, 引理 5.1], 证明的适当修改，而后者又是对 [30, 定理 11.1]的修改。我们省略进一步的细节，只强调相应线性算子 a_h 的 inf-sup 条件（见 [6, 引理 5.1] ）现在被当前双线性形式 a_h相应的一致椭圆性所取代。□

现在我们给出本节的主要结果。

定理 4.6 假设数据 $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ 和 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}} \in \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$ 满足

$$\left(1+2^{\mathrm{p}-3}c_{\mathrm{p}}\right)\frac{C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}\,r_0}\left\{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}+\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma}+\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma}\right\}\leq\frac{1}{2}\,. \tag{4.10}$$

那么，存在一个正数常量 C，与 h 无关，使得

$$\|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})-(\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\|\leq C\left\{\mathrm{dist}\,(\boldsymbol{\sigma},\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}})+\mathrm{dist}\,(\mathbf{u},\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}})\right\}. \tag{4.11}$$

证明。 首先注意，连续问题 (2.12) 和离散问题 (4.2) 具有与 (4.9) 中问题相同的结构。此外，利用 $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_r$ 和 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_r$ 这一事实，由 (3.14) 和 (3.15) 可知，双线性形式 $\mathbf{A}_{\mathbf{u}}$ 和 $\mathbf{A}_{\mathbf{u}_h}$ 是椭圆的且有界，且分别具有相同的常数$\alpha_{\mathbf{A}}/2$ 和 $C_{\mathbf{A}}+\alpha_{\mathbf{A}}/2$。进而，$\mathbf{F}$ 和$\mathbf{F}|_{(\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}\times\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}})'}$ 分别是在$\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)$ 和 $\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}\times\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$ 上有界的线性泛函。因此，直接应用引理 4.5，可得

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})-(\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\|&\leq C_{S,1}\left\{\mathrm{dist}\,(\boldsymbol{\sigma},\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}})+\mathrm{dist}\,(\mathbf{u},\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}})\right\}\\&+C_{S,2}\sup_{\mathbf{0}\neq(\boldsymbol{\tau}_h,\mathbf{v}_h)\in\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}\times\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}}\frac{\left|\mathbf{B}_{\mathbf{u}}((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau}_h\mathbf{v}_h))-\mathbf{B}_{\mathbf{u}_h}((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau}_h,\mathbf{v}_h))\right|}{\|(\boldsymbol{\tau}_h,\mathbf{v}_h)\|}\,,\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中

$$C_{S,1}:=4+6\,\frac{C_{\mathbf{A}}}{\alpha_{\mathbf{A}}}\quad\text{and}\quad C_{S,2}:=\frac{2}{\alpha_{\mathbf{A}}}\,. \tag{4.13}$$

接下来，按 照（3.20）进行，利用（3.18）以及$\mathbf{B_w}$ 的连续性（参见（3.2）），可得 t

$$\begin{aligned}&\left|\mathbf{B}_{\mathbf{u}}((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau}_h\mathbf{v}_h))-\mathbf{B}_{\mathbf{u}_h}((\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}),(\boldsymbol{\tau}_h,\mathbf{v}_h))\right|\\&\quad\leq\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\left(\frac{1}{\nu}\,(1+\kappa_1)\|\mathbf{i}_4\|^2+\frac{\mathtt{F}}{\alpha}\,c_{\mathrm{p}}\,\|\mathbf{i}_{\mathrm{q}}\|^{\mathrm{p}-1}\big(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}+\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}\big)^{\mathrm{p}-3}\right)\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}\|(\boldsymbol{\tau}_h,\mathbf{v}_h)\|\,.\end{aligned} \tag{4.14}$$

因此，将（4.14）代回（4.12），利用$C_{S,2}$ 的显式表达式（参见（4.13）），以及$\widetilde{\ }$这一事实：$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}+\|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}\leq 2\,r_2$，由于$\mathbf{u}\in\mathbf{W}_r$且$\mathbf{u}_h\in\mathbf{W}_r$，其中 $r\in(0,r_0]$ 且 $r_0:=\min\{r_1,r_2\}$（参见（3.11）），可得

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})-(\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\|&\leq C_{S,1}\left\{\mathrm{dist}\,(\boldsymbol{\sigma},\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}})+\mathrm{dist}\,(\mathbf{u},\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}})\right\}\\&+\frac{1}{2}\,\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{2^{\mathrm{p}-3}\,c_{\mathrm{p}}}{r_2}\right)\|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})-(\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\|\,.\end{aligned}$$

最后，利用 $1/r_1,1/r_2$ 受 $1/r_0$ 有界这一事实，并按照通过 r 直接进行界定的方式对 $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}$ 进行 (3.12) 界定，我们得到

$$\begin{aligned}\|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})-(\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\|&\leq C_{S,1}\left\{\mathrm{dist}\,(\boldsymbol{\sigma},\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}})+\mathrm{dist}\,(\mathbf{u},\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}})\right\}\\&+\left(1+2^{\mathrm{p}-3}\,c_{\mathrm{p}}\right)\frac{C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}}\,r_0}\left\{\|\mathbf{f}\|_{0,\Omega}+\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma}+\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma}\right\}\|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})-(\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\|\,,\end{aligned} \tag{4.15}$$

因此， 结合数据假设 (4.10)，可推出 (4.11)，从而完成证明。 □

现在，为了给出 Galerkin 格式 (4.2) 的理论收敛速率，我们回顾所涉及子空间的逼近性质（例如，参见 [1, 12, 17]）。请注意，这些子空间均根据其后续所作用的未知量命名。

($\mathbf{AP}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$) 对每个 $l \in (0,\ k+1]$ 以及每个 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}^l \cap \mathbb{H}_0$**(散度;** Ω**)** 满足 **散度(**$\boldsymbol{\tau}$**)** $\in \mathbf{H}^l(\Omega)$ 的函数，均有

$$\operatorname{dist}(\boldsymbol{\tau}, \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}) := \inf_{\boldsymbol{\tau}_h \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}} \|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h\|_{\mathbf{div};\Omega} \leq C\, h^l \left\{ \|\boldsymbol{\tau}\|_{l,\Omega} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\|_{l,\Omega} \right\}.$$

($\mathbf{AP}_h^{\mathbf{u}}$) 对每个 $l \in [0, k+1]$ 以及每个 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)$ 的函数，均有

$$\operatorname{dist}(\mathbf{v}, \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}) := \inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{1,\Omega} \leq C\, h^l \|\mathbf{v}\|_{l+1,\Omega}.$$

在精确解满足适当正则性假设的条件下，以下定理给出了 Galerkin 格式 (4.2) 的理论最优收敛速率。

定理4.7 除定理 *3.6*、*4.4* 和 *4.6* 的假设外，假设存在$l \in (0, k+1]$ 使得 $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{H}^l(\Omega) \cap \mathbb{H}_0$**(散度;**$\Omega$**, 散度**$(\boldsymbol{\sigma}) \in \mathbf{H}^l(\Omega)$ 且 $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{l+1}(\Omega)$。则存在$C > 0$，与 h 无关，使得

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\| \leq C\, h^l \left\{ \|\boldsymbol{\sigma}\|_{l,\Omega} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\|_{l,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{l+1,\Omega} \right\}. \tag{4.16}$$

证明。 该结果可直接由定理 4.6 和离散子空间的逼近性质推出。此处省略更多细节。 □

5 基于残差的后验误差估计子

本节将为 Galerkin 格式 (4.2) 推导一个可靠且高效的基于残差的后验误差估计子。为此，下文采用附录B中的记号和结果，并假设定理 3.6 和 4.4 中的假设成立，这些假设保证连续问题和离散问题 (2.12) 与 (4.2) 分别存在唯一解 $(\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0$**(div;** Ω**)**$\times \mathbf{H}^1(\Omega)$ 和 $(\boldsymbol{\sigma}_h,\ \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$。于是，定义第一个全局后验误差估计子如下:

$$\Theta_1 := \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_{1,T}^2 \right\}^{1/2}, \tag{5.1}$$

其中，对于每个 $T \in \mathcal{T}_h$，局部误差指示子 $\Theta_{1,\ T}^2$ 定义如下:

$$\begin{aligned}
\Theta_{1,T}^2 := {} & \left\| \nabla \mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}} \right\|_{0,T}^2 + \|\alpha\, \mathbf{u}_h + \mathtt{F}\, |\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2} \mathbf{u}_h - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) - \mathbf{f}\|_{0,T}^2 \\
& + h_T^2 \left\| \underline{\mathbf{curl}} \left(\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}} \right) \right\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,T}(\Omega)} h_e \left\| \left[\!\left[\underline{\boldsymbol{\gamma}}_* \left(\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}} \right) \right]\!\right] \right\|_{0,e}^2 \\
& + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,T}(\Gamma)} h_e \left\| \underline{\boldsymbol{\gamma}}_* \left(\nabla \mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}} \right) \right\|_{0,e}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,T}(\Gamma)} \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h\|_{0,e}^2 .
\end{aligned} \tag{5.2}$$

请注意，(5.2) 中的第五项要求对所有 $e \in \mathcal{E}_h(\Gamma)$，$\gamma_*(\nabla \mathbf{u}_{\mathrm{D}})|_e \in \mathbf{L}^2(e)$，而下文通过简单地假设$\mathbf{u}_{\mathrm{D}} \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$即可解决这一问题（参见引理 5.4）。我们预先指出，除了 (5.1) 外，本文还推导并分析了 Galerkin 格式 (4.2) 的第二个后验误差估计子，详见附录 C。

本节的主要目标是在适当的假设下，证明 Θ_1 的可靠性和效率。我们先讨论估计子的可靠性。

5.1 可靠性

本节的主要结果由下述定理给出。

定理 5.1 假设数据 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ 满足 (4.10)。则存在一个正数常量$C_{\mathtt{rel}}$，它与 h 无关，使得

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\| \leq C_{\mathtt{rel}}\, \Theta_1 \,. \tag{5.3}$$

我们首先给出一个预备引理，以此开始推导 (5.3)。注意到，利用 $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_r$ 这一事实以及 (3.14)，可得双线性形式$\mathbf{A}_{\mathbf{u}}$ 在 $\mathbb{H}_{\mathtt{CBF}} := \mathbb{H}_0(\mathbf{散度}; \Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ 上一致椭圆，且其正数常量 $\alpha_{\mathbf{A}}/2$ 与 h 无关。这意味着

$$\sup_{\mathbf{0} \neq (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_{\mathtt{CBF}}} \frac{\mathbf{A}_{\mathbf{u}}((\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}))}{\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|} \geq \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{2} \|(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z})\| \quad \forall\, (\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}) \in \mathbb{H}_{\mathtt{CBF}} \,. \tag{5.4}$$

引理 5.2 假设数据 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ 满足 (4.10)。则存在一个正数常量 C，与 h 无关，使得

$$\|(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) - (\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h)\| \leq C \sup_{\mathbf{0} \neq (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_{\mathtt{CBF}}} \frac{\big|\mathcal{R}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\big|}{\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|} \,, \tag{5.5}$$

其中，$\mathcal{R}: \mathbb{H}_{\mathtt{CBF}} \to \mathrm{R}$ 是由下式给出的残差泛函

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) := \mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) - \mathbf{A}_{\mathbf{u}_h}((\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})) \quad \forall\, (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_{\mathtt{CBF}} \,.$$

证明。 首先，将 inf-sup 条件 (5.4) 应用于误差 $(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}) = (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$，加上并减去 $\mathbf{B}^{\mathbf{u}_h}((\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}))$，并利用 (2.12) 的第一个方程，可推得

$$\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{2} \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| \leq \sup_{\mathbf{0} \neq (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_{\mathtt{CBF}}} \frac{\big|\mathcal{R}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\big|}{\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|} + \sup_{\mathbf{0} \neq (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_{\mathtt{CBF}}} \frac{\big|\big(\mathbf{B}_{\mathbf{u}} - \mathbf{B}_{\mathbf{u}_h}\big)((\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h), (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}))\big|}{\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|} \,,$$

结合 $\mathbf{B}_{\mathbf{w}}$ 的连续性界（参见 (4.14)）和 (3.18)，并按照 (4.15) 中的方法进行处理，可得

$$\begin{aligned} \|(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\| \leq\; & \frac{2}{\alpha_{\mathbf{A}}} \sup_{\mathbf{0} \neq (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_{\mathtt{CBF}}} \frac{\big|\mathcal{R}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\big|}{\|(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v})\|} \\ & + \big(1 + 2^{\mathrm{p}-3}\, c_{\mathrm{p}}\big) \frac{C_{\mathbf{F}}}{\alpha_{\mathbf{A}} r_0} \Big\{ \|\mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{1/2,\Gamma} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\|_{0,\Gamma} \Big\} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1;\Omega} \,, \end{aligned}$$

