由扭结和Q球构成的缺陷：解析解与稳定性

A. Alonso-Izquierdo[(a,b)] 和 C. Garz´on S´anchez[(a)](a) 应用数学系，萨拉曼卡大学，Casas del Parque 2，37008 - 萨拉曼卡，西班牙(b) IUFFyM，萨拉曼卡大学，Plaza de la Merced 1，37008 -萨拉曼卡，西班牙

arXiv:2303.01537v1 [hep-th] 2 Mar 2023

2023年3月6日

摘要

本文通过解析方法，识别了(1+1)维闵可夫斯基时空中一类包含实场和复场的标量场理论中的所有缺陷型解。我们发现了三种类型的解：(a) 不含 Q球的拓扑扭结；(b) 由拓扑扭结与 Q球耦合构成的缺陷；(c) 一类单参数解，其中 Q球与非拓扑孤子相结合。本文还讨论了这些解的性质及其线性稳定性。

1 引言

Q-球是在非线性场论中出现的随时间变化的非拓扑孤子，此外，它们还守恒与全局 $U(1)$ 对称性相关的诺特荷 $[1,2]$。这些解之所以具有物理意义，是因为在标准模型的超对称扩展中， Q-球可以在早期宇宙中通过阿弗莱克-戴因机制 $[3,4]$产生，从而对暗物质有所贡献。在开创性论文 $[5]$, 中，Friedberg、Lee和Sirlin研究了这类解在一个理论模型中的存在性；该模型涉及三维空间中与实标量场耦合的复标量场。该模型中场之间的非线性耦合由一个四次多项式刻画，这意味着该理论是可重整化的。作者描述了模型中存在的 Q-球，并提供了一套详尽方案，用于分析在施加保持守恒诺特荷不变的小涨落时，这些解的线性稳定性。本文提出的定理 3 指出，保证 Q-球经典稳定性的充要条件是：在这些解上取值的小涨落算子只有一个负特征值，并且诺特荷 Q 关于内部旋转频率 ω 的导数为负。在这一判据中，频率 ω 取正值。此开创性工作之后，人们在不同背景下研究了 Q-球的存在性及其性质，参见 $[6]$及其中的参考文献。其中一些特定情形涉及复标量场理论 $[7–10]$,、阿贝尔规范理论 $[11–14]$, 、陈-西蒙斯理论 $[15,16]$, 、非阿贝尔理论 $[17–19]$, 等。

一般而言，涉及 Q-球的模型非常复杂，因此无法获得这些非拓扑孤子的解析表达式。近期的研究已对某些具有一个复标量场的理论中的 $[21,22]$ Q-球进行了精确计算，这些理论定义在 (1+1) 维空间中。本文研究一类定义在 (1+1) 维空间中的场论单参数族，其中包含一个实场与一个

复场之间的耦合。模型参数可以理解为该模型相对于一个 $O(3)$ 不变线性 Sigma 模型的形变程度。值得注意的是，所有缺陷型解都可以通过解析方法确定，这使得研究其性质更加容易。这些解共有三种不同类型。首先，在没有 Q-球的情况下，实场分量中会出现标准的拓扑扭结。第二类可描述为由一个定义在实分量中的拓扑扭结和一个沿复场轴旋转的 Q-球构成的缺陷。在我们看来，这是一种具有新颖性质的新型解。例如，拓扑扭结与 Q-球之间的这种耦合构成了一种新情形，似乎无法适用前文提到的定理 3。这些解不满足定理 3 中提出的任何假设。尽管如此，本文将证明它们是稳定的。最后，我们还确定了一类单参数缺陷族，其中包含一个非拓扑孤子和一个 Q-球。在这种情况下，可以应用定理 3 证明这些解不稳定。

本文结构如下：第 2 节介绍本文研究的变形 $O(3)$ 线性 sigma 模型族及其性质。第 3 节对前文提及的由扭结和 Q-球组成的缺陷进行解析识别与描述。第 4 节专门研究这些复合孤子的线性稳定性。最后，第 5 节总结本文的结论。

2 模型

我们将研究一个定义在 $(1+1)$ 维闵可夫斯基时空中的场论，其中包含一个实标量场与一个复标量场之间的耦合。该模型的动力学由以下作用量泛函刻画

$$S = \int d^2x \Big[\frac{1}{2}\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi + \frac{1}{2}\partial_\mu \overline{\psi} \, \partial^\mu \psi - U(\phi, |\psi|) \Big] \quad , \tag{1}$$

