arXiv:2303.01553v2 [quant-ph] 7 Sep 2023

利用可重构双参数电子平台对变形迪克模型相变的实验观测

Mario A. Quiroz-Ju´arez,[1, *] ´Angel L. Corps,[2, 3, *] Rafael A. Molina,[2] Armando Rela˜no,[3,4] Jos´e L. Arag´on,[1] Roberto de J. Le´on-Montiel,[5] 和 Jorge G. Hirsch[5]

[1] *Centro de Física Aplicada y Tecnología Avanzada, Universidad Nacional Autónoma de México, Boulevard Juriquilla 3001, Juriquilla, 76230 Querétaro, México*[†]

[2] *Instituto de Estructura de la Materia, IEM-CSIC, Serrano 123, E-28006 Madrid, Spain*

[3] *Grupo Interdisciplinar de Sistemas Complejos (GISC),Universidad Complutense de Madrid, Avenida Complutense s/n, E-28040 Madrid, Spain*

[4] *Departamento de Estructura de la Materia, Física Térmica y Electrónica, Universidad Complutense de Madrid Avenida Complutense s/n E-28040 Madrid Spain , , , , ,*

[5] *Instituto de Ciencias Nucleares Universidad Nacional Autónoma de México Apartado Postal 70-543, 04510 Cd. Mx., México*（日期：2023年9月11日）

我们通过实验研究量子光学 Dicke模型的无限尺寸极限，其中宇称破缺形变强度将系统与外部玻色储库耦合。我们重点关注这种对称性破缺带来的动力学后果：它使经典相空间呈现不对称性，且能量势阱彼此不等价。我们介绍了一种利用先进的双参数电子平台实现变形迪克模型经典版本的实验方案。该平台为研究电路中变形迪克模型的代表性现象提供了实验场所，并可在外部调控参数和初始条件。具体而言，我们研究了共振情形下，基态的动力学、各种相变以及能量势阱的不对称性随耦合强度γ 和形变强度 α 的变化。此外，为了表征各种行为区域，我们展示了一个由两个系统内禀参数决定的二维相图。我们还通过实验分析了混沌的出现。研究结果清晰地揭示了理论预测与实验观测之间的联系，展现了双参数电子平台的实用价值。

I. 引言

我们对物理世界的理解很大程度上依赖于相这一概念。物理系统会呈现性质迥异的相。这些相可以通过某些热力学和动力学性质来刻画，而这些性质又使我们得以定义各个相。近年来，相变在发现奇异效应方面发挥了至关重要的作用，尤其是在量子技术领域[1, 2]。相变最简单的例子是传统的基态量子相变（QPT）：当模型的某些控制参数发生变化时，系统的最低能量会突然改变 [3]。近年来，研究者对将量子相变这一概念拓展至系统的高激发态进行了大量研究：这就是激发态量子相变（ESQPT）[4]。激发态量子相变会导致系统的谱出现某些非解析性，例如在特定临界能量处，态密度会发生发散。系统的相还可以通过混沌的产生等动力学效应来描述；混沌意味着有关精确初始态的信息丢失，并且实际上无法预测给定状态未来将如何演化。

这些概念（在一定限制条件下）在量子和经典领域中都可以实现。对于具有半经典对应物的量子系统，通常可通过对量子模型取某种无限尺寸极限，轻易建立这种量子-经典对应。事实证明，迪克模型 [5] 以及相关的量子光学模型最初是作为描述光-物质相互作用的玩具模型提出的，却格外适合用于分析非平凡的相变现象[6–14] 以及混沌和热化等相关概念 [15–27]。因此，它们已成为研究量子统计力学的有力试验平台[28]。

Dicke模型描述了一组原子（物质）与单色谐波场（光）之间的相互作用，这种相互作用的强度由参数 γ 调节。它是一个集体（或全连接）系统，因为所有组成部分都会同时相互作用。Dicke模型所属的原子-场模型家族具有集体特性，因此量子模型的许多[29] 相关物理量都可以通过其无限尺寸极限 [4, 30]来理解。这些物理量尤其包括相变以及基态性质。随着系统尺寸增大，该模型趋近于经典性。Dicke模型的一个变形版本在[25]，中被引入，其中探讨了增加.....的后果。

* 这些作者对本研究贡献相同。
† 通讯作者：maqj@fata.unam.mx

对称性破缺项 α 得到了分析。这种对称性破缺是通过一种形变强度实现的，该强度将传统的光—物质相互作用耦合到外部玻色储库。从其经典对应物的角度来看，形变强度决定了非对称、非等价能量势阱的出现。在每个势阱内，大部分动力学过程都不受另一个势阱动力学性质的影响。例如，每个势阱向混沌的转变发生在不同的能量下。这是因为在无限尺寸极限下，这些经典势阱被无限高的势垒隔开，因而不可能发生隧穿。