结合数据假设 (4.10)，可得到 (5.5)，其中 $C = 4/\alpha_{\mathbf{A}}$ 从而证明得证。 □

现在我们旨在对 (5.5) 中的上确界进行估计。事实上，根据双线性形式 $\mathbf{A}_{\mathbf{w}}$,$\mathbf{A}$和 $\mathbf{B}_{\mathbf{w}}$ 的定义（参见 (2.13)–(2.15)），可知对任意 $(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div}; \Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$，均有

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) = \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) + \mathcal{R}_2(\mathbf{v}) \,,$$

其中

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) \,=\, \langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{u}_{\mathrm{D}}\rangle_\Gamma - \frac{1}{\nu}\int_\Omega \big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}} : \boldsymbol{\tau} - \int_\Omega \mathbf{u}_h\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\\ + \frac{1}{\alpha}\int_\Omega \big(\alpha\,\mathbf{u}_h + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) - \mathbf{f}\big)\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\text{and}\quad \mathcal{R}_2(\mathbf{v}) \,=\, -\kappa_1\int_\Omega \Big(\nabla\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\Big) : \nabla\mathbf{v} + \kappa_2\int_\Gamma (\mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h)\cdot\mathbf{v}\,. \tag{5.7}$$

注意到，为便于后续分析，我们在 (5.6) 中加上并减去了项 $\int_\Omega \mathbf{u}_h\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})$。于是，(5.5) 中的上确界可用 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$ 界定如下

$$\|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) - (\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\| \,\leq\, C\left\{\|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)'} + \|\mathcal{R}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)'}\right\}, \tag{5.8}$$

因此，接下来我们要为 (5.8) 右端的各项推导合适的上界。我们首先建立 $\mathcal{R}_2$ 的相应估计（参见 (5.7)），这可通过直接应用柯西–施瓦茨不等式得到。

引理 5.3 存在一个正数常量 C，与 h 无关，使得

$$\|\mathcal{R}_2\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)'} \,\leq\, C\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\Big\|\nabla\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\Big\|_{0,T}^2 + \sum_{e\in\mathcal{E}_{h,T}(\Gamma)}\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h\|_{0,e}^2\right)\right\}^{1/2}.$$

现在我们来界定项 $\|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\textbf{散度};\Omega)'}$。为此，我们首先注意到，对 (5.6) 中的表达式 $\int_\Omega \mathbf{u}_h\cdot\textbf{散度}(\boldsymbol{\tau})$ 进行分部积分后，泛函 $\mathcal{R}_1$ 可改写如下

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) \,=\, \langle \boldsymbol{\tau}\mathbf{n}, \mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h\rangle_\Gamma + \int_\Omega \Big(\nabla\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\Big) : \boldsymbol{\tau}\\ + \frac{1}{\alpha}\int_\Omega \big(\alpha\,\mathbf{u}_h + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) - \mathbf{f}\big)\cdot\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})\,.\end{aligned} \tag{5.9}$$

为简单起见，我们对三维情形证明上述结果。二维情形的证明过程类似。给定 $\boldsymbol{\tau}\in\mathbb{H}_0(\textbf{散度};\Omega)$，由引理 B.3 的第 b) 部分（二维情形下为 a）可知，存在 $\mathbf{z}\in\mathbf{H}^2(\Omega)$ 和 $\boldsymbol{\chi}\in\mathbb{H}^1(\Omega)$，使得 $\boldsymbol{\tau} = \nabla\mathbf{z} + \textbf{旋度}(\boldsymbol{\chi})$ 在 Ω 中成立，并且

$$\|\mathbf{z}\|_{2,\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\Omega} \,\leq\, C_{\mathtt{Hel}}\,\|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div};\Omega}\,. \tag{5.10}$$

于是，我们令 $\boldsymbol{\tau}_h := \boldsymbol{\Pi}_h^k(\nabla\mathbf{z}) + \textbf{旋度}(\mathbf{I}_h(\boldsymbol{\chi})) + \jmath_0\,\mathbb{I}$，其中 $\jmath_0\in\mathrm{R}$ 的选取满足 $\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\tau}_h) = 0$。此外，考虑到 $\mathcal{R}_1$ 的定义（参见 (5.6)），并利用 Galerkin 格式 (2.12) 和相容条件 (2.2)，我们可推得 $\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}_h) = 0$ 以及 $\mathcal{R}_1(\mathbb{I}) = 0$，由此

$$\mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau}) \,=\, \mathcal{R}_1(\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau}_h) \,=\, \mathcal{R}_1(\nabla\mathbf{z} - \boldsymbol{\Pi}_h^k(\nabla\mathbf{z})) + \mathcal{R}_1(\underline{\mathbf{curl}}(\boldsymbol{\chi} - \mathbf{I}_h(\boldsymbol{\chi})))\,. \tag{5.11}$$

以下引理给出了 $\mathcal{R}_1$ 的估计。

引理 5.4 假设 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\in\mathbf{H}^1(\Gamma)$。那么，存在一个与 h 无关的正数常量 C，使得

$$\|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)'} \,\leq\, C\left\{\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\widetilde{\Theta}_{1,T}^2\right\}^{1/2},$$

其中

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta}_{1,T}^2 :=\ & \|\alpha\,\mathbf{u}_h+\mathtt{F}\,|\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h-\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h)-\mathbf{f}\|_{0,T}^2+h_T^2\left\|\nabla\mathbf{u}_h-\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right\|_{0,T}^2\\ &+h_T^2\left\|\underline{\mathbf{curl}}\left(\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right)\right\|_{0,T}^2+\sum_{e\in\mathcal{E}_{h,T}(\Omega)}h_e\left\|\left[\!\left[\underline{\boldsymbol{\gamma}}\left(\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right)\right]\!\right]\right\|_{0,e}^2\\ &+\sum_{e\in\mathcal{E}_{h,T}(\Gamma)}h_e\left\|\underline{\boldsymbol{\gamma}}_*\left(\nabla\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right)\right\|_{0,e}^2+\sum_{e\in\mathcal{E}_{h,T}(\Gamma)}h_e\,\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}_h\|_{0,e}^2\,.\end{aligned}\tag{5.12}$$

证明。我们先考虑由 (5.9) 给出的 $\mathcal{R}_1$ 表达式。因此，仿照 [20, 引理 4.4]，的证明，即利用柯西–施瓦茨不等式，并应用 $\boldsymbol{\Pi}_h^k$ 的逼近性质（参见引理 B.2），可得

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{R}_1(\nabla\mathbf{z}-\boldsymbol{\Pi}_h^k(\nabla\mathbf{z}))\big|\ \le\ C_1\Bigg\{&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|\alpha\,\mathbf{u}_h+\mathtt{F}\,|\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h-\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h)-\mathbf{f}\|_{0,T}^2\\ &+\sum_{T\in\mathcal{T}_h}h_T^2\left\|\nabla\mathbf{u}_h-\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right\|_{0,T}^2+\sum_{e\in\mathcal{E}_h(\Gamma)}h_e\,\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}_h\|_{0,e}^2\Bigg\}^{1/2}\|\mathbf{z}\|_{2,\Omega}\,,\end{aligned}\tag{5.13}$$

其中 $C_1>0$ 与 h 无关。接下来，为了估计 $\mathcal{R}_1$（**旋度**（$\boldsymbol{\chi}-\mathbf{I}_h\,(\boldsymbol{\chi})$ ）），我们依据 (5.6) 中 $\mathcal{R}_1$ 的原始定义，并仿照 [20, 引理 4.3] 的证明，利用由 [23, 第一章，式 (2.17) 和定理 2.11] 得到的边界 Γ 上的分部积分公式（二维情形另见 [16,引理 3.5，式 (3.34)]）：

$$\langle\underline{\mathbf{curl}}(\boldsymbol{\chi}-\mathbf{I}_h(\boldsymbol{\chi}))\mathbf{n},\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\rangle_\Gamma\ =\ -\langle\nabla\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\times\mathbf{n},\boldsymbol{\chi}-\mathbf{I}_h(\boldsymbol{\chi})\rangle_\Gamma\ =\ -\langle\underline{\boldsymbol{\gamma}}_*(\nabla\mathbf{u}_{\mathrm{D}}),\boldsymbol{\chi}-\mathbf{I}_h(\boldsymbol{\chi})\rangle_\Gamma\,,$$

因此，应用局部分部积分、柯西–施瓦茨不等式以及 $\mathbf{I}_h$ 的逼近性质（参见引理 B.1），可得

$$\begin{aligned}\big|\mathcal{R}_1(\underline{\mathbf{curl}}(\boldsymbol{\chi}-\mathbf{I}_h(\boldsymbol{\chi})))\big|\ \le\ C_2\Bigg\{&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}h_T^2\left\|\underline{\mathbf{curl}}\left(\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right)\right\|_{0,T}^2\\ &+\sum_{e\in\mathcal{E}_h(\Omega)}h_e\left\|\left[\!\left[\underline{\boldsymbol{\gamma}}_*\left(\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right)\right]\!\right]\right\|_{0,e}^2\\ &+\sum_{e\in\mathcal{E}_h(\Gamma)}h_e\left\|\underline{\boldsymbol{\gamma}}_*\left(\nabla\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right)\right\|_{0,e}^2\Bigg\}^{1/2}\|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\Omega}\,,\end{aligned}\tag{5.14}$$

其中涉及集合 $\mathcal{E}_h(\Gamma)$ 的项在 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}}\in\mathbf{H}^1(\Gamma)$ 时仍然成立。结论直接由 (5.11)、(5.13)、(5.14) 以及亥姆霍兹分解的稳定性（参见 (5.10)）得出。□

我们通过指出估计式 (5.3) 是引理 5.2 和 5.3–5.4、全局估计量 Θ_1 的定义（参见 (5.1)），以及以下事实的直接结果来结束本节：项 $h_T^2\left\|\nabla\mathbf{u}_h-\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right\|_{0,T}^2$ 和 $h_e\,\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}^h\|_{0,e}^2$ 是 $\widetilde{\Theta}_{1,T}$ 的组成部分（参见 (5.12)），分别由 $\left\|\nabla\mathbf{u}_h-\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right\|_{0,T}^2$ 和 $\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}^h\|_{0,e}^2$ 控制。

5.2 效率

现在我们旨在建立 Θ_1 的效率估计（参见（5.1））。为此，我们将广泛使用由（2.5）给出的原始方程组；通过选取适当的测试函数，并对相应方程进行逆向分部积分，即可从混合

连续形式（2.12）中恢复该方程组。下面的定理是本节的主要结果。

定理 5.5 假设数据 $\mathbf{f}$ 和$\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ 满足(4.10)。则存在一个与 h无关的正数常量$C_{\mathtt{eff}}$，使得

$$C_{\mathtt{eff}}\,\Theta_1 + \mathtt{h.o.t.} \;\leq\; \|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) - (\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\|\,, \tag{5.15}$$

其中h.o.t.表示一个或多个高阶项。

在本节中，不失一般性地假设$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$均为分片多项式。否则，如果$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ 足够光滑，则可类似地按照 [8, 第6节2],进行处理；这样，由这些函数的适当多项式逼近所产生的误差给出的高阶项就会出现在(5.15)中，这也解释了该不等式中最终出现的 h.o.t. 。

我们以下述结果开始效率估计的推导。

引理 5.6 存在与 h无关的 $C_1>0$ 和 $C_2>0$，使得对每个 $T\in\mathcal{T}_h$ 都有

$$\begin{aligned}&\Big\|\nabla\mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\Big\|_{0,T}\\ &\quad\leq\; C_1\left\{\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{1,T} + \|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,T} + \|\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h\|_{0,T}\right\}\end{aligned} \tag{5.16}$$

and

$$\begin{aligned}&\|\alpha\,\mathbf{u}_h + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) - \mathbf{f}\|_{0,T}\\ &\quad\leq\; C_2\left\{\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{div};T} + \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{0,T} + \big\||\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u} - |\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h\big\|_{0,T}\right\}.\end{aligned} \tag{5.17}$$

证明。 只需回顾 $\nabla\mathbf{u} = \dfrac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}+(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\big)^{\mathrm{d}}$ 在 Ω 中，以及$\mathbf{f} = \alpha\,\mathbf{u} + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u} - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})$ 在 Ω 中（参见(2.5a)–(2.5b)）。其余细节从略。□

接下来，我们给出涉及狄利克雷数据 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ 的残差项的上界。

引理 5.7 存在一个与 h 无关的正数常量 C_3，使得

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_h(\Gamma)} \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}_h\|_{0,e}^2 \;\leq\; C_3\,\|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2\,.$$

证明。 只需注意到

$$\sum_{e\in\mathcal{E}_h(\Gamma)} \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}_h\|_{0,e}^2 \;=\; \sum_{e\in\mathcal{E}_h(\Gamma)} \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{0,e}^2 \;=\; \|\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\|_{0,\Gamma}^2\,,$$