其中，ϕ 和 $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ 分别为实标量场和复标量场，即 $\phi \in$Maps$(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{R})$ 和 $\psi \in$ Maps$(\mathbb{R}^{1,1}, \mathbb{C})$。(1) 中，$\overline{\psi}$ 表示 ψ 的复共轭。按照这一领域的惯例，闵可夫斯基度规 $g_{\mu\nu}$ 取为 $g_{00} = -g_{11} = 1$ 和 $g_{12} = g_{21} = 0$。本文将研究的势能项 $U(\phi, |\psi|)$ 由以下半正定表达式给出

$$U(\phi, |\psi|; \sigma) = \frac{1}{2}\Big(\phi^2 + |\psi|^2 - 1\Big)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 |\psi|^2 \tag{2}$$

其中 $\sigma \in \mathbb{R}$。关系式 (2) 是关于实场 ϕ 和复场 ψ 的模的四次多项式。注意，对于 $\sigma = 0$

$$U(\phi, |\psi|; 0) = \frac{1}{2}\Big(\phi^2 + \psi_1^2 + \psi_2^2 - 1\Big)^2 \quad , \tag{3}$$

因此，该系统可以理解为一个 $O(3)$ 线性西格玛模型的形变，其中参数 σ 衡量了相对于旋转不变情形的不对称性。势能有两个临界点，分别位于 $(\phi, \psi) = v_\pm = (\pm 1, 0)$，在这些点上势能为零，$U(v_\pm) = 0$。(2) 的海森矩阵在这些点处的取值为

$$\mathcal{H}[v_\pm] = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial \phi \, \partial |\psi|} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial \phi \, \partial |\psi|} & \frac{\partial^2 U}{\partial |\psi|^2} \end{pmatrix} \Bigg|_{v_\pm} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} \quad ,$$

这意味着 $v_\pm$ 是势能极小值，正如预期。尽管与 (3) 相关的 $O(3)$ 对称性在 $\sigma \neq 0$ 处破缺，但仍保留了 $U(1)$ 对称性。显然，该模型在以下变换下保持不变

相对于整体变换 $\psi \to e^{i\beta}\psi$，这导致守恒的诺特荷

$$Q = \frac{1}{2i}\int \left(\,\overline{\psi}\,\partial_t\psi - \psi\,\partial_t\overline{\psi}\,\right) dx \quad . \tag{4}$$

由作用量泛函 (1) 得到的场方程为

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial U(\phi,|\psi|)}{\partial\phi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\psi}{|\psi|}\frac{\partial U(\phi,|\psi|)}{\partial|\psi|} = 0 \quad . \tag{5}$$

本文旨在寻找由一个扭结（由实场定义）和一个 Q-球（由复场定义）构成的解。为此，采用试探形式

$$\phi(x,t) = f(x) \quad , \quad \psi(x,t) = g(x)\,e^{i\,\omega\,t} \tag{6}$$

将其代入场方程 (5)，得到常微分方程组

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial U(f,g)}{\partial f} \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial U(f,g)}{\partial g} - \omega^2 g \tag{7}$$

针对实函数 $f(x)$ 和 $g(x)$。式 (6) 中的量 ω 是 Q-球的内部旋转频率。不失一般性，我们可以认为 ω 为正。此时，式 (7) 中的势能项 U 变为

$$U(f,g;\sigma) = \frac{1}{2}\Big(f^2+g^2-1\Big)^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 g^2 \tag{8}$$

而守恒的诺特荷 (4) 为

$$Q = \omega\int_{-\infty}^{\infty}(g(x))^2 dx \quad . \tag{9}$$

在这种情况下，能量泛函 $E[f,g]$ 可写为空间坐标上能量密度 $\mathcal{E}[f,g]$ 的积分，即

$$E[f,g] = \int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}[f,g]\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx\Big[\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial f}{dx}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g}{dx}\Big)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 g^2 + U(f,g;\sigma)\Big] \tag{10}$$

这意味着 系统的解必须满足以下渐近条件 ns

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) \in \mathcal{M} \quad , \quad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{df}{dx} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{dg}{dx} = 0 \tag{11}$$

为了使总能量 (10) 有限。在 (11) $\mathcal{M} = \{-1,1\}$ 中，实场可能取值的集合，这些取值会使势能项 $U(f,g)$ 为零。从 (7) 也可以清楚看出，该问题涉及有效势

$$\overline{U}(f,g;\sigma) = U(f,g;\sigma) - \frac{1}{2}\,\omega^2\,g^2 = \frac{1}{2}\Big(f^2+g^2-1\Big)^2 + \frac{1}{2}(\sigma^2-\omega^2)\,g^2 = U(f,g;\Omega) \quad , \tag{12}$$

其函数形式与 (8) 相同，但引入了新的模型参数 Ω，其定义为

$$\Omega^2 = \sigma^2 - \omega^2 \quad . \tag{13}$$

现在，方程（7）可写成更紧凑的形式

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\overline{U}(f,g)}{\partial f} \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial\overline{U}(f,g)}{\partial g} \quad . \tag{14}$$