在这项工作中，我们介绍了变形迪克模型经典版本的一种实验实现。主要目的是通过实验探究不对称势阱对系统动力学的影响，以及系统从两个等效势阱转变为单个变形势阱的过程。我们关注电子噪声所起的作用，它可用于描述真实物理系统中的不完善之处。在实验实现中，我们采用了由无源和有源元件构成的先进双参数电子平台。该电子平台使我们能够研究共振情形下，基态的动力学、各种相变以及能量势阱的不对称性，并考察它们随两个系统内禀参数（γ, α）的变化。我们运用数值技术，建立理论预测与实验观测之间的明确联系。

本文结构如下。在第II节中，我们简要回顾宇称破缺迪克模型及其在LC振荡器电学变量中的表示。在第III节中，我们介绍变形迪克模型半经典近似的电子实现。在第IV节中，我们介绍在双参数电子平台上开展的若干模型代表性现象的实验测量。最后，我们在第V节给出结论。

II. 模型

我们考虑 [25], 中介绍的标准迪克模型的修正版，该模型描述了 N 个相同的两能级原子与单模量子化辐射场之间的相互作用，并包含一个由变形强度表征的、与外部玻色储库的直接耦合。该模型可由以下哈密顿量表示

$$\mathcal{H} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + \omega_0 \hat{J}_z + \left(\frac{2\gamma}{\sqrt{N}} \hat{J}_x + \sqrt{\frac{N\omega_0}{2}} \alpha \right) (\hat{a}^\dagger + \hat{a}). \quad (1)$$

其中，$\hat{a}^\dagger$ 和$\hat{a}$ 是频率为ω的量子化辐射场的玻色产生算符和湮灭算符。为方便起见，我们设 $\hbar = 1$。集体赝自旋算符$\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$、$\hat{J}_k = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_i^k$($k = x, y, z$)中，$\hat{\sigma}_i^k$是作用于原子 i的泡利矩阵，它们遵循 $SU(2)$代数，并表示N 个两能级原子，每个原子的能级间隔为 ω_0。总角动量算符$\hat{\mathbf{J}}^2 = \hat{J}_x^2 + \hat{J}_y^2 + \hat{J}_x^2$ 是守恒量，其本征值为 $j(j+1)$。包含基态在内的对称原子子空间由最大值 $j = N/2$定义。参数 γ 表示原子-场耦合强度，该强度取决于原子偶极矩； α 表示形变强度。当 $\alpha = 0$ 时，模型即为传统的Dicke模型。标准Dicke模型的宇称对称性 $\Pi = e^{i\pi(j+\hat{J}_z+\hat{a}^\dagger\hat{a})}$在$\alpha \neq 0$时被破坏，即 $[\mathcal{H}, \Pi] \neq 0$，从而导致定量变化[25]。当 $\alpha = 0$时，系统的基态在耦合强度的临界值$\gamma_c = \sqrt{\omega\omega_0}/2$处经历正常-超辐射相变。 $\alpha = 0$ 的另一个显著现象是，在能量 $E = -j\omega_0$ [8, 31, 32]处， $\gamma > \gamma_c$ 存在激发态量子相变（ESQPT）。下文中，为方便起见，我们用 E 表示以 $j\omega_0$ 归一化的能量。对于 $\alpha \neq 0$，由于基态布居在 γ的所有取值下均为正，因此不会发生正常-超辐射相变；而且在不同的激发能取值处会出现各种激发态量子相变，但其数值无法用初等函数表示 [25]。

在热力学极限 $N \to \infty$ 下，通过求哈密顿算符在Glauber 相干态与布洛赫相干态的张量积 [33, 34] 中的期望值，可以计算变形迪克哈密顿量 (1) 的半经典近似。这些态定义为 $|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} e^{\beta \hat{a}^\dagger} |0\rangle$ 和 $|z\rangle = 1/(1+|z|^2)^{-j} e^{z\hat{J}_+} |j, -j\rangle$，其中 $|0\rangle$ 是光子真空态， $|j, -j\rangle$ 是原子的基态。该半经典近似给出了平均场解，能够捕捉无限尺寸极限下量子模型的重要特征。采用场的实正则变量 (q, p) 和原子部分的实正则变量 (Q, P)，并用满足 $\beta = \sqrt{j/2}(q + ip)$ 和 $z = (Q - iP)\sqrt{4 - Q^2 - P^2}$ 的相干态表示，修正的迪克哈密顿量 (1) 的每粒子经典类比 $\langle \beta, z | \mathcal{H} | \beta, z \rangle / \omega_0 j$ 为:

$$H = \frac{\omega}{2\omega_0}(q^2 + p^2) + \frac{1}{2}(Q^2 + P^2) + \frac{\gamma q Q}{\omega_0}\sqrt{4 - P^2 + Q^2} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\alpha q. \quad (2)$$

