arXiv:2303.01473v1 [cs.LO] 2 Mar 2023

单子稳定和有界灌木深度图类中的典范分解

Pierre Ohlmann波兰华沙大学信息学研究所

Michał Pilipczuk波兰华沙大学信息学研究所

Wojciech Przybyszewski波兰华沙大学信息学研究所

Szymon Toruńczyk波兰华沙大学信息学研究所

摘要

我们运用源自稳定性理论的模型论工具，得出一项称为有限替代引理的结果，其直观含义如下。假设我们研究的是稳定图类 $\mathscr{C}$，并且能够使用带参数的一阶公式 φ，在每个图 $G \in \mathscr{C}$中定义满足某个遗传一阶断言 ψ的关系 R。那么，我们就能找到一个具有相同性质的一阶公式 φ'，并且它还具有有限性：存在有限上界 $k \in \mathbb{N}$，使得在每个图 $G \in \mathscr{C}$中，不同的参数选择至多能定义出 k 个不同的关系 R，这些关系可由 φ'定义。

我们运用有限替代引理，推导出两个推论，涉及结构良好的图类中某些典范分解的存在性。

– 我们证明，在刻画处处稀疏图类的 Splitter 游戏和刻画单子稳定图类的 Flipper 博弈中，Splitter 和 Flipper 分别拥有一种可从博弈历史用一阶逻辑定义的获胜策略。因此，该策略是典范的。– 我们证明，对于任意固定的有界灌木深度图类 $\mathscr{C}$，存在一个时间复杂度为$\mathcal{O}(n^2)$的算法，它给定一个具有 n个顶点的图 $G \in \mathscr{C}$，即可用同构不变的方式计算出一个有界树深度结构 H，并可在其中解释 G。这一结果的推论是：对于任意固定的有界灌木深度类，都存在一个时间复杂度为$\mathcal{O}(n^2)$的同构测试和规范化算法。

2012年ACM主题分类 计算理论 → 逻辑 → 有限模型论

关键词和短语 模型论、稳定性理论、灌木深度、处处稀疏、单子稳定

资助 本文是一个获得欧洲研究委员会（ERC）资助的项目的一部分（资助协议编号948057——BOBR）。

致谢 我们感谢Pierre Simon，就稳定性理论中的经典结果与其进行的富有启发性的讨论，极大地帮助了我们推导出本文所呈现的结果。我们还感谢Jakub Gajarský、Rose McCarty和Marek Sokołowski在围绕本文主题的讨论中所作的贡献。

1 引言

稳定性理论是模型论中一个成熟的分支，致力于研究稳定理论，或等价地，研究作为此类理论之模型的结构类。在此，我们称公式[1] $\varphi(\bar{x};\bar{y})$在关系结构类 $\mathscr{C}$ 上是稳定的，如果存在一个

[1] 除非明确说明，本文考虑的所有公式均为一阶公式。

整数 $k \in \mathbf{N}$，使得对于每个$\mathbf{M} \in \mathscr{C}$，都不存在元组 $\bar{u}_1$、…、 $\bar{u}_k \in \mathbf{M}^{\bar{x}}$ 和$\bar{v}_1$、…、 $\bar{v}_k \in \mathbf{M}^{\bar{y}}$，使得对于所有 i、 $j \in \{1$、…、 $k\}$，

$$\mathbf{M} \models \varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \qquad \text{if and only if} \qquad i < j.$$

那么，如果每个公式在 $\mathscr{C}$ 上都是稳定的，则 $\mathscr{C}$ 是稳定的。直观地说，这意味着使用一个固定公式，无法在 $\mathscr{C}$ 中的结构里解释任意长的全序。关于稳定性入门，可参阅 Pillay [28] 或 Tent 和 Ziegler [31] 的教材。

本文旨在运用稳定性理论中的一些经典结果，尤其是对稳定理论中分叉 的理解，推导关于某些结构良好的图类中典范分解存在性的结论。这里，我们将图建模为关系结构，其中包含一个对称的二元邻接关系。

有限替代引理。 我们的主要模型论工具是有限替代引理，下面以简化形式陈述该引理；完整陈述见引理 10。

为陈述该引理，我们需要一些定义。若存在 $k \in \mathbf{N}$，使得对每个$\mathbf{M} \in \mathscr{C}$，都有公式 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ 在结构类 $\mathscr{C}$ 上是有限的，则称该公式在该结构类上是有限的。

$$\left|\{\varphi(\mathbf{M}^{\bar{x}}, \bar{v}) \colon \bar{v} \in \mathbf{M}^{\bar{y}}\}\right| \leqslant k,$$

其中 $\varphi(\mathbf{M}^{\bar{x}}, \bar{v}) = \{\bar{u} \in \mathbf{M}^{\bar{x}} \mid \mathbf{M} \models \varphi(\bar{u}, \bar{v})\}$。换言之，如果在任意模型 $\mathbf{M} \in \mathscr{C}$中，对 $\bar{y}$ 代入不同的参数，最多只能定义出 k个不同的 $\bar{x}$-元组关系，那么 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ 在 $\mathscr{C}$上是有限的。接下来，如果对于每个模型 $\mathbf{M}$ 及其诱导子结构 $\mathbf{M}'$, $\mathbf{M} \models \psi$ 蕴含 $\mathbf{M}' \models \psi$，则称句子 ψ 是遗传的。最后，对于签名中出现的关系 $R(\bar{x})$、公式 $\varphi(\bar{x})$（可能带有参数）以及句子 ψ，我们用 $\psi[R(\bar{x})/\varphi(\bar{x})]$ 表示由 ψ 导出的句子，其中将 R 的每次出现都替换为公式 φ。

▶ **引理1** (有限替代引理，简化版)。 设 $\mathscr{C}$是一个稳定的结构类。假设 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ 是一个公式，且 ψ 是一个遗传句子，并且对于每个 $G \in \mathscr{C}$，

$$\textit{there exists } \bar{s} \in G^{\bar{y}} \textit{ such that } G \models \psi[R(\bar{x})/\varphi(\bar{x}; \bar{s})]. \tag{1}$$

那么，存在一个公式 $\varphi'(\bar{x}, \bar{z})$，它也满足 (1)，但此外在 $\mathscr{C}$ 上是有限的 .

因此，直观地说，有限替代引理指出，在稳定类中，每个用参数定义的关系都可以替换为有限的关系，只要我们关注该关系是否满足某个遗传一阶断言。本文的主要观察是，这一结论可以用于各种图分解。直观地说，如果分解图的每一步都能用带参数的一阶公式定义，且这一步是否有效可以通过遗传一阶句子来验证，那么我们就可以利用有限替代引理，推导出该步骤的一种等价定义，使其具有有限性。这样一来，可执行的不同步骤数量便有了一个界，从而能够构造一种在某种意义上是典范的分解。

有界灌木深度类。 我们的第一个应用涉及有界灌木深度类。Ganian 等人 [20] 引入了灌木深度这一概念，用以描述以浅层方式组织良好的稠密图。一方面，有界灌木深度类恰好是那些能够通过含两个自由变量的一阶公式，在有界深度森林类中解释的类。另一方面，任何固定的有界灌木深度类中的图都允许某些分解，称为连接模型，它们本质上是有界深度的团表达式。（连接模型的定义见第 5.1 节，

连接模型。）因此，特别是，每个有界灌木深度图类都具有有界团宽度；此外，有界灌木深度类还是稳定的 [20]。

灌木深度是树深度的一种稠密对应概念，定义如下：图 G 的树深度是满足以下条件的最小整数 d： G 是深度至多为 d的某个有根森林的祖先/后代闭包的子图。特别地，每个有界树深度图类都有有界灌木深度；事实上，若该类不包含某个双团 $K_{t,\,t}$ 作为子图 [20]，则树深度有界与灌木深度有界等价。从本质上说，树深度是树宽度的有界深度对应概念，正如灌木深度是团宽度的有界深度对应概念。

尽管如此，与树深度相比，我们对灌木深度的组合性质仍知之甚少。例如，对子图障碍的深入理解，有助于为有界树深度图构造合适的典范分解。Bouland 等人 [4] 据此设计了一种图同构测试，其运行时间关于树深度参数为固定参数时间，更准确地说，运行时间为 $f(d)\cdot n^3\log n$，其中 f 是一个可计算函数。虽然已知每个有界灌木深度类都能由有限个禁用诱导子图来刻画 [20]，，但尚不清楚如何仅凭这一结果，为有界灌木深度类设计任何形式的典范分解。因此，迄今尚不清楚图同构问题能否在有界灌木深度类上以固定参数时间求解[2]。在这一背景下，最有效的同构测试是 Grohe 和 Schweitzer [23] 针对团宽度参数化设计的算法：它在 XP 时间内运行，即运行时间为 $n^{f(k)}$，其中 k 是团宽度， f 是一个可计算函数。另请参见 Grohe 和 Neuen [22],的后续工作，该工作改进了 XP 运行时间，并适用于更一般的规范化问题。

我们证明，有限替代引理可用于弥合这一差距，具体如下。

▶**定理 2**。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有界灌木深度图类。那么存在一个有界树深度二元结构类 $\mathscr{D}$ 以及一个映射 A： $\mathscr{C}\to\mathscr{D}$，使得：
– 对于每个 $G\in\mathscr{C}$， G 的顶点集包含于 $A(G)$ 的论域中，并且映射$G\mapsto A(G)$ 是同构不变的。– 给定一个具有 n 个顶点的图 $G\in\mathscr{C}$，结构 $A(G)$ 含有 $O(n)$ 个元素，并且可在 $O(n^2)$时间内计算得到。– 存在一个简单的一阶解释 I，使得对于每个 $G\in\mathscr{C}$，都有 $G=\mathsf{I}(A(G))$。

这里，同构不变性是指： G， $G'\in\mathscr{C}$之间的每个同构都可扩展为$\mathcal{A}(G)$与$\mathcal{A}(G')$之间的同构。此外，我们所说的“简单 解释”是指一种一阶解释，且其维数为 1： G 的顶点由$\mathcal{A}(G)$中的单个元素解释（实际上，每个顶点都由其自身解释）。因此，$\mathcal{A}(G)$可以被视为 G的一个典范的——以同构不变的方式获得的——稀疏分解；该分解忠实地编码了 G，并且呈现为一种有界树深度结构。我们指出，文献 [9, 17], 中曾针对有界灌木深度类提出过某些基于逻辑的稀疏化过程，但这些过程不足以满足我们的应用需求，下面将对此作出解释。

结合上文第三点以及$\mathcal{A}$ 是同构不变这一事实，可得：对于所有 $G,G'\in\mathscr{C}$, G和 G'，它们同构当且仅当$\mathcal{A}(G)$与$\mathcal{A}(G')$同构。我们

[2] 这种表述略显不精确，因为灌木深度被定义为图类的参数，而非单个图的参数。我们的意思是，存在一个普适常数 c，使得对于每个有界灌木深度图类 $\mathscr{C}$，都可以在 $\mathcal{O}(n^c)$ 时间内测试来自 $\mathscr{C}$ 的图之间是否同构，其中 $\mathcal{O}(\cdot)$ 记号中隐藏的常数可能依赖于 $\mathscr{C}$。

现在可以将定理 2 与 Bouland 等人 [4] 的方法结合起来，为有界灌木深度类提供固定参数同构检验。

▶**定理 3.** 对于每个有界灌木深度图类 $\mathscr{C}$，都存在一个 $O(n^2)$ 时间算法；给定 n 阶图 G、$G' \in \mathscr{C}$，该算法可以判定 G 与 G' 是否同构。

事实上，我们的算法也解决了一般的规范化问题，见第 5.4 节。

我们指出，定理 3 的算法是非一致的，也就是说，对于每个图类 $\mathscr{C}$，我们都会得到一个不同的算法。尽管存在秩深度 [26] 或 SC 深度 [20] 等参数，它们适用于处理单个图，并且就图类上的有界性而言与灌木深度等价，但我们不知道如何使我们的算法变为一致的，即使是针对秩深度或 SC 深度参数化也不行。

最后，我们认为，我们证明定理 2 时所用的构造可用于对 Hliněný 和 Gajarský [16], 的一项结果给出另一种证明；该结果后来由 Chen 和 Flum [9] 重新证明：在有界灌木深度类上，一阶逻辑与单子二阶逻辑的表达能力相同。我们将在未来的研究中探索这一方向。

处处稀疏类与单子稳定类。 其次，我们利用有限替代引理，为结构图论中的两个重要概念——处处稀疏类和单子稳定类——的博弈刻画提供典范策略。在这两种情况下，博弈中的策略都可以视为对相关图的分解。

我们先给出一些定义。图类 $\mathscr{C}$ 的一元提升是指任意一个结构类 $\mathscr{C}^+$，其中每个成员 $\mathscr{C}^+$ 都是通过在属于 $\mathscr{C}$ 的图的顶点上添加任意数量的一元谓词而得到的。若图类 $\mathscr{C}$ 的每个一元提升 $\mathscr{C}$ 都是稳定的，则称其为单子稳定。另一方面，若对每个 $d \in \mathbb{N}$，都存在 t，使得 $\mathscr{C}$ 中的任何图都不包含 K_t 的 d-细分作为子图，则称图类 $\mathscr{C}$ 为处处稀疏。

处处稀疏性是稀疏性理论中关于图的一致稀疏性的最基本概念；关于这一领域的介绍，参见 Nešetřil 和 Ossona de Mendez 的专著 [27]。Grohe 等人 [21]得出了该理论的一项里程碑式结果：一阶逻辑的模型检验问题在任意处处稀疏图类上都是固定参数可解的。Adler 和 Adler [2] 利用 Podewski 和 Ziegler [29], 的早期结果指出，单子稳定类是处处稀疏类的稠密对应类，具体而言：每个处处稀疏类都是单子稳定的；若假设该类是稀疏的，例如不含某个双团 $K_{t,\,t}$ 作为子图，那么处处稀疏性与单子稳定性便等价。这促使人们提出了以下猜想 [1],，该猜想在过去几年中受到深入研究：一阶逻辑的模型检验问题在每个单子稳定图类 pf graphs $\mathscr{C}$ 上都是固定参数可解的。

为了研究这一猜想，必须更好地理解来自单子稳定类的图的结构。这正是近期几项研究的主题 [5, 6,7, 13, 18]。在本文中，我们尤其关注 Gajarský 等人 [18],的研究成果：他们通过一种称为*Flipper* 博弈的博弈模型刻画了图的单子稳定类；该模型体现了 Grohe 等人 [21]通过*Splitter* 游戏对处处稀疏类所作的刻画。

半径为 r 的Splitter 游戏在图 G 上由两名玩家进行：$Splitter$ 和连接者。每一轮中，连接者先选择任意一个顶点 u，当前竞技场——即进行博弈的图——随后被限制在以 u为中心、半径为 r 的球内。接着，Splitter 从图中移除任意一个顶点。当竞技场变为空时，博弈结束，Splitter 获胜。Splitter 的目标是尽可能快地赢得博弈，而连接者的目标则是尽可能长时间避免落败。*Flipper* 博弈的定义

与此类似，只是*Flipper*（取代 Splitter 的玩家）的行动如下：Flipper 不移除顶点，而是选择任意一个顶点子集 F 并执行翻转：将端点都在 F 中的所有边替换为非边，反之亦然。此外，当竞技场只剩一个顶点时，博弈结束。

Grohe 等人 [21] 证明，图类 $\mathscr{C}$ 处处稀疏，当且仅当对于每个半径 $r \in \mathbb{N}$，都存在 $\ell \in \mathbb{N}$，使得在 $\mathscr{C}$中的每个图上，Splitter 都能在至多 ℓ 轮内赢得半径为 r的 Splitter 游戏。这一刻画是他们针对处处稀疏类的模型检测结果的基石，因为 Splitter 博弈中的策略能够为相关图提供浅层分解，有助于理解其一阶性质。最近，Gajarský 等人 [18] 用 Flipper 博弈给出了单子稳定类的类似刻画。随后，Dreier 等人 [12] 利用这一刻画，证明了对具有所谓稀疏邻域覆盖的单子稳定图类进行一阶逻辑模型检测具有固定参数可解性。鉴于这一研究现状，显然，更深入地理解 Splitter 和 Flipper 在各自博弈中的策略，或许能让我们更透彻地认识处处稀疏图类和单子稳定图类的分解性质。

