arXiv:2303.01489v3 [math.AP] 5 Sep 2023

含不遵从行为的反应扩散 SIR 流行病模型分析

Christian Parkinson[1] 和 Weinan Wang[2]

摘要。 公共卫生专家近期的研究表明，要忠实地模拟流行病，纳入人类行为至关重要。我们提出一种用于描述流行病并考虑行为因素的反应扩散偏微分方程 SIR 型人口模型。在我们的模型中，疾病通过质量作用传播，这与仓室模型中的常见做法一致。然而，借鉴社会传染理论，我们假设随着疾病传播和预防措施的实施，不遵从预防措施的行为也会在人口中蔓延。我们证明了该模型经典解的整体存在性，随后进行 $\mathcal{R}_0$ 型分析，并确定模型在不同参数范围内的渐近行为。最后，我们对模型进行模拟，并讨论使其有别于基本 SIR 型模型的新特点。

关键词。 反应扩散方程；SIR；流行病模型；人类行为；不遵从

MSC 代码 35K55, 35K57, 92D30

1 引言

在新冠肺炎疫情初期，许多国家实施了干预方法，试图减缓疾病的传播。在没有疫苗的情况下，常见的干预策略包括强制保持社交距离、佩戴口罩和自我隔离。然而，公共卫生专家的研究表明，相当一部分人口可能不会遵从此类预防措施，而且这种不遵从会影响疾病的传播 [36,20, 13, 7, 27]。因此，近期人们开始关注将人类行为以及对政府干预的不遵从纳入流行病学数学模型中 [8, 28, 12, 16, 33]。

社会传染理论假设，行为、态度、情绪和心理状态能够在社会群体中传播，其方式类似于疾病的传播 [14, 9, 21]。除此之外，社会传染理论还被用于模拟青少年性行为[32], 非法药物使用 [1], 抑郁症 [11, 4],以及暴力犯罪 [23]。

受社会传染理论的启发， [8] 的作者提出了一种 SIR 型常微分方程流行病模型。在该模型中，政府规程得到实施，但与此同时，不遵从行为也作为一种平行的疾病不断演化。本文提出了一种采用反应扩散偏微分方程的类似模型。已有多位作者分析了基本常微分方程流行病模型的扩散扩展 [37, 15, 22, 6, 10]。然而，据作者所知，这些研究均未尝试纳入人类行为的影响。

一个基本的反应扩散流行病模型考虑三个亚群体：易感人群（S）、感染或具有传染性的人群（I），以及康复或移除人群（R）。这些人群在一个具有 Lipschitz边界的开、有界、连通区域$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 中演化

[1]数学系，亚利桑那大学，北圣丽塔大道617号，图森，亚利桑那州，85741（chparkin@math.arizona.edu）[2] 数学系，俄克拉何马大学，榆树大道601号，诺曼，俄克拉何马州，73019（ww@ou.edu）

（通常为 $n=2$，不过这对分析通常并不重要）。我们假设有常数出生率 $b \in C(\Omega)$ 补充到易感人群中，且死亡人数与人口规模成正比，死亡率为 $\delta > 0$。最后，若人群以常数速率 d_S扩散 d_I扩散 $d_R > 0$，且感染通过非线性质量作用项传播，则可得到如下简单的反应扩散流行病模型：

$$\begin{aligned}(\partial_t - d_S\Delta)S &= b(x) - \beta SI - \delta S,\\ (\partial_t - d_I\Delta)I &= \beta SI - (\gamma+\delta)I, \qquad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)\\ (\partial_t - d_R\Delta)R &= \gamma I - \delta R,\end{aligned} \tag{1}$$

其中，$\beta > 0$ 为感染率，$\gamma > 0$ 为康复率。通常还需配合零通量边界条件

$$\nabla S \cdot n = \nabla I \cdot n = \nabla R \cdot n = 0, \quad \text{for } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \tag{2}$$

以及非负初始条件 $S(\cdot,\ 0) = S_0,\ I(\cdot,\ 0) = I_0,\ R(\cdot,\ 0) = R_0$ 其中 $S_0,\ I_0,\ R_0 \in C(\Omega)$。

我们在（1）的基础上，假设已经采取预防措施以减缓疾病的传播，并纳入人群 $S^*,\ I^*,\ R^*$ 这些人群由不遵从相关措施者组成。下文中，星号表示不遵从预防措施，而不带星号的人群 $S,\ I,\ R$ 表示合规人群。特别地，我们令 $N^* = S^* + I^* + R^*$ 表示不遵从人群的总数。在合规人群中，我们将传染性降低至原来的 $\alpha \in [0,1]$。同样，感染通过非线性质量作用项传播；但为体现传染性的降低，在所有此类项中，S 和 I 分别替换为 $(1-\alpha)S$和 $(1-\alpha)I$。将不遵从视为一种社会传染，我们加入额外的质量作用项，以促进从合规行为向不遵从行为的转变，其“传染性”率为 $\mu > 0$。同样，我们假设不遵从人群以与相关人群规模成比例的速率 $\nu \geq 0$. 转变为合规人群。在这些假设下，我们提出如下模型

$$\begin{aligned}(\partial_t - d_S\Delta)S &= \xi b(x) - \beta(1-\alpha)S((1-\alpha)I + I^*) - \mu S N^* + \nu S^* - \delta S,\\ (\partial_t - d_I\Delta)I &= \beta(1-\alpha)S((1-\alpha)I + I^*) - \gamma I - \mu I N^* + \nu I^* - \delta I,\\ (\partial_t - d_R\Delta)R &= \gamma I - \mu R N^* + \nu R^* - \delta R,\\ (\partial_t - d_{S^*}\Delta)S^* &= (1-\xi)b(x) - \beta S^*((1-\alpha)I + I^*) + \mu S N^* - \nu S^* - \delta S^*,\\ (\partial_t - d_{I^*}\Delta)I^* &= \beta S^*((1-\alpha)I + I^*) - \gamma I^* + \mu I N^* - \nu I^* - \delta I^*,\\ (\partial_t - d_{R^*}\Delta)R^* &= \gamma I^* + \mu R N^* - \nu R^* - \delta R^*,\end{aligned} \tag{3}$$

其中，再次说明，$N^* = S^* + I^* + R^*$ 为不遵从人群总数。最后一个参数是 $\xi \in [0,1]$: 新引入的易感人群中合规者所占的比例。对于下文的若干结果，我们将关注 $\xi = 1$ 或 $\xi = 0$ 的情形，此时分别为所有新生个体均合规或所有新生个体均不遵从。与基本模型一样，我们考虑零通量边界条件和连续初始数据。本文致力于分析不同参数范围下的（3）。为使分析更具背景，我们简要提及有关（1）的结果。

本文其余部分安排如下。第2节介绍预备知识和符号。第3节陈述关于解的整体存在性的主要结果。第4节研究基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 及其与模型渐近行为的关系。第5节展示并讨论模型的一些模拟。最后，我们简要讨论研究结果，并展望第6节中的未来工作。

2 预备知识

本节将证明一些基本结果，并建立若干有助于后续研究的引理。

在上述假设下（具体而言，Ω 是具有 Lipschitz边界的开、有界、连通区域，并满足零通量边界条件），只要经典解存在，就可以很容易地得到总人口的上界。事实上，对于 (1)，我们定义

$$N_{\text{total}}(t) = \int_\Omega (S(x,t) + I(x,t) + R(x,t))dx \tag{4}$$

或者对于 (3)，我们定义

$$N_{\text{total}}(t) = \int_\Omega (S(x,t) + I(x,t) + R(x,t) + S^*(x,t) + I^*(x,t) + R^*(x,t))dx. \tag{5}$$

在这两种情况下，都可以验证

$$N'_{\text{total}}(t) = \|b\|_{L^1(\Omega)} - \delta N_{\text{total}}(t),$$

于是

$$N_{\text{total}}(t) \le N_{\text{total}}(0)e^{-\delta t} + \frac{\|b\|_{L^1(\Omega)}}{\delta}, \quad t \ge 0. \tag{6}$$

正如我们很快将看到的，在给定非负初始条件的情况下，只要这些人群存在，它们就保持非负，因此这就给出了总人口的上界：所有组分之和的 L^1 范数。这将在第4节的 4.2 节中发挥作用。然而，为了建立整体存在性，我们需要更强的 L^∞ 上界。

假设初始剖面连续，由于非线性项是局部利普希茨的，根据 [35, 定理 11.12]，方程 (1) 和 (3) 的局部存在性以及解的连续性成立。我们使用一些引理来证明，只要解存在且保持非负，它们就保持有界。这足以保证整体存在性（例如，参见 [29, 引理 1.1]）。

引理2.1。 设 $d > 0$ 和 $u \in C$（$[0,T]$; $C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$）满足

$$\begin{aligned} \partial_t u - d\Delta u &= f(x,t,u) \ge 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) &= u_0(x) \ge 0, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{7}$$

零通量边界条件。则对于所有（x,t）$\in \Omega \times [0,T]$.，有 u（x,t）≥ 0

证明。 由于零函数是下解，该引理直接由比较原理得出。

□

引理 2.2。 设 $u \in C$（$[0,T]$; $C^2(\Omega) \cap C(\Omega)$）满足

$$\begin{aligned} \partial_t u - d\Delta u &\le f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{8}$$

那么，对于任意的 $t \ge 0$,

$$\|u(t)\|_\infty \le \|u_0\|_\infty + \int_0^t \|f(s)\|_\infty ds,$$

其中 $\|u(t)\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x,t)|$.

证明。 定义 $v(x,t) = \|u_0\|_\infty + \int_0^t \|f(s)\|_\infty ds - u(x,t)$。则

$$v_t - d\Delta v = \|f(t)\|_\infty - (u_t - d\Delta u) \geq 0$$

并且 $v(x,\ 0) = \|u_0\|_\infty - u_0(x) \geq 0$ 因此应用引理2.1可知， v 是非负的，结论得证。

□

仅凭这些，我们就可以建立方程（1）的全局时间存在性。这是一个经典结果。我们重复给出证明，因为证明相当简短，也能凸显证明方程（3）的整体存在性所面临的相对困难。

论证的基本思路如下。令 T^* 为所有使得方程（1）的经典解存在于 $[0,\tau)$上的 $\tau > 0$ 的上确界。首先注意到，由于初始数据 S_0， I_0， R_0 是非负函数，只要解存在，解就保持非负。这是由右端项的拟正性以及比较原理得出的，正如 [18, 定理 11，第 29]页中所述。因此，根据 [29, 引理 1.1], ，为了证明整体存在性（即证明 $T^* = +\infty$），只需证明：如果 $T^* < \infty$， 那么 $\|S(t)\|_\infty$， $\|I(t)\|_\infty$， $\|R(t)\|_\infty$ 在 $[0,T^*$中有界。我们将在下一个定理中证明这一点。

定理 *2.3.* 假设 $S(\cdot,t)$ $I(\cdot,t)$ $R(\cdot,t)$ 是方程 *(1)* 在 $[0,T^*)$ 上的经典解，且具有非负初始数据 $S_0, I_0, R_0 \in L^\infty(\Omega)$。若 T^* 有限，则存在一个常数 $M > 0$（取决于 T^*），使得 $\|S(t)\|_\infty, \|I(t)\|_\infty, \|R(t)\|_\infty \leq M$ 对于 $t \in [0,T^*)$ 成立。

证明。 如上所述，只要解存在，它就保持非负。特别地，这意味着

$$(\partial_t - d_S\Delta)S \leq b(x),$$

于是，由引理 2.2 立即可得

$$\|S(t)\|_\infty \leq \|S_0\|_\infty + T^*\|b\|_{L^\infty(\Omega)} := M_S, \quad t \in [0,T^*).$$

接下来，在 I 方程中使用积分因子，可得

$$\partial_t\big(e^{(\gamma+\delta)t}I\big) - d_I\Delta\big(e^{(\gamma+\delta)t}I\big) = \beta S\big(e^{(\gamma+\delta)t}I\big) \leq \beta M_S\big(e^{(\gamma+\delta)t}I\big).$$

因此，由引理 2.2 可得，

$$e^{(\gamma+\delta)t}\|I(t)\|_\infty \leq \|I_0\|_\infty + \beta M_S\int_0^t e^{(\gamma+\delta)s}\|I(s)\|_\infty ds.$$

由格朗沃尔不等式，我们得出

$$e^{(\gamma+\delta)t}\|I(t)\|_\infty \leq \|I_0\|e^{\beta M_S t} \quad \Longrightarrow \quad \|I(t)\|_\infty \leq \|I_0\|e^{\beta M_S T^*} := M_I, \quad t \in [0,T^*).$$

最后，

$$(\partial_t - d_R\Delta)R = \gamma I \leq \gamma M_I$$

因此，由引理 2 可得

$$\|R(t)\|_\infty \leq \|R_0\|_\infty + \int_0^t \gamma M_I ds \leq \|R_0\|_\infty + \gamma M_I T^* := M_R, \quad t \in [0,T^*).$$

因此，定理对 $M = \max\{M_S, M_I, M_R\}$ 成立。 □

至此，我们开始分析方程 (3)，旨在于后续各节证明其全局时间存在性和长时间渐近行为。

3 整体存在性

本节将证明方程 (3) 的整体存在性。重申以上讨论中的几点：由于初始数据的每一部分均为非负且连续，且非线性项局部利普希茨，因此局部存在性成立。请注意，非线性项仍然是拟正的，所以只要解存在，非负性就得以保持。方程 (6) 还给出了方程 (3) 的总人口上界。

根据这些说明，如果扩散系数不依赖于依从/不依从状态，那么方程 (3) 的整体存在性证明会简单得多。在这种情况下，我们可以轻松改编定理 2.3 的证明。

定理 *3.1.* 假设 $S(\cdot,t)$ $I(\cdot,t)$ $R(\cdot,t)$ $S^*(\cdot,t)$ $I^*(\cdot,t)$ $R^*(\cdot,t)$ 是方程 *(3)* 在 $[0,T^*)$ 上的经典解，具有非负初始数据 $S_0, I_0, R_0, S_0^*, I_0^*, R_0^* \in L^\infty(\Omega)$，且 $d_S = d_{S^*}, d_I = d_{I^*}$ 和 $d_R = d_{R^*}$。如果 T^* 有限，则存在一个常数 $M > 0$（取决于 T^*），使得

$$\|S(t)\|_\infty, \|I(t)\|_\infty, \|R(t)\|_\infty, \|S^*(t)\|_\infty, \|I^*(t)\|_\infty, \|R^*(t)\|_\infty \le M$$

对于 $t \in [0, T^*)$。

证明。由于 $d_X = d_{X^*}$ 对于 $X \in \{S, I, R\}$，我们省略扩散系数中的星号。由于非负性得以保持，我们有

$$0 \le S, S^* \le S + S^*, \quad 0 \le I, I^* \le I + I^*, \quad 0 \le R, R^* \le R + R^*.$$

因此，只需证明

$$\Sigma = S + S^*, \quad \Phi = I + I^*, \quad \Upsilon = R + R^*$$

保持有界。由于扩散系数相同，我们可以将方程 (3) 的第一式和第四式相加，得到

$$(\partial_t - d_S\Delta)\Sigma = b(x) - \beta((1-\alpha)S + S^*)((1-\alpha)I + I^*) - \delta\Sigma \le b(x) - \delta\Sigma.$$

利用积分因子，我们有

$$(\partial_t - d_S\Delta)(e^{\delta t}\Sigma) \le b(x)e^{\delta t}$$

因此，根据引理 2.2,

$$e^{\delta t}\|\Sigma(t)\|_\infty \le \|\Sigma_0\|_\infty + \int_0^t \|b\|_\infty e^{\delta s} ds \le \|S_0\|_\infty + \|S_0^*\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty}{\delta}(e^{\delta t} - 1)$$

因此

$$\|\Sigma(t)\|_\infty \le \|S_0\|_\infty + \|S_0^*\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty}{\delta}(1 - e^{-\delta t}) \le \|S_0\|_\infty + \|S_0^*\|_\infty + \frac{\|b\|_\infty}{\delta} := M_\Sigma.$$