经典相空间为 $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$ 由于光子变量无界， q, $p \in \mathbb{R}$但原子变量受限于半径为 2 的二维球， $Q^2 + P^2 \leq 4$。在无限尺寸极限下，有效普朗克常数趋于零， $\hbar_{\text{eff}} \propto 1/N \to 0$从而呈现经典性。为探究该模型（2）的动力学性质，我们采用哈密顿运动方程:

$$
\begin{aligned}
\dot{q} &= \frac{\omega}{\omega_0}p, \\
\dot{p} &= -\frac{\gamma Q}{\omega_0}\sqrt{4-P^2-Q^2} - \frac{\omega}{\omega_0}q - \sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\alpha, \\
\dot{Q} &= P - \frac{\gamma PqQ}{\omega_0\sqrt{4-P^2-Q^2}}, \\
\dot{P} &= \frac{\gamma qQ^2}{\omega_0\sqrt{4-P^2-Q^2}} - \frac{\gamma q}{\omega_0}\sqrt{4-P^2-Q^2} - Q. \quad (3)
\end{aligned}
$$

经典哈密顿量（2）描述了两个非线性耦合的谐振子，场部分受到外部刺激。它可以用 LC 振荡器的电学变量重新表示，其中 L 和 C 分别代表电感和电容。正如先前针对标准迪克模型所展示的那样，这使得该系统的电子版本得以实现 [35]。变换后得到一个由两个非自治 LC 振荡器构成、带有非线性耦合的系统。现在，我们着重将正则变量（q， p， Q， P）映射为归一化电学变量（I_{L_1}， V_{C_1}， I_{L_2}， V_{C_2}）。其中， I_L 表示电感器中的电流， V_C 表示电容器上的电压。更多详情请参见参考文献 [35]。用这些新变量表示时，经典哈密顿量（2）变为

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\omega}{2\omega_0}(\tilde{I}_{L_1}^2 + \tilde{V}_{C_1}^2) + \frac{1}{2}(\tilde{I}_{L_2}^2 + \tilde{V}_{C_2}^2) \\
&+ \frac{\gamma\tilde{I}_{L_1}\tilde{I}_{L_2}}{\omega_0}\sqrt{4-\tilde{V}_{C_2}^2+\tilde{I}_{L_2}^2} - 1 + \sqrt{\frac{2}{\omega_0}}\alpha\tilde{I}_{L_1}, \quad (4)
\end{aligned}
$$

其中， $\omega^2 = 1/L_1C_1$ 和 $\omega_0^2 = 1/L_2C_2$ 分别是振荡器-1和振荡器-2的固有频率。请注意，耦合强度 γ 控制LC振荡器之间的非线性相互作用，而 α 则决定外部刺激的强度。在实验装置中，我们设定 $\omega = 1$ 和 $\omega_0 = 1$ ，并研究可观测量对 γ 和 α 系数的依赖关系。

III. 双参数电子平台

标准Dicke模型已使用冷原子在其实验量子版本中得到探索 [36, 37],以及超导电路 [38, 39]。此外，研究人员还提出了该模型的若干扩展，并利用原子-腔系统加以实现[40, 41]。然而，尽管经典版本的Dicke模型已得到广泛研究，其实验实现仍然十分少见。因此，设计用于实现该模型的物理平台仍是一个重要的研究方向，因为这有助于验证该模型的关键预测，并为深入了解其性质提供新的见解。参考文献[35] 首次实验实现了经典Dicke模型。这一目标是通过两个非线性耦合的合成 LC 电路实现的。实验装置基于由电阻器、电容器、运算放大器（OPAMPs）和模拟乘法器组成的电网络 [42, 43]。这些电网络的显著特点是，其电压传递函数对应于线性和非线性运算，从而能够定义微分方程。因此，电子器件中电压的时间演化由与原物理系统相同的方程控制[44, 45]。事实证明，这种方法能够有效地实时模拟动力学系统 [46–50] 并研究需要高度参数控制的现象[51–55]。电路的使用在其他类型的问题中也引起了广泛关注，例如拓扑系统[56–59]。值得一提的是，蔡氏电路是首个实现的电路，也是最简单的能够产生混沌的电子电路，并已在实验中得到证实[60] （另见 [61]）。

文献 [35] 提出的电子平台的一个重要特点是，它能够通过外部电压信号，以简单灵活的方式控制系统参数和初始条件。在本研究中，我们利用这一特点，采用改进版电子平台，实验研究变形迪克模型半经典近似下的相变。

一个关键的观察结果是，标准迪克模型的经典运动方程与变形迪克模型的方程仅在外生项$-\sqrt{2/\omega_0}\alpha$ 方面 $\dot{p}$ 有所不同。通过在积分器中加入直流电压信号，可以将其引入描述振荡器-1中电容器电压˜的微分方程（V_{C_1}），也可以等效地将其引入 $\dot{p}$的微分方程中，以表示该外生项。该输入电压由MCP4921系列数模转换器（DAC）提供，其幅值取决于 α的值。DAC之前还接入了一个减法放大器，以设定2.5伏的偏置电平，从而允许 α 取负值，即乘积$\sqrt{2}\alpha$ 的取值范围为（-2.5，2.5）。采用类似策略可扩展耦合强度 $\gamma \in$ （-2.5，2.5）的变化范围。这样，系统便有两个可控的自由参数 γ 和 α，它们通过软件设定，并使用串行外设接口协议与数模转换器和主控8位微控制器通信。变形迪克模型的电子电路如图1（a）所示。请注意，黑色电路图表示标准迪克模型的电路，而蓝色电路图表示使模型发生变形的外生项。有关实验装置的更多详情见附录。