有效势（12）取决于内部旋转频率。图1描绘了在模型参数 σ 固定时，势 $U(f,\ g;\ \sigma)$ 对应若干个 ω 取值的情况。在点 $v_{\pm}$ 处计算的该有效势的海森矩阵为

$$\overline{\mathcal{H}}[v_{\pm}] = \left(\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial \phi^2} & \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial \phi\, \partial |\psi|} \\ \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial \phi\, \partial |\psi|} & \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial |\psi|^2} \end{array} \right) \Bigg|_{v_{\pm}} = \left(\begin{array}{cc} 4 & 0 \\ 0 & \sigma^2 - \omega^2 \end{array} \right) \quad .$$

这意味着，对于 $\omega^2 < \sigma^2$，$v_{\pm}$ 是 $U(f,\ g)$ 的绝对极小值；但在其他情况下，它们会成为鞍点。因此，我们所关注的拓扑缺陷要存在，一个必要条件是

$$\omega^2 < \sigma^2 \quad .$$

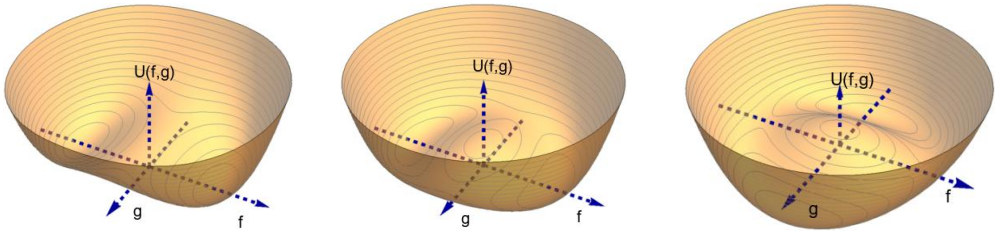

图1：模型参数 $\sigma = 1.5$ 下，取内部旋转频率的若干不同值时，有效势 $U(f,\ g;\ \sigma)$ 的图像：(a) $\omega = 0$，(b) $\omega = 1.2$ 和 (c) $\omega = 1.8$。

将方程组 (14) 与条件 (11) 一并求解，相当于寻找这样的解：对于牛顿方程，这些解渐近地始于并终于真空点 $v_{\pm}$；其中 x 起时间的作用，粒子的位置由 $(f,\ g)$ 确定，而粒子的势能为 $V(f,\ g) = -U(f,\ g)$。注意，微分方程 (14)，或等价地说方程 (7)，可由有效泛函推导得到

$$\overline{E}[f,g;\sigma] = \int dx \Big[\frac{1}{2} \Big(\frac{df}{dx} \Big)^2 + \frac{1}{2} \Big(\frac{dg}{dx} \Big)^2 + \overline{U}(f,g;\sigma) \Big] \quad . \tag{15}$$

保持 ω 不变，即 $\delta E[f, g;\ \sigma]|_{\omega} = 0$。请注意，泛函（10）与 (15)

$$E[f,g;\sigma] = \overline{E}[f,g;\sigma] + \omega\, Q \tag{16}$$

之间满足如下关系。或者，方程（7）可由泛函（10）在保持Q 不变时的驻点导出，即 $(\delta E)\,|_Q = 0$。这一切意味着，$E[f,g;\ \sigma]$ 是由泛函（10）导出的勒让德变换，见 [5]，从而得到如下关系

$$\frac{d\overline{E}}{d\omega}\Big|_E = -Q \quad \text{and} \quad \frac{dE(Q)}{dQ}\Big|_{\overline{E}} = \omega \quad . \tag{17}$$

由扭结和 Q-球组成的3类缺陷

在本节中，我们将通过解析方法识别前面提到的、涉及扭结与 Q-球共存的缺陷。对于我们的模型，方程 (7)（或等价地，方程 (14)）可写为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2f(f^2 + g^2 - 1) \quad , \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2g(f^2 + g^2 - 1) + \Omega^2\, g \quad . \tag{18}$$

这些方程在 MSTB 模型中多组分扭结解的研究背景下已得到充分研究。关于该模型的历史及其解析性质的全面总结，见 [23] 及其中的参考文献。关键在于，通过在内部空间中引入椭圆变量（f，g），可以求解方程 (18)；这些变量的等坐标曲线由以 $F_{\pm} = (\pm\Omega,\ 0)$ 为焦点的椭圆和双曲线组成。在这些变量下，微分方程 (18) 是可分离的。可以验证，当 $\Omega^2 = \sigma^2 - \omega^2 \geq 1$ 时，系统中只存在一个拓扑扭结及其反扭结，并没有容纳 Q-球的空间。这些拓扑缺陷可表示为

$$\mathcal{K}_1(x) = ((-1)^{\alpha}\ \tanh \overline{x}\,,\, 0) \quad , \quad \alpha = 0, 1, \tag{19}$$