这为 Σ 提供了一个实际上与 T^*无关的上界。接下来，将方程 (3) 中的第二个方程和第五个方程相加，得到

$$\begin{aligned}(\partial_t - d_I\Delta)\Phi &= \beta((1-\alpha)S + S^*)((1-\alpha)I + I^*) - \gamma\Phi - \delta\Phi \\ &\le \beta\Sigma\Phi - (\gamma + \delta)\Phi \\ &\le (\beta M_\Sigma - (\gamma + \delta))\Phi.\end{aligned}$$

由此可得

$$(\partial_t - d_I\Delta)(\Phi e^{((\gamma+\delta)-\beta M_\Sigma)t}) \le 0$$

因此，根据引理 2.2,

$$e^{((\gamma+\delta)-\beta M_\Sigma)t}\|\Phi(t)\|_\infty \le \|\Phi_0\|_\infty \le \|I_0\|_\infty + \|I_0^*\|_\infty$$

从而

$$\|\Phi(t)\|_\infty \le (\|I_0\|_\infty + \|I_0^*\|_\infty)\max\{1, e^{(\beta M_\Sigma-(\gamma+\delta))T^*}\} := M_\Phi.$$

最后，将 (3) 中的第三个和第六个方程相加，得到

$$(\partial_t - d_R\Delta)\Upsilon = \gamma\Phi - \delta\Upsilon$$

因此

$$(\partial_t - d_R\Delta)(\Upsilon e^{\delta t}) = \gamma\Phi e^{\delta t} \le \gamma M_\Phi e^{\delta t}$$

由此可得

$$e^{\delta t}\|\Upsilon(t)\|_\infty \le \|\Upsilon_0\|_\infty + \gamma M_\Phi \int_0^t e^{\delta s}ds \le \|R_0\|_\infty + \|R_0^*\|_\infty + \frac{\gamma M_\Phi}{\delta}(e^{\delta t} - 1)$$

于是

$$\|\Upsilon(t)\|_\infty \le \|R_0\|_\infty + \|R_0^*\|_\infty + \frac{\gamma M_\Phi}{\delta} := M_\Upsilon.$$

这就证明了带有 $M = \max\{M_\Sigma, M_\Phi, M_\Upsilon\}$ 的定理。 □

我们加入上述结果只是为了强调，在某些情况下，由(3)描述的实际流行病的行为应当与(1)的行为有些相似，前提是在相应模型中满足对应关系（Σ, Φ, Υ）$\leftrightarrow$（S, I, R）。当所有扩散系数都不同时，我们仍然可以获得整体存在性，尽管证明不再那么初等，因为我们不能再简单地将方程相加，以消去描述不依从行为传播的第二个质量作用非线性项。为了在任意正扩散系数下建立整体存在性，我们首先再证明两个引理，其中第一个是引理 2.2 的 L^p 版本。

引理 3.2. 取定 $f: \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$，并假设 $v: \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ 是一个解 *of*

$$(\partial_t - d\Delta)v = f \tag{9}$$

对于$(x,t) \in \Omega \times (0,T]$，初始数据为 $v(\cdot,0) = v_0 \in L^\infty(\Omega)$ 且 $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ 在 $\partial\Omega \times [0,T]$上。那么对于任意 $p \in (1,\infty)$ 和 $t \in (0,T]$,

$$\|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \le \|v_0\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^p(\Omega)}d\tau.$$

证明。 通过初等的先验上界即可证明。我们将方程乘以 $p|v|^{p-2}v$，在空间上积分，并利用 Hölder 不等式，得到

$$\int_\Omega (\partial_t(|v|^p) - dp|v|^{p-2}v\Delta v)dx = p\int_\Omega |v|^{p-2}vfdx \le p\|v(t)\|_{L^p(\Omega)}^{p/q}\|f(t)\|_{L^p(\Omega)}, \tag{10}$$

其中 q 是 p的共轭指数。在左端，我们对后一项分部积分（并使用零通量边界条件），得到

$$\int_\Omega -|v|^{p-2}v\Delta v dx = (p-1)\int_\Omega |\nabla v|^2 |v|^{p-2} dx \geq 0.$$

因此，令 $G(t) = \|v(t)\|^p_{L^p(\Omega)}$，方程 (10) 可写为

$$G'(t) \leq p\|f(t)\|_{L^p(\Omega)} G(t)^{1/q} \quad \Longrightarrow \quad G(t)^{-1/q}G'(t) \leq p\|f(t)\|_{L^p(\Omega)}.$$

积分得

$$\frac{1}{1-\frac{1}{q}}(G(t)^{1-1/q} - G(0)^{1-1/q}) \leq p\int_0^t \|f(\tau)\|_{L^p(\Omega)} d\tau,$$

又由于 $1-\frac{1}{q} = \frac{1}{p}$，-可得

$$\|v(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|v_0\|_{L^p(\Omega)} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^p(\Omega)} d\tau$$

如所求。 □

引理 3.3. 设 $v, w : \Omega \times [0,T] \to \mathbb{R}$ 满足

$$(\partial_t - d\Delta)v \leq c_1\partial_t w + c_2\Delta w \tag{11}$$

对于 $(x,t) \in \Omega \times (0,T]$，并且 v, w 具有相同的有界初始数据，且各自满足齐次诺伊曼边界条件。则对于任意 $p \in (1,\infty)$，存在 $C > 0$，使得对所有 $t \in (0,T]$，

$$\|v\|_{L^p(\Omega_t)} \leq C(1 + \|w\|_{L^p(\Omega_t)}),$$

其中 $\Omega_t = \Omega \times [0,t)$，且 C 取决于环境参数以及初始数据。

注。 引理 3.3 是一个关键引理。粗略地说，对于满足反应扩散方程的函数，该引理使我们能够在保持对函数的 L^p 控制的同时修改扩散系数。

证明。 证明利用对偶性。固定 $p \in (1,\infty)$ 和 $t \in (0,T]$，并令 q 为 p的共轭指数。对于任意非负的 $g \in C^\infty(\Omega_t)$，令 ϕ 为以下方程的非负光滑解

$$-(\partial_t + d\Delta)\phi = g,$$

在 $\Omega \times [0,t)$ 上，满足 $\phi(\cdot,t) = 0$且在 $\partial\Omega$. 根据线性抛物方程理论（见 [17, 19, 40]），以下结论是经典的

$$\|\partial_t\phi\|_{L^q(\Omega_t)} + \|\Delta\phi\|_{L^q(\Omega_t)} + \sup_{s\in[0,t)} \|\phi(s)\|_{L^q(\Omega)} \leq C\|g\|_{L^q(\Omega_t)}.$$

将（11）乘以 ϕ 并积分可得

$$\int_{\Omega_t} v(\underbrace{-\partial_t\phi - d\Delta\phi}_{=g})\, dxdt + -\int_\Omega \phi_0 v_0 dx \leq \int_{\Omega_t} w(-c_1\partial_t\phi + c_2\Delta\phi)\, dxdt + c_1\int_\Omega \phi_0 w_0 dx,$$

其中，由于齐次 Neumann 边界数据，边界项消失，并且我们使用了 $\phi(\cdot,\ t) = 0$。由于 v，w 的初始数据相同，我们将这些项合并，得到

$$\int_{\Omega_t} vg\,dxdt \le \int_{\Omega_t} w(-c_1\partial_t\phi + c_2\Delta\phi)\,dxdt + (c_1-1)\int_{\Omega}\phi_0 v_0 dx.$$

然后应用 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\left|\int_{\Omega_t} vg\,dxdt\right| &\le \|w\|_{L^p(\Omega_t)}\left(c_1\|\partial_t\phi\|_{L^q(\Omega_t)} + c_2\|\Delta\phi\|_{L^q(\Omega_t)}\right) + C\|w_0\|_{L^p(\Omega)}\|\phi_0\|_{L^1(\Omega)}\\ &\le C(1+\|w\|_{L^p(\Omega_t)})\left(c_1\|\partial_t\phi\|_{L^q(\Omega_t)} + c_2\|\Delta\phi\|_{L^q(\Omega_t)} + \sup_{s\in[0,t)]}\|\phi(s)\|_{L^q(\Omega)}\right)\\ &\le C(1+\|w\|_{L^p(\Omega_t)})\|g\|_{L^q(\Omega_t)}\end{aligned}$$

由于这对所有 $g \in C^\infty(\Omega)$，都成立，我们得出

$$\|v\|_{L^p(\Omega_t)} \le C(1+\|w\|_{L^p(\Omega_t)})$$

如所需。 □

利用这些引理，我们首先证明只要解 $(S,\ I,\ R,\ S^*,\ I^*,\ R^*)$ 存在，它就具有 L^p 有界性。尽管该定理并未证明整体存在性，但证明整体存在性的大部分工作已包含在该定理的证明中。

定理 3.4. 设 S, I, R, S^*, I^*, R^* 是 (3) 在 $\Omega \times [0,T^*)$ 上的经典解，且具有非负初始数据 $S_0, S_0^*, I_0, I_0^*, R_0, R_0^* \in C(\Omega)$，并设 $\Omega_t = \Omega \times [0,t)$。若 T^* 有限，则对任意 $p \in (1,\ \infty)$，存在 $M > 0$，使得对所有 $t \in [0,T^*)$，

$$\|S\|_{L^p(\Omega_t)}, \|I\|_{L^p(\Omega_t)}, \|R\|_{L^p(\Omega_t)}, \|S^*\|_{L^p(\Omega_t)}, \|I^*\|_{L^p(\Omega_t)}, \|R^*\|_{L^p(\Omega_t)} \le M.$$

证明。固定 $p \in (1,\infty)$ 和 $t \in [0,T^*)$。在证明过程中，我们将为 $X \in \{S, I, R, S^*, I^*, R^*\}$ 构造辅助函数 z_X。对于所有这类函数，我们假设齐次初始数据 $z_X(\cdot,0) = 0$ 以及零通量边界数据。此外，C 将是一个正数常量，其值会随推导而变化，并取决于包括 T^* 在内的数据。

设 z_S 是以下方程的解

$$(\partial_t - d_S\Delta)z_S = \xi b(x) + \nu S^*.$$

注意到

$$(\partial_t - d_S\Delta)(S - z_S) = -\beta(1-\alpha)S((1-\alpha)I + I^*) - \mu S N^* - \delta S^* \le 0$$

由此，引理 3.2 得出

$$\|S(t) - z_S(t)\|_{L^p(\Omega)} \le \|S_0\|_{L^p(\Omega)} \quad\Longrightarrow\quad \|S(t)\|_{L^p(\Omega)} \le C(1+\|z_S(t)\|_{L^p(\Omega)}).$$

取 p^{th} 次幂并对时间积分，得到

$$\|S\|^p_{L^p(\Omega_t)} \le C(1+\|z_S\|^p_{L^p(\Omega_t)}). \tag{12}$$

现在令 z_I 为以下方程的解

$$(\partial_t - d_I\Delta)z_I = \xi b(x) + \nu S^* + \nu I^*.$$

Then

$$(\partial_t - d_S)S + (\partial_t - d_I\Delta)(I - z_I) = -\mu(S+I)N^* - \gamma I - \delta(S+I) \le 0$$

使得

$$(\partial_t - d_I\Delta)(I - z_I) \le -(\partial_t - d_S\Delta)S.$$

因此，应用引理 3.3，可得

$$\|I - z_I\|_{L^p(\Omega_t)} \le C(1 + \|S\|_{L^p(\Omega_t)})$$

于是，由 (12) 得

$$\|I\|^p_{L^p(\Omega_t)} \le C(1 + \|z_S\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_I\|^p_{L^p(\Omega_t)}). \tag{13}$$

接下来，令 z_R 为下列方程的解

$$(\partial_t - d_R\Delta)z_R = \xi b(x) + \nu S^* + \nu I^* + \nu R^*.$$

Then

$$(\partial_t - d_S\Delta)S + (\partial_t - d_I\Delta)I + (\partial_t - d_R\Delta)(R - z_R) = -\mu(S+I+R)N^* - \delta(S+I+R) \le 0$$

因此

$$(\partial_t - d_R\Delta)(R - z_R) \le -(\partial_t - d_S\Delta)S - (\partial_t - d_I\Delta)I.$$

由此，对引理 3.3 作显然的推广（允许右端包含多个函数），可得

$$\|R - z_R\|_{L^p(\Omega_t)} \le C(1 + \|S\|_{L^p(\Omega_t)} + \|I\|_{L^p(\Omega_t)}).$$

于是，由 (12) 和 (13) 得

$$\|R\|^p_{L^p(\Omega_t)} \le C(1 + \|z_S\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_I\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_R\|^p_{L^p(\Omega_t)}). \tag{14}$$

继续，定义 z_{S^*} 为如下方程的解

$$(\partial_t - d_{S^*}\Delta)z_{S^*} = b(x) + \nu I^* + \nu R^*.$$

Then

$$\begin{aligned}(\partial_t - d_S)S + &(\partial_t - d_I\Delta)I + (\partial_t - d_R\Delta)R + (\partial_t - d_{S^*}\Delta)(S^* - z_{S^*}) \\ &= -\beta S^*((1-\alpha)I + I^*) - \mu(I+R)N^* - \delta(S+I+R) \le 0.\end{aligned}$$

Thus

$$(\partial_t - d_{S^*}\Delta)(S^* - z_{S^*}) \le -[(\partial_t - d_S\Delta)S + (\partial_t - d_I\Delta)I + (\partial_t - d_R\Delta)R]$$

于是

$$\|S^* - z_{S^*}\|_{L^p(\Omega_t)} \le C(1 + \|S\|_{L^p(\Omega_t)} + \|I\|_{L^p(\Omega_t)} + \|R\|_{L^p(\Omega_t)}).$$

于是方程 (12)-(14) 给出

$$\|S^*\|^p_{L^p(\Omega_t)} \le C(1 + \|z_S\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_I\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_R\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_{S^*}\|^p_{L^p(\Omega_t)}). \tag{15}$$

接下来令 z_{I^*} 求解

$$(\partial_t - d_{I^*}\Delta)z_{I^*} = b(x) + \nu R^*,$$

使得

$$(\partial_t - d_S\Delta)S + (\partial_t - d_I\Delta)I + (\partial_t - d_R\Delta)R + (\partial_t - d_{S^*}\Delta)S^* + (\partial_t - d_{I^*}\Delta)(I^* - z_{I^*})$$
$$= -\mu R N^* - \delta(S + I + R + S^* + I^*) \leq 0.$$

因此，应用引理 3.3 和方程 (12)-(15)，可得

$$\|I^*\|^p_{L^p(\Omega_t)} \leq C(1 + \|z_S\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_I\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_R\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_{S^*}\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_{I^*}\|^p_{L^p(\Omega_t)}). \tag{16}$$

最后，若 z_{R^*} 满足

$$(\partial_t - d_{R^*}\Delta)z_{R^*} = b(x),$$

then

$$\begin{array}{l}(\partial_t - d_S\Delta)S + (\partial_t - d_I\Delta)I + (\partial_t - d_R\Delta)R + \\ (\partial_t - d_{S^*}\Delta)S^* + (\partial_t - d_{I^*}\Delta)I^* + (\partial_t - d_{R^*}\Delta)(R^* - z_{R^*})\end{array} = -\delta(S + I + R + S^* + I^* + R^*) \leq 0,$$

因此，引理 3.3 和方程 (12)-(16) 可得

$$\|R^*\|^p_{L^p(\Omega_t)} \leq C \begin{pmatrix} 1 + \|z_S\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_I\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_R\|^p_{L^p(\Omega_t)} \\ + \|z_{S^*}\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_{I^*}\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_{R^*}\|^p_{L^p(\Omega_t)} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

现在，我们需要通过建立辅助函数 z_X 关于原函数的上界来“闭合循环”。为此，定义

$$Z(t) = \|z_S\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_I\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_R\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_{S^*}\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_{I^*}\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|z_{R^*}\|^p_{L^p(\Omega_t)}$$

and

$$P(t) = \|S\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|I\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|R\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|S^*\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|I^*\|^p_{L^p(\Omega_t)} + \|R^*\|^p_{L^p(\Omega_t)}.$$