我们的装置提供了一个由模拟电路元件构建的双参数可重构电子平台，可用于实验研究变形迪克模型的经典版本所呈现的相变及其特征现象。我们使用 Tektronix TBS200 示波器采集每个 LC 振荡器中电容器的电压和

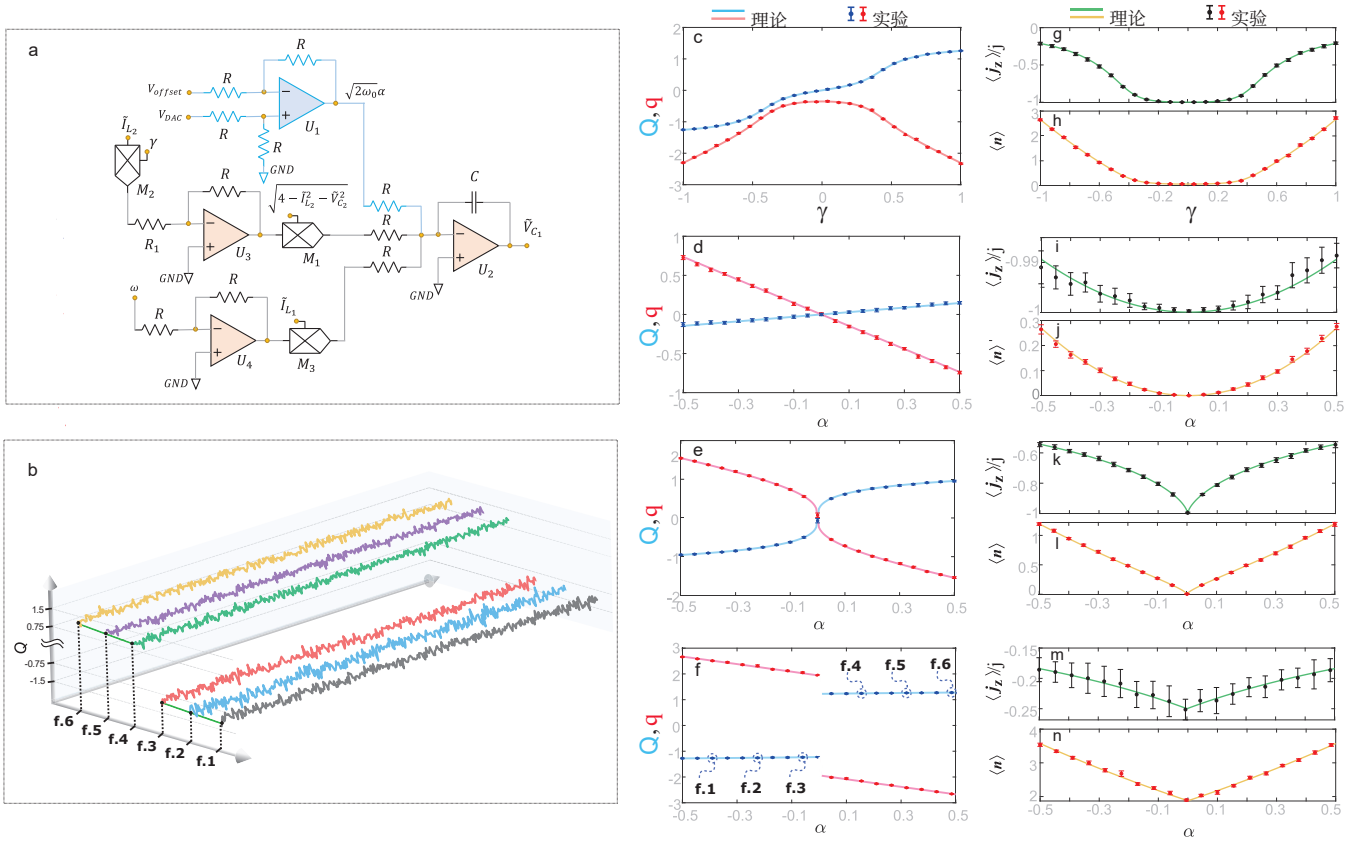

图 1. (a) 修改后的电子电路示意图，该电路描述电容器-1中电压的微分方程，或等价地，式 (3) 中的 $\dot{p}$。蓝色部分表示在 [35] 中提出的电路示意图基础上新增的电子元件。这里，U_j 和 M_j 分别表示通用运算放大器和模拟乘法器。电路中使用的电阻和电容值如下：R =10 $K\,\Omega$、R_1 =1 $K\,\Omega$ 和 C =10 μF。$V_{\rm offset}$ 是 2.5 伏的直流电压，$V_{\rm DAC}$ 是数模转换器提供的电压信号，其取值取决于 α_o. (b) 当 $\gamma = 1$ 时，Q 坐标在基态中的时间演化，以及不同 α 值对应的情况：(f.1) $\alpha = -0.39$、(f.2) $\alpha = -0.225$、(f.3) $\alpha = -0.06$、(f.4) $\alpha = 0.155$、(f.5) $\alpha = 0.32$ 和 (f.6) $\alpha = 0.485$。(c)-(f) 为共振条件下变形 Dicke 模型经典版本基态的坐标 q 和 Q，它们随耦合强度 γ 和形变强度 α 的变化情况，其中 $\omega = \omega_0 = 1$。各图中的自由参数设为：(c) $\alpha = 0.25$、(d) $\gamma = 0.1 < \gamma_c$、(e) $\gamma = \gamma_c = 0.5$ 和 (f) $\gamma = 1 > \gamma_c$。图 (g)-(i)-(k)-(m) 展示原子反转 $\langle j_z \rangle / j$ 的经典对应量，图 (h)-(j)-(l)-(n) 展示平均光子数 $\langle n \rangle$ 的经典对应量，两者均为 γ 和 α 的函数。(g)-(h) 对应 $\alpha = 0.25$，(i)-(j) 对应 $\gamma = 0.1$，(k)-(l) 对应 $\gamma = 0.5$，(m)-(n) 对应 $\gamma = 1$。实线表示通过数值模拟得到的理论预测，数据点表示实验测量结果。误差棒表示实验结果的标准差。

流经电感器的电流，以追踪不同条件下经典哈密顿量的时间演化（4）。

IV. 实验