其总能量为 $E[\mathcal{K}_1(x)] = 4/3$。在（19）中，$x = x - x_0$ 其中 x_0 可解释为解的中心。请注意，（19）中采用了多组分记号（f，$e^{i\omega t}g$）来表示这些解。因此，如果第二个分量为零，该解就不包含 Q-球。请注意

$$Q[\mathcal{K}_1(x)] = 0 \tag{20}$$

另一方面，在 $0 < \Omega^2 < 1$ 这一参数区间内，可能存在 Q 球。这意味着，模型（2）中存在由扭结和 Q-球组成的缺陷的必要充分条件是

$$\max\{0, \sigma^2 - 1\} < \omega^2 < \sigma^2 \quad . \tag{21}$$

前文所述的解可简单地表示为

$$\mathcal{K}_2(x,t) = \left((-1)^{\alpha} \tanh(\Omega\,\overline{x})\,,\, e^{i\omega t}\sqrt{1-\Omega^2}\,\mathrm{sech}\,(\Omega\,\overline{x})\right) \quad , \quad \alpha = 0, 1, \tag{22}$$

如图 2 所示。可以看出，该解由实场轴上的扭结型分布，以及在内部空间复分量中以旋转频率 ω旋转的非拓扑孤子（Q-球）组成。

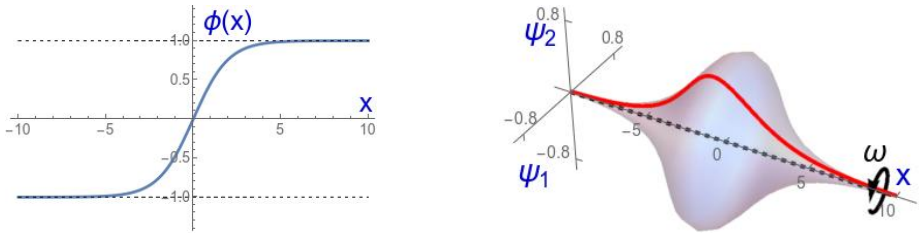

图 2：由实分量中的拓扑扭结和内部空间复分量中的 Q-球组成的解 $\mathcal{K}_2(x,\ t)$ 的图示，其中取特定值 $\Omega = 0.5$ 和 $\alpha = 0$。

为完整起见，这类缺陷的诺特荷 (9) 为

$$Q[\mathcal{K}_2(x,t)] = \frac{2\omega(1-\Omega^2)}{\Omega} = 2\omega\,\frac{1-\sigma^2+\omega^2}{\sqrt{\sigma^2-\omega^2}} \tag{23}$$

而其总能量的形式为

$$E[\mathcal{K}_2(x,t)] = \frac{2(2\omega^4 - \sigma^4 - \sigma^2(\omega^2-3))}{3\sqrt{\sigma^2-\omega^2}} \quad . \tag{24}$$

前面的表达式仅适用于范围 $\omega^2 \in (\sigma^2 - 1, \sigma^2)$，在此范围内解 (22) 有明确定义。注意，$\frac{dQ[\mathcal{K}_2(\ x\ t\ ]}{d\omega} = 2\Omega^{-3}[2\sigma^2(1-\Omega^2)+4\omega^2\Omega^2] > 0$。在文献中常见的模型里，这个条件意味着 Q-球是不稳定的，正如 [5] 中的定理 3 所述。不过，正如

将在下一节证明的那样，解 (22) 不符合该定理的假设；事实上，它们在保持诺特荷 (23) 不变的小涨落下是稳定的。看来，存在于实分量中的扭结所具有的拓扑性质，保护了 Q-球这一组分，使其不会衰变为真空构型。在我们看来，这种行为使复合缺陷 (22) 成为这一背景下一类新型解。

除了解（19）和（22）之外，还存在一个单参数解族，事实证明，它是非拓扑扭结与 Q-球的组合。可以验证，该表达式

$$\mathcal{K}_3(x,t;\gamma)=\left((-1)^{\alpha}\frac{\Omega_-\cosh(\Omega_+x_+)-\Omega_+\cosh(\Omega_-x_-)}{\Omega_-\cosh(\Omega_+x_+)+\Omega_+\cosh(\Omega_-x_-)},\frac{2\Omega_+\Omega_-e^{i\omega t}\sinh\bar{x}}{\Omega_-\cosh(\Omega_+x_+)+\Omega_+\cosh(\Omega_-x_-)}\right) \tag{25}$$