那么，方程 (12)-(17) 表明

$$P(t) \leq C(1 + Z(t)). \tag{18}$$

另一方面，每个函数 z_X 都满足如下形式的方程

$$(\partial_t - d_X\Delta)z_X = Cb(x) + \ell(S, I, R, S^*, I^*, R^*)$$

其中，ℓ 是关于（S、I、R、S^*、I^*、R^*）的线性函数。因此，根据引理 3.2，每个 z_X 都满足如下形式的上界

$$\|z_X(t)\|_{L^p(\Omega)} \leq C\Bigg(1 + \int_0^t \big(\|S(\tau)\|_{L^p(\Omega)} + \|I(\tau)\|_{L^p(\Omega)} + \|R(\tau)\|_{L^p(\Omega)}$$
$$+ \|S^*(\tau)\|_{L^p(\Omega)} + \|I^*(\tau)\|_{L^p(\Omega)} + \|R^*(\tau)\|_{L^p(\Omega)}\big)d\tau\Bigg).$$

取 p^{th} 次幂，利用詹森不等式，并对 t 进行积分，可得

$$\|z_X\|_{L^p(\Omega_t)} \leq C\left(1 + \int_0^t P(s)ds\right)$$

将所有这些上界相加，得到

$$Z(t) \leq C\left(1 + \int_0^t P(s)ds\right). \tag{19}$$

将（19）代入（18），可得

$$P(t) \le C\left(1 + \int_0^t P(s)ds\right).$$

最后，应用格朗沃尔不等式可知， $P(t)$保持有界，因此每个 S、I、R、S^*、I^*、R^* 的 p-范数均保持有界。 □

特别指出，该结果对每个 $p \in (1,\infty)$ 均成立。利用这一点以及抛物正则性的经典结果，我们可以借助索伯列夫嵌入定理证明方程 (3) 的解具有有界性。

定理 *3.5.* 假设 $S(\cdot,t)$ $I(\cdot,t)$ $R(\cdot,t)$ $S^*(\cdot,t)$ $I^*(\cdot,t)$ $R^*(\cdot,t)$ 是 *(3)* 在 $[0,T^*)$ 上的经典解，且初始数据 $S_0, I_0, R_0, S_0^*, I_0^*, R_0^* \in C(\Omega)$ 非负。若 T^* 有限，则存在一个常数 $M > 0$ （取决于 T^*），使得

$$\|S\|_{L^\infty(\Omega_t)}, \|I\|_{L^\infty(\Omega_t)}, \|R\|_{L^\infty(\Omega_t)}, \|S^*\|_{L^\infty(\Omega_t)}, \|I^*\|_{L^\infty(\Omega_t)}, \|R^*\|_{L^\infty(\Omega_t)} \le M$$

对所有 $t \in [0,T^*)$ 均成立。特别地，这意味着 (3) 的经典解整体存在。

证明。 利用抛物正则性方面的结果（参见 [17, 第 2 章，第 4], [19, 第 4 章，第 9], [40,第 9 章，第 2] 节），对于任意 $X \in \{S, I, R, S^*, I^*, R^*\}$，我们可以得到如下上界，对任意$t \in [0,T^*]$均成立:

$$\|\partial_t X\|_{L^p(\Omega_t)} + \|\nabla X\|_{L^p(\Omega_t)} \le C(\|X_0\|_{L^p(\Omega)} + \|F(S, I, R, S^*, I^*, R^*)\|_{L^p(\Omega_t)}) \tag{20}$$

其中 F 是相应方程的右端项。特别地， F 满足

$$\begin{aligned}|F(S, I, R, S^*, I^*, R^*)| \le C(1+&S + I + R + S^* + I^* + R^* \\ &+ S^2 + I^2 + R^2 + (S^*)^2 + (I^*)^2 + (R^*)^2),\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\|F(S, I, R, S^*, I^*, R^*)\|_{L^p(\Omega_t)} \le C(1+&\|S\|_{L^p(\Omega_t)} + \|S\|^2_{L^{2p}(\Omega_t)} \\ &+ \|I\|_{L^p(\Omega_t)} + \|I\|^2_{L^{2p}(\Omega_t)} + \cdots).\end{aligned}$$

因此，定理 3.4 和方程 (20) 表明，对于任意 $p \in (1,\infty)$， S, I, R, S^*, I^*, R^* 在 $W^{1,p}(\Omega_t)$ 中关于 $t \in [0,T^*$ 一致有界。取足够大的 p，Sobolev 嵌入定理可得它们在 $L^\infty(\Omega_t)$ 中也具有相同的上界。 □

注。 事实上，在 [25], 中，作者也采用了类似的方法来证明抛物方程组的整体存在性，并获得了关于时间一致的上界，而不是上述依赖于 T 的上界。在稍后证明定理 4.4 时，我们需要对某些人群得到一致有界。不过，由于我们希望得到部分定量的上界，因此我们利用格林函数来推导这些上界。

接下来，我们将分析稳态解的长时间行为和稳定性。

4 基本再生数与无病稳态的稳定性

本节将研究（3）在不同参数范围下的长期行为。按照 [38], 进行稳态分析，我们定义 $u = (u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5,\ u_6) = (I,\ I^*,\ S,\ S^*,\ R,\ R^*)$，并将（3）改写为以下形式

$$(\partial_t - D\Delta)u = \mathcal{F}(x,u) - \mathcal{V}^-(x,u) + \mathcal{V}^+(x,u) \tag{21}$$

其中，D 是包含扩散系数的对角矩阵，函数 $\mathcal{F}$、$\mathcal{V}^-$和 $\mathcal{V}^+$分别表示组分中引入新感染、由于感染、死亡、康复或不遵从感染而离开组分，以及由于出生或不遵从感染而进入组分。具体而言，对于我们的模型,

$$\mathcal{F}(x,u) = \begin{pmatrix} \beta(1-\alpha)u_3((1-\alpha)u_1 + u_2) \\ \beta u_4((1-\alpha)u_1 + u_2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathcal{F}_1(x,u) \\ \mathcal{F}_2(x,u) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

$$\mathcal{V}^-(x,u) = \begin{pmatrix} (\gamma+\delta)u_1 + \mu u_1(u_2+u_4+u_6) \\ (\gamma+\delta+\nu)u_2 \\ \beta(1-\alpha)u_3((1-\alpha)u_1+u_2) + \mu u_3(u_2+u_4+u_6) + \delta u_3 \\ \beta u_4((1-\alpha)u_1+u_2) + (\nu+\delta)u_4 \\ \mu u_5(u_2+u_4+u_6) + \delta u_5 \\ (\nu+\delta)u_6 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1^-(x,u) \\ \mathcal{V}_2^-(x,u) \\ \mathcal{V}_3^-(x,u) \\ \mathcal{V}_4^-(x,u) \\ \mathcal{V}_5^-(x,u) \\ \mathcal{V}_6^-(x,u) \end{pmatrix}, \tag{23}$$

and

$$\mathcal{V}^+(x,u) = \begin{pmatrix} \nu u_2 \\ \mu u_1(u_2+u_4+u_6) \\ \xi b(x) + \nu u_4 \\ (1-\xi)b(x) + \mu u_3(u_2+u_4+u_6) \\ \gamma u_1 + \nu u_6 \\ \gamma u_2 + \mu u_5(u_2+u_4+u_6) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \mathcal{V}_1^+(x,u) \\ \mathcal{V}_2^+(x,u) \\ \mathcal{V}_3^+(x,u) \\ \mathcal{V}_4^+(x,u) \\ \mathcal{V}_5^+(x,u) \\ \mathcal{V}_6^+(x,u) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

我们再次强调，$(u_1、\ u_2、\ u_3、\ u_4、\ u_5、\ u_6) = (I、\ I^*、\ S、\ S^*、\ R、\ R^*)$，因此方程由（3）重新排列，将感染舱室置于前面。此外，由于在（21）的右端减去了 $\mathcal{V}^-$，$\mathcal{F}$、$\mathcal{V}^-$和 $\mathcal{V}^+$ 均为逐分量非负函数。在下文中，含向量的不等式均按分量解释。

利用这一框架，[38]为无病稳态解的局部渐近稳定性提供了一般框架；无病稳态解满足 $I = I^* = 0$（或在新记号下满足 $u_1 = u_2 = 0$）。利用 [38], 的框架，我们将 U_s 定义为所有无病状态的集合:

$$U_s := \{u \geq 0 : u_i = 0, i = 1, 2\}. \tag{25}$$

很容易验证，我们的系统满足以下假设： [38]

(A1) 对于 $i = 1,2$，函数 $\mathcal{F}_i(x,u)$ $\mathcal{V}_i^+(x,u)$、$\mathcal{V}_i^-(x,u)$ 均为非负连续函数，且关于 u 连续可微。

(A2) 若 $u_i = 0$，则对于 $i = 1, \ldots, 6$，有 $\mathcal{V}_i^- = 0$。特别地，若 $u \in U_s$，则对于 $i = 1, 2$，有 $\mathcal{V}_i^- = 0$。

(A3) $\mathcal{F}_i = 0$ 对于 $i > 2$。

(A4) 如果 $u \in U_s$（使得 $u_1 = u_2 = 0$），那么$\mathcal{F}_i = \mathcal{V}_i^+ = 0$ 对于 $i = 1$，2。

除了系统的这四个一般性质外，还必须考虑关于所要分析的特定稳态附近线性化的另外两个性质。具体而言，设 $\tilde{u}$（x）是方程（21）的一个无病稳态解；也就是说，

$$-D\Delta\tilde{u} = \mathcal{F}(x, \tilde{u}) - \mathcal{V}^-(x, \tilde{u}) + \mathcal{V}^+(x, \tilde{u}). \tag{26}$$

现在，再次遵循 [38], 的记号，我们在无病稳态 $\tilde{u}$（x）附近对（21）进行线性化。由于假设（A2）-（A4），且 $\tilde{u}$ 取值于 U_s，我们有

$$[D_u(\mathcal{V}^+ - \mathcal{V}^-)](x, \tilde{u}) = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{V}(x) & 0 \\ \hline \tilde{J}(x) & -\tilde{M}(x) \end{array}\right].$$

因此，我们得到线性化系统

$$\begin{aligned} (\partial_t - D_{1:2}\Delta)u_{1:2} &= (\tilde{F}(x) - \tilde{V}(x))u_{1:2}, \\ (\partial_t - D_{3:6}\Delta)u_{3:6} &= -\tilde{J}(x)u_{1:2} + \tilde{M}(x)u_{3:6}. \end{aligned} \tag{27}$$

这里，F和 V是分别对应于感染舱室之间转入和转出的 2×2矩阵，M 是对应于未感染舱室内部迁移的 4×4 矩阵，J（x）是对应于从未感染舱室向感染舱室转移的 4×2 矩阵。J（x）矩阵对于分析而言不那么重要，因为其影响也包含在 F（x）中。具体而言，

$$\tilde{V}(x) = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i^-(x, \tilde{u}(x))}{\partial u_j} - \frac{\partial \mathcal{V}_i^+(x, \tilde{u}(x))}{\partial u_j}\right]_{1\le i,j\le 2} \tag{28}$$

and

$$\tilde{M}(x) = \left[\frac{\partial \mathcal{V}_i^+(x, \tilde{u}(x))}{\partial u_j} - \frac{\partial \mathcal{V}_i^-(x, \tilde{u}(x))}{\partial u_j}\right]_{3\le i,j\le 6}. \tag{29}$$

综上，最后两个假设为

(A5) $M(x)$ 是合作的，且 $M(x)$ 的所有特征值均具有负实部，

(A6) $-V(x)$ 是合作的，且 $-V(x)$ 的所有特征值均具有负实部。

回顾一下，若矩阵的所有非对角元素均非负，则称该矩阵为合作的 。

假设我们可以验证系统的无病稳态具备这些性质，那么在进一步满足以下条件时，我们可以调用 [38, 定理 3.1] 来证明局部渐近稳定性：与该稳态相对应的基本再生数 $\mathcal{R}_0$ 足够小（我们将在接下来的小节中定义该再生数）。接下来，我们将考察系统的无病稳态。局部稳定性分析符合上述提出的一般框架。然而，全局稳定性分析相当微妙，需要对不同参数值进行非平凡的处理。

4.1 不遵从者无病平衡

本节中，我们将对无病模型进行稳定性分析，并在所有新引入的个体都不遵从预防措施的情况下确定再生数 $\mathcal{R}_0^*$。也就是说，我们令 $\xi = 0$，于是模型可写为

$$\begin{aligned}
(\partial_t - d_S\Delta)S &= -\beta(1-\alpha)S((1-\alpha)I + I^*) - \mu SN^* + \nu S^* - \delta S,\\
(\partial_t - d_I\Delta)I &= \beta(1-\alpha)S((1-\alpha)I + I^*) - \gamma I - \mu IN^* + \nu I^* - \delta I,\\
(\partial_t - d_R\Delta)R &= \gamma I - \mu RN^* + \nu R^* - \delta R,\\
(\partial_t - d_{S^*}\Delta)S^* &= b(x) - \beta S^*((1-\alpha)I + I^*) + \mu SN^* - \nu S^* - \delta S^*,\\
(\partial_t - d_{I^*}\Delta)I^* &= \beta S^*((1-\alpha)I + I^*) - \gamma I^* + \mu IN^* - \nu I^* - \delta I^*,\\
(\partial_t - d_{R^*}\Delta)R^* &= \gamma I^* + \mu RN^* - \nu R^* - \delta R^*,
\end{aligned} \tag{30}$$

由于我们考虑的是无病平衡，因此在方程 (30) 中令 $S = I = R = I^* = R^* = 0$，得到

$$\begin{aligned}
(\partial_t - d_{S^*}\Delta)S^* &= b(x) - (\nu+\delta)S^*,\\
\frac{\partial S^*}{\partial n} &= 0 \text{ on } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{31}$$

~ ~ ~令 $S^*(x)$ 为方程 (31) 的唯一正稳态解。我们称 $E^* = (0,\ 0,\ 0,\ S^*,\ 0,\ 0)$~为方程 (3) 的不依从无病状态。将方程 (30) 中的 I^* 方程在 E^* 附近线性化，得到

$$\begin{aligned}
(\partial_t - d_I^*\Delta)I^* &= (\beta\tilde{S}^* - (\gamma+\nu+\delta))I^*,\\
\frac{\partial I^*}{\partial n} &= 0 \text{ on } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{32}$$

~注意，如果将方程 (30) 中的 I 方程在 E^* 附近线性化，我们会立即看到 I 指数衰减，因此在线性化区域中，新感染只来自方程 (32)。为得到方程 (32) 的特征值问题，我们采用试探形式 $I^*(x,\ t) = e^{\lambda t}\varphi^*(x)$，于是有

$$\lambda\varphi^* = d_I^*\Delta\varphi^* + (\beta\tilde{S}^* - (\gamma+\nu+\delta))\varphi^*, \tag{33}$$

~根据 Krein-Rutman定理，方程 (33) 存在一个主特征值 $\lambda^*(S^*)$，其变分公式为

$$\lambda^*(\tilde{S}^*) = -\inf\left\{\int_\Omega \left(d_{I^*}|\nabla\varphi^*|^2 + \left((\gamma+\nu+\delta) - \beta\tilde{S}^*\right)|\varphi^*|^2\right)dx : \varphi^* \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega |\varphi^*|^2\,dx = 1\right\}. \tag{34}$$

直观而言，该特征值的符号将决定 I^* 是否随时间局部增加或减少。对于标准的 SIR型分析，这一性质通常用基本再生数 $\mathcal{R}_0^*$ 来表述，我们将其定义为

$$\mathcal{R}_0^* = \sup_{0\neq\varphi^*\in H^1(\Omega)}\left\{\frac{\int_\Omega \beta\tilde{S}^*|\varphi^*|^2\,dx}{\int_\Omega d_{I^*}|\nabla\varphi^*|^2 + (\gamma+\nu+\delta)|\varphi^*|^2\,dx}\right\} \tag{35}$$

$\mathcal{R}_0^*$ 的经典解释是：它表示在流行病初期附近，一次感染所导致的新感染的平均数量。因此，如果 $\mathcal{R}_0^* > 1$，我们预计感染总数会增加；而如果 $\mathcal{R}_0^* < 1$，则会减少，所以鉴于上述评论