接下来，我们将介绍在双参数电子平台上进行的一系列实验结果。该平台实现了变形迪克模型的半经典近似。我们重点研究了多种特征现象，包括确定基态及其相变，以及宇称对称性破缺的动力学。

A. 基态

通过在稳定平衡点处计算哈密顿量 (2)，并选取能量最低的不动点，即可得到基态。当$\alpha = 0$时，不动点存在解析闭式表达式，且基态能量由$E_0(\gamma) = -\omega_0$ 给出（$\gamma \leq \gamma_c$ 时），以及在 $\gamma > \gamma_c$时由 $E_0(\gamma) = -\omega_0/2(\gamma_c^2/\gamma^2 + \gamma^2/\gamma_c^2)$给出。临界点 $\gamma_c = \sqrt{\omega\omega_0}/2$ 标志着从正常相到超辐射相的转变。值得注意的是，如参考文献 [25], 所述，对于 $\alpha = 0$，哈密顿量 (2) 在 $q \to -q$ 和 $Q \to -Q$下具有对称性，因此 $\mathbb{X}_+ = (q, p, Q, P)$和 $\mathbb{X}_- = (-q, p, -Q, P)$是具有相同能量的不动点。这些点

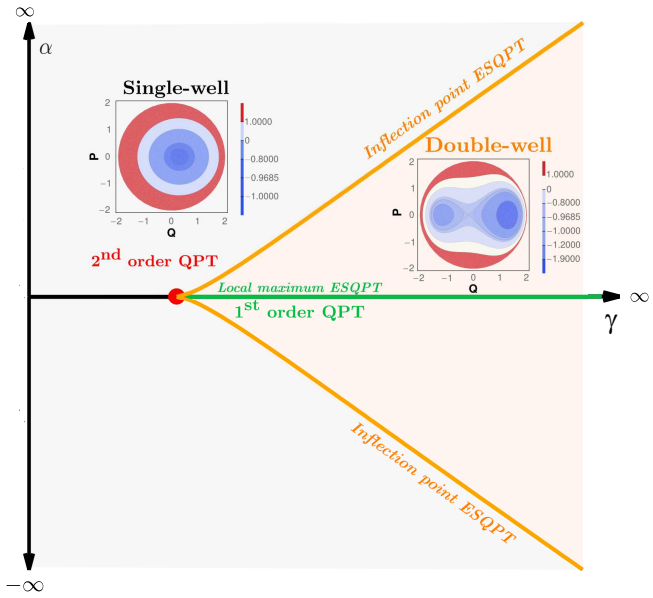

图2. 变形迪克模型随 γ 和 α变化的示意相图。在 $\alpha = 0$处发生二阶（基态）量子相变，$\gamma_c = \sqrt{\omega\omega_0}/2$。对于每个$\gamma > \gamma_c$，都存在一个 α的临界值，α_c，因此当形变过强时，$\alpha > \alpha_c$，经典系统仅表现出一个能量势阱；而当 $\alpha < \alpha_c$ 时，系统最多可表现出两个经典势阱，它们通过给定临界能量处的激发态量子相变相互连接。数值 $\alpha_c(\gamma)$由半经典模型获得，并以橙色曲线表示。穿过 $\alpha = 0$ 轴且当 $\gamma > \gamma_c$ 时，会产生一阶量子相变。图中还展示了单势阱和双势阱情形下相空间中的代表性轨道；这些轨道是将给定能量下经典哈密顿量（2）的四维等值面投影到（Q, P）平面上得到的（见色标）。

在时间导数为零时满足动力学方程 (3)，从而导致基态简并，并具有两个对称的全局能量极小值。然而，当 $\alpha \neq 0$时，情况发生了剧烈变化。首先，无法找到临界点的闭式表达式，因此分析仅限于数值处理。其次，基态不再简并，并且可能出现处于不同能量的两个非对称势阱（见下文）。