当 $\Omega_\pm=1\pm\Omega$、 $x_\pm=\bar{x}-\gamma\,\Omega(\Omega\mp1)$ 以及 $\alpha=0,1$ 时满足场方程（5）。 $\mathcal{K}_3(x,t;\gamma)$-族中的每个成员都由参数 $\gamma\in\mathbb{R}$ 的取值确定。它们都具有以下特征：实分量中存在一个非拓扑扭结（渐近地从某个真空开始并最终回到同一个真空），并且在位于 $x=0$ 处的 Q-球轮廓中出现一个节点。在图 3 中描绘了缺陷 $\mathcal{K}_3(x,t;0)$。对于 $\gamma=0$ 这一情形，解的轮廓关于空间点 $x=0$ 对称。如果两个部分诺特荷

$$Q_1=\omega\int_{-\infty}^{0}(g(\bar{x}))^2d\bar{x}\quad,\quad Q_2=\omega\int_{0}^{\infty}(g(\bar{x}))^2d\bar{x}$$

（使得 $Q=Q_1+Q_2$）已定义，因此显然对于 $\mathcal{K}_3(x,\ t;0)$-解，关系式 $Q_1=Q_2=Q/2$成立。图 4 绘出了 $\mathcal{K}_3(x,\ t;\gamma)$-族中满足 $\gamma=3$的成员。此时，解是不对称的，部分荷 Q_i 彼此不同。在这个特例中，部分荷 Q_1 大于 Q_2。随着族参数 γ 的值增大，这种行为会持续下去。事实上，当γ 非常大时， Q_2 趋于零，而 Q_1 趋于 $\mathcal{K}_2(x,\ t)$-解的诺特荷。这意味着， $\mathcal{K}_3(x,\ t;\gamma)$-缺陷可以理解为一个 $\mathcal{K}_2(x,\ t)$ 与一个 $\mathcal{K}_1(x,\ t)$ 解的非线性组合。

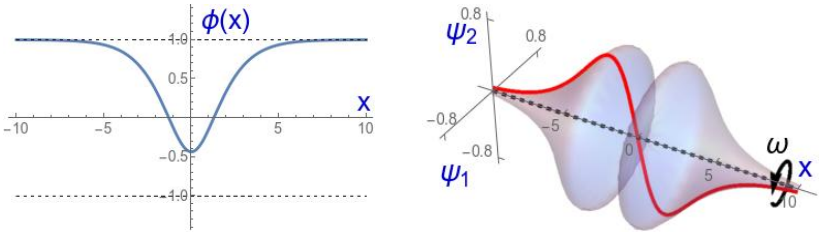

图 3：对于特定取值 $\sigma=0.5$、 $\omega=0.25$、 $\alpha=0$ 和 $\gamma=0$，由内部空间实分量中的非拓扑孤子和复分量中的 Q-球组成的解 $\mathcal{K}_3(x,\ t;\gamma)$ 的图像。

此前解的另一个显著性质，可以通过将缺陷的总能量与诺特荷联系起来的求和规则来表示。 $\mathcal{K}_3(x,\gamma)$-族中的所有成员都具有相同的诺特荷 Q 以及相同的总能量 E。除此之外，其守恒荷 Q 等于 $\mathcal{K}_2(x)$-解的守恒荷，而其能量则等于 $\mathcal{K}_1(x)$ 和$\mathcal{K}_2(x)$-解的能量之和：

$$Q[\mathcal{K}_3(x,t;\gamma)]=Q[\mathcal{K}_2(x,t)] \tag{26}$$

$$E[\mathcal{K}_3(x,t;\gamma)]=E[\mathcal{K}_1(x,t)]+E[\mathcal{K}_2(x,t)] \tag{27}$$

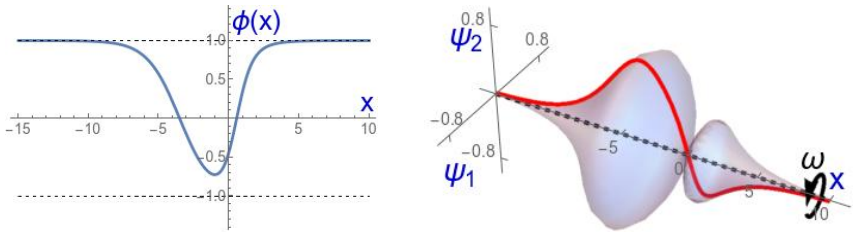

图 4：由实分量中的非拓扑孤子和内部空间复分量中的 Q-球构成的解 $\mathcal{K}_3(x,\ t;\gamma)$ 的图形，参数取特定值 $\sigma = 0.5$、$\omega = 0.25$、$\alpha = 0$ 和 $\gamma = 3$。

这些结果可以通过第 2 节中引入的勒让德变换进行解析证明。由(17)可清楚看出

$$Q[\mathcal{K}_3(x,\gamma)] = -\frac{d\overline{E}[\mathcal{K}_3(x,\gamma)]}{d\omega}\Big|_E = -\frac{d\overline{E}[\mathcal{K}_1(x)]}{d\omega}\Big|_E - \frac{d\overline{E}[\mathcal{K}_2(x)]}{d\omega}\Big|_E = Q[\mathcal{K}_1(x)] + Q[\mathcal{K}_2(x)] = Q[\mathcal{K}_2(x)]$$