关于$\tilde{\lambda}^*(S^*)$，我们预计 $\mathcal{R}_0^*$ 相对于 1 的大小与$\lambda^*(S^*)$的符号之间存在某种联系。事实上，这种联系由 [38, 定理 31]给出。

如上所述，无论$\tilde{\xi}$取何值，我们的系统都很容易满足假设 (A1)-(A4)。在 E^* 附近进行线性化，并采用 (27) 中的记号，可得

$$\tilde{M}^*(x) = \begin{pmatrix} -\mu\tilde{S}^* - \delta & \nu & 0 & 0 \\ \mu\tilde{S}^* & -\nu - \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mu\tilde{S}^* - \delta & \nu \\ 0 & 0 & \mu\tilde{S}^* & -\nu - \delta, \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \tilde{V}^*(x) = \begin{pmatrix} \gamma + \delta + \mu\tilde{S}^* & -\nu \\ -\mu\tilde{S}^* & \gamma + \delta + \nu \end{pmatrix}.$$

这些矩阵满足 (A5) 和 (A6)：显然，$M(x)$ 和 $-V(x)$ 都是合作的；根据盖尔圆定理，由于它们按列对角占优且对角元素为负，其特征值的实部均为负。因此，由 [38,定理 3.1]可得以下局部稳定性结果。

引理 4.1。如上所定义，$\mathcal{R}_0^* - 1$ 与 $\lambda^*(S^*)$符号相同。此外，若$\mathcal{R}_0^* < 1$，则E^* 局部渐近稳定。

我们强调，这只是一个局部结果，也就是说，若解 $(S,\ I,\ R,\ S^*,\ I^*,\ R^*)$ 从足够接近 $E^* = (0,\ 0,\ 0,\ S^*,\ 0,\ 0)$的位置开始，那么它最终会回到 E^*。我们还注意到，从各方面来看，这一结果似乎并不显著依赖于假设 $\xi = 0$（即人口中的任何新成员都是不遵从者）。然而，要对 (34) 中的主特征值 $\lambda^*(S^*)$ 以及 (35) 中的再生比率 $\mathcal{R}_0^*$ 作出更定量的描述，就必须采用这一假设。若 $\xi \in (0,\ 1)$，平衡解是一个由耦合非线性椭圆方程构成的系统，因此更难确定收敛到稳态的条件。我们将在第6节进一步讨论这一点。

接下来，我们陈述关于 $E^* = (0,\ 0,\ 0,\ S^*,\ 0,\ 0)$ 稳定性的主要结果。对于全局稳定性分析，我们假设扩散系数不依赖于依从状态，因此对于 $X \in \{S, I, R\}$，有 $d_X = d_{X^*}$。我们还假设 $\nu = 0$，这意味着变为不遵从者的个体在此后的所有时间内都将保持不遵从。第一个假设使我们能够通过分析 $S + S^*$、$I + I^*$ 和 $R + R^*$ 的和（如 2.3 的证明中所示）来控制由不遵从导致的非线性增长。后一个假设确保系统不会因大部分人群变为依从者而偏离平衡状态。在该模型的背景下，人群重新变为依从者实际上有助于减缓疾病的传播，因此这可以被视为一种最坏情况假设。

定理 4.2. 在满足以下条件时：$d_X = d_{X^*}$ 对 $X \in \{S, I, R\}$ 和 $\nu = 0$成立，关于(30)有以下结论。

(i) 若 $\mathcal{R}_0^* < 1$，则无病稳态 $E^* = (0,\ 0,\ 0,\ S^*,\ 0,\ 0)$ 全局渐近稳定。

(ii) 若 $\mathcal{R}_0^* > 1$，则存在一个常数 $\epsilon_0 > 0$，使得(30) 的任意正解都满足

$$\limsup_{t\to\infty} \|(S, I, R, S^*, I^*, R^*) - (0, 0, 0, \tilde{S}^*, 0, 0)\|_{L^\infty(\Omega)} > \epsilon_0. \tag{36}$$

证明。首先注意到

$$(\partial_t - d_S\Delta)S = -\beta(1-\alpha)S((1-\alpha)I + I^*) - \mu S N^* - \delta S \le -\delta S.$$

使用积分因子后，引理 2.2 立即得到

$$\|S(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|S(0)\|_{L^\infty(\Omega)} e^{-\delta t}$$

使得当 $t \to \infty$ 时， $S \to 0$ 一致收敛。有了这一点，定义 $\Sigma^* = S^* - S^*$ 为 $S^*(x,t)$ 与稳态解 $S^*(x)$ 之差。于是

$$(\partial_t - d_S\Delta)\Sigma^* = -\beta S^*((1-\alpha)I + I^*) - \delta\Sigma^* + \mu S N^*.$$

将式（30）中的 S 方程相加，得到

$$\begin{aligned}(\partial_t - d_S\Delta)(\Sigma^* + S) &= -\beta((1-\alpha)S + S^*)((1-\alpha)I + I^*) - \delta(\Sigma^* + S)\\ &\le -\delta(\Sigma^* + S)\end{aligned}$$

于是，按照上述相同的推理，

$$\|(\Sigma^* + S)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|(\Sigma^* + S)(0)\|_{L^\infty(\Omega)} e^{-\delta t}$$

因此，当 $t \to \infty$ 时， $\Sigma^* + S \to 0$ 一致收敛。但接下来我们使用

$$\|\Sigma^*(t)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \|(\Sigma^* + S)(t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|S(t)\|_{L^\infty(\Omega)}$$

可知，当 $t \to \infty$ 时， Σ^* 也一致收敛到零；也就是说，当 $t \to \infty$ 时， $S^* \to S^*$ 一致收敛。特别地，S 由于 S^* 致地，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以找到 $\tau > 0$，使得对于所有 $x \in \Omega$,

$$S^*(x,t) \le \tilde{S}^*(x) + \varepsilon \quad \text{and} \quad S(x,t) \le \varepsilon \quad \text{for } t \ge \tau. \tag{37}$$

接下来考虑 $\Phi = I + I^*$。对于 $t \ge \tau$，该函数满足

$$\begin{aligned}(\partial_t - d_I\Delta)\Phi &= \beta((1-\alpha)S + S^*)((1-\alpha)I + I^*) - (\delta+\gamma)(I + I^*)\\ &= (\beta(1-\alpha)^2 S + \beta(1-\alpha)S^* - (\delta+\gamma))I + (\beta(1-\alpha)S + \beta S^* - (\delta+\gamma))I^*\\ &\le (\beta(1-\alpha)S + \beta S^* - (\delta+\gamma))\Phi\\ &\le (\beta(1-\alpha)\varepsilon + \beta(\tilde{S}^* + \varepsilon) - (\delta+\gamma))\Phi.\end{aligned}$$

利用积分因子可得

$$(\partial_t - d_I\Delta)[\Phi e^{-\beta(1-\alpha)\varepsilon t}] \le (\beta(\tilde{S}^* + \varepsilon) - (\delta+\gamma))[\Phi e^{-\beta(1-\alpha)\varepsilon t}]. \tag{38}$$

注意，(38)与(32)类似，但多了任意小的 ε。由引理 4.1， $\mathcal{R}_0^* < 1$ 意味着 ，因此(33)的主特征值满足 $\lambda^*(S^*) < 0$。如有必要，减小 ε，由连续性可得，

我们有 $\lambda^*(S^* + \varepsilon) < 0$。令 ϕ_ε^* 为对应于 $\lambda^*(S^* + \varepsilon)$ 的强正特征函数，并取足够大的常数 A，使得 $\Phi(x,\ \tau)e^{-\beta(1-\alpha)\varepsilon\tau} \le A\phi_\varepsilon^*(x)$。于是，由比较原理可得，

$$\Phi(x,t)e^{-\beta(1-\alpha)\varepsilon t} \le A\phi_\varepsilon^*(x)e^{\lambda^*(S_0^*+\varepsilon)(t-\tau)} \quad \Longrightarrow \quad \Phi(x,t) \le \tilde{A}\phi_\varepsilon^*(x)e^{(\lambda^*(\tilde{S}^*+\varepsilon)+\beta(1-\alpha)\varepsilon)t}, \quad t \ge \tau. \tag{39}$$

同样，必要时缩小 ε，我们可以得到 $\lambda^*(S^* + \varepsilon) + \beta(1-\alpha)\varepsilon < 0$，由此 (39) 表明，当 $t \to \infty$ 时， $I,\ I^* \to 0$ 一致成立。利用这一结果， $\Upsilon = R + R^*$ 的方程渐近于

$$(\partial_t - d_R\Delta)\Upsilon = -\delta\Upsilon$$

这意味着，当 $\Upsilon \to 0$ 时，该结论也一致成立。因此，当 $t \to \infty$ 时，$(S,\ I,\ R,\ S^*,\ I^*R^*) \to (0,\ 0,\ 0,\ S_0^*,\ 0,\ 0)$ 一致成立。这就证明了*(i)*。

接下来证明（*ii*）。令 $\mathcal{R}_0^* > 1$ 并反设：对于任意 $\varepsilon_0 > 0$，方程（30）都有一个满足以下条件的正解

$$\limsup_{t\to\infty} \|(S, I, R, S^*, I^*, R^*) - (0, 0, 0, S_0^*, 0, 0)\| \le \epsilon_0.$$

在这种情况下，对于任意 $\varepsilon_0 > 0$，我们都可以找到 $\tau > 0$ 使得

$$0 < |S(x,t)|, |I(x,t)|, |I^*(x,t)|, |R(x,t)|, |R^*(x,t)| \le \varepsilon_0, \quad \text{for all } x \in \Omega,\ t \ge \tau. \tag{40}$$

那么，对于 $t \ge \tau$，$\Sigma^*(x,\ t) = S^*(x,\ t) - S_0^*(x)$ 满足

$$(\partial_t - d_S\Delta)\Sigma^* = -\beta((1-\alpha)S + S^*) - \delta\Sigma^* + \mu S N^* \le (\varepsilon_0 - \delta)\Sigma^* + 2\mu\varepsilon_0^2.$$

由此可得

$$\|\Sigma^*(t)\|_\infty \le e^{(\varepsilon_0-\delta)t}\|\Sigma^*(0)\|_\infty + 2\mu\varepsilon_0^2 t e^{(\varepsilon_0-\delta)t}, \quad t \ge \tau.$$

然而，由于这对任意固定的 $\varepsilon_0 > 0$ 都成立，我们可以取 $\varepsilon_0 < \delta$，这表明当 $t \to \infty$ 时，$S^*(x,\ t) \to \tilde{} S^*(x)$ 一致成立。特别地，若有必要，增大 τ，即可得到

$$S^*(x,t) \ge \tilde{S}^*(x) - \varepsilon_0, \quad t \ge \tau.$$

但对于 $t \ge \tau$,

$$(\partial_t - d_I\Delta)I^* \ge \beta((\tilde{S}^* - \varepsilon_0) - (\gamma + \delta))I^*.$$

由于 $\mathcal{R}_0^* > 1$，方程 (33) 的主特征值满足 $\lambda^*(S^*) > 0$，因此由连续性可知，存在足够小的 $\tilde{} \varepsilon_0 > 0$，使得 $\lambda^*(S^* - \varepsilon_0) > 0$。固定这个 ε_0（以及相应的 $\tau > 0$）后，令 $\tilde{} \phi_{\varepsilon_0}^*(x)$ 为方程 (33) 中对应于 $\lambda^*(S^* - \varepsilon_0)$ 的正解，并取足够小的 $\eta > 0$，使得对所有 $x \in \Omega$，均有 $I^*(x,\tau) \ge \eta\phi_{\varepsilon_0}^*(x)$。于是由比较原理,

$$I^*(x,t) \ge \eta\phi_{\varepsilon_0}^*(x) e^{\lambda^*(\tilde{S}^* - \varepsilon_0)(t-\tau)}$$

这证明了当 $t \to \infty$ 时，$I^*(x,t)$ 会趋于无穷大，这与 (40) 矛盾。该矛盾意味着，当 $\mathcal{R}_0^* > 1$ 时，存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得任意方程 (30) 的正解都满足

$$\limsup_{t\to\infty} \|(S, I, R, S^*, I^*, R^*) - (0, 0, 0, S_0^*, 0, 0)\| > \epsilon_0$$

如所期望。 □

注。我们对定理 4.2 作简要解释。结果 (i) 的含义相当直观：在条件 $\mathcal{R}_0^* < 1$ 下，随着时间推移，疾病会消失。结果 (ii) 给出了一个条件，在该条件下，随着时间推移，$(S, I, R, S^*, I^*, R^*) \not\to (0, 0, 0, S^*, 0, 0)$。由于证明采用反证法，因此没有指出 (S, I, R, S^*, I^*, R^*) 中的哪一个未能收敛到其相应的平衡值。不过，稍作进一步推理便可轻易看出，$\|I(t)\|_\infty, \|I^*\|_\infty$ 中至少有一个不会趋于零。事实上，如果这两者都趋于零，那么按照 (i) 的证明中的推理，我们将有 $\|S(t)\|_\infty \to 0, \|(S^* - S^*)(t)\|_\infty, \|R(t)\|_\infty, \|R^*(t)\|_\infty \to 0$，如此便会回到平衡点，这不可能发生。因此，(ii) 意味着当 $\mathcal{R}_0^* > 1$ 时，疾病持续存在，具体表现为 $I + I^* \not\to 0$ 在时间足够长时成立。

4.2 依从性无病平衡

本节中，我们考虑这样一种平衡状态：全体人口都遵守预防措施，且所有新引入的成员也都遵守这些措施（$\xi = 1$）。也就是说，我们考虑以下方程组

$$\begin{aligned}
(\partial_t - d_S\Delta)S &= b(x) - \beta(1-\alpha)S((1-\alpha)I + I^*) - \mu S N^* + \nu S^* - \delta S,\\
(\partial_t - d_I\Delta)I &= \beta(1-\alpha)S((1-\alpha)I + I^*) - \gamma I - \mu I N^* + \nu I^* - \delta I,\\
(\partial_t - d_R\Delta)R &= \gamma I - \mu R N^* + \nu R^* - \delta R,\\
(\partial_t - d_{S^*}\Delta)S^* &= -\beta S^*((1-\alpha)I + I^*) + \mu S N^* - \nu S^* - \delta S^*,\\
(\partial_t - d_{I^*}\Delta)I^* &= \beta S^*((1-\alpha)I + I^*) - \gamma I^* + \mu I N^* - \nu I^* - \delta I^*,\\
(\partial_t - d_{R^*}\Delta)R^* &= \gamma I^* + \mu R N^* - \nu R^* - \delta R^*,
\end{aligned} \tag{41}$$

如上所述，我们希望建立该模型的无病平衡解的稳定性。具体而言，令 $I = R = S^* = I^* = R^* = 0$, 可得到方程

$$\begin{aligned}
(\partial_t - d_S\Delta)S &= b(x) - \delta S,\\
\frac{\partial S}{\partial n} &= 0 \text{ on } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{42}$$

˜ ˜ ˜令 $S(x)$ 为方程（42）的唯一正稳态解，则 $E = (S,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ 是方程（41）的无疾病（且无不遵从）平衡解。对方程（41）中的 I 方程进行线性化，并在˜附近以 E 为中心展开，可得

$$\begin{aligned}
(\partial_t - d_I\Delta)I &= (\beta(1-\alpha)^2\tilde{S} - (\gamma+\delta))I + \nu I^*,\\
\frac{\partial I}{\partial n} &= 0 \text{ on } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{43}$$

˜在此情况下，方程（41）中的 I^* 方程的线性化在 E 附近产生指数衰减，因此（43）渐近于

$$\begin{aligned}
(\partial_t - d_I\Delta)I &= (\beta(1-\alpha)^2\tilde{S} - (\gamma+\delta))I,\\
\frac{\partial I}{\partial n} &= 0 \text{ on } \partial\Omega.
\end{aligned} \tag{44}$$