在 Splitter 游戏中，我们仅凭基本的紧致性就证明，在任意竞技场中，Splitter 能够采取的推进性行动数量有界：这类行动会导向一个 Splitter 能在少一轮内获胜的竞技场。（正式表述见定理 6。）因此，我们得到了 Splitter 的一种直观的规范策略：按任意顺序，逐一走出所有推进性行动。对于 Flipper 博弈，我们暂不在此给出正式表述（可参见定理 33），因为可定义性的具体概念在一定程度上较为技术性，还需要进一步的预备知识；此外，我们实际研究的是 Flipper 博弈的一个技术变体，称为分隔器博弈，它在 [18] 中首次提出。但本质上，候选的下一步行动同样可以用一个有限一阶公式来定义，该公式作用于附有 Connector 先前行动的初始图 G，而一次性走出所有这些行动，就能在有界轮数内获胜。

2 预备知识

模型。我们研究固定签名 Σ 上的一阶逻辑，该签名由（可能无限多个）常元符号和关系符号组成。模型 是一个 Σ-结构，通常记作 $\mathbf{M}$，$\mathbf{N}$ 等。通常，在例如写作 $m \in \mathbf{M}$ 或 $X \subseteq \mathbf{M}$时，我们不区分模型与其论域。图 G 被视为定义在由一个二元关系组成的签名上的模型，该二元关系记作 E，表示顶点之间的邻接。

若 $\bar{x}$ 是变量的有限集，则我们用 $\varphi(\bar{x})$ 表示一个自由变量包含于 $\bar{x}$的一阶公式 φ。我们也可以用 $\varphi(\bar{x}_1, \ldots\ldots, \bar{x}_k)$ 表示其自由变量包含于 $\bar{x}_1 \cup \ldots \cup \bar{x}_k$的公式。对于单元素变量集，我们将用 x 代替 $\{x\}$，例如，$\varphi(x, y)$ 将始终表示一个具有两个自由变量 x和 y的公式。有时我们写作 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$，以区分 φ的自由变量集在 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$这两个部分上的一个划分；在某些定义中，这个划分起着隐含作用。一个带有来自集合 $A \subseteq \mathbf{M}$ 的参数的 Σ-公式$\varphi(\bar{x})$ 是签名 $\Sigma \uplus A$上的公式 $\varphi(\bar{x})$，其中 A 中的元素被视为常元符号（并由其自身解释）。

若 U是一个集合，$\bar{x}$是一个变量集合，则 $U^{\bar{x}}$表示所有由 $\bar{x}$中元素构成的 $\bar{x}$元组 $\bar{a}$的集合：$\bar{x} \to U$。对于公式 $\varphi(\bar{x})$（有无参数均可）以及一个 $\bar{x}$-元组 $\bar{m} \in \mathbf{M}^{\bar{x}}$，若赋值 $\bar{m}$ 在 $\mathbf{M}$ 中满足公式 $\varphi(\bar{x})$，我们记作 $\mathbf{M} \models \varphi(\bar{m})$。对于公式 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ 和元组 $\bar{b} \in \mathbf{M}^{\bar{y}}$，我们用 $\varphi(\mathbf{M}^{\bar{x}}; \bar{b})$ 表示所有满足 $\mathbf{M} \models \varphi(\bar{a}; \bar{b})$ 的 $\bar{a} \in \mathbf{M}^{\bar{x}}$ 的集合。

理论与紧致性。 一个（关于 Σ 的）理论 T 是一个 Σ-句子集合。结构类 $\mathscr{C}$ 的理论是指在每个结构 $\mathbf{M} \in \mathscr{C}$ 中都成立的句子集合。例如，图类 $\mathscr{C}$ 的理论包含表达关系 E 是对称且自反的句子。理论 T 的模型是满足 $\mathbf{M} \models \varphi$ （对所有 $\varphi \in T$）的结构 $\mathbf{M}$。当一个理论有模型时，就称它是相容的。

▶ **定理 4** (紧致性)。 理论 T 一致，当且仅当其每个有限子集 T' of T 都一致。

初等扩张。 设 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 是两个结构，且满足 $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{N}$，也就是说，$\mathbf{M}$ 的论域包含于 $\mathbf{N}$ 的论域中。若对于每个公式 $\varphi(\bar{x})$（不含参数）以及元组 $\bar{m} \in \mathbf{M}^{\bar{x}}$，下述等价关系成立，则 $\mathbf{N}$ 是 $\mathbf{M}$ 的一个初等扩张，记作 $\mathbf{M} \prec \mathbf{N}$：

$$\mathbf{M} \models \varphi(\bar{m}) \qquad \text{if and only if} \qquad \mathbf{N} \models \varphi(\bar{m}).$$

我们也称 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{N}$ 的一个初等子结构。换句话说，$\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{N}$ 的初等子结构，当且仅当 $\mathbf{M}$ 是 $\mathbf{N}$ 的诱导子结构；这里我们设想 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 都配备了由任意固定一阶公式 $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$ 定义的每个 $k \in \mathbf{N}$ 元关系 R_φ。按照这一理解，元数为 0 的公式对应于布尔标志，且 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{N}$ 的赋值相同。

解释与转导。 签名 Σ 与 Γ 之间的一个解释 $\mathbf{I}$ 由一个论域公式 $\delta(x)$ 以及针对每个元数为 k 的关系符号 $R \in \Gamma$ 的公式 $\alpha_R(x_1, \ldots, x_k)$ 指定，其中 δ 和 α_R 均属于签名 Σ。给定一个 Σ-结构 $\mathbf{M}$，该解释输出 Γ-结构 $\mathbf{I}(\mathbf{M})$，其论域为 $\delta(\mathbf{M})$，且其中每个元数为 k 的关系 R 的解释由满足 $\mathbf{M} \models \alpha_R(\bar{m})$ 的元组 $\bar{m}$ 组成。

对于整数 $k \in \mathbf{N}$ 和结构 $\mathbf{M}$，我们将 $k \times \mathbf{M}$ 定义为由 k 个 $\mathbf{M}$ 的不相交副本构成的结构，并附带一个新的对称二元关系 S，它包含所有满足 m 且 m' 源自 $\mathbf{M}$ 中同一元素的有序对 (m, m')。从 Σ 到 Γ 的一个转导由一个整数 k、一元符号 $U_1, \ldots, U_\ell$ 以及一个从 $\Sigma \cup \{S, U_1, \ldots, U_\ell\}$ 到 Γ 的解释 $\mathbf{I}$ 组成。

对于转导 $\mathbf{T}$ 和输入 Σ-结构 $\mathbf{M}$，输出 $\mathbf{T}(\mathbf{M})$ 由所有满足以下条件的 $\frown\Gamma$-结构 $\mathbf{N}$ 组成：存在对 $\mathbf{M}$ 进行着色的 $\mathbf{M}$，使用新的一元谓词 $\frown U_1, \ldots, U_\ell$，使得 $\mathbf{B} = \mathbf{I}(\mathbf{M})$。如果存在一个转导 $\mathbf{T}$，使得对于每个结构 $\mathbf{N} \in \mathscr{D}$，都存在 $\mathbf{M} \in \mathscr{C}$ 满足 $\mathbf{N} \in \mathbf{T}(\mathbf{M})$，则称一个 Σ-结构类 $\mathscr{C}$ 转导 一个 Γ-结构 $\mathcal{D}$ 类。

图。 我们使用标准的图论记号。对于图参数 π，如果存在 $k \in \mathbf{N}$，使得对所有 $G \in \mathscr{C}$ 都有 $\pi(G) \leqslant k$，则称图类 $\mathscr{C}$ 具有有界的 π。类似地，如果结构类 $\mathscr{C}$ 中的结构的 Gaifman 图类 $\mathscr{C}$ 具有有界的 π，则称结构类 $\mathscr{C}$ 具有有界的 π。

3 稠密图中的规范 Splitter 策略

本节将说明如何利用紧致性为处处稀疏类推导典范分解。更具体地说，我们将证明，在刻画处处稀疏类的 Splitter 博弈中，[21], 存在一个常元 k（仅取决于图类 $\mathscr{C}$），使得对于 $\mathscr{C}$ 中的任意图，最优 Splitter 移动至多有 k 步。这将使我们能够阐释本文采用的一般方法。

Splitter 博弈。 首先，我们回顾 Splitter 博弈的规则。半径为 r 的 Splitter 博弈由两名玩家——Splitter 和 Connector——在图 G 上进行，分若干轮 $i = 1,\ 2,\ \ldots$ 进行。初始时，竞技场 G_1 就是整个图 G。在第 i轮中，
– 连接者选择一个顶点 $c_i \in G_i$；– Splitter 选择一个顶点 $s_i \in G_i$，并令 $G_{i+1} = G_i[B^r_{G_i}(c_i)] - s_i$；– 若 G_{i+1} 是空图，则 Splitter 获胜，否则博弈继续 .
这里， $B^r_H(u) = \{v \in V(H) \mid \mathrm{dist}_H(u,\ v) \leqslant r\}$ 表示图 H 中以 u 为中心、半径为 r 的球 .
以下结果是著名的处处稀疏图上的模型检测证明中的关键 e 稀疏图类 [21]。

▶**定理 5** （ [21]）。 图类 $\mathscr{C}$ 处处稀疏，当且仅当对每个 r，都存在 ℓ，使得对于每个图 $G \in \mathscr{C}$，*Splitter* 都能在至多 ℓ 轮内赢得半径为 r 的博弈。

图 G 的 r-分裂数 是使得 Splitter 能在 ℓ 回合内赢得半径为 r的博弈的最小 ℓ。固定一个处处稀疏类 $\mathscr{C}$ 和一个半径 r，并令 ℓ 如定理中所述（因此 ℓ 是该类 $\mathscr{C}$中所有图的 r-分裂数的上界）。注意，对于给定的 $\ell' \leqslant \ell$，存在一个一阶句子可以表达 Splitter 能在 $\leqslant \ell'$ 回合内赢得半径为 r 的博弈，因此也存在一个一阶句子可以表达 G 的分裂数为 ℓ'。给定一个 Connector 步 $c \in V(G)$，如果 Splitter 步 $s \in V(G)$ 使 $G[B_r(c)$ 的 r-分裂数$] - s$ 严格小于 $G[B_r(c)$ 的 r-分裂数$]$，我们就称其为相对于 c r-渐进的 。换句话说，执行 s 对 Splitter 而言严格优于不选择任何顶点。同样，由于分裂数的上界只取决于 $\mathscr{C}$，这一点可以用公式 $\varphi_r(s;\ c)$ 表达。由此得到以下结果。

▶ **定理 6**。 令 $\mathscr{C}$ 为一个处处稀疏图类，且 $r \in \mathbb{N}$。存在一个常元 k，使得对于每个图 $G \in \mathscr{C}$以及每个连接者步 c，在 G中，针对 c 至多有 k 个推进步。

特别地，这为 Splitter 提供了一种同构不变策略：只需执行所有推进步（可以按任意顺序逐个执行，也可以在 [21], 所讨论的博弈扩展变体中一次性全部执行；在该变体中，Splitter 每回合可以移除有界数量的顶点，而不只是一个。）证明的思路是利用紧致性，将推进步扩展到模型之外（在一个初等扩张中），然后注意到“属于推进步”是一个可定义且具有遗传性的性质。

证明。 令 T 为 $\mathscr{C}$的理论。注意， T 包含句子“Splitter 在半径为 r 的博弈中于 $\leqslant \ell$ 回合内获胜 ”。我们的目标是证明，存在某个 k，使其包含句子 “ 对于所有连接者步 c，针对 c的推进 Splitter 步至多有 k ”。我们证明，对于 T 的任意模型以及任意连接者步 c，针对 c的推进 Splitter 步只有有限多个；由紧致性即可轻易推出结论。

反设存在一个模型 $\mathbf{M}$，它属于 T，以及一个连接者步 $c \in \mathbf{M}$，使得 Splitter 对阵 c 时有无限多个推进步。现在令 T' 为定义在扩展后的签名上的理论：该签名为$\mathbf{M}$ 的每个元素都添加了一个对应的常元，并额外添加一个常元 s，使得 T' 由以下内容组成：

– T中的所有句子，– 在$\mathbf{M}$中成立的所有句子（带有参数），– 表达 s 是针对 c的推进步的一个句子，以及– 对于每个 $m \in \mathbf{M}$，一个表达 $s \neq m$的句子。

由于 T' 的每个有限子集 T'' 只涉及有限多个$\mathbf{M}$，因此可以从$\mathbf{M}$ 出发构造一个 T'' 的模型，并将 s 设为其中一个未被提及的推进步。根据紧致性（定理 4），我们得出结论： T' 是一致的。

设$\mathbf{N}$ 是 T' 的一个模型。根据构造，$\mathbf{N}$ 是$\mathbf{M}$ 的初等扩张——特别是，$\mathbf{N}[B_r(c)]$ 的分裂数与$\mathbf{M}[B_r(c)]$ 相同——并且包含一个以 c 为对手的进展步 $s \in \mathbf{N} - \mathbf{M}$。这意味着$\mathbf{N}[B_r(c)] - s$ 的分裂数为 $< \ell'$。然而，$\mathbf{M}[B_r(c)]$ 是$\mathbf{N}[B_r(c)] - s$ 的子图，且其分裂数为 ℓ'：这显然荒谬。◀

下一节将介绍稳定性理论中更精细的工具，这些工具将使我们能够把上述想法推广到不同的情形。

4 稳定性、分叉与有限替换

本节汇集了稳定性理论中的一些概念和若干基本结果。我们的目的是给出一份自成一体的阐述，并最终证明有限替换引理；关于更多背景和解释，请参阅 [31]。

4.1 稳定性与类型的可定义性

我们称公式 $\varphi(\bar{x};\, \bar{y})$ 在模型 M 中定义了一个阶为 k 的梯子（见图 1），如果存在序列 $\bar{a}_1, \ldots \bar{a}_k \in \mathbf{M}^{\bar{x}}$ 和 $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_k \in \mathbf{M}^{\bar{y}}$ 满足

$$\mathbf{M} \models \varphi(\bar{a}_i; \bar{b}_j) \qquad \text{if and only if} \qquad i < j, \qquad \text{for } 1 \leqslant i, j \leqslant k.$$

对于公式 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$，我们称使得 φ 定义阶为 k 的梯子的最大 k 为 φ 在 $\mathbf{M}$ 中的梯子指标。如果不存在这样的 k，我们就称 φ 的梯子指标为 ∞。

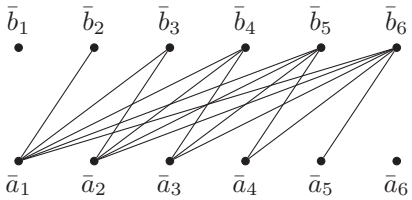

图 1 阶为 6 的梯子。

如果 φ 在 $\mathbf{M}$ 中的梯子指标有限，我们就称它是稳定的。如果 φ 在理论 T 的所有模型中都稳定，我们就称 φ 在理论 T 中稳定。此外，如果一个模型（或理论）中的每个公式都稳定，我们就称该模型（或理论）是稳定的。

现在我们陈述一个关于稳定公式的基本结果；它指出，在某个初等扩张中带参数的稳定公式所定义的集合，实际上可以仅由模型本身来定义。

▶ **定理 7**（类型的可定义性）。设 $\mathbf{M} \prec \mathbf{N}$ 是两个模型，且 $\varphi(\bar{x};\, \bar{y})$ 是 $\mathbf{M}$ 中一个梯子指标为 d 的稳定公式。对于每个 $\bar{n} \in \mathbf{N}^{\bar{y}}$，都存在一个公式 $\psi(\bar{x})$，它是形如 $\psi(\bar{x};\, \bar{m})$ 的公式的正布尔组合，使用 $2d+1$ $\mathbf{M}^{\bar{y}}$ 作为参数，使得对于每个 $\bar{a} \in \mathbf{M}^{\bar{x}}$，

$\mathbf{N} \models \varphi(\bar{a};\ \bar{n})$ 当且仅当 $\mathbf{M} \models \psi(\bar{a})$。

4.2 不稳定理论中的分叉

接下来我们介绍分叉的定义。Shelah 最初提出分叉是为了研究稳定理论 [30], ，后来分叉逐渐成为稳定性理论的核心概念。在稳定理论中，分叉与较简单的概念——分裂——相一致，因此稍作滥用，我们将只讨论分裂（并称之为分叉）。我们首先需要正式引入类型，然后给出稳定理论中分叉的定义及其一些有用性质。