然后应用迹不等式。 □

其余定义 $\Theta_{1,\,T}$ 的项（参见（5.2））所对应的界将在下面的引理中给出。

引理 5.8 存在与 h 无关的 $C_4>0$ 和 $C_5>0$，使得

$$h_T\,\left\|\underline{\mathbf{curl}}\left(\frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h+(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}}\right)\right\|_{0,T} \;\leq\; C_4\left\{\|\boldsymbol{\sigma}-\boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,T} + \|\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h\|_{0,T}\right\} \tag{5.18}$$

对于所有 $T \in \mathcal{T}_h$ 以及

$$h_e^{1/2} \left\| \left[\!\left[\underline{\gamma}_* \left(\frac{1}{\nu} \big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) \big)^{\mathrm{d}} \right) \right]\!\right] \right\|_{0,e} \leq C_5 \left\{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,\omega_e} + \|\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h\|_{0,\omega_e} \right\} \tag{5.19}$$

对于所有 $e \in \mathcal{E}_h(\Omega)$，其中 ω_e 表示共享边/面 e的 $\mathcal{T}_h$ 中两个单元的并。此外，如果 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ 是分片多项式，则存在与 h 无关的 $C_6 > 0$，使得

$$h_e^{1/2} \left\| \underline{\gamma}_* \left(\nabla \mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \frac{1}{\nu} \big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h) \big)^{\mathrm{d}} \right) \right\|_{0,e} \leq C_6 \left\{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{0,T_e} + \|\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h\|_{0,T_e} \right\} \tag{5.20}$$

对于所有 $e \in \mathcal{E}_h(\Gamma)$，其中 T_e 是边界边或边界面 e 所属的单元。

证明。 首先，注意到在 Ω 中 $\mathbf{curl} \left(\frac{1}{\nu} \big(\boldsymbol{\sigma} + (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \big)^{\mathrm{d}} \right) = \mathbf{curl}\,(\nabla \mathbf{u}) = \mathbf{0}$，我们发现（5.18）–（5.19）可由 [20, 引理 4.11]，稍作调整得到；而对于（5.20）的证明，我们请读者参见 [20, 引理 4.15]。□

为了完成由（5.15）给出的全局效率（参见定理 5.5），现在需要估计出现在引理 5.6 和 5.8 所给上界中的项 $\big\| |\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u} - |\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h \big\|_{0,T}^2$以及 $\|\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}^h\|_{0,T}^2$。为此，我们首先利用（3.4）、H¨older 不等式（其中 $p = 3/2$ 和 $q = 3$ 满足 $1/p + 1/q = 1$）以及简单的代数运算，得到

$$\big\| |\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u} - |\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h \big\|_{0,T}^2 \leq \widehat{c}_{\mathrm{p}} \left(\|\mathbf{u}\|_{0,3(\mathrm{p}-2);T}^{2(\mathrm{p}-2)} + \|\mathbf{u}_h\|_{0,3(\mathrm{p}-2);T}^{2(\mathrm{p}-2)} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,6;T}^2 ,$$

其中 $\widehat{c}_{\mathrm{p}} := 2^{2\,\mathrm{p}-5}\, c_{\mathrm{p}}^2$。然后，应用 H¨older 不等式并进行一些代数运算，可得

$$\begin{aligned} &\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \big\| |\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u} - |\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h \big\|_{0,T}^2 \\ &\quad \leq \widehat{c}_{\mathrm{p}} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\|\mathbf{u}\|_{0,3(\mathrm{p}-2);T}^{2(\mathrm{p}-2)} + \|\mathbf{u}_h\|_{0,3(\mathrm{p}-2);T}^{2(\mathrm{p}-2)} \right)^{3/2} \right\}^{2/3} \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,6;T}^6 \right\}^{1/3} \\ &\quad \leq \sqrt[3]{2}\, \widehat{c}_{\mathrm{p}} \left(\|\mathbf{u}\|_{0,3(\mathrm{p}-2);\Omega}^{2(\mathrm{p}-2)} + \|\mathbf{u}_h\|_{0,3(\mathrm{p}-2);\Omega}^{2(\mathrm{p}-2)} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,6;\Omega}^2 . \end{aligned} \tag{5.21}$$

这样，利用连续嵌入 $\mathbf{i}_6 : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^6(\Omega)$ 和 $\mathbf{i}^{3(\mathrm{p}-2)} : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^{3(\mathrm{p}-2)}(\Omega)$，$\widetilde{\ }$其中 $3(\mathrm{p}-2) \in [3, 6]$，并利用 $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_r$和 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_r$这一事实，由 (5.21) 可推得存在一个常数 $C > 0$，它仅取决于 r 及其他常数，因此与 h无关，使得

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \big\| |\mathbf{u}|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u} - |\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h \big\|_{0,T}^2 \leq C \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 . \tag{5.22}$$

类似地，加上并减去 $\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}_h$（对 $\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}$ 作同样处理也成立），并应用 H¨older 不等式，可推得

$$\|\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h\|_{0,T}^2 \leq 2 \left(\|\mathbf{u}\|_{0,4;T}^2 + \|\mathbf{u}_h\|_{0,4;T}^2 \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{0,4;T}^2 ,$$

因此，按照 (5.21) 中类似的步骤进行推导，再利用连续嵌入 $\mathbf{i}_4 : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{L}^4(\Omega)$，$\widetilde{\ }$并利用 $\mathbf{u} \in \mathbf{W}_r$ 和 $\mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_r$这一事实，可以证明存在一个与 h无关的正数常量 C，使得

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h\|_{0,T}^2 \leq \widetilde{C} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 . \tag{5.23}$$

因此，不难看出，(5.15) 可由 Θ_1 的定义（参见 (5.1)–(5.2)）、引理 5.6、5.7 和 5.8，以及估计 (5.22) 和 (5.23) 得出。

6 数值结果

本节旨在展示所提出的增广混合有限元格式 (4.2) 的性能和精度，以及其后验误差估计子 Θ_1 （参见 (5.1)）和 Θ_2 （参见 (C.3)）在二维和三维区域中的可靠性与效率性质。关于 Θ_2 ，附录 C 已证明它是可靠的，但只有在计入 (C.4) 中除最后一项之外的所有项时才有效率。事实上，尽管下文给出的数值结果表明 Θ_2 或许确实能同时满足这两种性质，但其效率最终是否成立目前仍只是一个猜想。下文中，我们将由 $k = 0$ 和 $k = 1$ 生成的相应有限元子空间集合分别简称为 $\mathbb{RT}_0 - \mathbf{P}_1$ 和 $\mathbb{RT}_1 - \mathbf{P}_2$, 。该实现基于 FreeFem++ 代码 [25]。关于与 (4.2) 相关的牛顿迭代法的实现，当两个连续迭代（例如**系数**^{m} 和**系数**$^{m+1}$）的整个系数向量之间的相对误差足够小时，即终止迭代，具体而言，

$$\frac{\|\mathbf{coeff}^{m+1} - \mathbf{coeff}^{m}\|}{\|\mathbf{coeff}^{m+1}\|} \leq \mathsf{tol}\,,$$

其中，$\|\cdot\|$ 表示 $\mathsf{R}^{\mathtt{DOF}}$ 中通常意义下的欧几里得范数，DOF 表示定义有限元子空间 $\mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$ （参见 (4.1a)–(4.1b) ）的自由度总数，tol 是一个固定容差，取为 $\mathsf{tol} = 1\mathsf{E}-6$。各项误差记为:

$$\mathsf{e}(\boldsymbol{\sigma}) := \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{div};\Omega}\,, \quad \mathsf{e}(\mathbf{u}) := \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}\,, \quad \mathsf{e}(p) := \|p - p_h\|_{0,\Omega}\,,$$
$$\mathsf{e}(\mathbf{G}) := \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_h\|_{0,\Omega}\,, \quad \mathsf{e}(\boldsymbol{\omega}) := \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h\|_{0,\Omega}\,, \quad \text{and} \quad \mathsf{e}(\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}) := \|\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} - \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{0,\Omega}\,,$$

其中，压力 p、速度梯度$\mathbf{G}$、涡量 $\boldsymbol{\omega}$和剪切应力张量 $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 是具有物理意义的附加变量，可通过相应的后处理公式p_h,$\mathbf{G}_h$,$\boldsymbol{\omega}_h$以及 $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_h$ （详见附录 A）恢复。相应地，与全局估计子 Θ_1 和 Θ_2 相关的全局误差及有效性指数分别记为

$$\mathsf{e}(\vec{\boldsymbol{\sigma}}) := \mathsf{e}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathsf{e}(\mathbf{u})\,, \quad \mathtt{eff}(\Theta_1) := \frac{\mathsf{e}(\vec{\boldsymbol{\sigma}})}{\Theta_1}\,, \quad \text{and} \quad \mathtt{eff}(\widehat{\Theta}_2) := \frac{\mathsf{e}(\vec{\boldsymbol{\sigma}})}{\widehat{\Theta}_2}\,.$$

此外，利用 $\mathsf{DOF}^{-1/d} \cong h$这一事实，可计算相应的实验收敛率，结果为

$$\mathsf{r}(\star) := -d\,\frac{\log\big(\mathsf{e}(\star)/\mathsf{e}'(\star)\big)}{\log(\mathtt{DOF}/\mathtt{DOF}')} \quad \text{for each } \star \in \big\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, p, \mathbf{G}, \boldsymbol{\omega}, \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}, \vec{\boldsymbol{\sigma}}\big\}\,,$$

其中，DOF 和 DOF′ 分别表示与两级连续三角剖分相关的总自由度，其误差分别为 $\mathsf{e}(\star)$ 和 $\mathsf{e}'(\star)$。

本节将介绍接下来要考虑的例子。为简单起见，在所有例子中，我们取 $\nu = 1$，并选择参数 κ_1, κ_2 使其与注 3.1 一致，即 $\kappa_1 = \nu$ 和 $\kappa_2 = \nu/2$。此外，在前三个例子中，我们取 $\mathrm{F} = 10$ 和 $\alpha = 1$。另外，对于这些例子，很容易看出，边界数据 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}} := \mathbf{u}|_{\Gamma}$ 满足所要求的正则性 $\mathbf{u}_{\mathrm{D}} \in \mathbf{H}^1(\Gamma)$, 因为给定的精确解 $\mathbf{u}$ 具有足够的正则性。此外，条件 $\int_\Omega \mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h) = 0$ 通过拉格朗日乘子策略施加。例 1 用于展示该方法的准确性以及后验误差估计子 Θ_1 和 Θ_2 的有效性指数的表现，而例 2–3 和 4 则分别用于说明相关的自适应算法（包括有制造解和无制造解的情形），且涉及二维和三维区域。相应的自适应过程取自 [31], ，描述如下:

(1) 从 Ω 的一个粗网格 $\mathcal{T}_h$ 开始。

(2) 在当前网格上求解与 (4.2) 相关的牛顿迭代法。

(3) 计算每个 $T \in \mathcal{T}_h$ 的局部指标 $\Theta_{1,\,T}$ （参见 (5.2)）

(4) 检查停止准则，并决定是结束还是进入下一步。

(5) 使用 [26, 第 9.1 节9] 中的自动网格生成算法 adaptmesh，对满足以下条件的每个 $T' \in \mathcal{T}_h$ 进行细化：

$$\Theta_{1,T'} \geq C_{\mathsf{adm}} \frac{1}{\#T} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \Theta_{1,T}, \quad \text{for some } C_{\mathsf{adm}} \in (0,1), \tag{6.1}$$

其中，$\#T$ 表示网格 $\mathcal{T}_h$ 的三角形数量。

(6) 将生成的网格定义为当前网格 $\mathcal{T}_h$，然后转到步骤 (2)。

特别地，在下文的例 2、例 4 和例 3 中，我们分别取 C_{adm} （参见（6.1））为 0.75 和 0.8。当然，如果细化是针对局部指标 $\Theta_{2,T}$ （参见（C.4））进行的，我们只需在准则（6.1）中分别用 $\Theta_{2,T'}$ 和 $\Theta_{2,T}$ 替换 $\Theta_{1,T'}$ 和 $\Theta_{1,T}$。

例 1：正方形区域中光滑解的精度评估。

我们首先在准均匀细化策略下，重点考察混合方法的精度以及后验误差估计子的性质，并通过有效性指数 $\mathsf{eff}(\Theta_1)$ 和 $\mathsf{eff}(\Theta_2)$ 进行评估。我们考虑正方形区域 $\Omega = (0,1)^2$，、惯性幂 $\mathrm{p} = 3$，并调整（2.5）中的数据，使得精确解由以下光滑函数给出

$$\mathbf{u}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \sin(\pi\, x_1)\cos(\pi\, x_2) \\ -\cos(\pi\, x_1)\, \sin(\pi\, x_2) \end{pmatrix}, \quad p(x_1,x_2) = \cos(\pi x_1)\sin\left(\frac{\pi}{2}x_2\right).$$