因 此，使用试探形式 $I(x,\ t) = e^{\lambda t}\varphi(x)$，我们得到特征值问题

$$\lambda\varphi = d_I\Delta\varphi + (\beta(1-\alpha)^2\tilde{S} - (\gamma+\delta))\varphi. \tag{45}$$

˜根据Krein-Rutman定理，(45)有一个主特征值 $\lambda(S)$，其变分公式为

$$\lambda(\tilde{S}) = -\inf\left\{\int_\Omega \left(d_I|\nabla\varphi|^2 + \left((\gamma+\delta) - \beta(1-\alpha)^2\tilde{S}\right)|\varphi|^2\right)dx : \varphi \in H^1(\Omega),\ \int_\Omega |\varphi|^2\,dx = 1\right\}. \tag{46}$$

˜同样，在关于 E 的线性化区域中， I^* 将呈指数衰减，因此，唯一的新感染˜都由 I 计入；如果 $\lambda(S) > 0$ ，我们预计它会随时间局部增加，并且局部

˜如果 $\lambda(S) < 0.$，则会随时间局部减少。为了用 SIR 型模型的术语来描述这一相同行为，我们定义基本再生数

$$\mathcal{R}_0 = \sup_{0\neq\varphi\in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{\int_\Omega \beta(1-\alpha)^2 \tilde{S}|\varphi|^2\, dx}{\int_\Omega d_I|\nabla\varphi|^2 + (\gamma+\delta)|\varphi|^2\, dx} \right\}. \tag{47}$$

˜综上所述，我们再次得到局部稳定性（以及 $\lambda(S)$与 $\mathcal{R}_0$之间的关系），这是 [38, 定理3.1]的推论。对假设(A1)-(A6)的验证与第 4.1 节中的验证基本完全相同。

˜**引理4.3**。 如上所定义， $\mathcal{R}_0 - 1$ 与 $\lambda(S)$同号。此外，如果 $\mathcal{R}_0 < 1$，那么˜E 是局部渐近稳定的。

我们希望建立全局稳定性，但与第 4.1 节一样，这要微妙得多。在这种情况下，分析中最有趣（也最复杂）的方面是不遵从人群的非线性增长，这可能会导致平衡解˜ ˜$E = (S,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ 失稳，即使 $\mathcal{R}_0 < 1$ 成立。如果人口中有很大一部分变成不遵从人群，我们就会回到类似于第 4.1 节的情形，此时再生数 $\mathcal{R}_0^*$更大。因此，在这种情况下，我们的全局稳定性结果取决于首先理解不遵从人群 $N^* = S^* + I^* + R^*$ 的总规模，然后确保不遵从传播参数和恢复参数 μ 与 ν 满足条件，使得 N^* 不会增长得过快。

由 (6) 和非负性可得关于 N^* 的以下 L^1 上界：

$$\|N^*(t)\|_{L^1(\Omega)} \le N_{\text{total}}(t) \le N_{\text{total}}(0)e^{-\delta t} + \frac{\|b\|_{L^1(\Omega)}}{\delta}. \tag{48}$$

利用关于 N^* 的这个上界，我们可以陈述并证明全局稳定性结果。

定理 4.4. 在满足 $d_S = d_I = d_R = d$, $d_{S^*} = d_{I^*} = d_{R^*} = d^*$ 的条件下，以下结论成立。

(i) Th ，该常数取决于 d, δ 和区域 Ω，使得若 $\mathcal{R}_0 <$ 1,

$$\mu < \frac{\delta^2}{\|b\|_{L^1(\Omega)}}, \quad \textit{and} \quad \nu > \frac{c\mu\delta\|b\|_{L^1(\Omega)}}{\delta^2 - \mu\|b\|_{L^1(\Omega)}}, \tag{49}$$

˜ ˜，则无病稳态 $E = (S,0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ 对(41)全局渐近稳定。

(ii) 若 $\mathcal{R}_0 > 1$，则存在常数 $\epsilon_0 > 0$，使得 (41) 的任意正解都满足

$$\limsup_{t\to\infty} \|(S, I, R, S^*, I^*, R^*) - (\tilde{S}_0, 0, 0, 0, 0, 0)\|_{L^\infty(\Omega)} > \epsilon_0. \tag{50}$$

注。 在证明之前，我们重申一些解释，说明假设，并˜ ˜描述策略。在此情况下， $E = (S,$ 0, 0, 0, 0, 0) 可能以两种方式变得不稳定：(1) 感染数量可能增长并持续存在，这将在 $\mathcal{R}_0 > 1$ 结果（*ii*）中发生；或者 (2) 在 μ——不遵从“传染性”率——相对于 ν——不遵从“康复”率——过大时，不遵从程度可能增加。后一种情况还可进一步分为两类不稳定性：(2a) 不遵从可能持续存在，即 $N^* \not\to 0$；或者 (2b) 不遵从人群的增长可能提高有效再生数，这意味着感染激增并可能持续存在，即 I, $I^* \not\to 0.$ 对于结果 （*i*），扩散系数的假设使我们能够将分析的第一部分集中于 $N = S + I + R$ and

$N^* = S^* + I^* + R^*$。这些构成一个易感-感染-易感系统的方程组。为了避免 N^* 增长，我们利用关于 μ 较小和 ν较大的假设。这将确保人口恢复到完全合规的状态，届时我们可以利用假设 $\mathcal{R}_0 < 1$ 证明感染会消失。

证明。 为证明（*i*），定义合规人群总数 $N = S + I + R$。由于我们假设$d_S = d_I = d_R = d$ 和 $d_{S^*} = d_{I^*} = d_{R^*} = d^*$，由（41）可知，合规人群 N和不遵从人群 $N^* = S^* + I^* + R^*$ 满足以下反应扩散方程组

$$\partial_t N = d\Delta N + b(x) - (\mu N - \nu)N^* - \delta N, \tag{51}$$

$$\partial_t N^* = d^*\Delta N^* + (\mu N - \nu)N^* - \delta N^*. \tag{52}$$

由此，我们对 N 给出上界，从而关于 μ 和 ν 的假设确保（52）中的第一项为负。这样，（52）将导致 N^* 指数衰减，随后，类似于第 4.1 节中所采用的论证将确保 E的全局稳定性。

为此，我们遵循 [3, 24, 31]的策略。令 $\Gamma(t): C(\Omega) \to C(\Omega)$ 表示与带有诺伊曼边界条件的算子（$d\Delta - \delta$）相关的 C_0半群。也就是说，

$$(\Gamma(t)\phi)(x) = \int_\Omega G(x, y, t)\phi(y)dy, \quad t > 0, \ x \in \overline{\Omega}$$

其中， G 表示对应于（$d\Delta-\delta$）且在 $\partial\Omega$上满足诺伊曼边界条件的格林函数。特别地，存在 $M > 0$ 使得

$$\|\Gamma(t)\| \le Me^{\alpha t}, \ t \ge 0 \tag{53}$$

其中， $\alpha < 0$ 是（$d\Delta - \delta$）在诺伊曼边界条件下的主特征值。则对任意 $t \ge t_0$,

$$\begin{aligned} N(x,t) &= \Gamma(t-t_0)N(x,t_0) + \int_{t_0}^t \Gamma(t-s)[b(x) - \mu N(x,s)N^*(x,s) + \nu N^*(x,s)]ds \\ &\le Me^{\alpha(t-t_0)}\|N(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_{t_0}^t \Gamma(t-s)[b(x) + \nu N^*(x,s)]ds \\ &= Me^{\alpha(t-t_0)}\|N(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_{t_0}^t \int_\Omega G(x,y,t-s)[b(y) + \nu N^*(y,s)]dyds, \end{aligned} \tag{54}$$

其中，积分的上界成立是因为 $\Gamma(t)$ 在 $t > 0$ [34, 推论 7.2.3] 中是强正的，且 N， N^* 均为非负。接下来，按照 [3, 24, 31] 中的方法进行谱展开，并利用（$d\Delta - \delta$）特征函数的一致有界性，可得

$$G(x, y, t) \le ce^{-\delta t}, \quad t > 0,$$

对于某个常数 $c > 0$，它取决于算子的特征值和特征函数，而后者又取决于 d， δ 以及区域Ω。将此结果应用于式（54），得到

$$\begin{aligned} N(x,t) &\le Me^{\alpha(t-t_0)}\|N(;t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} + c\int_{t_0}^t e^{-\delta(t-s)}(\|b\|_{L^1(\Omega)} + \nu\|N^*(t)\|_{L^1(\Omega)})ds \\ &= Me^{\alpha(t-t_0)}\|N(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{c(\|b\|_{L^1(\Omega)} + \nu\|N^*(t)\|_{L^1(\Omega)})}{\delta}(1 - e^{-\delta(t-t_0)}) \\ &\le Me^{\alpha(t-t_0)}\|N(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{c(\|b\|_{L^1(\Omega)} + \nu\|N^*(t)\|_{L^1(\Omega)})}{\delta}. \end{aligned} \tag{55}$$

现在，对于任意 $\eta > 0$，只要 $t_0 > 0$ 足够大，我们便可从式（48）得出

$$\|N^*(t)\|_{L^1(\Omega)} \le \eta + \frac{\|b\|_{L^1(\Omega)}}{\delta}, \quad t \ge t_0.$$

固定这个 t_0后，我们可以取足够大的 t_1，使得 $Me^{\alpha(t_1-t_0)}\|N(\cdot,t_0)\|_{L^\infty(\Omega)} < \eta$也成立。将这两个上界代入（55），得到

$$N(x,t) \le \eta + \frac{c\|b\|_{L^1(\Omega)} + \nu(\|b\|_{L^1(\Omega)}/\delta + \eta)}{\delta}, \quad t \ge t_1. \tag{56}$$

这为 $N(x,t)$提供了一致有界性，且当 $t \ge t_1$时成立。另请注意，我们可以令$\eta > 0$ 任意小，代价是增大 t_1.

因此，为确保较大的 t下 $\mu N - \nu \le 0$ ，只需满足

$$\nu > \mu\left(\eta + \frac{c\|b\|_{L^1(\Omega)} + \nu(\|b\|_{L^1(\Omega)}/\delta + \eta)}{\delta}\right)$$

或者等价地

$$\nu\left(1 - \mu\left(\frac{\|b\|_{L^1(\Omega)}}{\delta^2} + \frac{\eta}{\delta}\right)\right) \ge \mu\eta + \frac{\mu c\|b\|_{L^1(\Omega)}}{\delta}. \tag{57}$$

如果 μ 过大，这将不可能，因为上面的左边会是负数。然而，假设如定理的假设中所述，$\mu < \delta^2/\|b\|_{L^1}$，我们可以令 η 足够小，使得 $\mu < 1/(\|b\|_{L^1(\Omega)}/\delta^2 + \eta/\delta)$. 接下来，假设 $\nu > \mu c\delta\|b\|_{L^1(\Omega)}/(\delta^2 - \mu\|b\|_{L^1(\Omega)})$ ，，如果有必要，我们可以再次减小 η，以确保（57）成立，从而当 $t \ge t_1$.时， $\mu N(x,t) - \nu \le 0$。于是由（52），对于 $t \ge t_1$，有

$$\partial_t N^* \le d^*\Delta N^* - \delta - N^*, \tag{58}$$

因此，根据引理 2.2，随着 $t \to \infty$， N^* 以指数速率一致趋于零。由解的正性可知，这意味着当时间足够大时， S^*， I^*， R^* 呈指数衰减。

由 (56) 给出的 $N(x,\ t)$ 的一致上界也为 $S,\ I,\ R$ 提供了一致上界，这意味着 (41) 中所有涉及 $S^*,\ I^*,\ R^*$ 的项在时间足够大时均呈指数衰减。因此，(41) 渐近于

$$\begin{aligned}
&(\partial_t - d\Delta)S \le b(x) - \beta(1-\alpha)^2 SI - \delta S,\\
&(\partial_t - d\Delta)I \le \beta(1-\alpha)^2 SI - (\gamma+\delta)I,\\
&(\partial_t - d\Delta)R \le \gamma I - \delta R,
\end{aligned} \tag{59}$$

˜分析该系统，容易证明，在 $\mathcal{R}_0 < 1$ 的条件下，解收敛于 $(S,\ 0,\ 0)$；所用方法与第 4.1 节中的方法类似。事实上，我们可以看到

$$(\partial_t - d\Delta)(S - \tilde{S}) \le -\beta(1-\alpha)^2 SI - \delta(S - \tilde{S}) \le -\delta(S - \tilde{S}).$$

˜利用积分因子并应用引理 2.2，可知当$t \to \infty$时， $S(x,\ t) \to S(x)$ 一致成立。特别地，对于任意 $\varepsilon > 0$，我们可以找到足够大的 $t_2 \ge t_1$ ，使得

$$|S(x,t)| \le \left|\tilde{S}(x)\right| + \varepsilon, \quad t \ge t_2.$$

则对于 $t \ge t_2$,

$$(\partial_t - d\Delta)I \le (\beta(1-\alpha)^2(\tilde{S} + \varepsilon) - \gamma)I.$$

˜ ˜根据引理4.3，由于我们假设 $\mathcal{R}_0 < 1$，可得 $\lambda(S) < 0$，其中 $\lambda(S)$ 是方程 (45) 的主˜特征值。由连续性可知，当 $\varepsilon > 0$ 充分小时， $\lambda(S+\varepsilon) < 0$. 令 $\tilde{\varphi}$ 为对应于 $\lambda(S+\varepsilon)$ 的正特征函数，并取足够大的 $A > 0$ ，使得 $I(x, t_2) \le A\varphi(x)$，则由比较原理可知

$$I(x,t) \le A\varphi(x)e^{\lambda(\tilde{S}+\varepsilon)(t-t_2)}, \quad t \ge t_2,$$

于是，当 $t \to \infty$ 时， $I(x,t) \to 0$ 一致成立。最后，这表明 R 方程渐近于

$$(\partial_t - d\Delta R) = -\delta R$$

˜这也表明 R 指数衰减。因此，(S, I, R, S^*, I^*, R^*) 当 $t\ to\infty$ 时一致趋于 $(S, 0, 0, 0, 0, 0)$，由此完成了*(i)*的证明。

接下来证明*(ii)*。设 $\mathcal{R}_0 > 1$ ，并反设：对于任意 $\varepsilon_0 > 0$，都存在方程 (41) 的一个正解满足

$$\limsup_{t\to\infty} \|(S, I, R, S^*, I^*, R^*) - (\tilde{S}, 0, 0, 0, 0, 0)\|_{L^\infty(\Omega)} \le \epsilon_0. \tag{60}$$

˜于是特别地，当 $t \to \infty$ 时， $S(x,t) \to S(x)$，且 $I^*(x,t)$ $I(x,t)$ $N^*(x,t) \to 0$ 一致成立，这意味着 (41) 中的 I 方程渐近于

$$(\partial_t - d\Delta)I = \beta(1-\alpha)^2 SI - \gamma I.$$

˜接下来，证明过程与定理 4.2 中*(ii)* 的证明完全相同：由 $\mathcal{R}_0 > 1$ 可得，当 ε_0 充分小时， $\lambda(S-\varepsilon_0) > 0$；这意味着当时间足够长时， $I(x,t)$ 指数增长，与我们的假设矛盾。

我们得出结论，当 $\mathcal{R}_0 > 1$时，存在 $\varepsilon_0 > 0$ ，使得任意正解 (41)
满足

$$\limsup_{t\to\infty} \|(S, I, R, S^*, I^*, R^*) - (\tilde{S}, 0, 0, 0, 0, 0)\|_{L^\infty(\Omega)} > \epsilon_0. \tag{61}$$

□

注。 在定理 4.4(i) 的证明中，(49) 对 ν 的条件可以稍作放宽，改为

$$\nu > \frac{c\mu\delta\|b\|_{L^1(\Omega)} - \delta_*^3}{\delta^2 - \mu\|b\|_{L^1(\Omega)}}, \tag{62}$$

对某个 $\delta_* \in [0, \delta)$。 继续进行证明，可得上界 $\mu N - \nu \le \delta^*$；由 (58) 可知， N^* 呈指数衰减，衰减率为 $\delta - \delta_*$。我们注意到，如果 μ 足够小，则 (62) 右侧分子为负。在这种情况下，该条件自动成立，因此无需对 ν施加任何约束即可得到结论。也就是说，如果 μ 足够小，且 $\xi = 1$ ，使得所有新加入的人口成员均具有依从性，那么即使不存在从不遵从中恢复的情况，也不可能出现地方性不遵从。

5 模拟与讨论

在本节最后，我们使用 MATLAB 对模型进行模拟，并讨论结果，重点说明我们的模型行为与普通 SIR 型模型的不同之处。我们注意到，上述定理讨论了以下两种情况：(1) 人口几乎完全是不遵从者，此时疾病的有效再生数更接近于 $\mathcal{R}_0^*$；或 (2) 人口始终

参数	图1-2	图3	图4	图5	图6
β	6	0.05	50	1	1
γ	1	1	1	1	1
b	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
δ	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
α	0.5	0.1	0.8	0.8	0.8
μ	1	1	1	0.01	2
ν	1	0	0	0.015	0.015
ξ	0.95	0	0	1	1
d	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02

表1：下方各图模拟所用的参数值 .