类型。固定一个签名为 Σ 的模型 $\mathbf{M}$。变量为 $\bar{x}$ 、带有来自 $A \subseteq \mathbf{M}$ 的参数的公式集合 π ，若其相容，则称为关于 A 的部分类型：对于每个有限子集 $\pi' \subseteq \pi$ ，都存在满足 π' 中所有公式的 $\bar{m} \in \mathbf{M}^{\bar{x}}$ （也就是说，对于每个公式 $\varphi(\bar{x}) \in \pi'$ ，都有 $\mathbf{M} \models \varphi(\bar{m})$）。有时我们写作 $\pi(\bar{x})$，以明确指出自由变量。极大的部分类型p 称为类型；这意味着，对于每个带有来自 A 的参数的公式 $\varphi(\bar{x})$，要么 $\varphi(\bar{x}) \in p$ ，要么 $\neg\varphi(\bar{x}) \in p$。注意，对于集合 $A \subseteq B \subseteq \mathbf{M}$，每个关于 A 的类型 p 都可以视为关于 B 的部分类型。我们用 $S_{\bar{x}}(A)$ 表示变量为 $\bar{x}$ 、关于 A 的类型集合。

对于元组 $\bar{a} \in \mathbf{M}^{\bar{x}}$ 和参数集合 $A \subseteq \mathbf{M}$ ， $\bar{a}$ 在 A 上的类型记作 $\mathrm{tp}(\bar{a}/A) \in S_{\bar{x}}(A)$，它是所有带有来自 A 的参数的公式 $\varphi(\bar{x})$ 所组成的集合，且满足 $\mathbf{M} \models \varphi(\bar{a})$。由紧致性可知，对于每个 $p \in S_{\bar{x}}(\mathbf{M})$，都存在某个 $\mathbf{N} \succ \mathbf{M}$ 以及一个 $\bar{x}$-元组 $\bar{n} \in \mathbf{N}^{\bar{x}}$ ，使得 $\mathrm{tp}(\bar{n}/\mathbf{M}) = p$。

分叉。固定一个关于签名 Σ 和集合 $A \subseteq \mathbf{M}$ 的稳定模型 $\mathbf{M}$。设 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ 是一个不含参数的公式，且 $\bar{b} \in \mathbf{M}^{\bar{y}}$。如果存在初等扩张 $\mathbf{N} \succ \mathbf{M}$、序列 $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots \in \mathbf{N}^{\bar{y}}$ 满足对每个 i 都有 $\mathrm{tp}(\bar{b}_i/A) = \mathrm{tp}(\bar{b}/A)$，以及一个整数 k ，使得 $S = \{\varphi(\bar{x}; \bar{b}_i) : i \in \mathbf{N}\}$ 是 k-不一致的（即 S 的任何 k-元子集都不一致），我们就称 $\varphi(\bar{x}; \bar{b})$ 在 A 上分叉。对于关于集合 $B \subseteq \mathbf{M}$ 的类型 $p \in S_{\bar{x}}(B)$，如果存在一个在 A 上分叉的公式 $\varphi(\bar{x}; \bar{b}) \in p$ ，我们就称 p 在 A 上分叉。

我们将用到分叉的一项重要性质，这项性质通常称为（完全）存在性。

▶ **定理 8** （参见 [31, 推论 7.2。7]）。 设$\mathbf{M}$ 是一个稳定模型，且 $A \subseteq B \subseteq \mathbf{M}$。对于每个 $p \in S_{\bar{x}}(A)$ ，都存在某个 $q \in S_{\bar{x}}(B)$ ，使得 $p \subseteq q$ 且 q 不在 A 上分叉。

有限元公式。 我们称公式 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ 在理论 T 中是有限的，如果对于 T 的每个模型$\mathbf{M}$ ，集合$\{\varphi(\mathbf{M}^{\bar{x}}; \bar{m}) : m \in \mathbf{M}^{\bar{y}}\}$ 都是有限的。根据紧致性，这等价于以下断言：存在 $k \in \mathbf{N}$，使得对于 T 的每个模型 $\mathbf{M}$ ， $|\{\varphi(\mathbf{M}^{\bar{x}}; \bar{m}) : m \in \mathbf{M}^{\bar{y}}\}| \leqslant k$。现在我们来讨论分叉与有限元公式之间的关系。

▶ 定理 *9*（ [31, 定理 *8.5.1*][3]的特殊情形）。设 M 是一个稳定模型，N 是 M 的初等扩张， $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ 是一个公式， $\bar{n} \in N^{\bar{y}}$，且 $A \subseteq M$。若 $\mathrm{tp}(\bar{n}/M)$ 不在 A 上分叉，则存在一个有限公式 $\varphi'(\bar{x}; \bar{z})$ 和一个元组 $\bar{r} \in M^{\bar{z}}$ ，使得 $\varphi(N^{\bar{x}}; \bar{n}) \cap M^{\bar{x}} = \varphi'(M^{\bar{x}}; \bar{r})$。

结合定理 8 和定理 9，可得以下结论。

▶ **引理 10.** 设$\mathbf{M}$ 是签名 Σ, $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ 上的稳定模型， Σ-公式，且 ψ 是签名 $\Sigma \cup \{R\}$ 上的句子，其中 $R \notin \Sigma$ 的元数为 $|\bar{x}|$。设 $\bar{s} \in \mathbf{M}^{\bar{y}}$ 满足如下条件

[3] 严格来说， [31, 定理 8.5.1] 讨论的是对虚元的可定义性，而众所周知，这等价于有限公式的存在性（例如参见 [10, 引理 1.3.2 (5), 引理 1.3.7]）。

$M \models \psi[R(\bar{x})/\varphi(\bar{x};\bar{s})]$。那么，存在 M 的一个初等扩张 N、一个元组 $\bar{s}' \in N^{\bar{y}}$、一个有限公式 $\varphi'(\bar{x};\bar{z})$ 和一个元组 $\bar{r} \in M^{\bar{z}}$，使得 $N \models \psi[R(\bar{x})/\varphi(\bar{x};\bar{s}')]$，并且 $\varphi(N^{\bar{x}};\bar{s}') \cap M^{\bar{x}} = \varphi'(M^{\bar{x}};\bar{r})$。

证明。考虑 $p = \mathrm{tp}(\bar{s}/\emptyset)$。根据定理 8，$p$ 扩展为一个类型 $q \in S_{\bar{y}}(\mathbf{M})$，它在 $\emptyset$ 上不分叉。由紧致性，存在一个初等扩张 $\mathbf{N} \succ \mathbf{M}$ 和一个元组 $\bar{s}' \in \mathbf{N}^{\bar{y}}$，使得 $\mathrm{tp}(\bar{s}'/\mathbf{M}) = q$。特别地，$\mathrm{tp}(\bar{s}'/\emptyset) = p = \mathrm{tp}(\bar{s}/\emptyset)$，因此 $\mathbf{N} \models \psi[R(\bar{x})/\varphi(\bar{x};\bar{s}')]$，符合要求。应用定理 9，我们得到一个有限公式 $\varphi'(\bar{x};\bar{z})$ 和一个元组 $\bar{r} \in \mathbf{M}^{\bar{z}}$，它们具有所需的性质。◀

4.3 有限替代引理

回顾第 3 节，要应用我们的方法，需要一种机制，将所需性质 ψ 移回我们最初出发的结构 $\mathbf{M}$ 中。下面的定义对这一点作了形式化。在理论 T中，给定签名 $\Sigma \cup \{R\}$上的两个句子 ψ 和 ψ'，我们称句子 ψ 在半初等子结构上诱导 ψ'，如果对于 T的每个模型$\mathbf{M}$、每个初等扩张$\mathbf{N}$，以及每个$\mathcal{R} \subseteq \mathbf{N}^k$，其中 k 是 R的元数，

$$\mathbf{N}[R/\mathcal{R}] \models \psi \qquad \text{implies} \qquad \mathbf{M}[R/\mathcal{R}|_{\mathbf{M}}] \models \psi'.$$

作为一个重要的特例，如果 ψ 是遗传的，那么 ψ 在半初等子结构上诱导 ψ。现在我们可以陈述主要的模型论工具了。

▶ 引理 *11*（有限替代引理）。设 T 是一个签名为 Σ的理论，$\varphi(\bar{x};\bar{y})$ 是一个稳定公式，且 ψ、ψ' 是签名为 $\Sigma \cup \{R\}$上的句子，其中 $R \notin \Sigma$ 的元数为 $|\bar{x}|$，并且 ψ 在半初等子结构上诱导 ψ'。假设 $T \models \exists \bar{s}.\psi[R(\bar{x})/\varphi(\bar{x};\bar{s})]$。那么存在一个有限公式 $\varphi'(\bar{x};\bar{z})$，使得 $T \models \exists \bar{s}.\psi'[R(\bar{x})/\varphi'(\bar{x};\bar{s})]$。

证明。定义 Δ_n 为大小为 $\leqslant n$的有限公式集合。反设对于所有 n，都存在一个模型 $\mathbf{M}_n$ 满足 T，使得对于所有 $\varphi' \in \Delta_n$，$\mathbf{M}_n \not\models \exists \bar{s}.\psi'[R(\bar{x})/\varphi'(\bar{x};\bar{s})]$。于是根据紧致性，存在一个模型 $\mathbf{M}$ 满足 T，使得对于所有有限公式，$\exists \bar{s}.\psi'[R\ \bar{x}\ /\varphi'\ \bar{x}\ \bar{s}\ ]$ $\mathbf{M}()(;)$。然而，由于 $\mathbf{M}$ 是 $\models \psi[R$的模型，我们的假设给出存在 $\mathbf{M}$，使得 $\mathbf{M}\ \bar{x}(/\varphi)\bar{x}(\ \bar{s};],)$，因此我们可以应用引理 10。

这给出了 $\mathbf{M}$ 的一个初等扩张 $\mathbf{N}$、一个元组 $\bar{s}' \in \mathbf{N}^{\bar{y}}$、一个有限公式 $\varphi'(\bar{x};\bar{z})$以及一个元组 $\bar{r} \in \mathbf{M}^{\bar{z}}$，使得 $\mathbf{N} \models \psi[R(\bar{x})/\varphi(\bar{x};\bar{s}')]$，并且 $\varphi'(\mathbf{M}^{\bar{x}};\bar{r}) = \varphi(\mathbf{N}^{\bar{x}};\bar{s}') \cap \mathbf{M}^{\bar{x}}$。换言之，$R$ 在 $\mathbf{N}$ 上的解释 $R = \varphi(\mathbf{N}^{\bar{x}};\bar{s}')$ 满足 $\mathbf{N} \models \psi[R/\mathrm{R}]$，且 $\mathrm{R}|_{\mathbf{M}}(\bar{x}) = \varphi(\mathbf{N}^{\bar{x}};\bar{s}') \cap \mathbf{M}^{\bar{x}} = \varphi'(\mathbf{M}^{\bar{x}};\bar{r})$。由于 ψ 在半初等子结构上诱导出 ψ'，我们得到 $\mathbf{M} \models \psi'[R(\bar{x})/\varphi'(\bar{x};\bar{r})],$，矛盾。

因此，存在 n，使得对于 T 的每个模型 $\mathbf{M}$，都存在 $\varphi' \in \Delta_n$，满足 $\mathbf{M} \models \exists \bar{s}.\psi'[R(\bar{x})/\varphi'(\bar{x};\bar{s})]$。枚举 $\Delta_n = \{\varphi'_0, \varphi'_1, \ldots, \varphi'_{k-1}\}$，并令 $\bar{t} = t_0 t_1 \ldots t_\ell$ 为一个变量元组，其长度为 $\ell = \lceil \log\ k \rceil$。对于每个 $i \in \{0, \ldots, k-1\}$，定义一个公式

$$\mathrm{encodes}_i(\bar{t}) = \bigwedge_{j=1}^{\ell} \begin{cases} t_j = t_0 \text{ if the } j\text{-th bit in } i\text{'s binary encoding is } 0 \\ t_j \neq t_0 \text{ otherwise,} \end{cases}$$

它声明 t 对数字 i 进行编码。然后令

$$\varphi''(\bar{x};\bar{z}\bar{t}) = \bigvee_{i=0}^{k-1} [\mathrm{encodes}_i(\bar{t}) \wedge \varphi'_i(\bar{x};\bar{z})].$$

注意，φ'' 是有限的，因为每个 φ'_i 都是如此；对于 T的任意模型$\mathbf{M}$，

$$\{\varphi''(\mathbf{M}^{\bar{x}};\bar{m})\colon \bar{m} \in \mathbf{M}^{\bar{z}\bar{t}}\} - \{\emptyset\} = \bigcup_i \{\varphi'_i(\mathbf{M}^{\bar{x}};\bar{m})\colon \bar{m} \in \mathbf{M}^{\bar{z}}\}.$$

现在不失一般性地假设， T 的模型都包含 $\geqslant 2$ 个元素（大小为 1 的模型可以通过根据哪些关系成立，在 φ'' 中对 φ'_i 的选择进行硬编码来处理）。下面证明 φ'' 满足推论的结论：所有 T的模型都蕴含 $\exists \bar{s}.\psi'[R(\bar{x})/\varphi''(\bar{x};\bar{s})]$。

设 M 是 T 的一个模型，且 $i \in \{0,\dots,k-1\}$ 和 $\bar{s} \in \mathrm{M}^{\bar{z}}$ 满足 $\mathrm{M} \models \psi'[R(\bar{x})/\varphi'_i(\bar{x};\bar{s})]$。设 b_0 和 b_1 是 M 中任意两个不同的元素，并设 b 是 $\{b_0,b_1\}^{\bar{t}}$ 中唯一的元组，使得 $\mathrm{M} \models$ 编码$_i(\bar{b})$。于是 $\mathrm{M} \models \psi'[R(\bar{x})/\varphi''(\bar{x};\bar{s}\bar{b})]$，从而得到所需结果。◀

5 有界灌木深度图的规范化

在本节中，我们证明定理 2 和定理 3，现为方便起见回顾如下。

▶**定理 2**。 设 $\mathscr{C}$ 是一个有界灌木深度图类。则存在一个有界树深度二元结构类 $\mathscr{D}$ 以及一个映射 A： $\mathscr{C} \to \mathscr{D}$，使得：
– 对于每个 $G \in \mathscr{C}$， G 的顶点集都包含于 $A(G)$ 的论域中，并且映射$G \mapsto A(G)$ 是同构不变的。– 给定一个具有 n个顶点的图 $G \in \mathscr{C}$，结构 $A(G)$ 具有 $O(n)$ 个元素，并且可以在 $O(n^2)$ 时间内计算得到。– 存在一个简单的一阶解释 I，使得对于每个 $G \in \mathscr{C}$，$G = \mathsf{I}(A(G))$。

▶**定理 3**。 对于每个有界灌木深度图类 $\mathscr{C}$，都存在一个 $O(n^2)$ 时间算法，该算法给定具有 n个顶点的图 G、$G' \in \mathscr{C}$，判断 G 与 G' 是否同构。

证明分为三个部分。– 第一部分结合了关于有界灌木深度类的相关见解与我们在上一节中提出的有限替代引理，从而得出结论：灌木深度分解的第一级（我们将其称为切分，定义见下文）可以使用有限元公式来定义。该结果表述为下面的定理 13。– 第二部分以定理 13 为基础，提出了从有界灌木深度类到有界树深度类的规范变换。这证明了定理 2。– 在第三部分中，我们展示定理 3 如何由定理 2 推导出来，并进一步证明了关于规范化问题的一个更强结果。

我们先在第 5.1 节回顾一些关于灌木深度的预备知识，然后在第 5.2、5.3 和 5.4 节依次讨论上述三个部分。

5.1 灌木深度的预备知识

灌木深度。 灌木深度所依据的分解概念是连接模型，定义如下。设 G 是一个图。 G 的一个连接模型 由以下部分组成：
– 一个有限的标签集合 Labels；– 一个标记函数 label： $V(G) \to$ Labels；– 一棵有根树 T，其叶集与 G的顶点集相同；以及 – 对于 T的每个非叶节点 x，一个对称关系 Adj(x) $\subseteq$ Labels $\times$ Labels，称为邻接表，定义在 x 处。