表 6.1 和表 6.2 展示了准一致网格一系列加密的收敛历史，其中包括牛顿迭代的平均次数。请注意，我们不仅能够逼近原始未知量，还能通过公式 (A.2) 逼近压力场、速度梯度张量、涡量和剪切应力张量。结果表明，对于 $k = 0,1$，定理4.7 和引理 A.1 中建立的最优收敛率 $\mathcal{O}(h^{k+1})$ 得以达到。此外，那里还给出了全局后验误差指标 Θ_1, Θ_2 及其相应的有效性指数；由此可以看出，后者始终保持有界。

例 2：二维L形区域中的自适应性。

现在，我们旨在测试在两种后验误差估计子Θ_1 和 $\widehat{\Theta}_2$ （参见 (5.1)、(C.3)）之后进行自适应网格加密的特性。我们考虑一个 L形区域 $\Omega := (-1,1)^2 \setminus (0,1)^2$ 以及惯性幂 $\mathrm{p} = 3.5$。构造解为

$$\mathbf{u}(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} -\pi\sin(\pi x_1)\cos(\pi x_2) \\ \pi\cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2) \end{pmatrix}, \quad p(x_1,x_2) = \frac{10\,(1-x_1)}{(x_1-0.09)^2+(x_2-0.09)^2} - p_0\,,$$

其中，$p_0 \in \mathrm{R}$ 的选取满足 $p \in \mathrm{L}^2_0(\Omega)$。注意到，压力场在顶点 (0，0) 附近呈现出高梯度。图 6.1 总结了该方法应用于

^区域的准一致网格和自适应网格（通过 Θ_1 和 Θ_2）细化时的情形，二者分别得到次最优和最优的收敛率。为简便起见，并且由于该方法在 $k=0$ 和 $k=1$ 下的表现相似，我们仅在表6.3、6.4和6.5中详细列出 $k=1$的情形，其中展示了两种细化方式下的误差、收敛率、效率指标和牛顿迭代。请注意，自适应算法通过以较低的计算成本提供高质量的解，提高了该方法的效率；对于混合格式而言，仅使用准一致网格最后一个网格约 4% 的自由度，就可以得到更优的解（就 e($\vec{\sigma}$) 而言）。此外，图 6.2 展示了初始网格以及使用 $\mathbb{RT}_1 - \mathbf{P}_2$ 格式（通过指标 Θ_1）构造的一些近似解，这些解基于 25，187 个三角形单元（实际上对应 354，680 个自由度）。特别地，我们观察到，压力在 L形区域的收缩区域附近呈现出高梯度。另一方面，图 6.3 汇总了一些由 Θ_1 和 Θ_2 引导的、针对 $k=0$ 的自适应^网格示例。正如预期，我们可以观察到，在 L形区域收缩处的角部附近，单元明显聚集。

示例3：三维L形区域中的自适应性。

这里，我们通过考虑三维L形区域 $\Omega := (-0.5,0.5) \times (0,0.5) \times (-0.5,0.5) \setminus (0,0.5)^3$, 惯性幂 $\mathrm{p} = 3.7$ 以及构造的精确解，从而在三维情形下复现例 2

$$\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} \sin(\pi x_1)\cos(\pi x_2)\cos(\pi x_3) \\ -2\cos(\pi x_1)\sin(\pi x_2)\cos(\pi x_3) \\ \cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2)\sin(\pi x_3) \end{pmatrix}, \quad p(x_1,x_2,x_3) = \frac{10\,x_3}{(x_1-0.04)^2+(x_3-0.04)^2} - p_0\,.$$

表6.6、6.7和6.8证实，在拟一致加密下收敛受到扰动；而采用由后验误差^估计子 Θ_1 和 Θ_2引导的自适应细化，并取 $k=0$时，则可获得最优收敛率。随后，图6.4汇集了初始网格以及经过四个网格细化步骤（通过 Θ_1）后的一些近似解。特别地，正如我们所预期的，压力在三维L形区域的收缩区域附近呈现较高数值，因此很可能也具有较大的梯度。图6.5对此作了补充，其中通过 Θ_1 展示的三个网格快照表明，单元集中在同一区域。通过 Θ_2 获得的加密^与针对 Θ_1的加密类似，因此省略了相应图形。

Exa例 4：含裂缝网络的二维多孔介质中的流动 .

受 [9, 示例4第 6], 节的启发，我们最后关注在参数 F 和 α 在两个区域间存在显著跳跃间断的情况下，流体穿过具有裂缝网络的多孔介质的流动。我们考虑正方形区域 $\Omega = (-1,\ 1)^2$，其中包含一个记为 Ω_{f} 的内部裂缝网络（见下文图6.6的第一幅图），其边界为 Γ；左、右、上、下边界分别为 $\Gamma_{\mathrm{left}} = \{-1\} \times (-1,\ 1)$、$\Gamma_{\mathrm{right}} = \{1\} \times (-1,\ 1)$、$\Gamma_{\mathrm{top}} = (-1,\ 1) \times \{1\}$和 $\Gamma_{\mathrm{bottom}} = (-1,\ 1) \times \{-1\}$。注意，内部裂缝网络的边界定义为若干线段的并集。初始网格文件可从 https://github.com/scaucao/Fracture network-mesh 获取。我们在整个区域 Ω 内考虑对流 Brinkman–Forchheimer 方程 (2.5)，惯性幂次 $\mathrm{p} = 4$，但裂缝内部与外部的参数 F 和 α 取值不同，即

$$\mathtt{F} = \begin{cases} 10 & \text{in} \quad \Omega_{\mathrm{f}} \\ 1 & \text{in} \quad \overline{\Omega} \setminus \Omega_{\mathrm{f}} \end{cases} \quad \text{and} \quad \alpha = \begin{cases} 1 & \text{in} \quad \Omega_{\mathrm{f}} \\ 1000 & \text{in} \quad \overline{\Omega} \setminus \Omega_{\mathrm{f}} \end{cases} . \tag{6.2}$$

参数的选择对应于裂缝中较强的惯性效应（$\mathrm{F} = 10$）和较高的渗透率（$\alpha = 1$），相比之下，多孔介质中的惯性效应较弱（$\mathrm{F} = 1$），渗透率较低（$\alpha = 1000$）。相应地，体力项为 $\mathbf{f} = \mathbf{0}$，边界条件为

$$\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n} = \begin{cases} (-0.5(y-1),\,0)^{\mathrm{t}} & \text{on} \quad \Gamma_{\text{left}}\,, \\ (0,\,-0.5(x-1))^{\mathrm{t}} & \text{on} \quad \Gamma_{\text{bottom}}\,, \end{cases} \qquad \boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{n} = (0,\,0)^{\mathrm{t}} \quad \text{on} \quad \Gamma_{\text{right}} \cup \Gamma_{\text{top}}\,, \tag{6.3}$$

它驱动流动沿对角线方向，从正方形区域 Ω 的左下角流向右上角。在图 6.6 中，我们展示了初始网格、计算得到的速度大小、速度梯度张量和伪应力张量。这些结果采用 $\mathbb{RT}_1 - \mathbf{P}_2$ 格式，在包含 142，867 个三角形单元（实际上对应 2，008，424 个自由度）的网格上计算得到，该网格由 Θ_1生成。我们注意到，由于裂缝厚度较小且参数设置如式（6.2）所示，裂缝中的速度高于多孔介质中的速度。此外，网络中流体从左下角流入的分支速度较高，并朝区域右上角方向逐渐降低。另外，我们观察到裂缝与多孔介质之间的界面处存在明显的速度梯度。伪应力与边界条件（6.3）一致，且由于包含压力场，分布更加弥散。本例展示了该方法能够对具有高长宽比和复杂几何形状的非均质夹杂物（如由细裂缝组成的网络）进行精确求解，并获得数值稳定的结果。接下来，图 6.7 展示了使用 Θ_1 和 Θ_2 生成的部分自适应网格快照。请注意，通过指标 Θ_1 获得的网格，其区域内部的细化程度略高于通过指标 Θ_2获得的网格。这是因为用于捕捉三角形之间跳跃的项来自对流 Brinkman–Forchheimer 方程的 Helmoltz分解及其后续的局部分部积分过程。我们得出结论，估计子 Θ_1 对模型参数在裂缝与多孔介质界面处的强跳跃间断稍加敏感，同时能够定位解值较高的区域。从这个意义上说，正如本例所示，若考虑模型参数的强间断以及裂缝中的较高速度，则估计子 Θ_1 更为可取。

DOF	h	iter	e($\boldsymbol{\sigma}$)	r($\boldsymbol{\sigma}$)	e($\mathbf{u}$)	r($\mathbf{u}$)	e(p)	r(p)	e($\mathbf{G}$)	r($\mathbf{G}$)
178	0.373	4	4.21E-00	–	8.91E-01	–	3.69E-01	–	7.34E-01	–
674	0.196	4	1.82E-00	1.26	4.59E-01	1.00	1.57E-01	1.28	3.44E-01	1.14
2546	0.097	4	9.08E-01	1.04	2.33E-01	1.02	7.40E-02	1.13	1.75E-01	1.02
9922	0.048	4	4.41E-01	1.06	1.18E-01	1.00	3.50E-02	1.10	8.77E-02	1.02
39210	0.025	4	2.23E-01	0.99	5.91E-02	1.00	1.81E-02	0.96	4.38E-02	1.01
157610	0.013	4	1.10E-01	1.01	2.92E-02	1.01	8.75E-03	1.05	2.18E-02	1.01

e($\boldsymbol{\omega}$)	r($\boldsymbol{\omega}$)	e($\vec{\sigma}$)	r($\vec{\sigma}$)	e($\vec{\sigma}$)	r($\vec{\sigma}$)	Θ_1	eff(Θ_1)	$\widehat{\Theta}_2$	eff($\widehat{\Theta}_2$)
3.82E-01	–	1.36E-00	–	4.30E-00	–	5.45E-00	0.790	4.75E-00	0.906
1.88E-01	1.06	6.17E-01	1.18	1.87E-00	1.25	2.47E-00	0.759	2.08E-00	0.900
9.99E-02	0.95	3.06E-01	1.06	9.37E-01	1.04	1.27E-00	0.739	1.04E-00	0.905
5.13E-02	0.98	1.51E-01	1.04	4.56E-01	1.06	6.37E-01	0.717	5.10E-01	0.895
2.52E-02	1.04	7.62E-02	0.99	2.31E-01	0.99	3.18E-01	0.724	2.53E-01	0.910
1.27E-02	0.99	3.75E-02	1.02	1.14E-01	1.01	1.58E-01	0.721	1.26E-01	0.909

表 6.1： [示例 1] $\mathbb{RT}_0 - \mathbf{P}_1$ 采用拟一致加密的方案。

DOF	h	iter	e($\boldsymbol{\sigma}$)	r($\boldsymbol{\sigma}$)	e($\mathbf{u}$)	r($\mathbf{u}$)	e(p)	r(p)	e($\mathbf{G}$)	r($\mathbf{G}$)
570	0.373	4	4.66E-01	–	1.77E-01	–	5.06E-02	–	9.87E-02	–
2258	0.196	4	1.12E-01	2.08	3.36E-02	2.41	9.64E-03	2.41	1.84E-02	2.44
8714	0.097	4	2.84E-02	2.03	8.37E-03	2.06	2.42E-03	2.05	4.70E-03	2.02
34338	0.048	4	7.26E-03	1.99	1.96E-03	2.12	5.78E-04	2.09	1.12E-03	2.10
136462	0.025	4	1.82E-03	2.00	5.09E-04	1.95	1.48E-04	1.97	2.87E-04	1.97
550094	0.013	4	4.43E-04	2.03	1.25E-04	2.02	3.59E-05	2.03	7.03E-05	2.02

e($\boldsymbol{\omega}$)	r($\boldsymbol{\omega}$)	e($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	e($\vec{\sigma}$)	r($\vec{\sigma}$)	Θ_1	eff(Θ_1)	$\widehat{\Theta}_2$	eff($\widehat{\Theta}_2$)
5.43E-02	–	1.80E-01	–	4.99E-01	–	9.29E-01	0.537	6.79E-01	0.734
9.25E-03	2.57	3.45E-02	2.40	1.17E-01	2.11	1.89E-01	0.617	1.52E-01	0.770
2.33E-03	2.05	8.87E-03	2.01	2.96E-02	2.03	4.79E-02	0.618	3.61E-02	0.819
5.41E-04	2.13	2.11E-03	2.09	7.52E-03	2.00	1.16E-02	0.647	8.93E-03	0.843
1.39E-04	1.97	5.44E-04	1.97	1.89E-03	2.00	2.97E-03	0.636	2.18E-03	0.869
3.45E-05	2.00	1.33E-04	2.02	4.60E-04	2.03	7.28E-04	0.632	5.22E-04	0.882