这证明了式 (26)。这里，我们利用了 $E[\mathcal{K}_3(x,\overline{\ \gamma})] = E[\mathcal{K}_1(x)\overline{]} + E[\mathcal{K}_2(x)\overline{]},$，这一点通过利用椭圆坐标下泛函 $E(f,\ g)$ 的可分离性即可明显证明，参见 [23]。由式 (16) 和 (26) 可直接得到关系式 (27)。恒等式 (26) 和 (27) 证实了前文对 $\mathcal{K}_3(x,\ t;\gamma)$ 解的解释，并导出以下结果

$$Q[\mathcal{K}_3(x,\gamma)] = 2\omega\,\frac{1-\sigma^2+\omega^2}{\sqrt{\sigma^2-\omega^2}} \quad \text{and} \quad E[\mathcal{K}_3(x,\gamma)] = \frac{4}{3} + \frac{2(2\omega^4-\sigma^4-\sigma^2(\omega^2-3))}{3\sqrt{\sigma^2-\omega^2}}$$

3.1 Q-球的稳定性分析

本节将按照开创性论文 [5] 中确立的方法，研究第 2 节所述解的（经典）线性稳定性。在这一框架下，通过施加一个小扰动 $(\delta f,\ \delta g)$，使静态解 $\mathcal{K}(x) = (f(x)\ g(x))$ 发生扰动，同时保持诺特荷 Q 不变。为满足这一条件，必须将扰动解的内部旋转频率改变以下幅度

$$\delta\omega = -\frac{2\omega^2}{Q}\int_{-\infty}^{\infty} g\,\delta g\,dx \quad .$$

现在，分析这些涨落对能量泛函 (10) 的影响。若扰动构型的总能量$E[\mathcal{K}(x) + (\delta f, \delta g)]$ 小于 $E[\mathcal{K}(x)]$，则解 $\mathcal{K}(x)$ 将是不稳定的。可以验证，能量泛函 E 的二阶变分为

$$\delta E^{(2)}|_Q = \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2}(\delta F)^t\,\mathcal{H}[\mathcal{K}(x)]\,\delta F + \frac{2\omega^3}{Q}\Big(\int_{-\infty}^{\infty} g\,\delta g\,dx\Big)^2 \tag{28}$$

其中采用了紧凑记号 $\delta F = (\delta f,\ \delta g)^t$。由前述表达式得到的二阶小涨落算子$\mathcal{H}[\mathcal{K}(x)]$ 为

$$\mathcal{H}[\mathcal{K}(x)] = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial f^2}\Big|_{\mathcal{K}(x)} & \frac{\partial^2 U}{\partial f \partial g}\Big|_{\mathcal{K}(x)} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial f \partial g}\Big|_{\mathcal{K}(x)} & -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial g^2}\Big|_{\mathcal{K}(x)} - \omega^2 \end{pmatrix} \quad . \tag{29}$$

特别地，对于我们的模型，场势项 $U(f,\ g)$ 由表达式 (8) 给出，算子 (29) 可写为

$$\mathcal{H}[\mathcal{K}(x)] = \left(\begin{array}{cc} -\frac{d^2}{dx^2} + 2(3f^2+g^2-1) & 4fg \\ 4fg & -\frac{d^2}{dx^2} + 2(f^2+3g^2-1) + \Omega^2 \end{array} \right)\Bigg|_{\mathcal{K}(x)} . \tag{30}$$

对 $\mathcal{K}_2(x)$解的线性稳定性分析：为了研究由拓扑扭结和一个 Q球组成的缺陷 $\mathcal{K}_2(x)$ 的线性稳定性，将表达式 (22) 代入算子 (30)，由此得到特定的薛定谔型矩阵算子

$$\mathcal{H}[\mathcal{K}_2(x)] = \left(\begin{array}{cc} -\frac{d^2}{dx^2} + 4 - 2(2+\Omega^2)\,\mathrm{sech}^2(\Omega\,x) & 4\sqrt{1-\Omega^2}\,\mathrm{sech}(\Omega\,x)\tanh(\Omega\,x) \\ 4\sqrt{1-\Omega^2}\,\mathrm{sech}(\Omega\,x)\tanh(\Omega\,x) & -\frac{d^2}{dx^2} + \Omega^2 + 2(2-3\Omega^2)\,\mathrm{sech}^2(\Omega\,x) \end{array} \right) , \tag{31}$$