规则如下：对于 G 中任意两个不同的顶点 u， v，

$$u \text{ and } v \text{ are adjacent in } G \qquad \text{if and only if} \qquad (\mathsf{label}(u), \mathsf{label}(v)) \in \mathsf{Adj}(x),$$

其中， x 是 u 和 v 在 T中的最近公共祖先。

连接模型的深度是 T 的深度。图类 $\mathscr{C}$ 的灌木深度是满足以下性质的最小整数 d：存在一个有限标签集 Labels，使得每个图 $G \in \mathscr{C}$ 都有一个深度至多为 d、使用标签集 Labels 的连接模型。

切分。我们的归纳证明需要对连接模型的第一级（即根的正下方）进行操作；我们将其称为切分。形式上，对于图 G，若顶点集 G 的一对划分 $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 满足：对于任意属于 $\mathcal{P}$ 的不同部分的两个顶点 u，v，u 和 v 在 G 中是否相邻仅取决于 u 和 v 所属的 $\mathcal{L}$ 的部分，则称其为 G 的切分。换言之，存在对称关系 $Z \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$，使得对于所有属于 $\mathcal{P}$ 的不同部分的 u，v，

$$u \text{ and } v \text{ are adjacent in } G \qquad \text{if and only if} \qquad (\mathcal{L}(u), \mathcal{L}(v)) \in Z,$$

其中，$\mathcal{L}(w)$ 表示 w 所属的 $\mathcal{L}$ 的部分。在切分 $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 中，划分 $\mathcal{P}$ 称为分量划分，划分 $\mathcal{L}$ 称为标签划分。切分 $(\mathcal{P}, \mathcal{L})$ 的阶为 $|\mathcal{L}|$，即标签划分中的部分数。

注意，如果（$\mathcal{P}$，$\mathcal{L}$）是图 G 的 ℓ 阶切分，且 H 是 G的诱导子图，那么将 $\mathcal{P}$ 和$\mathcal{L}$ 限制到 H 上，就得到一个针对 H的 $\leqslant \ell$ 阶切分。同样，细化标签划分$\mathcal{L}$ 会保留其为切分的性质（当然，阶不一定保持不变）。对于分量划分$\mathcal{P}$，一般而言则并非如此。切分自然出现在灌木深度的连接模型中：给定图 G的一个连接模型，以“在根下方具有共同祖先”作为分量划分$\mathcal{P}$，并以标签类作为标签划分$\mathcal{L}$，即可定义 G的一个切分。

对转导封闭。关于有界灌木深度的类，一个重要结果（也用于我们的证明）是：它们对一阶转导 [19]封闭。

▶ **定理 12**（[19]中的定理 4.7）。如果图类 $\mathscr{C}$ 具有有界灌木深度，并且图类 D 可以由 $\mathscr{C}$ 转导得到，那么 D 也具有有界灌木深度。

5.2 典范切分的可定义性

我们称带有 $|\bar{x}| = 2$ 定义一个划分 的公式 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$，如果对于任意图 G 和 $\bar{b} \in G^{\bar{y}}$，$\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{b})$ 都是 G 的顶点集上的一个等价关系。（注意，对于不同的 $\bar{b}$，φ 可能会导出不同的等价关系。）为简化记号，我们也用 $\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{b})$ 表示将顶点集划分为 $\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{b})$ 的等价类所得的划分。回顾一下，若存在 k，使得对于所有图 $G \in \mathscr{C}$，

$$|\{\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{b}) : \bar{b} \in G^{\bar{y}}\}| \leqslant k.$$

本节着重于证明以下结果。

▶ **定理 13**。设 $\mathscr{C}$ 是灌木深度至多为 d 的类，其中 $d > 1$。那么存在一个灌木深度至多为 $d-1$ 的遗传类 $\mathscr{C}'$、有限一阶公式 $\varphi(\bar{x}; \bar{y})$ 和$\lambda(\bar{x}; \bar{y})$，它们各自定义一个划分；此外还存在 $\ell \in \mathbb{N}$，使得以下结论成立：对于每个图 $G \in \mathscr{C}$，都存在 $\bar{s} \in G^{\bar{y}}$，使得

– $(\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{s})\ \lambda(G^{\bar{x}}; \bar{s}))$ 是 G 的一个阶至多为 ℓ的切分；并且 –
对于 $\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{s})$ 的每个部分 A，我们都有 $G[A] \in \mathscr{C}'$。

从总体上看，这证明了连接模型可以用一阶公式$\varphi(\bar{x};\ \bar{y})$ $\lambda(\bar{x};\ \bar{y})$和参数 $\bar{s} \in G^{\bar{y}}$来定义。尽管这是迈向稀疏化的良好开端，但仅凭这一点还不足以满足我们的需求，因为 $\bar{s}$ 的不同选择可能会导致许多不同的连接模型，而任意选择一个 $\bar{s}$ 则无法得到同构不变构造。有限性 φ 和 λ克服了这一困难：我们的构造将考虑所有可能的切分（数量有界；见第 5.3 节）。

定理 13 的证明分为以下三个部分。– 第一部分是证明可以选择标签划分$\mathcal{L}$，使其可定义为划分 $\lambda(G^{\bar{x}}; \bar{s})$，其中包含 $\bar{s}$-类型。这得益于 Bonnet 等人 [3]关于有界 VC 维数类的一个更一般的结果。– 随后，我们证明可以选择分量划分$\mathcal{P}$，使其能够用公式$\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{s})$定义，并且使用相同的参数 $\bar{s}$。这依赖于有界灌木深度类 [19], 的已知性质，包括定理 12。– 然后，我们应用有限替代引理（引理 11），并证明 φ 和 λ 可以取为有限的。

标签划分的可定义性。 对于图 G 的顶点子集 S，令$\mathcal{L}_S$ 表示将 G 的顶点集划分为相对于 S 的邻域类： u 和 v属于$\mathcal{L}_S$ 的同一部分，当且仅当

$$\{w \in S \mid u \text{ and } w \text{ are adjacent}\} = \{w \in S \mid v \text{ and } w \text{ are adjacent}\}.$$

注意，我们有 $|\mathcal{L}_S| \leqslant 2^{|S|}$。事实证明，标签划分可以取成这种形式。

▶ **引理 14**（由 [3]中的定理 3.5 推出）。设 $\mathscr{C}$ 是一个有界灌木深度图类。那么对于每个图 $G \in \mathscr{C}$ 以及 G 的阶不超过 t 的切分 (P, L)，都存在 $S \subseteq V(G)$，满足 $|S| \leqslant O(t^2)$，使得 (P, L_S) 也是 G 的一个切分。

我们在附录 A 中证明引理 14。

分量划分的可定义性。 现在我们证明，分量划分 $\mathcal{P}$ 也可以用一阶公式定义。

▶ **引理 15。** 设 $\mathscr{C}$ 是一个有界灌木深度图类，且 $t \in \mathbb{N}$ 是一个整数。存在公式 $\varphi(\bar{x};\ \bar{y})$ 和 $\lambda(\bar{x};\ \bar{y})$，二者都定义一个划分，并满足以下性质：对于每个图 $G \in \mathscr{C}$ 以及 G 的阶不超过 t 的切分 (P, L)，都存在 $\bar{s} \in G^{\bar{y}}$，使得

$$(\mathcal{P}', \mathcal{L}') = \big(\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{s}), \lambda(G^{\bar{x}}; \bar{s})\big)$$

是一个阶至多为 $2^{\mathcal{O}(t^2}$ 的 G 切分)。此外，P' 的每个部分都完全包含在 P 的某个部分中。

证明。设 $G \in \mathscr{C}$，并固定一个阶至多为 t 的 G 切分 (P, L)。根据引理 14，存在一个顶点子集 S，满足 $|S| \leqslant \mathrm{O}(t^2)$，使得 $(\mathrm{P}, \mathrm{L}_S)$ 也是 G 的一个切分。换言之，存在一个对称关系 $Z \subseteq \mathrm{L}_S \times \mathrm{L}_S$，使得对于属于 P 中不同部分的顶点 u、v，我们有

$$u \text{ and } v \text{ are adjacent in } G \qquad \text{if and only if} \qquad (\mathcal{L}_S(u), \mathcal{L}_S(v)) \in Z. \tag{1}$$

由于 $|S| \leqslant \mathcal{O}(t^2)$，存在一个常元 $c \in \mathcal{O}(t^2)$，它依赖于 $\mathscr{C}$ 和 t，但不依赖于 $G \in \mathscr{C}$的选择，使得 $|S| \leqslant c$。因此， $|\mathcal{L}_S| \leqslant 2^c$。

14 稳定图的典范分解

令 H 为根据 Z对 G 进行翻转所得到的图： H和 G 的顶点集相同，并且对于不同的 $u, v \in V(G)$，有

u, v 在 H 中相邻，当且仅当（u, v 在 G 中相邻）异或（（$\mathcal{L}_S(u)$,$\mathcal{L}_S(v)$) $\in Z$）。

注意，由 (1) 可得如下结论。

▷ 命题 16. H 的每条边都连接同一部分中的两个顶点。因此， H 的每个连通分量的顶点集都完全包含在 $\mathcal{P}$ 的某一部分中。

此外，现在来证明如下结论。

▷ 命题 17. 存在一个常元 $d \in$N，仅取决于 $\mathscr{C}$，使得 H 的每个连通分量的直径至多为 d。

证明。 令 $\widehat{\mathscr{C}}$ 为如下构造得到的图类。任取一个 $J \in \mathscr{C}$以及对 $\mathcal{L}$ 的顶点集 J 划分得到的至多 2^c 个部分。然后，对于任意对称的$W \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$，按照 W （如上所述）执行翻转，作用于 J，并将$\widehat{\ }$得到的图纳入 $\mathscr{C}$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$显然，我们有 $H \in \mathscr{C}$。此外， $\mathscr{C}$可以由 $\mathscr{C}$经转导得到，因此定理 12$\widehat{\ }$可推出 $\mathscr{C}$ 也具有有界灌木深度。正如 [19], 中所证明的，每个有界灌木深度图类都会排除某条路径作为诱导子图。由于最短路径是诱导的，因此 H 的每个连通分量的直径都不可能大于 $\mathscr{C}$中被排除的路径的$\widehat{\ }$长度。◁

令 $\bar{s} \in G^{\bar{y}}$ 为 S 的一个任意枚举，视作一个元组，其中 $\bar{y}$ 是由 c 个变量组成的元组；若 $|S| < c$，则 $\bar{s}$ 中的某些元素会重复。由于可以用一阶公式定义长度至多为 d 的路径可达性，并且可以根据 G 中的边关系和集合 S解释 H 中的边关系，我们得出如下结论。

▷ 命题 18. 存在一阶公式 $\varphi(x, x'; \bar{y})$，它仅依赖于 $\mathscr{C}$，且其中 $\bar{y}$ 是一个由 t 个变量组成的元组，使得对于 $u, v \in V(G)$，我们有

$G \models \varphi(u, v; \bar{s})$ 当且仅当 u 和 v 属于 H. 的同一个连通分量

令 $\lambda(x, x'; \bar{y})$ 为如下公式： x 和 x' 在 $\bar{y}$ 的各项中具有相同的邻居。接下来我们断言，由命题 18 给出的公式 $\varphi(x, x'; \bar{y})$ 与 $\lambda(x, x'; \bar{y})$ 满足所有所需性质。首先， λ 显然定义了一个划分，我们可以假设 φ 也定义了一个划分。（这可以通过在 φ 中检查所定义的关系是否为等价关系来实现；如果不是，则改为给出任意一个等价关系，例如全集关系。）其次，注意到 $\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{s})$ 是将 G 的顶点集划分为 H 的连通分量所得的划分，而 $\lambda(G^{\bar{x}}; \bar{s})$ 是 $\mathcal{L}_S$。那么：

– 根据 H，不同连通分量之间不存在边，因此 H 的 ($\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{s})$, $\mathcal{L}_S$) 是一个切分；并且 – 根据命题 16， $\varphi(G^{\bar{x}}; \bar{s})$ 的每个部分都完全包含在 $\mathcal{P}$ 的某个部分中。最后， $|\mathcal{L}_S| \leqslant 2^c \leqslant 2^{\mathcal{O}(t^2)}$。证明至此完成。

◀

定义的有限性。 在继续证明定理 13 之前，我们需要补充一个由 Ganian 等人借助 Ding 的早期工作 [11]观察到的见解。这里回顾一下，若一个图类 $\mathscr{C}$ 在取诱导子图后仍封闭，则称其为遗传的 。

▶**定理 19**（由 [19]的推论 3.9 推出）。 对于每个有界灌木深度的遗传图类 $\mathscr{C}$，都存在一个有限图集 Forb($\mathscr{C}$)，使得对于每个图 G,

$G \in \mathscr{C}$ 当且仅当 G 不包含 Forb($\mathscr{C}$) 中的任何成员作为诱导子图。

由上述内容可立即得出，有界灌木深度类在以下意义上是一阶可定义的。

▶**推论 20.** 对于每个有界灌木深度遗传图类 $\mathscr{C}$，都存在一个一阶句子 $\psi_{\mathscr{C}}$，使得对于每个图 G,

$G \in \mathscr{C}$ 当且仅当 $G \models \psi_{\mathscr{C}}$.

有了这些工具，我们现在可以证明该定理。

定理 13 的证明。任取 $G \in \mathscr{C}$，设 (Labels, label T, Adj) 是 G 的连接模型，其中 T 的深度至多为 d，且 Labels 是一个仅依赖于 $\mathscr{C}$ 的固定标签集。设 r 是 T 的根，并令 P 为 G 的顶点集按以 r 的子节点为根的 T 子树所作的划分：顶点 u、v 属于 P 的同一部分，当且仅当存在 r 的一个子节点 x，它是 u 和 v 的共同祖先。此外，令 L 为标签划分：顶点 u、v 属于 L 的同一部分，当且仅当 label(u) = label(v)。根据连接模型的定义，(P, L) 是 G 的一个阶至多为 |Labels| 的切分。

令 $\mathscr{C}'$ 为所有存在深度至多为 $d-1$、使用标签集 Labels 的连接模型的图所构成的类。注意，$\mathscr{C}'$ 是遗传的，且灌木深度至多为 $d-1$。此外，对于 $\mathcal{P}$ 的每个部分 A，都有 $G[A] \in \mathscr{C}'$。

根据引理 15，存在仅取决于 $\mathscr{C}$ 的公式 $\varphi(\bar{x};\bar{y})$ 和 $\lambda(\bar{x};\bar{y})$，使得存在 $\bar{s} \in G^{\bar{y}}$，令 ($\varphi(G^{\bar{x}};\bar{s})$ $\lambda(G^{\bar{x}};\bar{s})$) 成为 G 的一个阶至多为 ℓ 的切分，其中 $\ell \in 2^{\mathcal{O}(|\text{Labels}|^2)}$ 是仅取决于 $\mathscr{C}$ 的一个常元。此外，$\varphi(G^{\bar{x}};\bar{s})$ 的每个部分都完全包含在 $\mathcal{P}$ 的单个部分中，这意味着对于 $\varphi(G^{\bar{x}},\bar{s})$ 的每个部分 A'，都有 $G[A'] \in \mathscr{C}'$。接下来需要将 φ 和 λ 转换为有限公式。

设 R 是一个元数为 4 的关系符号，并考虑以下断言：

> “R 是两个划分$\mathcal{P}$ 和$\mathcal{L}$ 的乘积，使得（$\mathcal{P}$,$\mathcal{L}$）是 G 的一个阶至多为 ℓ的切分。此外，对于$\mathcal{P}$ 的每个部分 A，都有 $G[A] \in \mathscr{C}'$”。

我们声称，它可以由签名$\{E,R\}$上的一阶句子 ψ 表示：对于第一个句子没有困难；对于第二个句子，我们利用推论 20，并将其相对化到$\mathcal{P}$的各个部分。此外，正如上文所述，由于切分投影到诱导子图上，并且由于 $\mathscr{C}'$ 是遗传的，因此可以选择句子 ψ 使其具有遗传性（如果它在某个结构上成立，那么它也在诱导子结构上成立）；特别地，在第 4 节的词汇表中，ψ 在半初等子结构上诱导自身。

定义 $\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2;\bar{y})$，其中 $\bar{x}_1$ 和 $\bar{x}_2$ 都是大小为 2 的变量元组，为由下式给出的公式

$$\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2;\bar{y}) = \varphi(\bar{x}_1;\bar{y}) \wedge \lambda(\bar{x}_2;\bar{y}).$$