我们通过固定两个自由参数中的一个并改变另一个，进行了数值模拟，以求得经典变形迪克模型的基态。确定不同参数取值下能量最小的不动点后，我们在实验中追踪这些不动点，以验证我们的双参数电子平台。图1(c)-(f) 展示了共振条件下基态的坐标 q 和 Q，$\omega = \omega_0 = 1$各情形下考虑的固定参数如下：(c) $\alpha = 0.25$，(d) $\gamma = 0.1 < \gamma_c$，(e)$\gamma = 0.5 = \gamma_c$，以及(f) $\gamma = 1 > \gamma_c$。蓝色和红色实线分别表示 q 和 Q 坐标对应的理论预测，而蓝色和红色数据点是通过我们的电子平台获得的实验测量结果。在经典情形下，基态由具有定常解的稳定临界点表示。在我们的双参数电子平台中，该解表现为随时间保持恒定的电压信号。电子噪声会不可避免地影响恒定电压信号，使其无法保持完全平坦。图1(f)展示了 Q 坐标随时间的演化（固定参数为 $\gamma = 1$），其中可以观察到随机涨落；这些涨落源于电子平台固有的噪声，且对应不同的 α取值：(f.1) $\alpha = -0.39$、(f.2) $\alpha = -0.225$、(f.3)$\alpha = -0.06$、(f.4) $\alpha = 0.155$、(f.5) $\alpha = 0.32$和(f.6)$\alpha = 0.485$。图1(c)–(f)中的误差棒表示各组(q, Q)坐标含噪时间序列的标准差，蓝色和红色数据点分别表示对应的平均值。此外，对于图1(c)–(f)所研究的情形，我们计算了原子反转的经典类比

$$\frac{\langle j_z \rangle}{j} = \frac{\langle \beta, z | \hat{J}_z | \beta, z \rangle}{j} = \frac{P^2 + Q^2}{2} - 1, \tag{5}$$

以及平均光子数，

$$\langle n \rangle = \frac{p^2 + q^2}{2}, \tag{6}$$

分别是 γ 和 α 的函数，如图 (g)、(i)、(k)、(m) 以及图 (h)、(j)、(l)、(n) 所示。图 (g)–(h) 对应于 $\alpha = 0.25$ 情况，(i)–(j) 对应于 $\gamma = 0.1$，(k)–(l) 对应于 $\gamma = 0.5$，而 (m)–(n) 对应于 $\gamma = 1$。在所有情况下，实线表示理论预测，数据点表示实验结果。

当 α 固定时，q 和 Q 坐标随耦合强度 γ 的变化会随着 γ 增大而平滑变化[见图 1(c)]。图 1(g) 中的原子反转和图 1(h) 中的平均光子数验证了这一转变。这是因为，当 γ 从 $\gamma = 0$ 增大时，在没有相互作用、基态位于相空间中心 ($Q = 0$) 的情况下，系统最终会在某个 α 值处进入双势阱区域，因此基态会向右移动 ($Q > 0$)。当 γ 从 $\gamma = 0$ 减小时，也会得到类似结果。当耦合强度设为 $\gamma = 0.1 < \gamma_c$，且变化的是 α 时，基态呈现单调变化，如图 1(d) 所示，其中包括 q 和 Q 坐标；原子反转和平均光子数则分别见图 1(i) 和 (j)。原因在于，对于 $\gamma < \gamma_c$，始终只有一个经典势阱，但它会根据 α 的正负向左 ($Q < 0$) 或向右 ($Q > 0$) 移动，只有在没有形变时才会居中 ($Q = 0$)，即 $\alpha = 0$。图 1(e) 展示了基态值随 α 的变化。在 $\gamma = 0.5 = \gamma_c$ 和 $\alpha = 0$ 处，系统的 q 和 Q 坐标值发生突变，表明发生了二级量子相变。这一现象也反映在图 1(k) 所示的原子反转和平均