几乎完全遵从，此时疾病的有效再生数更接近于较小的值 $\mathcal{R}_0$。然而，在流行病持续期间，有效再生数会不断变化：它应当是 $\mathcal{R}_0$ 和 $\mathcal{R}_0^*$ 的某种加权平均，具体取决于人口中不遵从者所占的比例。这些影响很难通过解析方法捕捉，因为它们取决于模型的中间时段动力学。不过，我们可以通过模拟展示这些影响。

为模拟该模型，我们采用半隐式有限差分格式，其中扩散项采用隐式方法求解，而非线性项则采用显式方法求解。我们在多个参数范围内进行模拟，以展示模型的不同特征。为简单起见，所有模拟均采用正方形区域$\Omega = (-5,5)^2$。在所有情况下，我们均将自然出生率设为常数 $b(x) = b$。在图1至图6中，所有扩散系数均设为相等（我们将其共同取值记为d）；在图7和图8中，我们则尝试改变感染人群的扩散系数。生成下方各图的模拟所用参数列于表1。另一项关键数据是初始条件。图1至图2对应同一次模拟，且具有独特的初始条件；而图3至图6分别对应不同的模拟，但它们具有相同的初始条件。下文也将说明这些初始条件。在所有情况下，我们选择 $R_0 = R_0^* = 0$，使得初始时康复人群为零。此外，我们只指定 S_0 和 I_0，然后设定 $S_0^* = S_0/20$ 和 $I_0^* = I_0/20$。这样做相当于假设初始时约有5%的人口是不遵从者。我们强调，所有这些参数值和初始条件都是人为设定的，仅用于展示模型在不同参数范围内的行为。

虽然图1—2展示了有关我们模型的一般性观察结果，但图3—6尤其值得用来展示定理4.2和4.4的结果，这些定理对再生数 $\mathcal{R}_0^*$ 和 $\mathcal{R}_0$作出了假设。因此，根据这些图中的参数值对这些再生数进行量化是很方便的。注意，如果出生率 $b(x) = b$ 为常数（如我们所有的模拟中一样），则方程（31）和（42）的稳态解也是常数。例如，$\tilde{S}^*$ 满足

$$-d_{S^*}\tilde{S}^* = b - (\nu + \delta)\tilde{S}^*$$

结合诺伊曼边界条件，其唯一解为 $\tilde{S}^* = \frac{b}{\nu+\delta}$，同样可得，$S^* = \frac{b}{\delta}$ 是方程（42）的唯一稳态解。因此，由（34）和（45）给出的特征值问题均为常系数问题，从而可以在正方形区域 $\Omega = (-5, 5) \times (-5, 5)$。具体而言，由于诺伊曼边界条件，每个方程的特征函数均具有如下形式：$\phi_{k,\ell}(x, y) = \cos(k\pi x/5)\cos(\ell\pi y/5)$。主特征

值随后对应于 $k = \ell = 0$。这些值为

$$\lambda^* = \frac{b\beta}{\nu+\delta} - (\gamma+\delta), \qquad \lambda = \frac{b\beta(1-\alpha)^2}{\delta} - (\gamma+\delta) \tag{63}$$

分别对应（34）和（45）。回顾引理4.1和4.3， $\mathcal{R}_0^* > 1$ 当且仅当 $\lambda^* > 0$， $\mathcal{R}_0$ 和 λ同理。因此，这些特征值为我们提供了一种方法，以确保落在正确的参数范围内，从而证明定理4.2和4.4。

第一次模拟展示了一种并非我们模型独有、而是空间模型所特有的现象，并且在我们的模型中这一现象更加显著。在此情形下，我们令S_0（x） $=$exp（$-5\,|x|^2$），其中 $x \in$（-5，5）^{2}，使得初始易感人群高度集中于原点；而 I_0（x）$=$ $\frac{1}{20}$exp（$-5\,|x-$（3，3）$|^2$），其中 $x \in$（-5，5）^{2}，，这意味着初始感染者高度集中于（3，3），约占总人口的5%。因此，当 $t > 0$较小时， S（$\alpha I + I^*$）和 S^*（$\alpha I + I^*$）近似为零，意味着新感染很少发生，且感染总数起初会减少。然而，经过足够长的时间后，人群扩散得更加充分，重叠区域随之扩大，导致感染增多，进而使感染总数在之后出现峰值。图1展示了这一现象，其中我们绘制了感染人群所占的总比例

$$I_{\text{total}}(t) = \|(I+I^*)(t)\|_{L^1(\Omega)} / \|(S+I+R+S^*+I^*+R^*)(t)\|_{L^1(\Omega)}$$

作为 ti 的函数　　间。此外，图 1 还绘出了不遵从人群的总比例　　：

$$N^*_{\text{total}}(t) = \|(S^*+I^*+R^*)(t)\|_{L^1(\Omega)} / \|(S+I+R+S^*+I^*+R^*)(t)\|_{L^1(\Omega)}.$$

请注意，在这次模拟中，感染人数首次激增发生在相当一部分人口变成不遵从者之前。随后，感染人数的首次激增因易感人群减少而回落，这使疾病的有效再生数下降。然而，当足够多的人口变成不遵从者时，由于不遵从人群的感染率较高，有效再生数会升高，从而引发第二波疫情。这种行为随后会重复出现。在图 2 中，我们展示了不同时刻 $t \geq 0$感染人群的快照$I(x,\ t) + I^*(x,\ t)$；可以看到，初始分布集中在点 (3，3) 附近。随后，感染人群会“迁移”至易感人群集中的原点附近，并在足够接近时增加。

在接下来的图中，我们令 S_0 为四个高斯函数之和，它们的中心位于 $(-5,\ 5)$ 周围的不同位置，且具有不同的方差。可以将其视为人口中心，例如城市地区；这些地区的人口密度远高于周围的农村地区。此处$I_0 = S_0/100$，这意味着感染人群的分布与易感人群完全相同，但仅占人口的约 1%。

图　　3　　4 2　　$\lambda^* =$展示了定理$\frac{b\beta}{\nu+\delta} - \gamma + \delta = -\delta < 0$　　$\mathcal{R}_0^* < 1$。(i)。在此模拟中，参数确保 ( )，因此 。在这种情况下，即使几乎全部人口都不遵从，感染率仍然过低，不足以导致暴发。注意，在这种情况下， $\xi = 0$，因此所有新引入的人口成员都不遵从。就不遵从而言，这在某种程度上是最糟糕的情形，而降低感染率是防止感染的唯一手段。

在图4中，我们展示了定理 4.2(ii)。在此模拟中，感染率 $\beta = 50$ 非常高，因此 $\lambda^* = \frac{b\beta}{\nu+\delta} - (\gamma+\delta) \approx 1000 > 0$，这意味着 $\mathcal{R}_0^* > 1$。事实上，即使依从性使传染性降低了 80% （ $\alpha = 0.8$ ），我们仍有 $\lambda = \frac{b\beta}{(1-\alpha)_\delta}^2 - (\gamma+\delta) \approx 40 > 0$，因此 $\mathcal{R}_0 > 1$。所以，即使在模拟开始时，当大多数人口

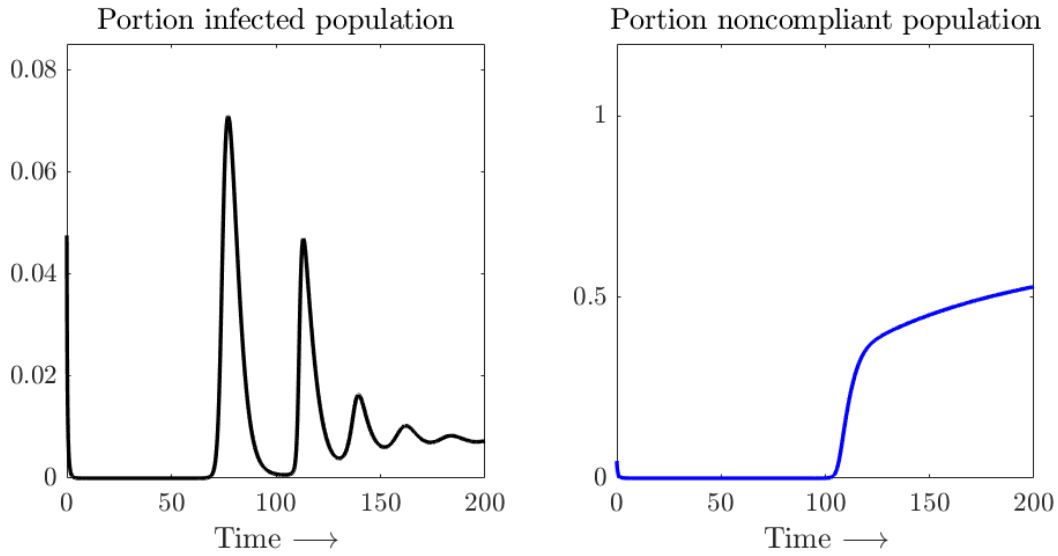

图 1：感染最初会减少，随后易感人群和感染人群扩散到足以重叠时，感染便会激增。首次激增后，不遵从人群规模足够大，会提高有效再生数并引发又一次激增。该模拟中的感染人群见图 2。

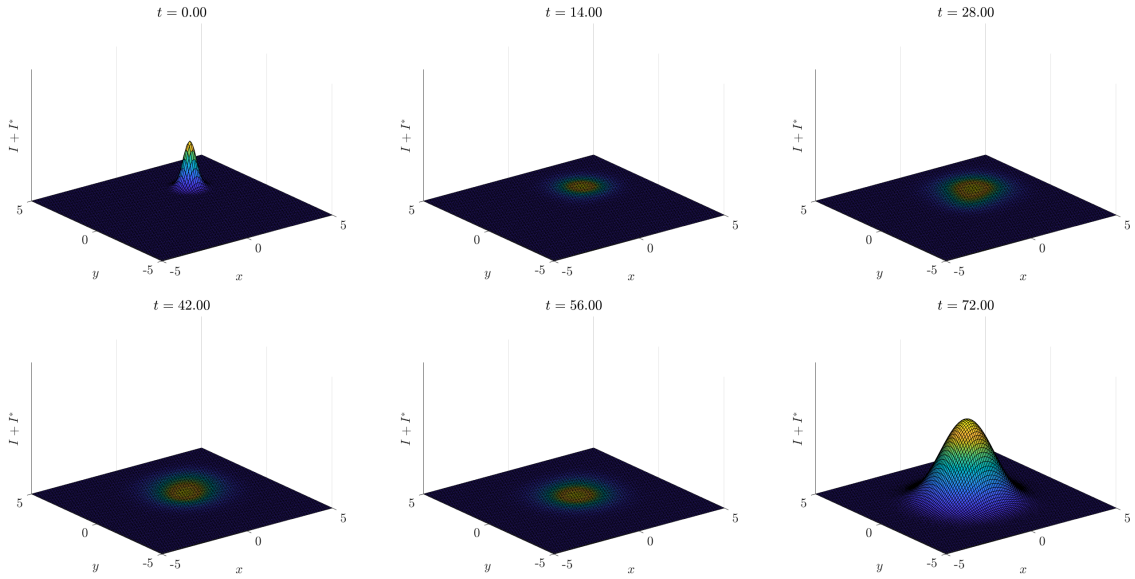

图 2：随着时间 t 推移，感染人群的快照 $I + I^*$ 。感染最初集中在 (3，3) 附近。由于该区域的易感人群很少，感染数量随之下降。随后，感染向易感人群较为集中的原点“迁移”，并在足够接近后增加。

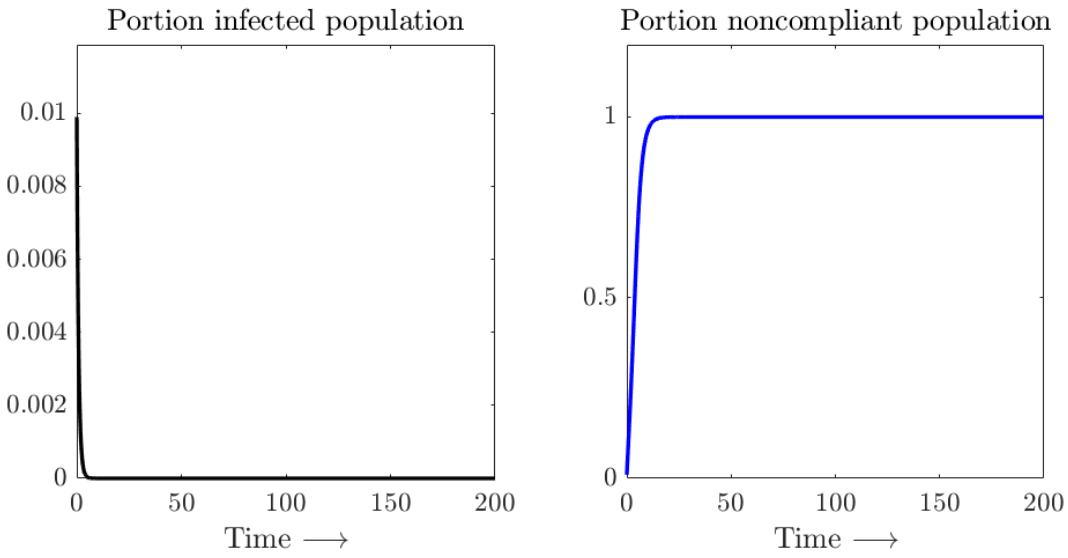

图3：如果感染率 β 足够小，即使整个人群都变为不遵从者，有效再生数仍会保持较低水平，因此不会发生暴发。这证明了定理 4.2(i)。

即使是合规人群，感染仍在增长。因此，我们看到感染人数迅速增加。感染人群占总人口的比例也不会趋于零，而是稳定在某个非零常数：在渐近状态下，约有总人口的 1% 感染。

图5和图6展示了流行病的结果对不遵从者感染率和康复率（分别为 μ 和 ν ）的依赖关系，定理 4.4 中对此作了阐述。在这些模拟中，参数的选取使得 $\lambda = \frac{b\beta}{(1-\alpha)_\delta}^2 - (\gamma+\delta) \approx -\frac{1}{5} < 0$，因此$\mathcal{R}_0 < 1$。然而， $\lambda^* = \frac{b\beta}{\nu+\delta} - (\gamma+\delta) \approx \frac{1}{3}$，所以 $\mathcal{R}_0^* > 1$。在这种情况下，能否阻止疾病暴发取决于人群是否保持依从性。图5和图6展示了这一点。请注意，这些图中的模拟均保持所有参数不变，只有 μ 和 ν除外。在图5中， μ 相对于 ν较小，这意味着个体成为不遵从者的速度较慢，而且一旦成为不遵从者，很快就会恢复依从性。在这种情况下，不遵从人群所占比例始终较小，不会发生暴发。然而，在图6中，情况恰好相反： μ 相对于 ν较大，这意味着不遵从人群增长得更快，恢复依从性的速度也更慢。在这种情况下，虽然感染人群占总人口的比例起初有所下降，但当足够大比例的人群变为不遵从者后，疾病便会暴发，此时有效再生数趋近于$\mathcal{R}_0^*$。这表明定理 4.4(i) 中的结果关键取决于 μ 和 ν。如果能够保证人群保持依从性（即，如果 μ 足够小且 ν 足够大），就能实现无病状态的渐近稳定性；但这也表明，若无法作出这样的保证，暴发仍有可能发生。