设 T 为 $\mathscr{C}$ 的理论。到目前为止，我们证明的内容可以表述为

$$T \quad \text{implies} \quad \exists \bar{s}.\psi[R(\bar{x}_1,\bar{x}_2)/\eta(\bar{x}_1,\bar{x}_2;\bar{s})].$$

因此，根据有限替代引理（引理 11），存在一个有限公式$\eta'(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2;\ \bar{y})$，使得

$$T \quad \text{implies} \quad \exists \bar{s}.\psi[R(\bar{x}_1,\bar{x}_2)/\eta'(\bar{x}_1,\bar{x}_2;\bar{s})].$$

那么，这些公式

$$\varphi'(\bar{x};\bar{y}) = \exists z.\eta'(\bar{x},z,z;\bar{y}) \quad \text{and} \quad \lambda'(\bar{x};\bar{y}) = \exists z.\eta'(z,z,\bar{x};\bar{y})$$

得出所需结果。 ◀

5.3 归约至有界树深度的规范归约

有了定理 13，我们继续证明定理 2。固定一个灌木深度至多为 d 的类 $\mathscr{C}$。

构造的性质。 我们描述一种构造：给定一个图 $G \in \mathscr{C}$，构造一个具有以下形式的结构 $\mathcal{A}(G)$。
– $\mathcal{A}(G)$ 是一个结构，其签名由若干一元关系和一个二元关系组成。因此，我们将$\mathcal{A}(G)$视为顶点着色有向图，并将通常的有向图术语应用于$\mathcal{A}(G)$。例如，$\mathcal{A}(G)$的元素称为顶点，属于二元关系的有序对称为弧。– G 的顶点集包含于$\mathcal{A}(G)$的顶点集。$V(G)$的元素称为叶节点，其所属结构为$\mathcal{A}(G)$。在$\mathcal{A}(G)$中，有一个一元谓词用于标记所有叶节点。– 在$\mathcal{A}(G)$中，有一个指定顶点，称为根，使得对于$\mathcal{A}(G)$中的每个顶点 u，都存在一条从 u 到根的弧。根由一个一元谓词标识。

该构造将满足以下性质。
– 映射 $G \mapsto \mathcal{A}(G)$ 在类 $\mathscr{C}$ 中是同构不变的。– 对于 $\mathcal{A}(G)$ 的每个顶点 u，其尾端位于 u 的弧至多有 c 条，其中 c 是仅取决于 $\mathscr{C}$ 的某个常元 c。– 存在一个取决于 $\mathscr{C}$ 的转导 T，使得 $\mathcal{A}(G) \in \mathsf{T}(G)$。– 类 $\{\mathcal{A}(G) \mid G \in \mathscr{C}\}$ 具有有界树深度。– 存在一个取决于 $\mathscr{C}$ 的解释 I，使得 $G = \mathsf{I}(\mathcal{A}(G))$。– 给定 G，可以在$\mathcal{O}(n^2)$时间内计算出 $\mathcal{A}(G)$，其中 n 是 G 的顶点数。

我们对 d（即 $\mathscr{C}$ 的灌木深度）进行归纳法。

基本情形。 当 $d = 1$ 时，类 $\mathscr{C}$ 中的所有图至多有一个顶点。因此，对于 $G \in \mathscr{C}$，只需输出 $\mathcal{A}(G)$，使其成为 G，并声明 G 的唯一顶点 u 为 $\mathcal{A}(G)$ 的根。（这还涉及添加一条弧 (u,u)，并使用根和叶节点的一元谓词标记 u。）于是我们可以设定 $c = 1$，而 T 和 I 的定义显然可得。

为归纳构造做准备。 假设 $d > 1$。令 $\varphi(\bar{x};\bar{y})$、$\lambda(\bar{x};\bar{y})$、$\ell \in \mathbb{N}$ 和 $\mathscr{C}'$ 分别为定理 13 给出的有限公式、界和类。由于 $\mathscr{C}'$ 的灌木深度至多为 $d-1$，根据归纳假设，我们得到一个合适的映射$\mathcal{A}'(\cdot)$、常元 c'、转导 T'，和解释 I'，它们满足上文针对 $\mathscr{C}'$ 所述的性质。

若元组 $\bar{s} \in G^{\bar{y}}$ 是好的，则称之为好元组；如果 $(\varphi(G^{\bar{x}};\bar{s})\ \lambda(G^{\bar{x}};\bar{s}))$ 是 G 的一个阶至多为 ℓ 的切分，并且对于 $\varphi(G^{\bar{x}},\bar{s})$ 的每个部分 A，都有 $G[A] \in \mathscr{C}'$。定义

$$\mathcal{F} = \{\, (\varphi(G^{\bar{x}};\bar{s}), \lambda(G^{\bar{x}};\bar{s})) : \bar{s} \in G^{\bar{y}} \text{ is a good tuple} \,\}.$$

根据定理 13，我们有

$$1 \leqslant |\mathcal{F}| \leqslant k$$

其中某个常元 $k \in \mathbb{N}$ 仅依赖于 $\mathscr{C}$。

令 $\mathcal{L}$ 为细化属于$\mathcal{F}$的所有切分的标签划分的最粗划分；也就是说，u, v 当且仅当对于每个 $(\mathcal{P},\mathcal{L}) \in \mathcal{F}$，$u, v$ 在 $\mathcal{L}$的同一部分中。类似地，令 $\mathcal{P}$ 为细化属于 $\mathcal{F}$的所有切分的分量划分的最粗划分。由于 $|\mathcal{F}| \leqslant k$ 且对于 $\mathcal{F}$中出现的每个标签划分都有 $|\mathcal{L}| \leqslant \ell$，我们有

$$|\widehat{\mathcal{L}}| \leqslant \ell^k.$$

此外，$\mathcal{P}$ 的每个部分都包含在$\mathcal{F}$中出现的任一分量划分的单个部分内，因此 $G[B] \in \mathscr{C}'$ 对于$\mathcal{P}$的每个部分 B。

令$\mathcal{F} = \{(\mathcal{P}, \mathcal{L}) : (\mathcal{P}, \mathcal{L}) \in \mathcal{F}\}$。由于$\mathcal{F}$中出现的每个标签划分都由$\mathcal{L}$细化，因此可知，$\mathcal{F}$ 的每个元素都是 G的切分。接着，对于$\mathcal{F}$中出现的分量划分 $\mathcal{P}$，令 $Z_{\mathcal{P}} \subseteq \mathcal{L} \times \mathcal{L}$ 为对称关系，它证明$(\mathcal{P},\mathcal{L})$是一个切分。

构造定义。现在我们描述结构$\mathcal{A}(G)$；参见图 2。构造：

– 一个根顶点 r；– 对于每个部分 $L \in \mathcal{L}$，一个顶点 x_L；– 对于$\mathcal{F}$中出现的每个分量划分 $\mathcal{P}$，一个顶点 $y_{\mathcal{P}}$；– 对于$\mathcal{F}$中出现的每个分量划分$\mathcal{P}$ 以及$\mathcal{P}$的每个部分 $A \in$，一个顶点$z_{\mathcal{P},A}$；以及– 对于$\mathcal{F}$中出现的每个分量划分$\mathcal{P}$ 以及每个（无序）对 $LL' \in Z_{\mathcal{P}}$，一个顶点$q_{\mathcal{P},LL'}$。（注意，此处 $Z_{\mathcal{P}}$ 是对称的，因此我们可以将其元素视为$\mathcal{L}$中元素构成的无序对。）

此外，对于$\mathcal{P}$ 的每个 B 部分，我们都有 $G[B] \in \mathscr{C}'$，因此可以将构造$\mathcal{A}'$ 应用于 $G[B]$，从而得到一个结构 $H_B = \mathcal{A}'(G[B])$。令 r_B 为 H_B的根。我们将以这种方式得到的所有结构 H_B 添加到$\mathcal{A}(G)$中。随后，我们通过以下弧将它们连接起来：
1. 对于 A(G) 中的每个顶点 u，存在一条弧 (u, r)；2. 对于形如 $z_{\mathcal{P}}$、A 的每个顶点，存在一条弧 $(z_{\mathcal{P},A}, y_{\mathcal{P}})$；3. 对于形如 $q_{\mathcal{P}}$、LL' 的每个顶点，存在弧 $(q_{\mathcal{P},LL'}, x_L)$、$(q_{\mathcal{P},LL'}, x_{L'})$ 和 $(q_{\mathcal{P},LL'}, y_{\mathcal{P}})$；4. 对于 P 的每个 B 部分以及 F 中出现的每个分量划分 P，存在一条弧 $(r_B, z_{\mathcal{P},A})$，其中 A 是 P 中包含 B的唯一部分；5. 对于 G 中的每个顶点 u，存在一条弧 (u, x_L)，其中 L 是 L 中包含 u的唯一部分。（回顾一下，G 的顶点集是 $B \in$对应的 H_B 的叶集之并。）

最后，我们添加五个新的一元谓词，分别记作 R、X、Y、Z 和 Q，分别选出根 r、形如 x_L 的顶点、形如 $y_{\mathcal{P}}$ 的顶点、形如 $z_{\mathcal{P},A}$ 的顶点，以及形如 $q_{\mathcal{P},LL'}$ 的顶点。注意，H 包含更多一元谓词：这些谓词随归纳法构造的结构 H_B 一同出现。其中包括一个选出叶节点的一元关系。

至此，G的构造$\mathcal{A}(G)$完成。现在我们验证所需的性质。

首要性质。前两个性质可由构造轻易推出。

▷ 命题 21。映射 $G \mapsto \mathcal{A}(G)$ 是同构不变的。

▷ 命题22。存在一个仅依赖于 $\mathscr{C}$ 的常元 c，使得 $\mathcal{A}(G)$ 中的每个顶点都是至多 c 条弧的尾端。

证明。命题 21 由该构造立即得到。对于命题 22，源自 H_B 的顶点至多是 $c' + 2 + |\mathcal{F}| \leqslant c' + 2 + k$ 条弧的尾端，而形如 r、x_L、$y_{\mathcal{P}}$、$z_{\mathcal{P},A}$ 或 $q_{\mathcal{P},LL'}$ 的顶点至多是 4 条弧的尾端。◁

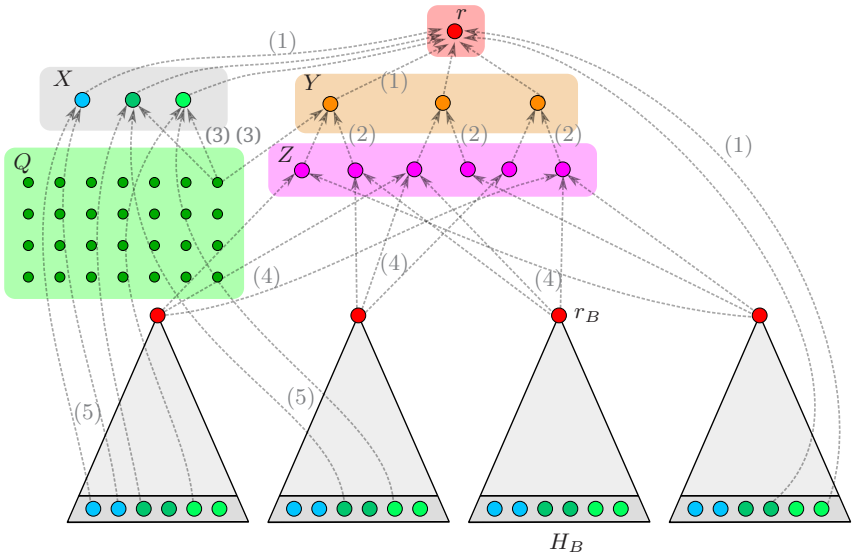

图 2 $A(G)$的归纳构造。 r、 $y_{\mathcal{P}}$、 $z_{\mathcal{P},\,A}$、 $q_{\mathcal{P},\,LL'}$ 这几类顶点分别以红色、橙色、紫色和绿色表示。 x_L 这类顶点以不同的柔和颜色显示在图的左上角（这些颜色并不对应一元谓词），并与指向它们的 G 顶点颜色相匹配；因此，柔性色彩划分为 $\widehat{\ }L$。对于每种类型的弧，我们展示了几个代表。

从$\mathcal{A}(G)$ 由 G转导。现在我们证明，可以从 G转导出$\mathcal{A}(G)$。

▷ 断言 23。存在一个一阶转导 T，使得对于所有 $G \in \mathscr{C}$，$\mathcal{A}(G) \in \mathrm{T}(G)$。

证明。该转导首先使用 $k'|y|$ 种颜色，其中 $k' \leqslant k$，来标记元组 $\bar{s}_1$、……、 $\bar{s}_{k'} \in G^{\bar{y}}$，使得：

– 每个元组 $\bar{s}_i$ 都是良元组；– 切分 $(\mathcal{P}_i,\ \mathcal{L}_i) = (\varphi\ (G^{\bar{x}},\ \bar{s}_i)\ \lambda\ (G^{\bar{x}},\ \bar{s}_i))$，对于 $i \in \{1,$ ……，$k'\}$ 两两不同；– 对于每个良元组 $\bar{s}$，存在 i 使得 $(\varphi\ (G^{\bar{x}},\ \bar{s})\ \lambda\ (G^{\bar{x}},\ \bar{s})) = (\mathcal{P}_i,$ $\mathcal{L}_i)$。

根据推论 20，元组是 good 这一性质可以用一阶公式表达。因此，既然我们知道如上所述存在 $\bar{s}_1$、……、 $\bar{s}_{k'}$，我们只需非确定性地猜测它们，并用一阶逻辑验证它们满足所需的性质。由此，我们构造了$\mathcal{F} = \{(\mathcal{P}_i,\ \mathcal{L}_i)\colon\ i \in \{1,\ \ldots\ldots,\ k'\}\}$。

构造然后通过解释这些划分获得。构造出所有形如 r、 x_L、 $y_{\mathcal{P}}$、$\widehat{\mathcal{P}}z$和 $_A\widehat{\ }$和 $q_{\mathcal{P},\,LL'}$ 的顶点，并解释它们之间的弧。接下来，我们对每个$\mathcal{P}$ 并行地将转导 T′ 应用于 $G[B]$，其中 $\widehat{\ }$表示每个 $B \in$。（这是通过将 T′ 的公式适当地相对化到$\mathcal{P}$的各部分来实现的。）由此得到所有 $B \in\mathcal{P}$对应的结构 H_B。最后，其余的弧——形式为 $(r_B,\ z_{\mathcal{P},\,A})$、$(u,\ r)$ 或 $(u,$ $x_L)$，其中 u 是 G 的一个顶点——很容易解释。◁

注意，由断言 23 可立即得到以下结论。

▷ 断言 24. 如果 $G \in \mathscr{C}$有 n 个顶点，那么 $\mathcal{A}(G)$ 有 $\mathcal{O}(n)$ 个元素。

对 $\mathcal{A}(G)$ 的树深度进行界定。 树深度的一个界很容易得到。

▷ 断言 25。类 $\{\mathcal{A}(G)\colon\ G \in \mathscr{C}\}$ 具有有界树深度。

证明。 令 $\mathcal{D}$ 为所讨论的类。由定理 12 和断言 23 可知，$\mathcal{D}$具有有界灌木深度。现在考虑任意一个 $H \in \mathcal{D}$。根据命题 22， H的 Gaifman 图的任意子图（设其有 n 个顶点）至多有 cn 条边，因此其中包含一个度至多为 $2c$的顶点。由此可知 $\mathcal{D}$ 是 $2c$-退化的；众所周知[4]，具有有界灌木深度的退化类实际上具有有界树深度。◀

解释 G **于** $\mathcal{A}(G)$。由命题 22 和 23 可推出以下结论。

▷ 命题 26. 存在一个解释 I，使得 $G = \mathrm{I}(\mathcal{A}(G))$。

证明。 首先，论域公式 $\gamma_{\mathrm{I}}(u)$ 恰好选出 $\mathcal{A}(G)$的所有叶节点；回想一下，这些叶节点由一个一元谓词标记。