表 6.2: [示例 1] $\mathbb{RT}_1 - \mathbf{P}_2$ 采用拟一致加密的格式。

DOF	h	iter	e($\boldsymbol{\sigma}$)	r($\boldsymbol{\sigma}$)	e($\mathbf{u}$)	r($\mathbf{u}$)	e(p)	r(p)	e($\mathbf{G}$)	r($\mathbf{G}$)
1586	0.400	6	7.85E+02	–	9.89E-00	–	2.84E+01	–	3.20E+01	–
6418	0.190	6	3.60E+02	1.12	4.43E-00	1.15	8.89E-00	1.66	1.44E+01	1.14
24734	0.103	6	1.37E+02	1.43	9.74E-01	2.24	2.81E-00	1.71	4.92E-00	1.60
97542	0.051	6	4.29E+01	1.70	2.02E-01	2.29	8.20E-01	1.79	1.43E-00	1.80
389038	0.027	6	1.19E+01	1.86	4.33E-02	2.23	2.20E-01	1.90	3.96E-01	1.85

e($\boldsymbol{\omega}$)	r($\boldsymbol{\omega}$)	e($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	e($\vec{\sigma}$)	r($\vec{\sigma}$)	Θ_1	eff(Θ_1)	$\widehat{\Theta}_2$	eff($\widehat{\Theta}_2$)
1.59E+01	–	6.86E+01	–	7.85E+02	–	8.26E+02	0.950	7.83E+02	1.002
6.62E+00	1.26	2.86E+01	1.25	3.60E+02	1.12	3.80E+02	0.947	3.60E+02	0.999
2.19E-00	1.64	9.66E-00	1.61	1.37E+02	1.43	1.43E+02	0.958	1.37E+02	1.000
6.09E-01	1.87	2.83E-00	1.79	4.29E+01	1.70	4.45E+01	0.965	4.29E+01	1.000
1.76E-01	1.80	7.74E-01	1.87	1.19E+01	1.86	1.23E+01	0.965	1.19E+01	1.000

表 6.3: [示例 2] $\mathbb{RT}_1 - \mathbf{P}_2$ 方案的拟一致加密。

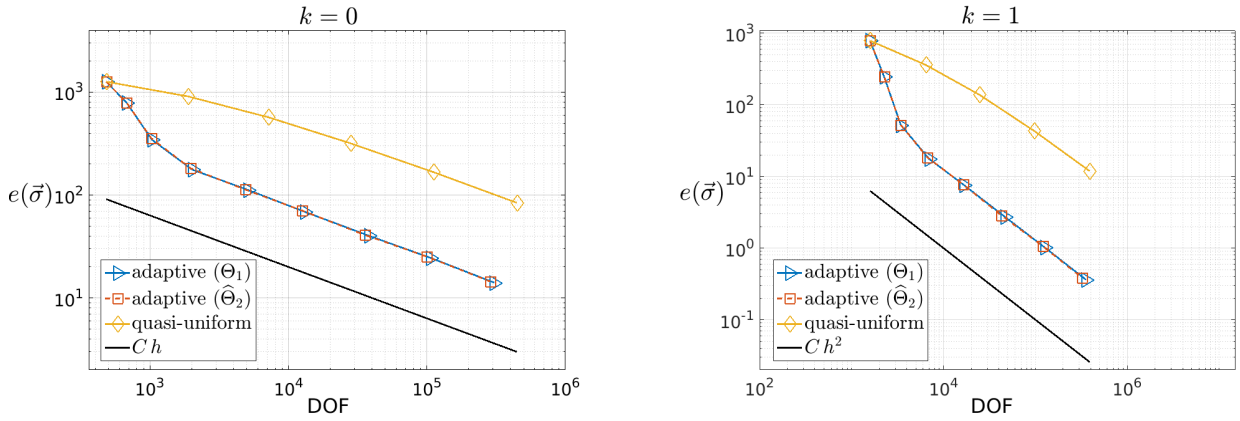


图 6.1 [示例 2] $\vec{\boldsymbol{\sigma}}$ 的 Θ_1 与 $\widehat{\Theta}_2$ 双对数图，展示了通过自适应算法和准一致加密策略，针对 $k=0$ 和 $k=1$ 的 e( ) 与自由度的关系（分别对应左图和右图）。

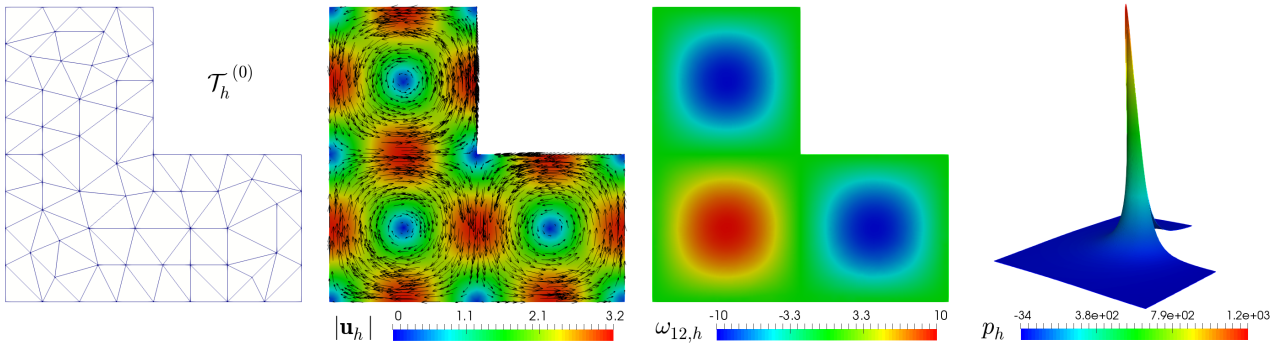


图 6.2: [示例 2] 初始网格、计算得到的速度大小、涡量分量和压力场。

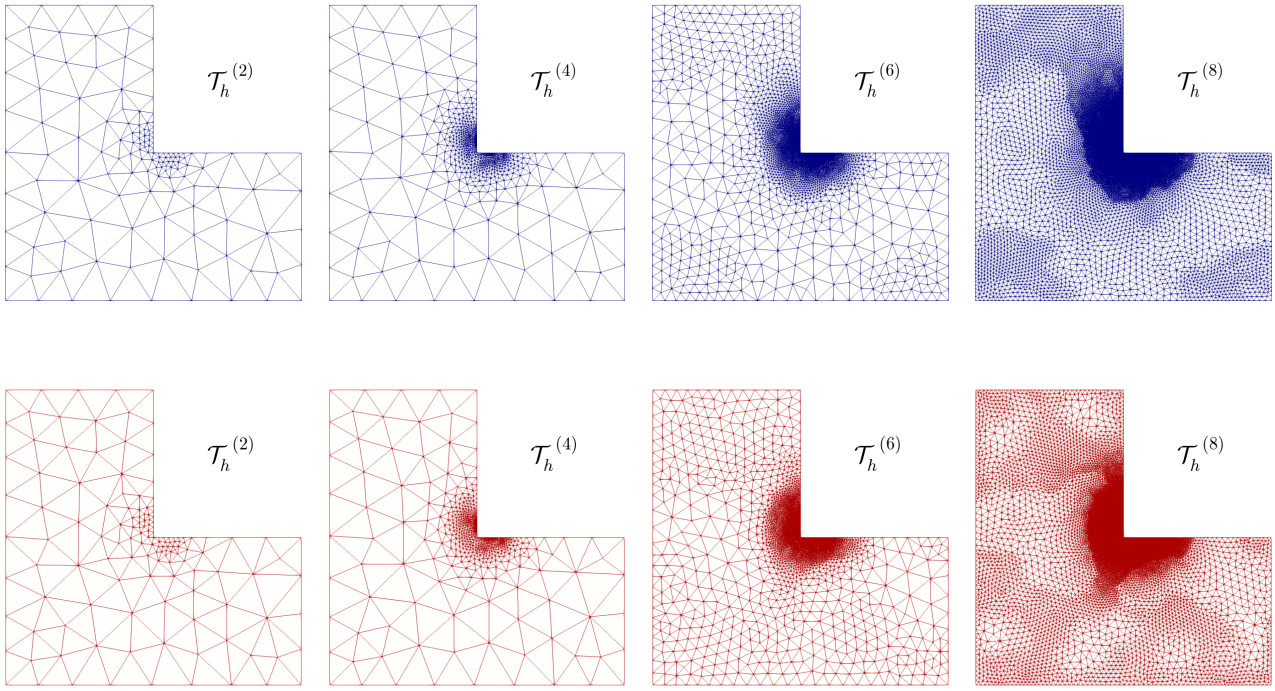


图 6.3: [示例 2] 根据指标 Θ_1 和 Θ_2 为$k = 0$ 生成的四个自适应网格快照（分别对应上图和下图）。

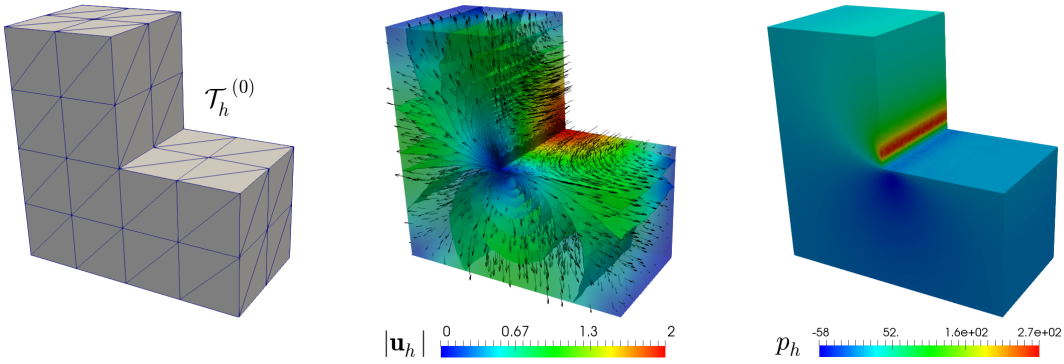


图6.4: [示例 3]初始网格、计算得到的速度大小和压力场。

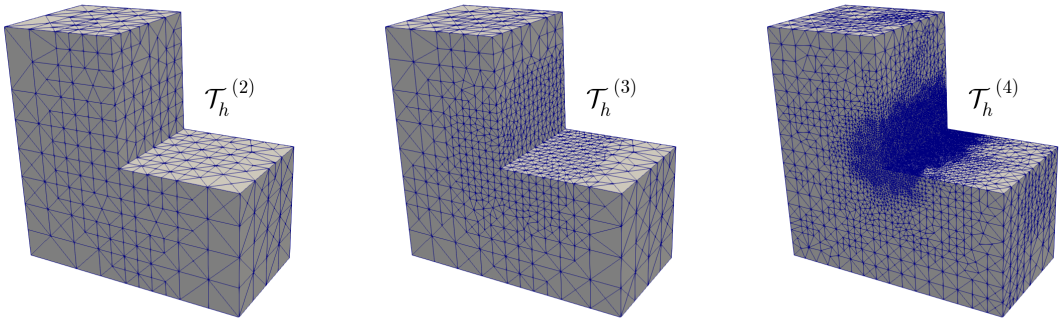


图6.5: [示例 3] 根据指标 Θ_1 为 $k = 0$生成的自适应网格的三个快照。

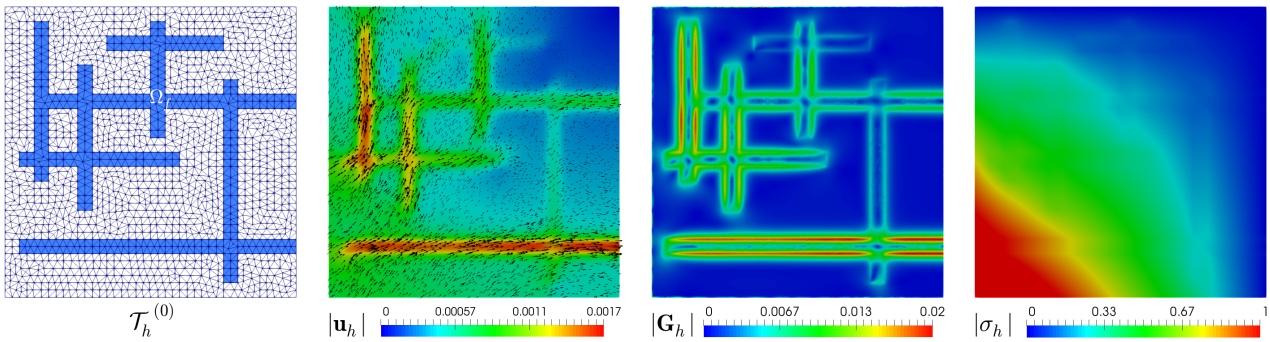


图6.6: [示例 4] 初始网格、计算得到的速度大小、速度梯度张量和伪应力张量。

DOF	iter	e($\boldsymbol{\sigma}$)	r($\boldsymbol{\sigma}$)	e($\mathbf{u}$)	r($\mathbf{u}$)	e(p)	r(p)	e($\mathbf{G}$)	r($\mathbf{G}$)
1586	6	7.85E+02	–	9.89E-00	–	2.84E+01	–	3.20E+01	–
2256	6	2.48E+02	6.53	2.49E-00	7.83	5.57E-00	9.25	9.59E-00	6.85
3434	6	5.22E+01	7.43	6.87E-01	6.13	1.46E-00	6.38	2.45E-00	6.50
6936	6	1.77E+01	3.08	5.96E-01	0.41	8.72E-01	1.46	1.45E-00	1.48
16656	6	7.59E-00	1.93	4.50E-01	0.64	3.79E-01	1.90	6.23E-01	1.93
46862	6	2.71E-00	1.99	9.68E-02	2.97	1.22E-01	2.20	2.02E-01	2.18
126940	6	1.01E-00	1.98	5.31E-02	1.20	5.02E-02	1.77	8.40E-02	1.76
354680	6	3.62E-01	2.00	1.46E-02	2.52	1.74E-02	2.07	2.89E-02	2.07