最后，出于技术原因，我们的定理要求对扩散系数作出假设。为了同时满足所有这些假设，最简单的做法是考虑所有扩散系数都相同的情况。然而，在模拟中，我们可以改变这些系数，以通过实证观察其行为。具体而言，交替将 d_I 和 d_{I^*} 设为非常大或非常小，观察其行为很有意思，因为它们分别是式 (46)、(47) 和式 (34)、(35) 中出现的系数。对于以下所有模拟，我们使用与...
...相同的参数值

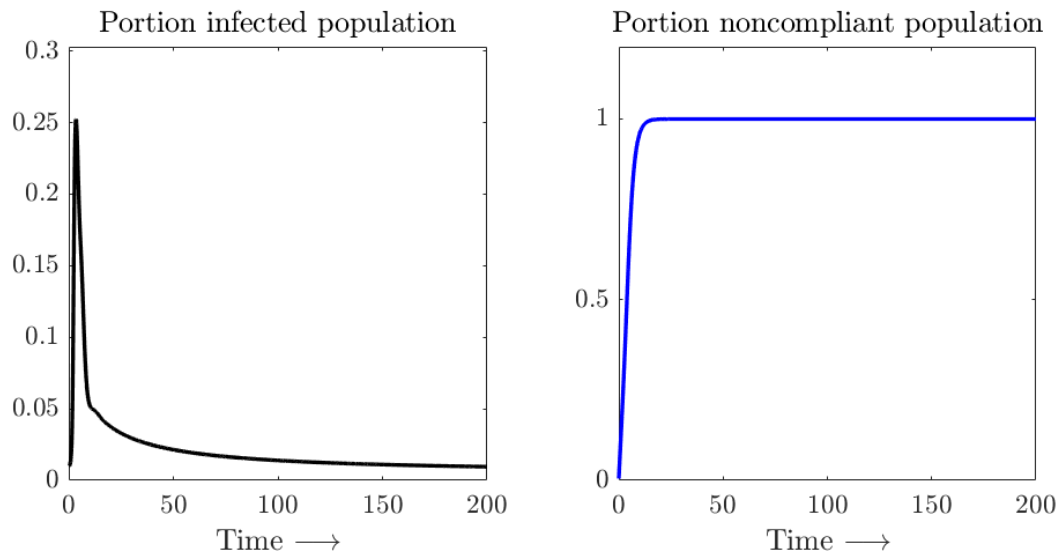

图4：如果感染率 β 足够高，即使绝大多数人口都合规，有效再生数仍然很高，而且再生数只会进一步增加，因此不可能遏制疾病并朝着无病状态发展。请注意，这证明了定理 4.2(ii)。

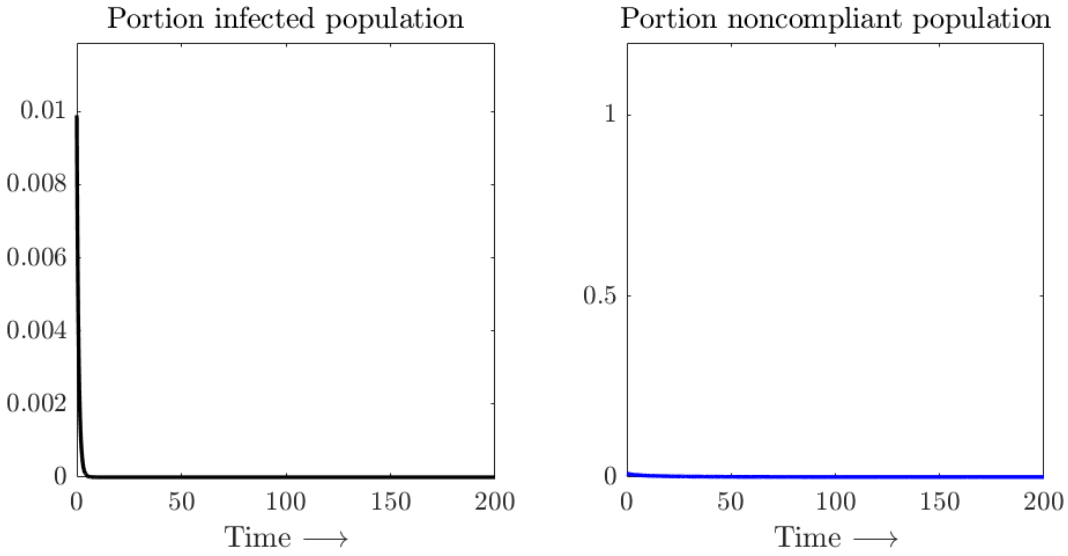

图5：当 μ 较小而 ν 较大时，不遵从人群的比例始终很小，这意味着疾病的有效再生数保持较低，因此不会发生暴发。

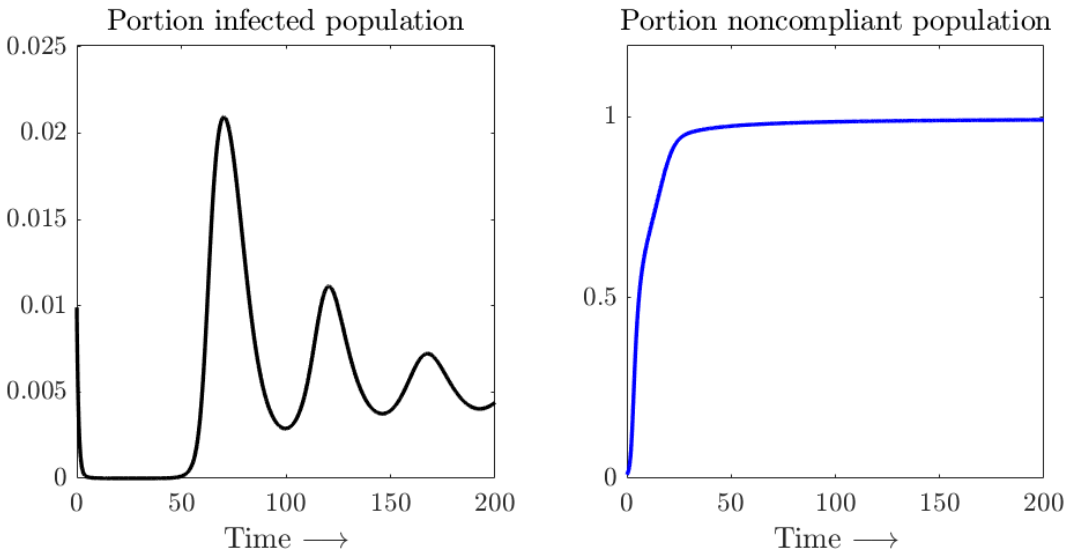

图6：当 μ 较大且 ν 较小时，不遵从人群的比例会增加，从而提高疾病的有效再生数，导致暴发。

与图6相同，但在图7和图8中，我们改变 d_I 和 d_{I^*} 的值，同时将所有其他扩散系数固定为 $d = 0.02$，而在图9中，我们改变 d_{S^*}，d_{I^*} 和 d_{R^*} 的值，同时将其他扩散系数固定为 $d = 0.02$.

在图6中，我们注意到，首次暴发大约发生在时间 $t = 50$。在图7中，当d_I，d_{I^*}增加到1（相当于增加50倍）时，首次暴发要到时间 $t = 100$左右才会发生；当 d_I，d_{I^*}增加到3时，首次暴发要到 $t = 150$左右才会发生。 d_I，d_{I^*}越大，峰值也会变得越尖锐。相比之下，在图8中，当 d_I，d_{I^*}减小到0.0004（相当于减少50倍）时，首个峰值仍大约出现在 $t = 50$；首次暴发可能不可能早于这个时间发生，因为这种参数校准要求人口中有很大一部分是不遵从者，才能引发暴发。不过在这种情况下，峰值会被平缓到彼此融合的程度，而且出现得更加频繁。因此，经验证据似乎表明，在其他扩散系数保持不变的情况下，提高感染人群的扩散系数会延缓流行病，同时使感染峰值更加尖锐。这些观察结果可能对政策制定者有所启发，也在一定程度上揭示了反应扩散系统所呈现的有趣中间时段动力学，而这类动力学往往极难量化。

图9中的最后一组模拟展示了在其他扩散系数保持不变的情况下，提高不遵从人群的扩散系数（d_{S^*}，d_{I^*}，d_{R^*}）所产生的影响。回想一下，如果$d_S = d_I = d_R$且 $d_{S^*} = d_{I^*} = d_{R^*}$，那么合规人群 $N = S + I + R$和不遵从人群 $N^* = S^* + I^* + R^*$满足由（51）、（52）给出的SIS型系统，其中 N被视为“易感”人群，N^*被视为“感染”人群。根据这一解释，我们可以借鉴SIS文献中的启发性结果。例如，[2]的作者分析了一个类似SIS系统的稳态地方病解在易感人群的扩散系数趋于零、而感染人群的扩散系数保持不变时的行为（等价地说，即感染人群的扩散系数趋于无穷大、而易感人群的扩散系数保持不变时的极限行为）。他们证明，在这一极限下，感染人群的稳态地方病解趋于零。由于他们的系统略有不同，这一结果并不能直接应用于（51）、（52），但它让我们有理由预期

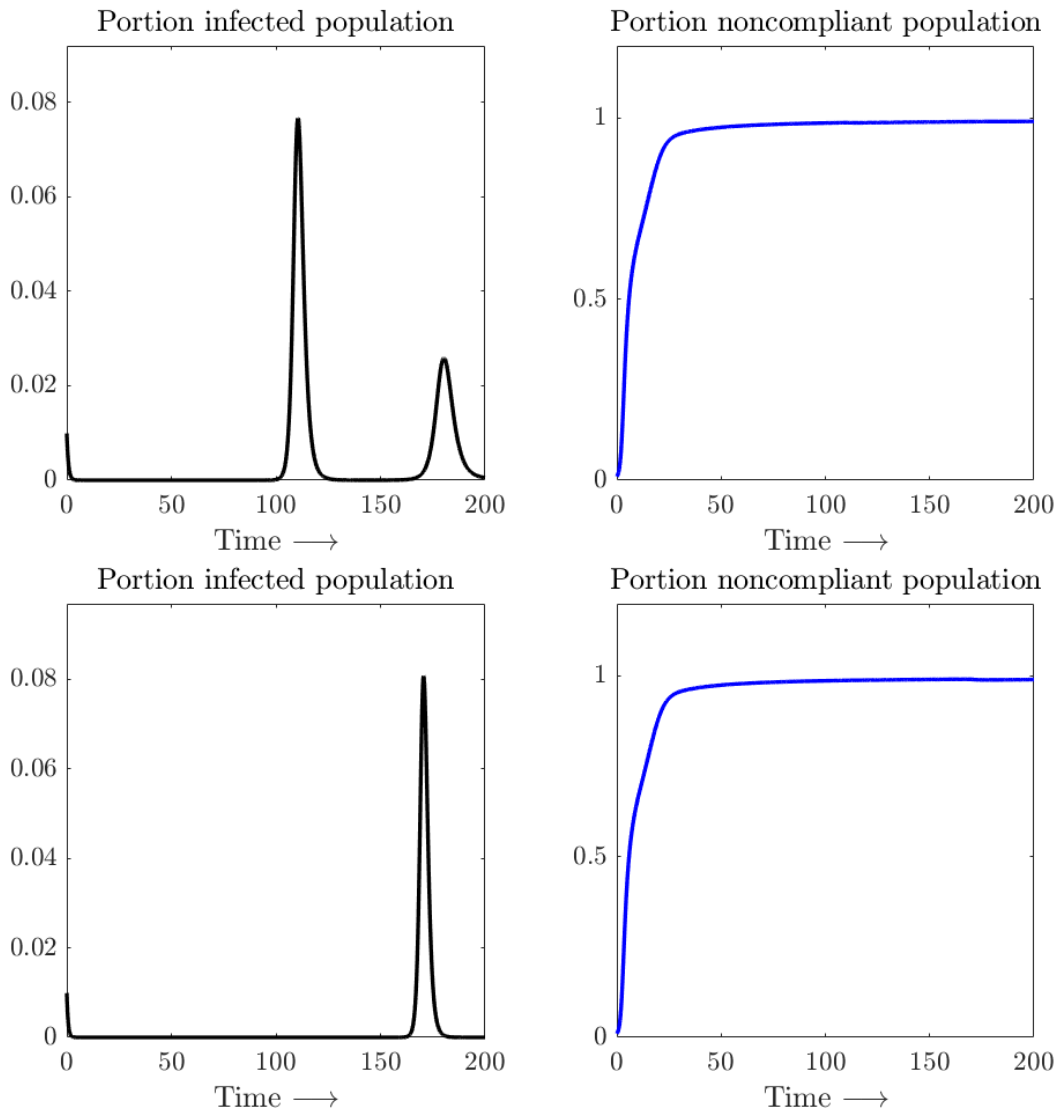

图7：使用与图6相同的参数值进行模拟，但 $d_I = d_{I^*} = 1$ （上）或$d_I = d_{I^*} = 3$ （下）除外。根据经验，当感染人群的扩散系数增大时，初始暴发会被延缓，感染峰值也会变得更加尖锐。

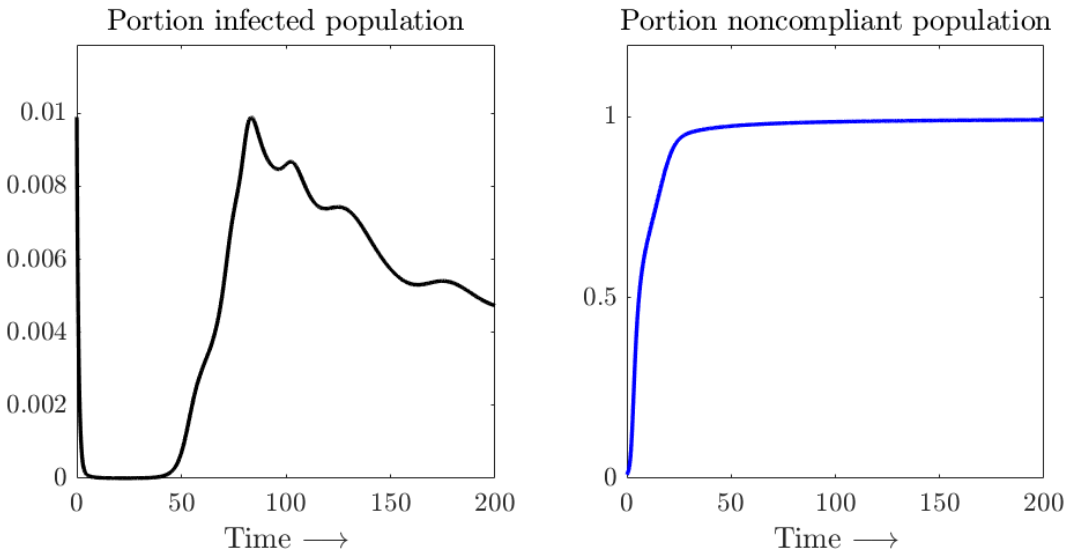

图8：模拟中使用与图6相同的参数值，但 $d_I = d_{I^*} = 0.0004$ 除外。降低感染人群的扩散系数会使感染峰值彼此模糊、融合。初始暴发发生的时间与图6大致相同，因为不遵从人群必须增长到足够大的规模，才会发生暴发。

随着 $d_{S^*}, d_{I^*}, d_{R^*}$ 增大， N^* 的长时间极限应趋于零。模拟结果支持这一结论。在图9中，我们使用与图6相同的参数，但依次将 $d_{S^*}, d_{I^*}, d_{R^*}$ 从 0.02 增至 0.05，再增至 0.1，接着增至 1，最后增至 5。由于起初增幅较小（图9上方的图像），对不遵从人群总数的影响并不明显，但仍可看出这种影响，因为不遵从人群略有减少，会使流行病发展得更慢。在图9下方的两幅图像中，增大扩散系数的影响更加显著：当 $d_{S^*} = d_{I^*} = d_{R^*} = 1$ 为 5 时，不遵从人群总数似乎会稳定在低得多的水平，因此，在所示时间范围内不会发生流行病。