邻接公式 $\alpha_{\mathrm{I}}(u, v)$ 的工作方式如下。给定顶点 u 和 v，我们首先验证$\widehat{}$它们是不同的叶节点。然后，检查是否存在一个部分 $B \in \mathcal{P}$ 使得$u, v \in B$。这可以通过检查是否存在一个形如 r_B 的顶点来完成，其中$\smile B \in \mathcal{P}$，且弧 (u, r_B) 和 (v, r_B) 均存在。（请注意，根据构造，$\widehat{}$所有形如 r_B 的顶点，其中 $B \in \mathcal{P}$，都由一个一元谓词标记。）

若情况如此，则可以利用通过对类 $\mathscr{C}'$应用归纳法得到的解释 I′，推断边 uv 是否存在于 G 中。将该解释应用于结构 H_B 时，需将其中涉及的所有公式适当地限制到 H_B的顶点上，也就是说，限制到满足弧 (w, r_B) 存在的顶点 w。

$\widehat{}$若情况并非如此，也就是说，$u \in B$ 和 $v \in B'$，其中 B 和 B' 是 P 的不同部分，那么 u 与 v 在 G 中邻接，等价于以下断言：若 L、L' 分别属于 L 中的$\widehat{}$部分，且 P 是 F 中任意一个分量划分，使得 u 和 v 属于 P 的不同部分（注意，根据 P 的$\widehat{}$定义，这样的 P 必定存在），那么顶点 $q_{\mathcal{P}}$、$_{LL'}$ 存在。这等价于以下一阶公式：存在顶点 r_B、$r_{B'}$，顶点 x、x' 满足 X（可能相等），不同的顶点 z、z' 满足 Z，一个满足 Y 的顶点 y，以及一个满足 Q的顶点 q，使得弧

$$(u,x),(v,x'),(u,r_B),(v,r_{B'}),(r_B,z),(r_{B'},z'),(z,y),(z',y),(q,y),(q,x),(q,x')$$

均已存在，且$\{(q,\ z),\ (q,\ x),\ (q,\ x')\}$是所有以 q 为尾的弧。至此，α_{I}的定义完成。◁

在 $\mathcal{A}(G)$ **中进行构造，耗时** $\mathcal{O}(n^2)$ **时间。** 为了证明所声称的上界，我们将应用以下算法元定理。

▶ **引理 27 (**由以下结果组合得到： [15] 和 [25])。 设 $\mathscr{C}$ 是一个团宽度有界的彩色图类，且 $\varphi(\bar{x})$ 是一个公式。对于任意顶点数为 n 的 $G \in \mathscr{C}$，经过 $O(n^2)$ 时间的预处理后，

(i) 以常数延迟枚举 $\varphi(G^{\bar{x}})$；**(ii)** 给定一个元组 $\bar{u} \in G^{\bar{x}}$，用 $G \models \varphi(\bar{u})$ 常数时间判断。我们在附录 B 中给出证明。所需结果由该引理得出。

▷ 断言 28. 给定具有 n 个顶点的 $G \in \mathscr{C}$，可以在时间 $\mathcal{O}(n^2)$ 内构造 $\mathcal{A}(G)$。

[4] 论证如下：有界灌木深度类排除某条路径作为诱导子图 [19], ，再结合该类是退化的这一假设，可推出该类具有有界树深度 [27, 命题 6.4]。

证明。 正如我们已经观察到的，元组 $\bar{s}$ 是良元组这一性质可以用一阶公式表示。因此，我们可以在时间$\mathcal{O}(n^2)$ 内得到一个良元组 $\bar{s}_1$。要得到 $\bar{s}_2$，应使用颜色标记 $\bar{s}_1$，然后修改公式，额外要求由 $\bar{s}_2$ 定义的划分不同于由 $\bar{s}_1$定义的划分。迭代进行，由于 $k' \leqslant k$ 是一个常元，便可按照断言 23 的证明，在时间 $\mathcal{O}(n^2)$内得到元组 $\bar{s}_1$、……、 $\bar{s}_{k'}$。

于是我们有 F $= \{(\varphi(G^{\bar{x}}, \bar{s}_i)\ \lambda(G^{\bar{x}}, \bar{s}_i)) \colon i \in \{1, \ldots, k'\}\}$，并且每个 k' 个不同的 ($\varphi(G^{\bar{x}}$, $\bar{s}_i)\ \lambda(G^{\bar{x}}, \bar{s}_i)$) 都可以通过按照引理 27 第二项中的方法进行 $2n^2$ 次查询，在 O(n^2) 时间内计算出来。计算出 F 后，可以在 O(n^2) 时间内计算划分 P 和 L。接着，只需遵循定义，就可以在 O(n^2) 时间内构造形如 r, x_L, $y_{\mathcal{P}}$, $z_{\mathcal{P},A}$ 和 $q_{\mathcal{P},LL'}$ 的顶点，以及它们之间的弧。然后，对于每个部分$\sim B \in$ P，我们通过应用归纳法提供的类 $\mathscr{C}'$ 的算法来构造 $H_B = \mathsf{A}'(G[B])$。每个部分 $B \in \widehat{\ }$P 需要 O($|B|^2$) 时间，因此总计需要 $\sum_{B \in \widehat{\mathcal{P}}} \mathsf{O}(|B|^2) \leqslant \mathsf{O}(n^2)$ 时间。最后，在 O(n^2) 时间内即可轻松构造连接结构 H_B 与其他顶点的弧。◁

由断言 21 和 26 可知，对于图 G，$G' \in \mathscr{C}$，结构 $\mathcal{A}(G)$ 和 $\mathcal{A}'(G)$ 同构，当且仅当 G 和 G' 同构。结合断言 28 给出的算法性结论以及断言 25 给出的树深度界，我们得出定理 2。

5.4 规范化与同构测试

现在我们利用定理 2 证明定理 3，即为任意有界灌木深度图类给出一个二次时间的同构测试。正如引言中所述，事实上我们解决的是更一般的规范化问题，定义如下。

对于结构类 $\mathscr{C}$，$\mathscr{C}$ 的规范化映射 是一个映射 $\mathfrak{c}$，具有以下性质：对于每个 $\mathbf{M} \in \mathscr{C}$，$\mathfrak{c}(\mathbf{M})$ 是 $\mathbf{M}$ 的元素上的一个全序，使得若 $\mathbf{M}$，$\mathbf{M}' \in \mathscr{C}$同构，那么将 $\mathfrak{c}(\mathbf{M})$ 和 $\mathfrak{c}(\mathbf{M}')$ 中指标相同的元素对应起来，就能得到 $\mathbf{M}$ 与 $\mathbf{M}'$之间的一个同构。注意，如果存在一个可高效计算的规范化映射 $\mathfrak{c}$，适用于 $\mathscr{C}$，那么这就能立即给出一个时间复杂度相同的同构测试。

对于有界树深度类，Bouland 等人 [4] 给出了一种相对简单的固定参数同构检验。他们的技术可以轻松扩展到有界树深度二元结构的规范化问题。

▶ **定理 29** (改编自 [4])。 设 D 是有界树深度二元结构的一个类。在 D 上存在一个规范化映射 $\mathfrak{c}$，其计算时间为 $O(n\log^2 n)$，其中 n 是输入结构的论域大小。

证明见附录 C。现在我们可以证明本节的主要结果。

▶**定理 30**。 设 $\mathscr{C}$ 是有界灌木深度图类。存在一个规范化映射 $\mathfrak{c}$，定义在 $\mathscr{C}$ 上，其计算时间为 $O(n^2)$，其中 n 是输入图的顶点数。

证明。 令 $\mathscr{D}$ 为有界树深度的类，并令 $\mathcal{A}\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ 为定理 2 针对类 $\mathscr{C}$提供的映射。那么，要为 $\mathscr{C}$获得合适的规范化映射，只需将 $\mathcal{A}$与 $\mathscr{D}$的规范化映射复合即可；该规范化映射由定理 29 提供，并将输出的阶限制在原图的顶点集上。◀

如前所述，定理 3 直接由定理 30 得出。

6 单子稳定类中的规范策略

在本节中，我们给出 Flipper 博弈（的一个变体）中的规范策略；该博弈能否在有界数量的回合内终止刻画了单子稳定性 [18]。陈述我们的主要结果需要一些定义，现给出如下。

6.1 定义与形式化陈述

本节中，所有结构均定义在图的签名上，并可带有额外的常量和二元关系（这些关系始终定义有界指标的等价类）。

翻转。
设 $\mathcal{P}$ 是结构 $\mathbf{M}$ 的一个划分。结构 $\mathbf{M}'$ 的一个 $\mathcal{P}$-翻转，是指任何与 $\mathbf{M}$ 具有相同论域、常量和等价关系的结构，并且存在一个对称关系$Z \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{P}$，满足对所有 $u, v \in \mathbf{M}$,

$$u, v \text{在} \mathbf{M}' \text{中相邻，当且仅当（} u, v \text{在} \mathbf{M} \text{中相邻）异或（（} \mathcal{P}(u), \mathcal{P}(v)) \in Z \text{），}$$

其中，$\mathcal{P}(x)$ 表示$\mathcal{P}$ 中 x 所属的部分。注意，对于给定的部分 $A \in \mathcal{P}$，$(A, A) \in Z$可能成立，也可能不成立，从而产生不同的翻转。

给定一个模型$\mathbf{M}$、$\mathcal{P}$ 对$\mathbf{M}$的划分、整数 $r \in \mathbf{N}$，以及$\mathbf{M}$中的顶点 $u, v \in$，如果存在$\mathbf{M}$ 的一个$\mathcal{P}$-翻转，使得其中不存在一条从 u 到 v、长度为 $\leqslant r$ 的路径，我们就称 u 和 v 在$\mathbf{M}$中关于 $\mathcal{P}$ 是 r-独立的，记作 $u \perp^r_{\mathcal{P}} v$。否则（在每个$\mathcal{P}$-翻转中，都存在一条从 u 到 v、长度为 $\leqslant r$ 的路径），我们记作 $u \not\perp^r_{\mathcal{P}} v$，并令

$$B^r_{\mathcal{P},\mathbf{M}}(v) = \{u \in \mathbf{M} \mid u \overset{r}{\underset{\mathcal{P}}{\not\perp}} v\}$$

表示以 v为中心的相应球。以下性质很容易验证。

▶**引理 31**。 设$\mathbf{M}$ 是结构$\mathbf{N}$的一个诱导子结构，设 P 是$\mathbf{M}$的一个划分，且 Q 是$\mathbf{M}$ 的一个划分，并且比 P 对$\mathbf{M}$的限制更细。则对于所有$v \in \mathbf{M}$ 以及所有 $r \in \mathbb{N}$，有 $B^r_{\mathcal{Q},\,\mathbf{M}}(v) \subseteq B^r_{\mathcal{P},\,\mathbf{N}}(v)$。

给定集合 X 的两个划分 $\mathcal{P}$、$\mathcal{P}'$，我们令 $\mathcal{P} \barwedge \mathcal{P}'$ 表示它们的最粗公共细化，即划分

$$\mathcal{P} \barwedge \mathcal{P}' = \{P \cap P' \mid P \in \mathcal{P} \text{ and } P' \in \mathcal{P}'\} - \{\emptyset\}.$$

注意，如果 $\mathcal{P}$ 和$\mathcal{P}'$ 的指标分别为 $\leqslant k$ 和 $\leqslant k'$，那么$\mathcal{P} \barwedge \mathcal{P}'$ 的指标为 $\leqslant kk'$。

分离博弈。

在结构$\mathbf{M}$ 上进行的指标为 k的半径-r 分离[5] 博弈分回合 $i = 1$、2、.....进行，规则如下。
最初，竞技场 A_1 是整个结构。在第 i 轮中，
– 分离者选择一个指标至多为 k 的划分 $\mathcal{P}_i$；– 连接者选择一个顶点 $c_i \in A_i$;

[5] 在 [18], 中，这种博弈的变体（指标为 2）称为“伪翻转器博弈”。

– 我们设定

$$A_{i+1} = A_i \cap B^r_{\mathcal{P}_1 \bar{\cap} \ldots \bar{\cap} \mathcal{P}_i}(c_i),$$

并且如果 $|A_{i+1}| = 1$，博弈就会停止，分离者获胜。
我们有时将其简称为 $(r,\ k)$-分离博弈。还要指出，与 Splitter 游戏不同，球 $B^r_{\mathcal{P}_1 \bar{\cap} \ldots \bar{\cap} \mathcal{P}_i}(c_i)$ 是在 $\mathbf{M}$ 中计算的，而不是在当前竞技场中计算的。

一个重要的变体是原子分离[6] 博弈，元组大小为 k；在每一轮i中，分离者选择一个至多包含 k 个 $\bar{s}_i$ 顶点的元组，并令 $\mathcal{P}_i$ 为 $\bar{s}_i$ 上的原子边类型划分（其指标为 $\leqslant 2^k + k$）。

请注意，对于分离博弈，指标 k 在某种程度上并不重要：如果分离者在至多 ℓ 轮内赢得 $(r,\ k)$-博弈，那么他也能在至多 $k\ell$ 轮内赢得 $(r,\ 2)$-博弈。类似的说法也适用于原子版本；不过，固定的有限指数对于我们的可定义版本很重要（见下文）。 [18]的主要结果之一是，（原子）分离博弈刻画了单子稳定性。

▶ **定理 32** (定理 1.4，见 [18])。 设 $\mathscr{C}$ 是一个图类。以下各项等价 *:*
1. $\mathscr{C}$ 是单子稳定的；**2.** 对于每个 r，都存在 ℓ 使得对于 $\mathscr{C}$中的所有图，分离者都能在指标为 r 、指标 2 的半径 ℓ 轮分离博弈中获胜；**3.** 对于每个 r，都存在 ℓ 使得对于 $\mathscr{C}$ 中的所有图，分离者都能在元组大小为 1 、经过 ℓ 轮的原子半径分离博弈中获胜。

现在我们可以陈述本节的主要结果，它揭示了单子稳定类中典范分隔者策略的存在性。

▶定理 *33*（典范分隔者策略）。设 $\mathscr{C}$ 是一个单子稳定类，并设$r \geqslant 1$ 和 ℓ 满足：对于 $\mathscr{C}$中的所有图，分离者都能在元组大小为 *1*、经过 ℓ 轮的原子半径-r 分离博弈中获胜。存在公式 $\delta_1(\bar{x};\ y_1)$ $\delta_2(\bar{x};\ y_1, y_2)$ *. . . ,* $\delta_\ell(\bar{x};\ y_1, \ldots, y_\ell)$，它们定义了指标为 $\leqslant k$ 的划分，其中 k 为某个整数；并且对于所有图 $M \in \mathscr{C}$，分离者都能在 ℓ轮的（r, k）-分离博弈中获胜：在第 i 轮，分离者选择划分 $P_i = \delta_i(M^{\bar{x}};\ c_1, \ldots, c_i)$，其中 $c_1, \ldots, c_i$ 是先前的连接者移动。

6.2 定理 33 的证明

我们固定一个单子稳定的图类 $\mathscr{C}$和 r，$\ell \geqslant 1$ 使得对于 $\mathscr{C}$中的所有图，分离者在 ℓ 回合内赢得元组大小为 1 的原子半径-r 分离博弈。我们注意到，这可以用一个一阶句子来表达。令 T 为 $\mathscr{C}$的理论，并令 d 为 T 的梯子指标的两倍加 1。

配置。
在 r-分离博弈进行完 i 回合后，图 r上的一个配置是由 i 个划分$\mathcal{P}_1$、.....、$\mathcal{P}_i$ 以及 i 个连接器移动 c_1、.....、c_i组成的集合。我们将其写作 $C_i = (\mathcal{P}_1,\ c_1,\ \mathcal{P}_2,\ c_2,\ \ldots\ldots,\ \mathcal{P}_i,\ c_i)$。如果以下两种情况之一成立，则称该集合为获胜的：
– 对于某个 $j \in \{1, \ldots, i\}$，连接者的着法 c_j在时间 j 不属于竞技场，

$$A_j = \bigcap_{t=1}^{j-1} B^r_{\mathcal{P}_1 \bar{\cap} \ldots \bar{\cap} \mathcal{P}_t}(c_t)$$

[6] 在 [18], 中，这一变体（元组大小为 1）被称为“分离博弈”。

– A_{i+1} 是一个单元素集合。

这可以通过一个一阶句子来表达（其签名为 $\{E、\mathcal{P}_1、\ldots\ldots、\mathcal{P}_i、\ c_1、\ldots\ldots、\ c_i\}$）。如上所定义的 A_j 被称为与配置 C_i相关联的竞技场。