e($\boldsymbol{\omega}$)	r($\boldsymbol{\omega}$)	e($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	e($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	Θ_1	eff(Θ_1)
1.59E+01	–	6.86E+01	–	7.85E+02	–	8.26E+02	0.950
3.84E-00	8.09	1.93E+01	7.21	2.48E+02	6.53	2.57E+02	0.965
9.54E-01	6.62	4.96E-00	6.47	5.22E+01	7.43	5.53E+01	0.944
5.55E-01	1.54	2.96E-00	1.47	1.77E+01	3.08	2.08E+01	0.848
2.46E-01	1.86	1.26E-00	1.94	7.60E-00	1.93	8.95E-00	0.849
7.68E-02	2.25	4.12E-01	2.17	2.72E-00	1.99	3.08E-00	0.882
3.24E-02	1.73	1.71E-01	1.77	1.01E-00	1.98	1.18E-00	0.861
1.10E-02	2.10	5.89E-02	2.07	3.62E-01	2.01	4.15E-01	0.871

表 6.4: [采用自适应加密的 Θ_1 的示例 2] $\mathbb{RT}_1$ –$\mathbf{P}_2$ 格式。

A 感兴趣的其他变量的计算

在本附录中，我们为其他感兴趣的变量引入合适的逼近，例如压力 p、速度梯度 $\mathbf{G} := \nabla\mathbf{u}$、涡量 $\boldsymbol{\omega} := \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} - (\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{t}}\right)$，以及剪切应力张量 $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \nu\left(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^{\mathrm{t}}\right) - p\mathbf{I}$，它们均用离散问题 (4.2) 的解表示。事实上，利用 (2.11) 并进行简单计算，我们可推得在连续层面有

$$\begin{aligned} p = -\frac{1}{d}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) - \ell, \quad \mathbf{G} = \frac{1}{\nu}\left(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} + (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{d}}\right), \quad \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2\nu}\left(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{t}}\right), \quad \text{and} \\ \widetilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{d}} + (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})^{\mathrm{d}} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{t}} + (\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}) + \ell\,\mathbb{I}, \quad \text{with} \quad \ell = -\frac{1}{d\,|\Omega|}\int_\Omega \mathrm{tr}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{u})\,, \end{aligned} \tag{A.1}$$

给定问题（4.2）的离散解 $(\boldsymbol{\sigma}_h, \mathbf{u}_h) \in \mathbb{H}_h^{\boldsymbol{\sigma}} \times \mathbf{H}_h^{\mathbf{u}}$，我们为上述变量提出以下逼近：

$$\begin{aligned} p_h = -\frac{1}{d}\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}_h + \mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h) - \ell_h, \quad \mathbf{G}_h = \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{d}} + (\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)^{\mathrm{d}}\big), \quad \boldsymbol{\omega}_h = \frac{1}{2\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h - \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{t}}\big), \quad \text{and} \\ \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_h = \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{d}} + (\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)^{\mathrm{d}} + \boldsymbol{\sigma}_h^{\mathrm{t}} + (\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h) + \ell_h\,\mathbb{I}, \quad \text{with} \quad \ell_h = -\frac{1}{d\,|\Omega|}\int_\Omega \mathrm{tr}(\mathbf{u}_h\otimes\mathbf{u}_h)\,. \end{aligned} \tag{A.2}$$

以下结果的证明可直接由定理4.7得出，它确立了这一后处理过程相应的逼近结果。

引理 A.1 设 $(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) \in \mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)\times\mathbf{H}^1(\Omega)$ 是连续问题 (2.12)的唯一解，并令 p、$\mathbf{G}$、 $\boldsymbol{\omega}$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 由(A.1) 给出。此外，令 p_h、$\mathbf{G}_h$、 $\boldsymbol{\omega}_h$ 和 $\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_h$ 为(A.2)中引入的离散对应量。设 $l \in (0、 k+1]$，并假设定理 *4.7*的假设成立。那么，存在一个与 h无关的 $C > 0$，使得

$$\|p-p_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{G}-\mathbf{G}_h\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_h\|_{0,\Omega} + \|\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}-\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{0,\Omega} \le C\,h^l\left\{\|\boldsymbol{\sigma}\|_{l,\Omega} + \|\mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma})\|_{l,\Omega} + \|\mathbf{u}\|_{l+1,\Omega}\right\}. \tag{A.3}$$

DOF	iter	e($\boldsymbol{\sigma}$)	r($\boldsymbol{\sigma}$)	e($\mathbf{u}$)	r($\mathbf{u}$)	e(p)	r(p)	e($\mathbf{G}$)	r($\mathbf{G}$)
1586	6	7.85E+02	–	9.89E-00	–	2.84E+01	–	3.20E+01	–
2256	6	2.48E+02	6.53	2.49E-00	7.83	5.57E-00	9.25	9.59E-00	6.85
3434	6	5.22E+01	7.43	6.87E-01	6.13	1.46E-00	6.38	2.45E-00	6.50
6994	6	1.84E+01	3.12	6.00E-01	0.41	9.04E-01	1.43	1.51E-00	1.45
16414	6	7.68E-00	1.95	5.01E-01	0.40	4.33E-01	1.64	6.99E-01	1.71
42758	6	2.85E-00	2.07	1.76E-01	2.18	1.70E-01	1.96	2.84E-01	1.88
120274	6	1.06E-00	1.91	8.09E-02	1.51	6.83E-02	1.76	1.14E-01	1.77
319958	6	3.85E-01	2.07	2.13E-02	2.73	2.15E-02	2.36	3.63E-02	2.34

e($\boldsymbol{\omega}$)	r($\boldsymbol{\omega}$)	e($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	e($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	$\widehat{\Theta}_2$	eff($\widehat{\Theta}_2$)
1.59E+01	–	6.86E+01	–	7.85E+02	–	7.83E+02	1.002
3.84E-00	8.09	1.93E+01	7.21	2.48E+02	6.53	2.49E+02	0.999
9.54E-01	6.62	4.96E-00	6.47	5.22E+01	7.43	5.23E+01	0.999
5.79E-01	1.49	3.06E-00	1.44	1.84E+01	3.12	1.85E+01	0.997
2.68E-01	1.72	1.43E-00	1.70	7.69E-00	1.95	7.79E-00	0.988
1.10E-01	1.86	5.77E-01	1.90	2.85E-00	2.07	2.90E-00	0.986
4.33E-02	1.80	2.32E-01	1.77	1.06E-00	1.91	1.07E-00	0.990
1.41E-02	2.30	7.35E-02	2.35	3.86E-01	2.07	3.87E-01	0.997

表 6.5： [采用自适应加密的 2] $\mathbb{RT}_1 - \mathbf{P}_2$ 方案，方法为 $\widehat{\Theta}_2$。

证明。 首先，由 (A.1) 和 (A.2)，通过加上再减去 $\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}_h$（对$\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}$也同样适用），并应用三角不等式和 H¨older 不等式，不难看出存在一个 $C > 0$，它仅依赖于数据及其他常数，且这些量均与 h无关，使得

$$\begin{aligned} &\|p - p_h\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{G} - \mathbf{G}_h\|_{0,\Omega} + \|\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}_h\|_{0,\Omega} + \|\widetilde{\boldsymbol{\sigma}} - \widetilde{\boldsymbol{\sigma}}_h\|_{0,\Omega} \\ &\quad \leq C \left\{ \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_{\mathbf{div};\Omega} + \big(\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}\big)\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} \right\}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

然后，利用$\mathbf{u} \in \mathbf{W}_r$ 且$\mathbf{u}_h \in \mathbf{W}_r$这一事实，直接应用定理4.7即可得出结论。□

B 后验误差分析的预备知识

首先引入一些有用的记号，以描述单元以及边或面上的局部信息，具体取决于 $d = 2$ 或 $d = 3$。设 $\mathcal{E}_h$ 为 $\mathcal{T}_h$的边或面的集合，其对应的直径记为 h_e，并定义

$$\mathcal{E}_h(\Omega) := \big\{ e \in \mathcal{E}_h : \quad e \subseteq \Omega \big\} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_h(\Gamma) := \big\{ e \in \mathcal{E}_h : \quad e \subseteq \Gamma \big\}.$$

对于每个 $T \in \mathcal{T}_h$，我们令 $\mathcal{E}_{h,T}$ 为 T 的边或面的集合，并记

$$\mathcal{E}_{h,T}(\Omega) = \big\{ e \in \partial T : \quad e \subseteq \mathcal{E}_h(\Omega) \big\} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}_{h,T}(\Gamma) = \big\{ e \in \partial T : \quad e \subseteq \mathcal{E}_h(\Gamma) \big\}.$$

我们还将每条边或面上的单位法向量 $\mathbf{n}_e$ 定义为

$$\mathbf{n}_e := (n_1, \ldots, n_d)^{\mathrm{t}} \quad \forall\, e \in \mathcal{E}_h\,.$$

因此，当 $d = 2$ 我们可以将切向量 $\mathbf{s}_e$ 定义为

$$\mathbf{s}_e := (-n_2, n_1)^{\mathrm{t}} \quad \forall\, e \in \mathcal{E}_h\,.$$

DOF	h	iter	e($\boldsymbol{\sigma}$)	r($\boldsymbol{\sigma}$)	e($\mathbf{u}$)	r($\mathbf{u}$)	e(p)	r(p)	e($\mathbf{G}$)	r($\mathbf{G}$)
1221	0.354	4	1.72E+02	–	2.52E-00	–	8.67E-00	–	5.97E-00	–
8559	0.177	4	1.84E+02	–	1.95E-00	0.40	6.64E-00	0.43	5.15E-00	0.23
64059	0.088	4	1.37E+02	0.43	1.23E-00	0.69	3.55E-00	0.91	3.54E-00	0.56
333609	0.051	4	9.28E+01	0.71	7.14E-01	0.99	1.98E-00	1.06	2.39E-00	0.72
1276641	0.032	4	6.50E+01	0.80	4.15E-01	1.22	1.24E-00	1.04	1.64E-01	0.84

e($\boldsymbol{\omega}$)	r($\boldsymbol{\omega}$)	e($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	e($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	Θ_1	eff(Θ_1)	$\widehat{\Theta}_2$	eff($\widehat{\Theta}_2$)
3.29E-00	–	1.80E+01	–	1.72E+02	–	1.72E+02	1.001	1.72E+02	1.002
2.56E-00	0.39	1.44E+01	0.34	1.84E+02	–	1.83E+02	1.001	1.83E+02	1.001
1.62E-00	0.68	8.80E-00	0.74	1.37E+02	0.43	1.40E+02	1.001	1.37E+02	1.001
1.05E-00	0.79	5.49E-00	0.86	9.28E+01	0.71	9.27E+01	1.001	9.28E+01	1.000
7.00E-01	0.91	3.66E-00	0.91	6.50E+01	0.80	6.49E+01	1.000	6.50E+01	1.000