6 结论与未来方向

本文提出了一种反应扩散型SIR流行病模型，其中对预防措施的不遵从会与疾病一样通过质量作用传播。一个关键假设是，疾病在人群中不遵从预防措施的人群中传播得更快。本文证明了该系统的整体存在性，并在不同参数范围下进行了 $\mathcal{R}_0$ 分析并研究了其渐近行为。

我们提出四个未来研究方向。首先，在定理4.2和4.4中，我们在以下两种替代假设下证明了无病状态的全局稳定性： $\xi = 0$ 或 $\xi = 1$ （因此，新引入人口中的成员分别为不遵从者或遵从者）。如果在 $\xi \in (0, 1)$ 的情况下也能证明类似结果，将会非常有意义；此时，稳态系统为以下耦合非线性椭圆方程：

$$\begin{aligned} -d_S \Delta \tilde{S} &= \xi b(x) - \mu \tilde{S}\tilde{S}^* + \nu \tilde{S}^* - \delta \tilde{S}, \\ -d_{S^*} \Delta \tilde{S}^* &= (1-\xi) b(x) + \mu \tilde{S}\tilde{S}^* - \nu \tilde{S}^* - \delta \tilde{S}^*. \end{aligned} \tag{64}$$

在这种情况下，如果 $d_S \neq d_{S^*}$，则甚至不清楚解是否存在。然而，如果 $d_S = d_{S^*}$，那么 $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$可以先考虑 $\Sigma = S + S^*$（它满足一个简单的线性椭圆方程），$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$在求得 Σ后， S 和 S^* 分别满足各自彼此解耦的非线性椭圆方程，而我们已经证明了这些方程解的存在性。然而，在这种情况下，主特征值和再生数的推导不再那么简单。仍然可以像 [38], 中那样，将再生数定义为某个椭圆算子的谱半径，并得到局部稳定性，但这样的定义定量性较弱（也就是说，更难准确看出再生数如何依赖于相关参数），而且也不太清楚如何得到全局稳定性的条件。对这些问题进行全面探究，可能会非常有趣且富有启发性。

其次， [28]在网络理论框架下开展了与本文类似的工作。开发其他类型的流行病模型可能会很有意义，例如以主体为基础的模型或自激点过程模型，以类似的方式纳入人类行为。对这些不同类型模型的分析与综合，或可阐明社会传染理论在流行病学中的不同含义。第三，近年来，人们越来越关注将传染病的宿主体内模型与宿主间模型相耦合的问题（甚至在新冠肺炎暴发之前） [26, 5, 30, 39]。以类似于本文所建议的方式将人类行为纳入这些模型，可能会实现对大流行病的高度逼真建模。最后，根据我们关于纳入人类行为方式的假设，本文阐明了流行病的不同方面。然而，这项工作完全是定性的。若要推动其走向现实世界的应用，可能有必要开展一项纳入参数估计的数据驱动研究。

致谢

CP在一定程度上得到了亚利桑那大学数据驱动发现研究培训组的NSF DMS-1937229资助。
WW在一定程度上得到了AMS-西蒙斯旅行资助，并希望感谢Chris Henderson提出的许多有益意见和评论。两位作者均获得了通过亚利桑那大学数学系提供的博士后合作研究资助。作者感谢两位匿名审稿人提出的极为详尽且富有帮助的意见，尤其是关于定理 4.4证明后的注，以及对模拟和结果部分的建议。

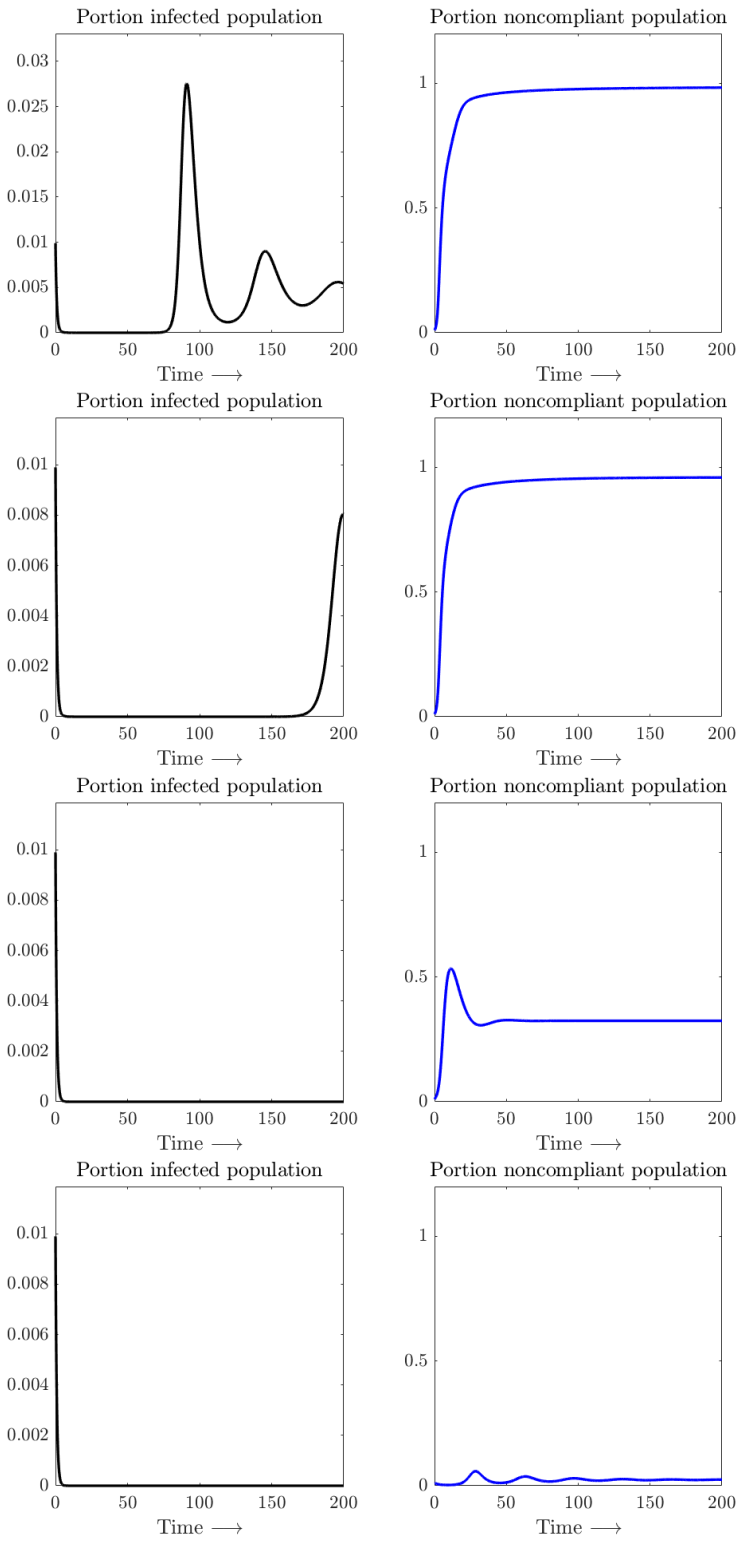

图9：参数与图6中的相同，除了 d_{S^*}、d_{I^*}、d_{R^*} 增至0。05（顶部）、0。1（第二个）、1（第三个）、5（底部）。随着这些系数增大，不遵从人口总量趋于较小值，这与 [2]所提供的直觉相符。

参考文献

[1] Mir M Ali、Aliaksandr Amialchuk 和 Debra S Dwyer。青少年大麻使用的社会传染效应。*PloS one*，6(1)：e16183，2011年。[2] Linda J. S. Allen、B. M. Bolker、Yuan Lou 和 A. L. Nevai。SIS流行病反应扩散模型稳态的渐近剖面。离散与连续动力系统，21(1)：1–20，2008年。[3] Eric Avila-Vales 和 ´Angel GC P´erez。异质环境中具有一般发生率的反应-扩散SIRS模型的动力学。*Zeitschrift f¨ur angewandte Mathematik undPhysik*，73(1)：1–23，2022年。[4] Tarun Bastiampillai、Stephen Allison 和 Sherry Chan。抑郁症会传染吗？社会网络和传染理论影响的重要性。*Australian & New ZealandJournal of Psychiatry*，47(4)：299–303，2013年。[5] Nicola Bellomo、Diletta Burini 和 Nisrine Outada。具有变异株和突变的新冠肺炎多尺度模型。*Networks & Heterogeneous Media*，17(3)，2022年。[6] Henri Berestycki、Jean-Michel Roquejoffre 和 Luca Rossi。具有快速扩散的沿线流行病传播。数学生物学通报，83(1)：2，2021年。[7] Courtney Bir 和 Nicole Olynk Widmar。美国居民应对新冠肺炎疫情时佩戴口罩中的社会压力、利他主义、搭便车行为与不遵从。*Social sciences& humanities open*，4(1)：100229，2021年。[8] Marcelo Bongarti、Luke Diego Galvan、Lawford Hatcher、Michael R. Lindstrom、Christian Parkinson、Chuntian Wang 和 Andrea L. Bertozzi。传染病的替代SIAR模型及其在研究不遵从行为中的应用。*Mathematical Models and Methodsin Applied Sciences*，32(10)：1987–2015，2022年。[9] Nicholas A Christakis 和 James H Fowler。社会传染理论：考察动态社交网络与人类行为。医学统计学，32(4)：556–577，2013年。[10] Keng Deng。具有线性源项的SIR反应扩散模型的渐近行为。*Discrete & Continuous Dynamical Systems-Series B*，25(11)，2019年。[11] Daniel Eisenberg、Ezra Golberstein、Janis L Whitlock 和 Marilyn F Downs。心理健康的社会传染：来自大学室友的证据。卫生经济学，22(8)：965–986，2013年。[12] Juan Pablo Guti´errez-Jara、Katia Vogt-Geisse、Maritza Cabrera、Fernando C´ordova-Lepe 和 Mar´ıa Teresa Mu˜noz-Quezada。人类流动性和行为对新冠肺炎数学模型中疾病传播的影响。科学报告，12(1)：1–18，2022年。[13] Stephen Hills 和 Yolanda Eraso。新冠肺炎疫情期间不遵守社交距离规定的相关因素：逻辑回归分析。*BMC*公共卫生，21(1)：1– 25，2021年。[14] Nathan O Hodas 和 Kristina Lerman。社会传染的简单规则。科学报告，4(1)：1–7，2014年。

[15] Wenzhang Huang、Maoan Han 和 Kaiyu Liu。用于疾病传播的SIS反应扩散流行病模型的动力学。数学生物科学与工程，7(1)：51–66，2010年。[16] Semu M Kassa、John BH Njagarah 和 Yibeltal A Terefe。新冠肺炎缓解策略分析：数学建模视角。《混沌、孤子与分形》，138：109968，2020年。[17] Nikolai Vladimirovich Krylov。索伯列夫空间中的椭圆型与抛物型方程讲义，第96卷。美国数学会，2008年。[18] Christina Kuttler。反应扩散方程及其应用。载于互联网研讨会，2011年。[19] Ol'ga A Ladyzenskaja、Vsevolod Alekseevich Solonnikov 和 Nina N Ural'ceva。抛物型线性与拟线性方程，第23卷。美国数学会，1988年。[20] Emily E Levitt、Mahmood R Gohari、Sabrina K Syan、Kyla Belisario、Jessica Gillard、Jane DeJesus、Anthony Levitt 和 James MacKillop。新冠肺炎疫情期间加拿大公共卫生指南遵从情况与感知到的政府效能：一项纵向队列研究的发现。《柳叶刀区域健康—美洲》，9：100185，2022年。[21] David A Levy 和 Paul R Nail。传染：理论与实证综述及再概念化。《遗传、社会与普通心理学专论》，1993年。[22] Bo Li 和 Qunyi Bie。SIRS反应扩散流行病模型的长期动力学。数学分析与应用杂志，475(2)：1910–1926，2019年。[23] Jens Ludwig 和 Jeffrey R Kling。犯罪会传染吗？《法律与经济学杂志》，50(3)：491–518，2007年。[24] Yantao Luo、Long Zhang、Tingting Zheng 和 Zhidong Teng。具有体液免疫、细胞间传播和非线性感染率的扩散病毒感染模型分析。《物理学*A*：统计力学及其应用》，535：122415，2019年。[25] Jeff Morgan。反应扩散系统的有界性与衰减结果。《*SIAM*数学分析杂志》，21(5)：1172–1189，1990年。[26] Lisa N Murillo、Michael S Murillo 和 Alan S Perelson。迈向流感感染的多尺度建模。*Journal of theoretical biology*，332：267–290，2013年。[27] Amy Nivette、Denis Ribeaud、Aja Murray、Annekatrin Steinhoff、Laura Bechtiger、Urs Hepp、Lilly Shanahan 和 Manuel Eisner。瑞士年轻成年人对新冠肺炎相关公共卫生措施的不遵从：来自一项纵向队列研究的见解。《社会科学与医学》，268：113370，2021年。[28] Kaiyan Peng、Zheng Lu、Vanessa Lin、Michael R Lindstrom、Christian Parkinson、Chuntian Wang、Andrea L Bertozzi 和 Mason A Porter。疾病传播与竞争性观点协同演化的多层网络模型。*Mathematical Models and Methods in AppliedSciences*，31(12)：2455–2494，2021年。[29] Michel Pierre。具有质量控制的反应扩散系统的整体存在性：综述。《米兰数学杂志》，78(2)：417–455，2010年。

[30] D Bhanu Prakash、DKK Vamsi、D Bangaru Rajesh 和 Carani B Sanjeevi。宿主体内、宿主间的控制干预策略及其在新冠肺炎治疗和传播中的效果：一种多尺度建模方法。计算与数学生物物理学，8(1):198–210，2020年。[31] Xinzhi Ren、Yanni Tian、Lili Liu 和 Xianning Liu。一种具有细胞间传播的宿主体内艾滋病病毒反应-扩散模型。数学生物学杂志，76(7):1831–1872，2018年。[32] Joseph Lee Rodgers、David C Rowe 和 Maury Buster。社会传染、青少年性行为与妊娠：一种非线性动态 EMOSA 模型。发展心理学，34(5):1096，1998年。[33] Cristiana J Silva、Guillaume Cantin、Carla Cruz、Rui Fonseca-Pinto、Rui Passadouro、Estevˆao Soares Dos Santos 和 Delfim FM Torres。新冠肺炎复杂网络模型：人类行为、伪周期解与多次流行病波。数学分析与应用杂志，514(2):125171，2022年。[34] Hal L Smith。单调动力系统：竞争系统和合作系统理论导论：竞争系统和合作系统理论导论。第41卷。美国数学会，2008年。[35] Joel Smoller。激波与反应-扩散方程，第258卷。施普林格科学与商业媒体，2012年。[36] Madison Stoddard、Debra Van Egeren、Kaitlyn E Johnson、Smriti Rao、Josh Furgeson、Douglas E White、Ryan P Nolan、Natasha Hochberg 和 Arijit Chakravarty。个体最优选择可能会对新冠肺炎防控造成集体性灾难。*BMC*公共卫生，21(1):1–12，2021年。[37] Weiming Wang、Yongli Cai、Mingjiang Wu、Kaifa Wang 和 Zhenqing Li。一种反应-扩散流行病模型的复杂动力学。非线性分析：现实世界应用，13(5):2240–2258，2012年。[38] Wendi Wang 和 Xiao-Qiang Zhao。反应-扩散流行病模型的基本再生数。*SIAM*应用动力系统杂志，11(4):1652–1673，2012年。[39] Xueying Wang、Sunpeng Wang、Jin Wang 和 Libin Rong。一种新冠肺炎动力学多尺度模型。数学生物学通报，84(9):99，2022年。[40] Zhuoqun Wu、Jingxue Yin 和 Chunpeng Wang。椭圆型与抛物型方程。世界科学出版社，2006年。