它依赖于参数 Ω。可以通过解析方法证明，$\frac{d\mathcal{K}_2(x)}{dx}$ 是算子 (31) 的零模。然而，$\mathcal{H}[\mathcal{K}_2(x)]$ 的其余特征值必须通过数值方法计算。图 5 展示了该算子的谱随参数 Ω 的变化情况。可以观察到前面提到的零模，其特征值为 $\lambda_0 = 0$。连续谱在阈值 Ω^2 和 4 处出现。注意，当 Ω 约为 > 0.6 时，会出现一个特征值为 λ_1 的离散特征函数。关键在于，不存在负特征值。因此，式 (28) 中的两项均为正，这意味着没有线性涨落能够降低解 $\mathcal{K}_2(x)$ 的能量。我们已经证明该缺陷是稳定的。回顾一下，[5] 中的定理 3 指出，$\delta E^{(2)}|_Q > 0$ 的充要条件是：(i) $\mathcal{H}[\mathcal{K}(x)]$ 只有一个负特征值；(ii) $\frac{dQ[\mathcal{K}(x)]}{d\omega} < 0$。然而，在我们的情形中，算子 $\mathcal{H}[\mathcal{K}_2(x)]$ 不存在负特征值，并且 $\frac{dQ[\mathcal{K}_2(x)]}{d\omega} > 0$。因此，我们模型中的 $K_2(x)$-解构成了上述定理普适性的一个反例；在我们看来，该定理始终假设负特征值的存在。

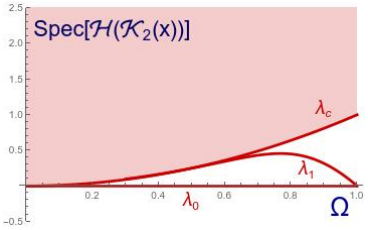

图 5：谱　　二阶小涨落算子 $\mathcal{H}[\mathcal{K}_2(x)]$ 的谱随参数 Ω 的变化　　.

针对 $\mathcal{K}_3(x;\gamma)$解的线性稳定性分析：对于 $\mathcal{K}_3(x;\ \gamma)$ 解，情况则更为复杂。此时，涨落算子 (30) 的各个分量为

$$\mathcal{H}_{11}[\mathcal{K}_3(x;\gamma)] = -\frac{d^2}{dx^2} - 2 + \frac{6(-\Omega_+\cosh(\Omega_- x_-) + \Omega_-\cosh(\Omega_+ x_+))^2 + 8\Omega_-^2\Omega_+^2\sinh^2 x}{(\Omega_+\cosh(\Omega_- x_-) + \Omega_-\cosh(\Omega_+ x_+))^2} ,$$

$$\mathcal{H}_{12}[\mathcal{K}_3(x;\gamma)] = \frac{8\Omega_+\Omega_-(\Omega_-\cosh(\Omega_+ x_+) - \Omega_+\cosh(\Omega_- x_-))\sinh x}{(\Omega_+\cosh(\Omega_- x_-) + \Omega_-\cosh(\Omega_+ x_+))^2} ,$$

$$\mathcal{H}_{22}[\mathcal{K}_3(x;\gamma)] = -\frac{d^2}{dx^2} - 2 + \Omega^2 + \frac{2(-\Omega_+\cosh(\Omega_- x_-) + \Omega_-\cosh(\Omega_+ x_+))^2 + 24\Omega_-^2\Omega_+^2\sinh^2 x}{(\Omega_+\cosh(\Omega_- x_-) + \Omega_-\cosh(\Omega_+ x_+))^2} .$$

尽管该算子的形式错综复杂，但仍可得出一些结论。例如，可以验证表达式 $\frac{\partial\mathcal{K}_3(x;\gamma)}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial\mathcal{K}_3(x;\gamma)}{\partial\gamma}$ 是算子 $\mathcal{H}[\mathcal{K}_3(x;\gamma)]$的零模。另一个理论

结论可通过将莫尔斯理论应用于解所描绘轨道构成的空间而得出。可以验证， $\mathcal{K}_3(x;\gamma)$-族的所有成员都会经过点 $((-1)^{\alpha}\Omega,0)$（具体取决于 (25) 中 α 的取值）。这意味着算子$\mathcal{H}[\mathcal{K}_3(x;\gamma)]$的谱中存在一个负特征值。在这种情况下， [5] 中的定理 3所需的假设得以满足，因此其中所述的结论现已成立。由于这些解满足 $\frac{dQ[\mathcal{K}_3(x\,\gamma]}{d\omega} > 0$;)，这意味着$\mathcal{K}_3(x;\gamma)$-族中的解是不稳定的。