我们称经过 i 轮 C_i 的配置会在 ℓ 轮内，以元组大小为 k 的原子博弈中获胜，若从 C_i开始，分离者在还剩 $\ell - i$ 步的情况下，以元组大小为 k 赢得原子博弈。更正式地，对于所有 $j \in \{ i+1、\ldots\ldots、\ \ell\}$，以及所有由额外连接器移动组成的序列$c_{i+1}、\ldots\ldots、${v24>，存在一个元组 $t_{c_{i+1}\ldots c_j}$，其对应的划分为 $\mathcal{P}_{c_{i+1}\ldots c_j}$，定义方式使得对于任意序列 $c_{i+1}、\ldots\ldots、\ c_\ell$，配置

$$(c_1, \mathcal{P}_1, \ldots, c_i, \mathcal{P}_i, c_{i+1}, \mathcal{P}_{c_{i+1}}, c_{i+2}, \mathcal{P}_{c_{i+1}c_{i+2}}, \ldots, c_\ell, \mathcal{P}_{c_{i+1}\ldots c_\ell})$$

获胜。然而，这同样可以通过一个关于签名$\{E、\mathcal{P}_1、\ldots\ldots、\mathcal{P}_i、\ c_1、\ldots\ldots、\ c_i\}$的一阶句子来表达。

归纳假设。

我们将通过归纳法证明该定理，并采用以下假设$\mathcal{H}_i$:

存在公式 $\delta_1(\bar{x};\ y_1)\ldots,\delta_i(\bar{x};\ y_1,\ldots,y_i)$，它们定义有限指数的划分，并且$T$蕴含如下句子："对于所有连接者移动 $c_1,\ldots,c_i$，经过 i轮后得到的配置 $(c_1,\mathcal{P}_1,\ldots,c_i,\mathcal{P}_i)$ 会在元组大小为 $(d)^i$ 的原子博弈中于 ℓ轮内获胜，其中对于所有 $j \in \{1,\ldots,i\}$，$\mathcal{P}j$ 是由 $\delta_j(\bar{x};\ c_1,\ldots,c_j)$ 定义的划分。"

如所需，$\mathcal{H}_\ell$蕴含该定理，其中 k是 $\delta_1,\ldots,\delta_\ell$ 的最大指标（这仅取决于 T，因为指标为 $\leqslant p$ 可以用一阶公式表达）。还需注意，$\mathcal{H}_0$ 对应于我们的工作假设：分离者在 ℓ 轮内赢得 r阶、元组大小为 1 的原子博弈；因此，尚需证明归纳步骤。

归纳步骤。

令 $i \in \{1,\ldots,\ell\}$，并假设 $\mathcal{H}_{i-1}$成立，我们的目标是证明 $\mathcal{H}_i$。令 ψ_i为签名 $\{E \cup R\}$上的一个句子，其中 R 是一个元数为 2 的新符号，用来表达

R是一个划分，使得对于所有连接器移动 $c_1,\ldots,c_{i-1},c_i$，经过 i轮后的配置 $(c_1,\mathcal{P}_1,\ldots,c_{i-1},\mathcal{P}_{i-1},c_i,R)$—— 其中对于 $j \in \{1,\ldots,i-1\}$，$\mathcal{P}j$ 是由 $\delta_j(\bar{x},c_1,\ldots,c_j)$ 定义的划分 —— 会在原子博弈中于 ℓ轮内获胜，元组大小为 $(d)^{i-1}$。

令 $\varphi(\bar{x};\bar{y})$为一个定义原子 $\bar{y}$-类型划分的句子，其中 $|\bar{y}| = (d)^{i-1}$。归纳假设 $\mathcal{H}_{i-1}$ 告诉我们，T蕴含句子 $\exists\bar{s}.\psi[R(\bar{x})/\varphi(\bar{x};\bar{s})]$。现在我们将 ψ'_i 定义为与 ψ_i完全相同，只是将元组大小（在最末处）增加到 d^i。

▷ 命题 34。在理论 T 中，ψ_i 在半初等子结构上诱导出 ψ'_i。

证明。设 M 是 T 的一个模型，N 是 M 的一个初等扩张，R 是一个划分，使得 N$[R/$ R$] \models \psi_i$：对于所有连接器移动 $c_1,\ldots,c_{i-1},c_i \in$N，在 i 轮之后的配置 $(c_1,$ P$1,\ldots,c_{i-1},$ P$_{i-1},c_i,$ R$)$（其中对于 $j \in \{1,\ldots,i-1\}$，Pj 是由 $\delta_j(\bar{x},c_1\ldots c_j)$ 定义的划分）会在元组大小为 $(d)^{i-1}$ 的原子博弈中于 ℓ 轮内获胜。展开定义可得，对于每个 $j \in \{i+1,\ldots,\ell\}$，以及 N 中任意一列由连接器移动组成的序列$c_{i+1},\ldots,c_j \in$，都存在一个元组 $\bar{t}_{c_{i+1}\ldots c_j} \in$N $^{d^{i-1}}$，其对应的 N 上原子类型划分为 P$_{c_{i+1}\ldots c_j}$；并且对于任意序列 $c_{i+1},\ldots,c_\ell \in$N，配置

$$C_{c_{i+1}\ldots c_\ell} = (c_1, \mathcal{P}_1, \ldots, c_{i-1}, \mathcal{P}_{i-1}, c_i, \mathcal{R}, c_{i+1}, \mathcal{P}_{c_{i+1}}, c_{i+2}, \mathcal{P}_{c_{i+1}c_{i+2}}, \ldots, c_\ell, \mathcal{P}_{c_{i+1}\ldots c_\ell})$$

是获胜的。利用类型的可定义性（定理 7），可得对于每个 $j \in \{i+1, \dots, \ell\}$ 以及 $\mathbf{M}, \dots, c_j$ 中每一列由连接器移动组成的序列，都存在一个元组 $\bar{t}'_{c_{i+1}\dots c_j} \in \mathbf{M}^{d^i}$，其对应的 $\mathcal{Q}_{c_{i+1}\dots c_j}$ 将 $\mathbf{M}$ 上的原子类型划分得比 $\mathcal{P}_{c_{i+1}\dots c_j}$ 在 $\mathbf{M}$ 上的限制更细。现在，给定一列 $c_{i+1}, \dots, c_\ell \in \mathbf{M}$ 中由连接器移动组成的序列，引理 31 告诉我们，与该配置相关联的竞技场 $A'_1, A'_2, \dots, A'_\ell$

$$C'_{c_{i+1}\dots c_\ell} = (c_1, \mathcal{P}_1|_{\mathbf{M}}, \dots, c_{i-1}, \mathcal{P}_{i-1}|_{\mathbf{M}}, c_i, \mathcal{R}|_{\mathbf{M}}, c_{i+1}, \mathcal{Q}_{c_{i+1}}, c_{i+2}, \mathcal{Q}_{c_{i+1}c_{i+2}}, \dots, c_\ell, \mathcal{Q}_{c_{i+1}\dots c_\ell})$$

对于所有 j, $A'_j \subseteq A_j$，都包含在与 $C_{c_{i+1}\dots c_\ell}$ 相关联的竞技场 A_1、A_2、.....、A_ℓ 中。因此，$C'_{c_{i+1}\dots c_\ell}$ 获胜。由于根据初等扩张的定义，对于所有 $j \in \{1$、.....、$i-1\}$，$\mathcal{P}_{i-1}|_{\mathbf{M}}$ 与 $\mathbf{M}$ 上由 $\delta_i(\bar{x};\ c_1$、.....、$c_j)$ 定义的划分相同，因此我们得到 $\mathbf{M}[R/\mathcal{R}|_{\mathbf{M}}] \models \psi'$，从而证明了该断言。◁

由该断言可知，并且如上所述，T 蕴含 $\exists \bar{s}.\psi[R(\bar{x})/\varphi(\bar{x};\bar{s})]$，因此我们可以应用有限替代引理（引理 11），得到一个有限公式 $\varphi'(\bar{x};\ \bar{z})$ 和一个元组 $\bar{r} \in \mathbf{M}^{\bar{z}}$，使得 $T \models \exists \bar{s}.\psi'[R(\bar{x})/\varphi'(\bar{x};\bar{s})]$，且 $\mathbf{M}$ 上由 $\varphi(\bar{x},\bar{s})$ 和 $\varphi'(\bar{x},\bar{r})$ 定义的划分相同。特别地，由 $\varphi'(\bar{x},\bar{r})$ 定义的划分的指标有界于 $2^{d^{i-1}} + d^{i-1}$。我们令 $\varphi''(\bar{x};\ \bar{z})$ 为一个公式，表示“$\varphi'(\bar{x};\ \bar{z})$ 成立，或者划分 $\varphi'(\cdot;\ \bar{z})$ 的指标为 $> 2^{(d)^{i-1}} + d^{i-1}$”。注意，$\varphi''$ 是有限的，因为对于某些元组，它定义的划分与 φ 相同，而对于其他元组，它定义指标为 1 的全划分。现在我们令

$$\delta_i(\bar{x}) = \forall \bar{y}.\varphi''(\bar{x};\bar{y}).$$

那么，$\delta_i(\mathbf{M}^{\bar{x}})$ 是一个比有限多个划分 $\varphi''_i(\bar{x};\bar{z})$ 都更细的划分，而这些划分的指标均为 $\leqslant 2^{d^{i-1}} + d^{i-1}$。由此可知，$\delta_i(\mathbf{M}^{\bar{x}})$ 具有有限指数；又因为$T \models \exists \bar{s}.\psi'[R(\bar{x})/\varphi'(\bar{x};\bar{s})],$，所以$\mathcal{H}_i$ 成立。

参考文献

1 华威算法、逻辑与结构研讨会——开放问题专场。 https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/daniel_kral/alglogstr/openproblems.pdf，2016。 2 Hans Adler 和 Isolde Adler. 将处处稀疏图类解释为模型论中的一个经典概念。《欧洲组合学杂志》，36:322–330，2014。 doi:10.1016/j.ejc.2013.06.048。 3 Édouard Bonnet、Jan Dreier、Jakub Gajarský、Stephan Kreutzer、Nikolas Mählmann、Pierre Simon 和 Szymon Torunczyk. 有界局部团宽类的解释上的模型检测。载于 LICS '22：第37届 ACM/IEEE 计算机科学逻辑研讨会，第54:1–54:13页。ACM，2022。 doi:10.1145/3531130.3533367。 4 Adam Bouland、Anuj Dawar 和 Eryk Kopczyński. 图同构的可处理参数化。载于第7届参数化与精确计算国际研讨会（IPEC 2012），《计算机科学讲义》第7535卷，第218–230页。Springer，2012。doi:10.1007/978-3-642-33293-7_21。 5 Samuel Braunfeld 和 Michael C. Laskowski. 单子 NIP 的刻画。《美国数学会汇刊》B辑，8(30):948–970，2021。 doi:10.1090/btran/94。 6 Samuel Braunfeld 和 Michael C. Laskowski. 单子 NIP 的存在性刻画。CoRR，abs/2209.05120，2022。 arXiv:2209.05120, doi:10.48550/arXiv.2209.05120。 7 Samuel Braunfeld、Jaroslav Nešetřil、Patrice Ossona de Mendez 和 Sebastian Siebertz. 分解视界：从图稀疏性到模型论分界线。CoRR，abs/2209.11229，2022。 arXiv:2209.11229, doi:10.48550/arXiv.2209.11229。

8 Jiehua Chen、Wojciech Czerwiński、Yann Disser、Andreas Emil Feldmann、Danny Hermelin、Wojciech Nadara、Marcin Pilipczuk、Michał Pilipczuk、Manuel Sorge、Bartlomiej Wróblewski 和 Anna Zych-Pawlewicz. 高效的全动态消除森林及其在检测长路径和环中的应用。载于2021年 ACM-SIAM 离散算法研讨会（SODA 2021），第796–809页。SIAM，2021。 doi:10.1137/1.9781611976465.50。 9 Yijia Chen 和 Jörg Flum. 灌木深度的 FO 可定义性。载于第28届 EACSL 计算机科学逻辑年会（CSL 2020），LIPIcs 第152卷，第15:1–15:16页。Schloss Dagstuhl — Leibniz-Zentrum für Informatik，2020。 doi:10.4230/LIPIcs.CSL.2020.15。 10 Artem Chernikov. 稳定性理论讲义。AMS Open Math Notes（OMN: 201905.110792），2019。 11 Guoli Ding. 子图与良拟序。《图论杂志》，16(5):489–502，1992。doi:10.1002/jgt.3190160509。 12 Jan Dreier、Nikolas Mählmann 和 Sebastian Siebertz. 结构稀疏图类上的一阶模型检测。CoRR，abs/2302.03527，2023。 arXiv:2302.03527, doi:10.48550/arXiv.2302.03527。 13 Jan Dreier、Nikolas Mählmann、Sebastian Siebertz 和 Szymon Torunczyk. 单子稳定类和单子 NIP 类中的不可区分序列与宽性。CoRR，abs/2206.13765，2022。 arXiv:2206.13765, doi:10.48550/arXiv.2206.13765。 14 Zdenek Dvořák、Archontia C. Giannopoulou 和 Dimitrios M. Thilikos. 树深度的禁图。《欧洲组合学杂志》，33(5):969–979，2012。 doi:10.1016/j.ejc.2011.09.014。 15 Fedor V. Fomin 和 Tuukka Korhonen. 分支宽度的快速 FPT 近似。载于第54届 ACM SIGACT 计算理论年会（STOC ’22），第886–899页。ACM，2022。 doi:10.1145/3519935.3519996。 16 Jakub Gajarský 和 Petr Hliněný. 更快地判定固定高度树的 MSO 性质及其若干推论。载于 IARCS 软件技术基础与理论计算机科学年会（FSTTCS 2012），LIPIcs 第18卷，第112–123页。Schloss Dagstuhl — Leibniz-Zentrum für Informatik，2012。 doi:10.4230/LIPIcs.FSTTCS.2012.112。 17 Jakub Gajarský、Stephan Kreutzer、Jaroslav Nešetřil、Patrice Ossona de Mendez、Michał Pilipczuk、Sebastian Siebertz 和 Szymon Toruńczyk. 有界扩张类的一阶解释。《ACM计算逻辑汇刊》，21(4):29:1–29:41，2020。 doi:10.1145/3382093。 18 Jakub Gajarský、Nikolas Mählmann、Rose McCarty、Pierre Ohlmann、Michał Pilipczuk、Wojciech Przybyszewski、Sebastian Siebertz、Marek Sokolowski 和 Szymon Torunczyk. 单子稳定图类的翻转游戏。CoRR，abs/2301.13735，2023。 arXiv:2301.13735, doi:10.48550/arXiv.2301.13735。 19 Robert Ganian、Petr Hliněný、Jaroslav Nešetřil、Jan Obdržálek 和 Patrice Ossona de Mendez. 灌木深度：刻画稠密图的高度。《计算机科学逻辑方法》，15(1)，2019。 doi:10.23638/LMCS-15(1:7)2019。 20 Robert Ganian、Petr Hliněný、Jaroslav Nešetřil、Jan Obdržálek、Patrice Ossona de Mendez 和 Reshma Ramadurai. 树长得矮时：灌木与快速 MSO_1。载于第37届国际计算机科学数学基础研讨会（2012）（MFCS 2012），《计算机科学讲义》第7464卷，第419–430页。Springer，2012。 doi:10.1007/978-3-642-32589-2_38。 21 Martin Grohe、Stephan Kreutzer 和 Sebastian Siebertz. 判定处处稀疏图的一阶性质。《ACM杂志》，64(3):17:1–17:32，2017。 doi:10.1145/3051095。 22 Martin Grohe 和 Daniel Neuen. 有界秩宽图的同构、规范化与可定义性。《ACM通讯》，64(5):98–105，2021。 doi:10.1145/3453943。 23 Martin Grohe 和 Pascal Schweitzer. 有界秩宽图的同构测试。载于IEEE第56届计算机科学基础年会（FOCS 2015），第1010–1029页。IEEE计算机学会，2015。 doi:10.1109/FOCS.2015.66。 24 Wojciech Kazana. 常数延迟查询求值。博士论文，ENS Cachan，2013。 25 Wojciech Kazana 和 Luc Segoufin. 树上的单子二阶查询枚举。《ACM计算逻辑汇刊》，14(4):25:1–25:12，2013。 doi:10.1145/2528928。