表 6.6: [示例 3] $\mathbb{RT}_0 - \mathbf{P}_1$ 采用拟一致加密的方案。

DOF	iter	e($\boldsymbol{\sigma}$)	r($\boldsymbol{\sigma}$)	e($\mathbf{u}$)	r($\mathbf{u}$)	e(p)	r(p)	e($\mathbf{G}$)	r($\mathbf{G}$)
1221	4	1.72E+02	–	2.52E-00	–	8.67E-00	–	5.97E-00	–
4761	4	1.85E+02	–	2.21E-00	0.29	6.64E-00	0.59	5.56E-00	0.16
24309	4	1.39E+02	0.53	1.40E-00	0.84	3.54E-00	1.16	3.80E-00	0.70
90255	4	8.74E+01	1.06	7.91E-01	1.31	1.84E-00	1.49	2.29E-00	1.16
1040940	4	3.18E+01	1.24	3.28E-01	1.08	6.50E-01	1.28	9.10E-01	1.13

e($\boldsymbol{\omega}$)	r($\boldsymbol{\omega}$)	e($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	e($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	Θ_1	eff(Θ_1)
3.29E-00	–	1.80E+01	–	1.72E+02	–	1.71E+02	1.001
2.80E-00	0.35	1.50E+01	0.41	1.85E+02	–	1.84E+02	1.002
1.70E-00	0.92	9.16E-00	0.91	1.39E+02	0.53	1.39E+02	1.001
9.12E-01	1.42	5.27E-00	1.26	8.74E+01	1.06	8.73E+01	1.000
3.48E-01	1.18	2.02E-00	1.17	3.18E+01	1.24	3.17E+01	1.000

表 6.7: [通过 Θ_1 自适应加密的示例 3] $\mathbb{RT}_0 - \mathbf{P}_1$ 格式。

然而，在不会引起混淆的情况下，我们将分别简单地用 $\mathbf{n}$ 和 $\mathbf{s}$ 代替 $\mathbf{n}_e$ 和 $\mathbf{s}_e$。

对于分片连续的矩阵值、向量值或标量值函数 $\boldsymbol{\zeta}$，通常定义其跨越内部边或面的跳跃算子 $[\![\cdot]\!]$，如下:

$$[\![\boldsymbol{\zeta}]\!] = (\boldsymbol{\zeta}|_{T_+})|_e - (\boldsymbol{\zeta}|_{T_-})|_e \text{ with } e = \partial T_+ \cap \partial T_- ,$$

其中， T_+ 和 T_- 是 $\mathcal{T}_h$ 中的单元，它们以 e 为公共边或面。最后，对于足够光滑的标量 ψ、向量$\mathbf{v}$:$=(v_1$、.....、$v_d)^{\mathrm{t}}$以及张量场 $\boldsymbol{\tau}$:$=(\tau_{ij})_{i,\ j=1,\ d}$，令

$$\underline{\gamma}_*(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} \boldsymbol{\tau}\mathbf{s} & , \text{ for } d=2\,, \\ \begin{pmatrix} (\boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{t}} \times \mathbf{n})^{\mathrm{t}} \\ (\boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{t}} \times \mathbf{n})^{\mathrm{t}} \\ (\boldsymbol{\tau}_3^{\mathrm{t}} \times \mathbf{n})^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} & , \text{ for } d=3\,, \end{cases} , \quad \mathbf{curl}(\mathbf{v}) := \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} \\ -\dfrac{\partial v_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad \text{for } d=2\,,$$

$$\underline{\mathrm{curl}}(\mathbf{v}) := \begin{cases} \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} - \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2} & , \text{ for } d=2\,, \\ \nabla \times \mathbf{v} & , \text{ for } d=3\,, \end{cases} \qquad \underline{\mathbf{curl}}(\boldsymbol{\tau}) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{curl}}(\boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{t}}) \\ \underline{\mathrm{curl}}(\boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{t}}) \end{pmatrix} & , \text{ for } d=2\,, \\ \begin{pmatrix} \underline{\mathrm{curl}}(\boldsymbol{\tau}_1^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} \\ \underline{\mathrm{curl}}(\boldsymbol{\tau}_2^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} \\ \underline{\mathrm{curl}}(\boldsymbol{\tau}_3^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} & , \text{ for } d=3\,, \end{cases}$$

DOF	iter	e($\boldsymbol{\sigma}$)	r($\boldsymbol{\sigma}$)	e($\mathbf{u}$)	r($\mathbf{u}$)	e(p)	r(p)	e($\mathbf{G}$)	r($\mathbf{G}$)
1221	4	1.72E+02	–	2.52E-00	–	8.67E-00	–	5.97E-00	–
4827	4	1.85E+02	–	2.21E-00	0.29	6.63E-00	0.59	5.56E-00	0.16
24375	4	1.40E+02	0.51	1.42E-00	0.83	3.55E-00	1.16	3.80E-00	0.70
112431	4	8.71E+01	0.93	7.62E-01	1.22	1.82E-00	1.31	2.29E-00	1.00
1022031	4	3.18E+01	1.37	3.26E-01	1.15	6.60E-01	1.38	9.20E-01	1.24

e($\boldsymbol{\omega}$)	r($\boldsymbol{\omega}$)	e($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$)	e($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	r($\vec{\boldsymbol{\sigma}}$)	$\widehat{\Theta}_2$	eff($\widehat{\Theta}_2$)
3.29E-00	–	1.80E+01	–	1.72E+02	–	1.72E+02	1.002
2.80E-00	0.35	1.50E+01	0.41	1.85E+02	–	1.84E+02	1.002
1.71E-00	0.91	9.16E-00	0.91	1.40E+02	0.51	1.40E+02	1.001
9.30E-01	1.20	5.24E-00	1.10	8.71E+01	0.93	8.71E+01	1.000
3.50E-01	1.33	2.05E-00	1.28	3.18E+01	1.37	3.18E+01	1.000

表 6.8：通过 $\widehat{\Theta}_2$进行自适应加密的示例 3] $\mathbb{RT}_0 - \mathbf{P}_1$ 方案。

其中，$\boldsymbol{\tau}_i$ 是 $\boldsymbol{\tau}$ 的第 i 行，所涉及的导数均按分布意义理解。

现在，令 $\mathbf{I}_h : \mathbf{H}^1(\Omega) \to \mathbf{H}^1_h(\Omega)$ 为通常 Cl´ement 插值算子的向量形式（参见 [13]），其中

$$\mathbf{H}^1_h(\Omega) := \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{C}(\overline{\Omega}) : \quad \mathbf{v}_h|_T \in \mathbf{P}_1(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h \right\},$$

并令 $\boldsymbol{\Pi}^k_h : \mathbb{H}^1(\Omega) \to \mathbb{H}^{\sigma}_h$（参见（4.1a））为 Raviart–Thomas 插值算子，根据其刻画性质（例如参见 [17, 第 3.4 节1]），有

$$\mathbf{div}(\boldsymbol{\Pi}^k_h(\boldsymbol{\tau})) = \mathcal{P}^k_h(\mathbf{div}(\boldsymbol{\tau})) \quad \forall\, \boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}^1(\Omega)\,,$$

其中，$\mathcal{P}^k_h$ 是在 Ω 上按次数为 $\leq k$ 的分片多项式空间上的 $\mathrm{L}^2(\Omega)$-正交投影的向量形式。$\mathbf{I}_h$ 和 $\boldsymbol{\Pi}^k_h$ 的其他逼近性质总结于下面的引理中（证明例如见 [13] 和 [17, 的引理 3.16 以及分别见 3.18], ）。

引理 B.1 存在与 h 无关的 c_1、$c_2 > 0$，使得对所有 $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$，均有

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h(\mathbf{v})\|_{0,T} \leq c_1\, h_T\, \|\mathbf{v}\|_{1,\Delta(T)} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h,$$

and

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h(\mathbf{v})\|_{0,e} \leq c_2\, h_e^{1/2}\, \|\mathbf{v}\|_{1,\Delta(e)} \quad \forall\, e \in \mathcal{E}_h,$$

where $\Delta(T) := \cup\Big\{ T' \in \mathcal{T}_h : \; T' \cap T \neq \emptyset \Big\}$ *and* $\Delta(e) := \cup\Big\{ T' \in \mathcal{T}_h : \; T' \cap e \neq \emptyset \Big\}$.

引理 B.2 存在与 h 无关的 C_1、$C_2 > 0$，使得对所有 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$，均有

$$\|\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\Pi}^k_h(\boldsymbol{\tau})\|_{0,T} \leq C_1\, h_T\, \|\boldsymbol{\tau}\|_{1,T} \quad \forall\, T \in \mathcal{T}_h\,,$$

and

$$\|\boldsymbol{\tau}\mathbf{n} - \boldsymbol{\Pi}^k_h(\boldsymbol{\tau})\mathbf{n}\|_{0,e} \leq C_2\, h_e^{1/2}\, \|\boldsymbol{\tau}\|_{1,T_e} \quad \forall\, e \in \mathcal{E}_h,$$

其中 T_e 是 $\mathcal{T}_h$ 的一个三角形，其边界上包含边 e。

我们以回顾 $\mathbb{H}$**(散度;** Ω**)** 的一个稳定 Helmholtz 分解来结束本附录。更确切地说，有如下引理。

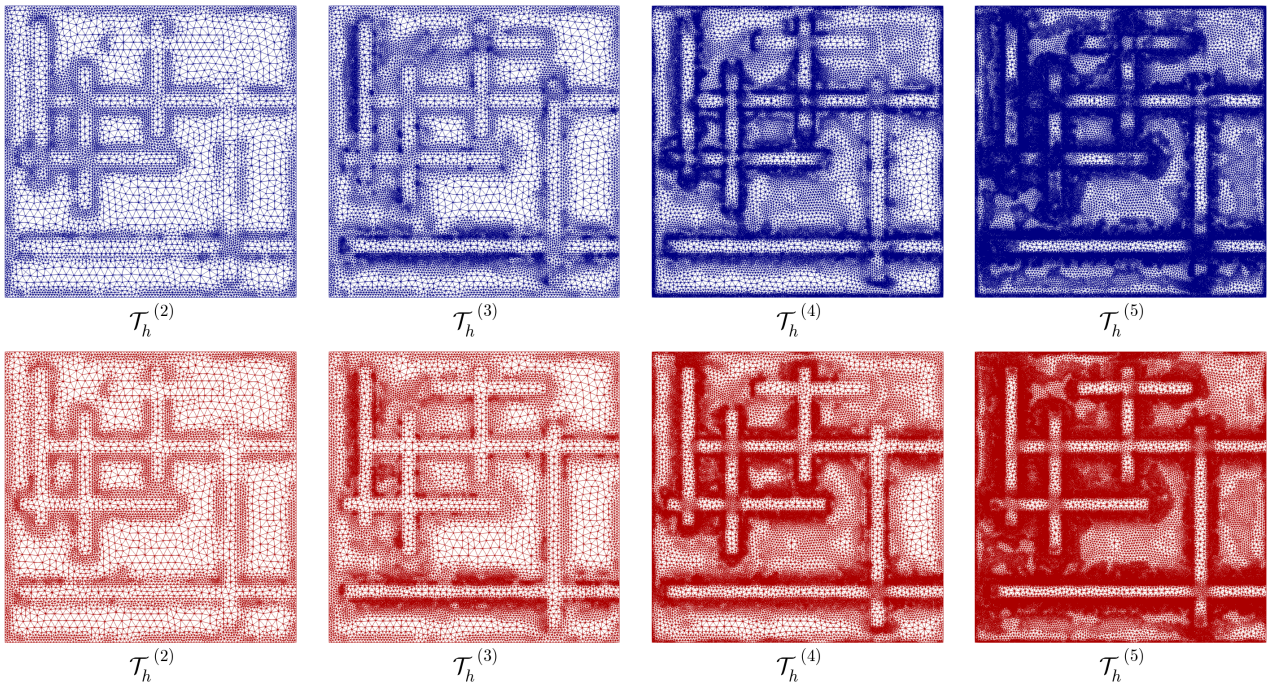


图 6.7: [示例 4] 根据指标 Θ_1 和 Θ_2 得到的四个自适应网格快照（分别见上图和下图）。

引理 B.3 对于每个 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\textbf{散度}; \Omega)$，存在

a) $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ 以及 $\boldsymbol{\chi} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$，满足 $\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathbf{z} + \textbf{旋度}(\boldsymbol{\chi})$ 当 $d = 2$ 时；
b) $\mathbf{z} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ 以及 $\boldsymbol{\chi} \in \mathbb{H}^1(\Omega)$，满足 $\boldsymbol{\tau} = \nabla \mathbf{z} + \textbf{旋度}(\boldsymbol{\chi})$ 当 $d = 3$ 时。

此外，在两种情况下，

$$\|\mathbf{z}\|_{2;\Omega} + \|\boldsymbol{\chi}\|_{1,\Omega} \leq C_{\mathtt{Hel}} \|\boldsymbol{\tau}\|_{\mathbf{div};\Omega},$$