最后需要指出， $\mathcal{K}_2(x)$-解具有绝对稳定性，从而完成本稳定性分析。同样，实分量中扭结的拓扑性质赋予了这些缺陷这一性质。证明这一事实的启发式论证如下。复分量中真空态$v_{\pm}$ 附近、诺特荷为 Q 的平面波解的能量为 $E_{\text{free}} \approx \sigma Q$，见 $[2,6]$。然而，实分量中的拓扑扭结无法衰变为某个真空态。事实上，平面波定义在复分量中，这意味着该构型中发现的拓扑扭结必定对应于 $\mathcal{K}_1(x)$-解（19）。现在，我们需要比较 $\mathcal{K}_2(x)$-缺陷与这一振动态 $\mathcal{K}_1(x)$-解的能量。可以验证

$$E[\mathcal{K}_2(x,t)] < E[\mathcal{K}_1(x,t)] + \sigma Q[\mathcal{K}_2(x)] \quad ,$$

这证实了 $\mathcal{K}_2(x,\ t)$-缺陷相对于衰变为自由粒子是稳定的。

4 总结

本文研究了在具有实场和复场的（1+1）维场论单参数族中，扭结与 Q-球耦合所形成的缺陷。研究发现存在三类解： $\mathcal{K}_1(x)$-解（仅由一个拓扑扭结构成）、 $\mathcal{K}_2(x)$-解（由一个拓扑扭结和一个 Q-球构成），以及 $\mathcal{K}_3(x;\gamma)$-解的单参数族（其中一个 Q-球与一个非拓扑孤子结合）。所有这些解均已得到解析确定。此外，前述第二类解可视为对开创性论文 [5]中提出的定理 3 之普适性的一个反例。在 $\mathcal{K}_2(x)$-解上计算得到的小涨落算子没有负特征值，并且这些缺陷的诺特荷对频率的导数为正。然而， $\mathcal{K}_2(x)$解是稳定的。实分量中扭结的拓扑荷似乎能够阻止 Q-球衰变为真空。从这一角度看，与文献中常见的 Q-球相比，这些解具有新颖的性质。最后，$\mathcal{K}_3(x;\gamma)$-缺陷族是不稳定的。在这种情况下，可以应用前述定理来证明这一行为。

致谢

本研究由西班牙科学与创新部（MCIN）提供资金支持，资金来自欧盟 NextGenerationEU（PRTRC17.I1）以及卡斯蒂利亚-莱昂自治区政府教育局的 QCAYLE 项目，并获得 MCIN项目PID2020-113406GB-I00 MTM 的资助。

参考文献

[1] Shnir, Y.M., 标量场理论中的拓扑孤子与非拓扑孤子。剑桥大学出版社，2018年。

[2] Lee, T.D. 和 Y. Pang, 《物理报告》221 (1992) 251。

[3] Kusenko, A. 和 Shaposhnikov,M.; 物理快报B. 418(1998)46.[4] Dine, M. 和 Kusenko,A.; Rev.Mod.Phys.76 (2003)1.[5] Friedberg, R.; Lee,T.D. andSirlin,A.;物理评论D13 (1976)2739.[6] Tsumagari,M.I.; Copeland, E.J.; Saffin,P.M.;物理评论D78(2008) 065021.[7] Coleman, S., Nucl. Phys.B, 262(1985)263.[8] Coleman, S., Nucl. Phys.B, 269(1986)744.[9] Kusenko, A., 物理快报 B,404(1997) 285.[10] Nugaev, E.Y.and Smolyakov, M.N.;高能物理学杂志, 07 (2014)009.[11] Lee, K.M.; Stein-Schabes,J.A.;Watkinks,R.and Widrow,L.M.;物理评论D39(1989) 1665.[12] Anagnostopoulos, K.N., Axenides, M.; Floratos, E.G. 和 Tetradis, N.; 物理评论D 64 (2001) 125006 [13] Li, X.Z.; Hao, J.G.; Liu,D.J. andChen,G.;J. Phys.A 34(2001)1459.[14] Panin, A.G. and Smolyakov, M.N.;Eur.Phys. J.C,79 (2019)150.[15] Jackiw,R. 和 Weinberg,E.J.;Phys. Rev.Lett.,64 (1990)2234.[16] Hong, J.,Kim, Y.andPac,P.Y.; Phys.Rev. Lett.,64(1990) 2230.[17] Safian, A.M.; Coleman, S.R.andAxenides, M.; Nucl.Phys. B297(1988)498.[18] Safian, A.M.; Nucl. Phys.B304(1988) 392.[19] Axenides, M.; Floratos, E.andKehagias; Phys.Lett.B 444(1998)190.[20] Deshaies-Jacques,M. andMacKenzie,R.; Phys.Rev.D 74(2006)025006[21] Bazeia,D.; Marques, M.A.andMenezes,R.;Eur.Phys.J.C,76 (2016)241.[22] Bazeia, D.; Losano, L.; Marques, M.A.; Menezes, R. 和 Da Roucha, R.; 物理快报B, 758 (2016) 146.[23] Alonso-Izquierdo, A.;PhysicaScripta 94 (2019)085302.