26 O-joung Kwon、Rose McCarty、Sang-il Oum 和 Paul Wollan。有界灌木深度与秩深度的障碍。*J. Comb. Theory, Ser. B*，149：76–91，2021。 doi:10.1016/j.jctb.2021.01.005。27 Jaroslav Nešetřil 和 Patrice Ossona de Mendez。稀疏性：图、结构与算法，第 28 卷，算法与组合学。Springer，2012。 doi:10.1007/978-3-642-27875-4。28 A. Pillay。几何稳定性理论。牛津逻辑指南丛书。克拉伦登出版社，1996 年。网址：https://books.google.pl/books?id=k6FK_Gqal2EC。29 Klaus-Peter Podewski 和 Martin Ziegler。稳定图。*Fundamenta Mathematicae*，100(2)：101–107，1978 年。doi:10.4064/fm-100-2-101-107。30 Saharon Shelah。分类理论——以及非同构模型的数量，第 92 卷，逻辑与数学基础研究。北荷兰出版公司，1978 年。31 Katrin Tent 和 Martin Ziegler。模型论课程。逻辑讲义。剑桥大学出版社，2012 年。 doi:10.1017/CBO9781139015417。

引理 14 的证明

现在我们证明引理 14，并为方便起见重述如下。

▶ **引理 14** (源自 [3])。 设 $\mathscr{C}$ 是有界灌木深度图类。那么对于每个图 $G \in \mathscr{C}$ 以及 G 的阶至多为 t 的切分 (P, L)，都存在 $S \subseteq V(G)$，满足 $|S| \leqslant O(t^2)$，使得 (P, L_S) 也是 G 的一个切分。

继续证明之前，我们先回顾一下 [3, 定理 3.5] 的陈述。为此，我们需要两个定义。

▶ **定义 35** (出自 [3])。 设 $E \subseteq A \times B$ 是一个二元关系。若 E 满足以下两种情况之一，则称其具有阶为 k 的对偶性：
– 存在一个大小至多为 k 的集合 $A_0 \subseteq A$，使得对于每个 $b \in B$，都存在某个 $a \in A_0$，满足 $\neg E(a, b)$；或者 – 存在一个大小至多为 k 的集合 $B_0 \subseteq B$，使得对于每个 $a \in A$，都存在某个 $b \in B_0$，满足 $E(a, b)$。

▶ **定义 36.** 固定一个集合 V。若对称函数 $f\colon V \times V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$ 满足三角不等式，则称其为伪度量 。

▶ **定义 37** ([3]) **（定理 3.5）**。固定 r、k、$t \in N$。令 V 为一个有限集，并配备：– 一个二元关系 $E \subseteq V \times V$，使得对于所有 $A \subseteq V$ 和 $B \subseteq V$，$E \cap (A \times B)$ 具有阶为 k 的对偶性，– 一个伪度量 *dist:* $V \times V \to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \cup \{+\infty\}$，– 对 V 的一个划分 L，其中 $|L| \leqslant t$，

使得对于所有满足$\mathrm{dist}(u, v) > r$的 u, v， $E(u, v)$ 仅取决于 u 和 v 在L中的部分。于是存在一个大小为$O(kt^2)$ 的集合 $S \subseteq V$，使得对于所有满足$\mathrm{dist}(u, v) > 5r$的 $u, v \in V$， $E(u, v)$ 仅取决于 $E(u, S)$ 和 $E(S, v)$。

引理 14 的证明。 任取 $G \in \mathscr{C}$ 以及$(\mathcal{P},\mathcal{L})$ 对 G 的一个切分，其 t阶至多为。注意，由于 $\mathscr{C}$ 是单子稳定的（因此特别地具有有界的VC 维数），根据定理 37，存在一个常元 k，仅取决于 $\mathscr{C}$，使得 $E(G)$ 具有 k阶的对偶性。我们可以在 $V(G)$ 上定义如下伪度量：

$$\mathrm{dist}(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{if } u, v \text{ in the same part of } \mathcal{P}; \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

根据定理 37 可知，存在一个集合 $S \subseteq V(G)$，其大小为$\mathcal{O}(t^2)$（其中$\mathcal{O}$ 符号中隐藏的常元仅取决于类 $\mathscr{C}$），使得对于任意 $u, v \in V(G)$，若它们属于$\mathcal{P}$的不同部分，则 $E(u, v)$仅取决于 u 和 v 在 $\mathcal{L}_S$中的部分。◀

B 引理 27 的证明

现在我们证明引理 27，为方便起见，先回顾其内容。

▶ **引理 27** （由以下内容组合得到 [15] 和 [25]）。 设 $\mathscr{C}$ 是一个团宽度有界的彩色图类，$\varphi(\bar{x})$ 是一个公式。对于每个顶点数为 n 的 $G \in \mathscr{C}$，经过 $O(n^2)$ 的预处理后，可以

(i) 枚举 $\varphi(G^{\bar{x}})$，且具有常数延迟；**(ii)** 给定一个元组 $\bar{u} \in G^{\bar{x}}$，
判断 $G \models \varphi(\bar{u})$ 是否成立，并在常数时间内完成。

证明。使用 Fomin 和 Korhonen 的算法 [15], , 在 O(n^2) 时间内，我们可以计算出一个 t 常数宽度的团表达式，用于构造输入图 G。我们可以将t 视为一棵带标记的有根树，其标记来自一个大小为常数的字母表：内部节点标记为所应用的团表达式操作（重标记/连接/并），而每个叶节点都标记为一个二元组，其中包含其在 t 中的初始标记以及其在 G中的颜色。于是，可以直接写出一个 MSO公式 $\alpha(y,z)$，使得当且仅当 u和 v是 t （即 G的顶点）的叶节点，并且 u 和 v 在 G中相邻时， $t \models \alpha(u,v)$成立。令 $\varphi'(\bar{x})$ 表示由 $\varphi(\bar{x})$ 得到的公式：将其中的每个邻接测试 $E(y,z)$ 替换为公式 $\alpha(y,z)$，并进一步规定每个 $x \in \bar{x}$ 都是 t的叶节点。于是，对于任意 $\bar{u} \in G^{\bar{x}}$，当且仅当 $t \models \varphi'(\bar{u})$ 时， $G \models \varphi'(\bar{u})$成立。现在，要得到枚举结论，只需将 Kazana 和 Segoufin [25], 提出的带标记树上的 MSO查询枚举算法应用于 t 和 φ'。类似地，对于查询求值结果，可以使用 [24, 定理 6.13]。◀

C 定理 29 的证明

现在我们证明定理 29，并为方便起见重述如下。

▶ **定理 29** (改编自 [4])。 设 D 是一个有界树深度二元结构类。存在一个定义在 D 上的规范化映射 $\mathfrak{c}$，其计算时间为 $O(n\log^2 n)$，其中 n 是输入结构的论域大小。

我们将使用 Bouland 等人 [4] 观察到的以下结果。（事实上，这一结果直接启发了定理 6，因为它对应于其中的情形 $r = \infty$ 。）

▶ **引理 38 (** [4]的引理 7)。 存在一个可计算函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$，使得在每个树深度为 d 的连通图 G 中，满足树深度严格小于 d 的不同顶点 u 至多有 d 个。

事实上，正如 [4], 中所指出的，引理 38 也可由 Giannopoulou等人 [14], 的一项较早工作推出，而 Chen等人 [8] 最近的一项工作则给出了一个界 $f(d) \in d^{\mathcal{O}(d)}$。

接下来，设（$\mathbf{M} \preccurlyeq_{\mathbf{M}}$）和（$\mathbf{N} \preccurlyeq_{\mathbf{N}}$）是两个有序的 Σ-结构，也就是说，是在论域上配备了序的 Σ-结构。我们可以按字典序比较（$\mathbf{M} \preccurlyeq_{\mathbf{M}}$）和（$\mathbf{N} \preccurlyeq_{\mathbf{N}}$），如下所示:

– 如果 $|\mathbf{M}| \neq |\mathbf{N}|$，那么（$\mathbf{M} \preccurlyeq_{\mathbf{M}}$）小于（$\mathbf{N} \preccurlyeq_{\mathbf{N}}$）当且仅当 $|\mathbf{M}| < |\mathbf{N}|$。– 否则，对每个 $R \in \Sigma$，分别按照 $\preccurlyeq_{\mathbf{M}}$ 将 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 中关系 R 的元组按字典序排序。然后将 $\mathbf{M}$ 中的每个元素替换为其在 $\preccurlyeq_{\mathbf{M}}$ 中的指标，对 $\mathbf{N}$ 也同样处理。比较由此得到的 $\mathbf{M}$ 和 $\mathbf{N}$ 的列表。如果对每个 $R \in \Sigma$，它们都相等，那么（$\mathbf{M} \preccurlyeq_{\mathbf{M}}$）和（$\mathbf{N} \preccurlyeq_{\mathbf{N}}$）同构。否则，列表不同的第一个关系 $R \in \Sigma$ 决定（$\mathbf{M} \preccurlyeq_{\mathbf{M}}$）或（$\mathbf{N} \preccurlyeq_{\mathbf{N}}$）哪一个更小。（这里我们假设 Σ 中的关系名称具有一个固定的序。）

下面的引理可通过直接实现上述比较过程得出。这里，对于一个结构 $\mathbf{M}$，$\|\mathbf{M}\|$ 表示 $|\mathbf{M}|$ 再加上 M 的关系中所有元组的总长度，也就是说，$\|\mathbf{M}\| = |\mathbf{M}| + \sum_{R\in\Sigma}$ 元数$(R) \cdot |R^{\mathbf{M}}|$。

▶ **引理 39**。 设 Σ 是一个固定的签名。那么，给定两个有序结构 $(\mathbf{M} \preccurlyeq_{\mathbf{M}})$和 $(\mathbf{N} \preccurlyeq_{\mathbf{N}})$，可以在 $O(n \log n)$ 时间内判定它们是否同构，或者判定哪一个按字典序小于另一个，其中 $n = k\mathbf{M}k + k\mathbf{N}k$。

最后，下面的引理很容易证明。

▶ **引理 40**。 如果一个 Σ-结构 $\mathbf{M}$ 的树深度至多为 d，那么对于某个可计算函数，$k\mathbf{M}k \leqslant g(\Sigma, d) \cdot |\mathbf{M}|$ g。

证明。令 F 为 M 的一棵深度至多为 d的消除森林，即定义在 M 的论域上的一片有根森林，使得对于 M 的 Gaifman 图中的每条边 uv， u 和 v 在 M 中处于祖先/后代关系。因此，对于 M 中任一关系里的任一元组 $\bar{u}$， $\bar{u}$ 中出现的元素都位于 F中的同一条根到叶路径上。因此，只需指定 $\bar{u}$中出现的最深元素、该元素在元组 $\bar{u}$中的位置，以及 $\bar{u}$中所有其他元素在 F中的深度，即可唯一描述 $\bar{u}$。这种形式的描述至多有 $|\mathbf{M}| \cdot k \cdot d^{k-1}$个，其中 k 是 $\bar{u}$ 的元数；对 Σ 中的所有关系将这些界相加，即可得到所需结果。◀

准备好所有工具后，我们现在可以开始证明定理 29。

定理 29 的证明。对 d 使用归纳法，我们证明以下命题：对于每个有限签名 Σ 和 $d \in \mathbb{N}$，存在一个典范映射 $\mathfrak{c}_{\Sigma,d}$，适用于所有树深度至多为 d 的 Σ-结构组成的类，并且可以在 $g(\Sigma, d) \cdot n \log^2 n$ 时间内计算，其中 g 是某个可计算函数。对于 $d = 0$，该类可能只包含空结构，因此结论显然成立。

于是，设 M 是一个 Σ-结构，其 Gaifman 图 G 的树深度至多为 d。我们可以假设 G 是连通的；如果 G 不连通，则可以如下处理：– 对 G的每个连通分量 C，应用针对连通图的论证，从而得到一个排序 $\mathfrak{c}_{\Sigma,d}(C)$。– 先按元素数量对得到的有序结构 $(C, \mathfrak{c}_{\Sigma,d}(C))$ 排序，再按字典序排序。

注意，若用 $p \leqslant n$ by m_p 表示具有 $|C| = p$的连通分量 C 的数量，则使用归并排序等方法对这些连通分量进行排序所需的时间为 C

$$g(\Sigma, d) \cdot m_p \log m_p \cdot p \log p \leqslant g(\Sigma, d) \cdot m_p p \log^2 n$$

对于某个可计算的 g，这由引理 39 和引理 40 得出。对所有相关的 p求和后，该过程所需时间为 $g(\Sigma, d) \cdot n \log^2 n$。

假设 G 是连通的后，定义

$$X = \{u \in V(G) \colon \operatorname{treedepth}(G - u) < \operatorname{treedepth}(G)\}.$$

根据引理 38，对于某个可计算的 f，有 $|X| \leqslant f(d)$。注意到，每个有界树深度类都可以用一阶逻辑定义（例如，利用推论 20），因此我们可以写出一个一阶公式 $\varphi(x)$，恰好选出 X的顶点。应用 Kazana 和 Segoufin [25], 提出的、针对有界树宽结构上的 MSO_2 查询的枚举算法，我们可以在 $h(\Sigma, d) \cdot n$ 时间内计算 X，其中 h是一个可计算函数。

对于每个关系 $R \in \Sigma$（元数为 k），以及偏函数 $\eta \colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, |X|\}$，引入一个元数为 $k - |\operatorname{dom} \eta|$ 的关系名称 R_η，其中 dom η 表示 η 的论域。令 Σ' 为由所有这些关系名称组成的签名。接下来，对于每个双射 $\sigma \colon \{1, 2, \ldots, |X|\} \to X$，我们如下定义一个新的 Σ'-结构 $\mathbf{M}_\sigma$：

– $\mathbf{M}_\sigma$ 的论域为 $V(G) - X$。– 对于每个关系 $R \in \Sigma$（元数为 k），以及偏函数 $\eta \colon \{1, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, |X|\}$，我们将 R_η 在 $\mathbf{M}_\sigma$ 中解释为所有元组 $(a_1, \ldots, a_{k'}) \in (V(G) - X)^{k'}$ 的集合，其中 $\mathbf{M} \models R(b_1, \ldots, b_k)$，其中 $k' = k - |\operatorname{dom} \eta|$，若 $i \in \operatorname{dom} \eta$，则 $b_i = \sigma(\eta(i))$；否则为 $b_i = a_{\iota(i)}$，其中 ι 是从 $\{1, \ldots, k\} - \operatorname{dom} \eta$ 到 $\{1, \ldots, k'\}$ 的保序双射。

注意，这给出了 $|X|! \leqslant f(d)!$ Σ'-结构 $\mathbf{M}_\sigma$；并且，得益于引理 40，每个结构都可以在 $h(\Sigma, d) \cdot n$ 时间内计算出来，其中 h 是可计算的。此外，每个结构 $\mathbf{M}_\sigma$ 的树深度至多为 $d - 1$。

现在，我们可以应用归纳法给出的算法，为上述每个排列 σ 计算一个排序 $\preccurlyeq_\sigma = \mathfrak{c}_{\Sigma',\, d-1}(\mathbf{M}\sigma)$。令 $\preccurlyeq'_\sigma$ 由 $\preccurlyeq_\sigma$ 得到，方法是按顺序 σ 将 X 的顶点前置。注意，所得的有序结构集合

$$\{(\mathbf{M}, \preccurlyeq'_\sigma) \colon \sigma \colon \{1, 2, \ldots, |X|\} \to X \text{ is a bijection}\}$$

是同构不变的。因此，我们可以将 $\mathfrak{c}_{\Sigma,\, d}(G)$ 设为满足结构 $(\mathbf{M} \preccurlyeq_{\sigma'})$ 在上述结构中按字典序最小的阶 $\preccurlyeq_{\sigma'}$，其中我们使用引理 39 的算法来比较这些结构。

关于时间复杂度，上述算法至多调用 $f(d)!$ 次用于计算 $\mathfrak{c}_{\Sigma',\, d-1}$ 的算法。因此，递归层数至多为 d，且每一层所做的总工作为 $h(\Sigma,\ d) \cdot n\log^2 n$，其中 h 是一个可计算函数。由此可知，整个算法的运行时间为 $g(\Sigma,\ d) \cdot n\log^2 n$，其中 g 是一个可计算函数。◀