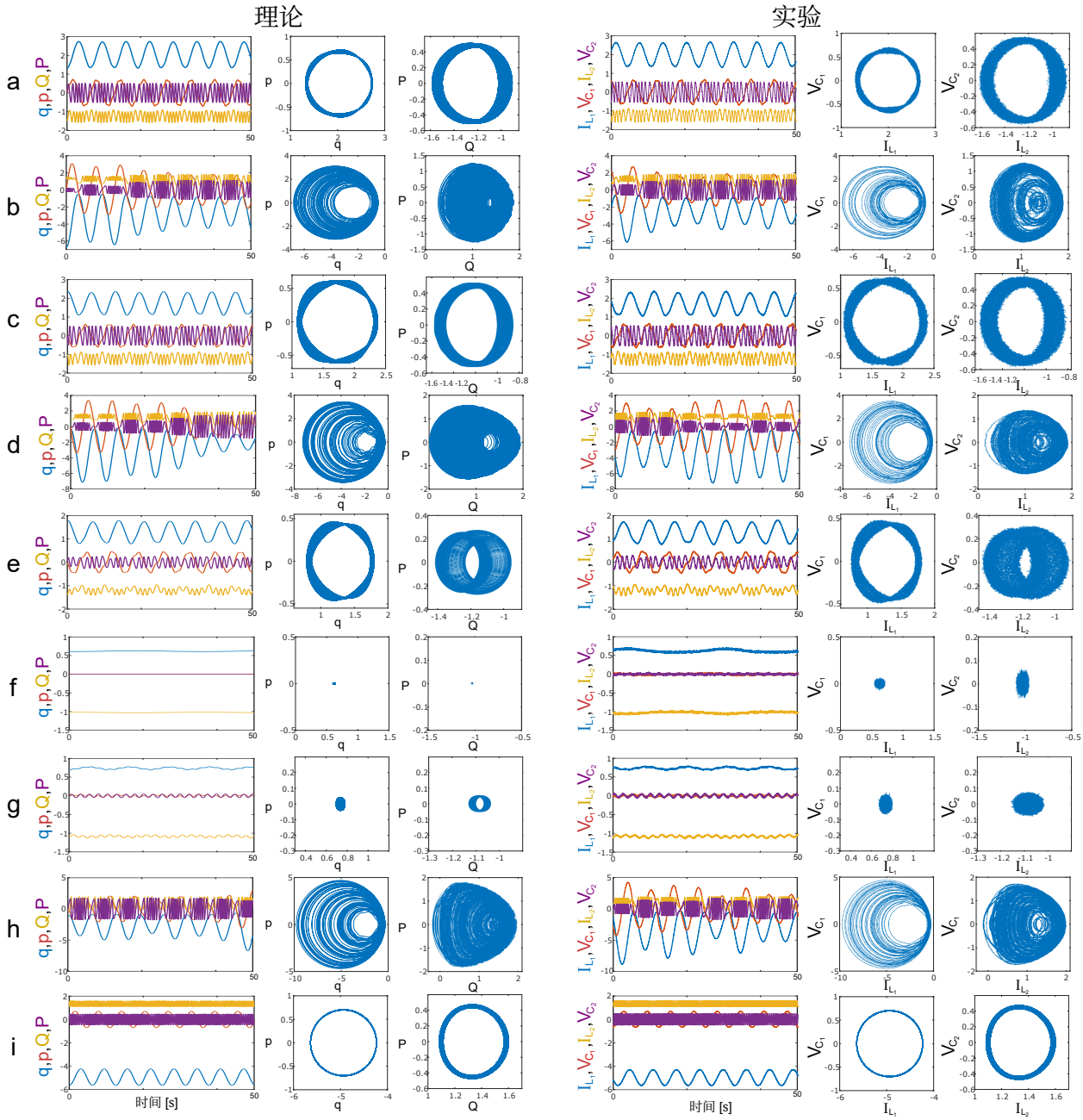

图3. 左侧展示数值模拟中坐标(q,p,Q,P)的时间演化，以及轨迹在平面(q,p)和(Q,P)上的投影；右侧展示实验结果中电坐标$(I_{L_1},V_{C_1},I_{L_2},V_{C_2})$的时间演化，以及相应轨迹在平面$(I_{L_1},V_{C_1})$和$(I_{L_2},V_{C_2})$上的投影。所考虑的能量和形变强度取不同值：（a） $E=-1.9993$ and $\alpha=0.5$，（b） $E=-2.0007$ and $\alpha=0.5$，（c） $E=-1.4997$ and $\alpha=0.7$，（d） $E=-1.4984$ and $\alpha=0.7$，（e） $E=-0.9998$ and $\alpha=1.1$，（f） $E=-0.6830$ and $\alpha=1.41$，（g） $E=-0.6657$ and $\alpha=1.43$，（h） $E=-2.0001$ and $\alpha=1.5$ and，（i） $E=-12.0001$ and $\alpha=1.5$。各情况下，初始条件(q,p,Q,P)设为：（a） $(1.32,0,-1.5,0)$，（b） $(-6.736,0,1.5,0)$，（c） $(2.374,0,-1,0)$，（d） $(-0.29,0,1,0)$，（e） $(1.797,0,-1.4,0)$，（f） $(0.694,0,-1.1,0)$，（g） $(0.608,0,-1.019,0)$，（h） $(-1,0,-0.201,0)$以及（i） $(-5.638,0,1.1,0)$。所有情况下均设定$\gamma=1.5$, $\omega=1\,\mathrm{s}^{-1}$ and $\omega_0=1\,\mathrm{s}^{-1}$。

图中所示的光子数 1(l)。这些图表明，随着形变强度趋近于临界值 $\alpha\to 0$，原子反转趋近于-1，而平均光子数则趋于零。事实上，

点$(\gamma_c,\alpha=0)$对应于著名的 Dicke模型二级量子相变，此时两个对称势阱共存。然而，对于 $\alpha\neq 0$，形变会使经典相空间变得不对称，这意味着基态会偏移至右侧或左侧区域。