其中 $C_{\mathtt{Hel}}$ 是一个与上述所有变量无关的正数常量。

证明。 关于 *a)* 和 *b)* 的证明，请参见 [22, 引理 3.7] 和 [18, 定理 3.1], 。我们不再赘述。□

C 第二个 后验误差估计子

在本附录中，我们介绍并分析增广混合有限元格式 (4.2) 的另一种后验误差估计子，它并非基于 $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{H}(\textbf{散度};\Omega)$ 的亥姆霍兹分解。更确切地说，这第二种估计子仅仅源于对 (5.8) 给出的总误差初步估计中 $\|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\textbf{散度};\Omega)'}$ 进行界定的另一种方式。接下来，沿用第 4.1 节和附录B中的相同记号与离散空间，我们现在为每个 $T \in \mathcal{T}_h$

局部误差指示子

$$\begin{aligned}\widetilde{\Theta}_{2,T}^2 \;:=\; & \Big\| \nabla \mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}} \Big\|_{0,T}^2 \\ & + \|\alpha\,\mathbf{u}_h + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) - \mathbf{f}\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,T}(\Gamma)} \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h\|_{0,e}^2 \,,\end{aligned}$$

并定义如下全局残差误差估计子

$$\Theta_2 \;:=\; \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \widetilde{\Theta}_{2,T}^2 + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h\|_{1/2,\Gamma}^2 \right\}^{1/2} .$$

The 接下来给出后验误差估计子 Θ_2 的可靠性和效率。

定理 C.1 假设数据$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ 满足(4.10)。则存在正常数$\sim$ $\sim C_{\mathtt{rel}}$ 和 $C_{\mathtt{eff}}$，它们与 h无关，使得

$$\widetilde{C}_{\mathtt{eff}}\,\Theta_2 + \mathtt{h.o.t.} \;\le\; \|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u}) - (\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\| \;\le\; \widetilde{C}_{\mathtt{rel}}\,\Theta_2 \,. \tag{C.1}$$

证明。 首先注意到，可靠性的证明基本上归结为推导$\|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\text{散度};\Omega)'}$的另一个上界。事实上，在 (5.9) 中应用柯西–施瓦茨不等式和迹不等式，可直接得到

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_1\|_{\mathbb{H}_0(\mathbf{div};\Omega)'} \;\le\; C \Big\{ & \Big\| \nabla \mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}} \Big\|_{0,\Omega} \\ & + \|\alpha\,\mathbf{u}_h + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) - \mathbf{f}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h\|_{1/2,\Gamma} \Big\} ,\end{aligned} \tag{C.2}$$

其中 C 是一个与 h无关的正数常量。这样，将 (C.2) 代回 (5.8)，即可得到 (C.1) 中的上界，从而得出所需的估计。另一方面，对于效率估计，由$\mathbf{H}^1(\Omega)$ 中的迹定理可知，存在一个依赖于 Γ 和 Ω 的正数常量 c，使得

$$\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h\|_{1/2,\Gamma}^2 \;=\; \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1/2,\Gamma}^2 \;\le\; c\,\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega}^2 \,.$$

论证的其余部 分见定理 5.5 的证明。省略更多细节。 □

我们以如下评论结束本附录：在求解 (4.2) 的自适应算法中，最终使用 Θ_2 会受到表达式 $\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h\|_{1/2,\ \Gamma}$的非局部特性的阻碍。为避免这种情况，我们现在用一个合适的上界替代该项，从而得到一个可靠且完全局部的后验误差估计子。遗憾的是，作为交换，我们失去了通过解析方法获得效率的可能性。

定理 C.2 假设数据$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{u}_{\mathrm{D}}$ 满足(4.10)，并令

$$\widehat{\Theta}_2 \;:=\; \left\{ \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \widehat{\Theta}_{2,T}^2 \right\}^{1/2} , \tag{C.3}$$

其中

$$\begin{aligned}\widehat{\Theta}_{2,T}^2 \;:=\; & \Big\| \nabla \mathbf{u}_h - \frac{1}{\nu}\big(\boldsymbol{\sigma}_h + (\mathbf{u}_h \otimes \mathbf{u}_h)\big)^{\mathrm{d}} \Big\|_{0,T}^2 \\ & + \|\alpha\,\mathbf{u}_h + \mathtt{F}\,|\mathbf{u}_h|^{\mathrm{p}-2}\mathbf{u}_h - \mathbf{div}(\boldsymbol{\sigma}_h) - \mathbf{f}\|_{0,T}^2 + \sum_{e \in \mathcal{E}_{h,T}(\Gamma)} \|\mathbf{u}_{\mathrm{D}} - \mathbf{u}_h\|_{1,e}^2 \,.\end{aligned} \tag{C.4}$$

^那么，存在一个与 h 无关的正数常量 $C_{\mathtt{rel}}$，使得

$$\|(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{u})-(\boldsymbol{\sigma}_h,\mathbf{u}_h)\| \leq \widehat{C}_{\mathtt{rel}}\,\widehat{\Theta}_2\,. \tag{C.5}$$

证明。 问题归结为对 $\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}_h\|_{1/2,\Gamma}$ 进行估计。事实上，由于 $\mathbf{H}^1(\Gamma)$ 连续嵌入 $\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma)$，存在一个正数常量 C，其取决于 Γ，使得

$$\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}_h\|^2_{1/2,\Gamma} \leq C\,\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}_h\|^2_{1,\Gamma} = C\sum_{e\in\mathcal{E}_h(\Gamma)}\|\mathbf{u}_{\mathrm{D}}-\mathbf{u}_h\|^2_{1,e}\,,$$

which，再结合 (C.1) 的上界，即可推出 (C.5)，并完成证明 f. □

参考文献

[1] F. Brezzi and M. Fortin,《混合与杂交有限元方法》。施普林格计算数学丛书，第*15*卷。施普林格出版社，纽约，*1991*年。[2] J. Camaño, G.N. Gatica, R. Oyarzúa, and R. Ruiz-Baier, 一种用于非线性黏度稳态纳维–斯托克斯方程的增广应力型混合有限元方法。《数值方法与偏微分方程》*33*（*2017*），第*5*期，*1692–1725*。[3] J. Camaño, G.N. Gatica, R. Oyarzúa, and G. Tierra, 一种用于变黏度 *Navier–Stokes* 方程的增广混合有限元方法。《*SIAM* 数值分析杂志》*54*（*2016*），第*2*期，*1069–1092*。[4] J. Camaño, R. Oyarzúa, and G. Tierra, 纳维–斯托克斯问题的增广混合有限元方法分析。《数学计算》*86*（*2017*），第*304*期，*589–615*。[5] S. Caucao, G.N. Gatica, and R. Oyarzúa, 非等温奥尔德罗伊德–斯托克斯问题增广全混合形式的后验误差分析。《数值方法与偏微分方程》*35*（*2019*），第*1*期，*295–324*。[6] S. Caucao, G.N. Gatica, R. Oyarzúa, and N. Sánchez, 基于 *Brinkman–Forchheimer* 方程的稳态双扩散对流系统的全混合形式。《科学计算杂志》*85*（*2020*），第*2*期，论文编号*44*，共*37*页。[7] S. Caucao, G.N. Gatica, R. Oyarzúa, and P. Zúñiga, *Brinkman–Forchheimer* 方程与双扩散方程耦合问题的混合有限元方法后验误差分析。《科学计算杂志》*93*（*2022*），第*2*期，论文编号*50*，共*42*页。[8] S. Caucao, D. Mora, and R. Oyarzúa, 变密度斯托克斯问题的基于伪应力混合形式的先验与后验误差分析。《*IMA* 数值分析杂志》*36*（*2016*），第*2*期，*947–983*。[9] S. Caucao, R. Oyarzúa, S. Villa-Fuentes, and I. Yotov, 非定常 *Brinkman–Forchheimer* 方程的三场巴拿赫空间混合形式。《计算方法、应用力学与工程》*394*（*2022*），论文编号*114895*，共*32*页。[10] S. Caucao and I. Yotov, 非定常 *Brinkman–Forchheimer* 方程的巴拿赫空间混合形式。《*IMA* 数值数学杂志》*41*（*2021*），第*4*期，*2708–2743*。

[11] A.O. Celebi, V.K. Kalantarov, and D. Ugurlu, 对流 *Brinkman–Forchheimer* 方程的连续依赖性。《应用分析》*84*（*2005*），第*9*期，*877–888*。[12] P.G. Ciarlet,《线性与非线性泛函分析及其应用》。工业与应用数学学会，费城，宾夕法尼亚州，*2013*年。[13] P. Clément, 利用局部正则化进行有限元函数逼近。《*RAIRO* 数学建模与数值分析》*9*（*1975*），*77–84*。
[14] E. Colmenares, G.N. Gatica, and R. Oyarzúa, 定常 *Boussinesq* 问题的增广全混合有限元方法。《*Calcolo*》*54*（*2017*），第*1*期，*167–205*。[15] E. Colmenares, G.N. Gatica, and R. Oyarzúa, 定常 *Boussinesq* 模型增广全混合形式的后验误差分析。《计算数学与应用》*77*（*2019*），第*3*期，*693–714*。[16] C. Domínguez, G.N. Gatica, and S. Meddahi, 二维流固相互作用问题全混合有限元方法的后验误差分析。《计算数学杂志》*33*（*2015*），第*6*期，*606–641*。
[17] G.N. Gatica,《混合有限元方法简明导论：理论与应用》。施普林格数学简明读本。施普林格，查姆，*2014*年。[18] G.N. Gatica, 关于三维稳定 *Helmholtz* 分解的注记。《应用分析》*99*（*2020*），第*7*期，*1110–1121*。[19] G.N. Gatica, L.F. Gatica, and A. Márquez, 多孔介质流动 *Brinkman* 模型的基于伪应力混合有限元方法分析。《数值数学》*126*（*2014*），第*4*期，*635–677*。[20] G.N. Gatica, A. Márquez, and M.A. Sánchez, 定常 *Stokes* 方程的速度-压力-伪应力形式分析。《计算方法、应用力学与工程》*199*（*2010*），第*17–20*期，*1064–1079*。
[21] L.F. Gatica, R. Oyarzúa, and N. Sánchez, *Navier–Stokes–Brinkman* 问题增广混合有限元方法的先验与后验误差分析。《计算数学与应用》*75*（*2018*），第*7*期，*2420–2444*。
[22] G.N. Gatica, R. Ruiz-Baier, and G. Tierra, 非线性黏度 *Navier–Stokes* 方程增广混合方法的后验误差分析。《计算数学与应用》*72*（*2016*），第*9*期，*2289–2310*。
[23] V. Girault and P.A. Raviart,《*Navier–Stokes* 方程的有限元方法：理论与算法》。施普林格计算数学丛书，第*5*卷。施普林格出版社，柏林，*1986*年。
[24] R. Glowinski and A. Marroco, 关于利用一阶有限元进行逼近，以及通过罚-对偶方法求解一类非线性 *Dirichlet* 问题。《法国自动化、计算机科学与运筹学评论：数值分析丛刊》*9*（*1975*），第*R-2*期，*41–76*。[25] F. Hecht, *FreeFem* 的新进展。《数值数学杂志》*20*（*2012*），*251–265*。
[26] F. Hecht, *FreeFem*。第三版，版本*3.58-1*。雅克-路易·利昂实验室，皮埃尔-玛丽·居里大学，巴黎，*2018*年。[可在 *http://www.freefem.org/ff*++] 获取。

[27] A. Kufner, O. Jhon, and S. Fučík，函数空间。固体与流体力学专著和教科书；力学：分析。Noordhoff International Publishing，莱顿；Academia，布拉格，1977年。
[28] D. Liu and K. Li，二维不可压缩对流 *Brinkman–Forchheimer* 方程的混合有限元。《应用数学与力学》（英文版）40（2019年），第6期，889–910页。[29] A. Quarteroni and A. Valli，偏微分方程数值逼近。施普林格计算数学丛书，第23卷。施普林格出版社，柏林，1994年。
[30] J.E. Roberts and J.M. Thomas，混合与混杂方法。P. G. Ciarlet 和 J. L. Lions 编，《数值分析手册》第II卷，《有限元方法》（第1部分），North-Holland，阿姆斯特丹，1991年。
[31] R. Verfürth，后验误差估计与自适应网格细化技术综述。Wiley Teubner，奇切斯特，1996年。[32] H. Yu，对流 *Brinkman–Forchheimer* 方程的轴对称解。《数学分析与应用杂志》520（2023年），第2期，论文编号126892，共12页。[33] C. Zhao and Y. You，不可压缩对流 *Brinkman–Forchheimer* 方程的逼近。《演化方程杂志》12（2012年），第4期，767–788页。