最后，对于 $\gamma = 1 > \gamma_c$这一情况，基态呈现一级量子相变，其特征是正则 q在Q 处， $\alpha = 0$ 对于 $\gamma > \gamma_c$发生不连续变化，如图1（**f**）所示。图1（**m**）中的原子反转和图1（**n**）中的平均光子数说明了 $\alpha = 0$处相变的性质。从这个意义上说，正则变量 q、Q 揭示了模型的不同相变，而这些相变随后会反映在原子反转和平均光子数等派生量中，尽管严格来说它们并非序参量。总体而言，测量结果与预期的数值结果高度吻合。

B. 相变与混沌

为刻画上一节所示经典变形迪克模型的行为区域，我们给出一个以 γ 和 α 为变量的二维相图（见图2），该图完整描述了热力学极限下变形迪克模型（ $N \to \infty$）的行为。此相图由橙色实线划分为两个区域。值得注意的是，这些线始于临界值 γ_c ，此处发生标准迪克模型（$\alpha = 0$）中著名的二级量子相变。在灰色区域内，系统的行为局限于单个势阱中。然而，在橙色阴影区域内，系统存在两个能量势阱，因此轨迹在（q， p）和（Q，P）平面上的投影形成两个叶瓣。对于每个固定的 γ，单势阱向双势阱的转变都发生在 α 的一个临界值处（ $\alpha_c = \alpha_c$，γ），并由橙色线标示。对于 $\alpha = 0$，哈密顿量具有两个对称的全局能量极小值；而对于 $\alpha \neq 0$ ，宇称对称性破缺，并且可能根据 γ [25]出现两个不对称的能量势阱。有趣的是，α 的符号决定了势阱的不对称性。系统基态在相空间中的位置取决于 α的符号：若 $\alpha > 0$，基态具有$Q > 0$；而若 $\alpha < 0$ ，则具有 $Q < 0$。第二个经典势阱出现在更高能量处，且位于经典相空间的另一侧。此外，经典变形迪克模型还表现出激发态量子相变；该相变仅在橙色阴影区域内、对于 $\alpha < \alpha_c$（γ）和 $\gamma \geq \gamma_c$ 时，才会在给定的激发能量处发生。此激发态量子相变使此前彼此分离的两个经典势阱 [25]合并。

我们通过在不同能量和变形强度下进行实验，展示了电子平台的多功能性，(a) $E = -1.9993$和 $\alpha = 0.5$，(b) $E = -2.0007$和 $\alpha = 0.5$，(c)$E = -1.4997$ 和 $\alpha = 0.7$，(d) $E = -1.4984$和$\alpha = 0.7$，(e) $E = -0.9998$ 和 $\alpha = 1.1$，(f) $E = -0.6830$和 $\alpha = 1.41$，(g) $E = -0.6657$和 $\alpha = 1.43$，(h)$E = -2.0001$ 和 $\alpha = 1.5$ 以及，(i) $E = -12.0001$和$\alpha = 1.5$，同时将耦合强度保持恒定为 $\gamma = 1.5$。图3左侧展示了理论预测中坐标（q、 p、 Q、P）的时间演化，以及轨迹在平面（q、 p）和（Q、 P）上的投影。同一图的右侧给出了相应的电坐标（I_{L_1}、V_{C_1}、 I_{L_2}、 V_{C_2}），以及它们分别在平面（I_{L_1}、 V_{C_1}）和（I_{L_2}、V_{C_2}）上的投影。在每种情况下，初始条件（q、 p、 Q、 P）设定为：(a) (1.32, 0, -1.5, 0)，(b) (-6.736, 0, 1.5, 0)，(c) (2.374, 0, -1, 0)，(d) (-0.29, 0, 1, 0)，(e) (1.797, 0, -1.4, 0)，(f) (0.694, 0, -1.1, 0)，(g) (0.608, 0, -1.019, 0)，(h) (-1, 0, -0.201, 0)以及(i) (-5.638, 0, 1.1, 0)。对于 $\gamma = 1.5$，分隔单阱相和双阱相的变形强度临界值为 $\alpha_c \approx 1.43019$。在本研究中，我们分析了三个低于 α_c的变形强度，如图3(a)-(e)所示。请注意，情形(a)和(b)具有相同的能量和 α值。在该参数配置下，系统呈现出两个不连通势阱，分别位于相空间的相对两侧。我们考察了两种不同的初始条件，以探索每个势阱的动力学。图3(a)表明，右侧势阱在相平面中呈现周期轨迹，而图3(b)则表明左侧势阱具有混沌动力学，这一点可以通过轨迹密集覆盖可用相空间看出。此外，左侧势阱中的可用演化空间大于右侧势阱中的可用演化空间，突出了由变形强度诱导的不对称性。这与 [25], 中提出的理论分析高度一致，其中指出宇称破缺不对称性导致混沌区域在各个能量势阱内分别发展。与前一种情况类似，当 $E \approx -1.5$和$\alpha = 0.7$时，我们观察到两个不连通势阱，其中左侧势阱呈现混沌，而右侧势阱表现出规则行为。这些配置分别如图3(c)和(d)所示。请注意，可用演化空间增大了。随着能量和变形强度增至 $E \approx -1$ 和 $\alpha = 1.1$，图3(e)显示，在右侧势阱中演化出一条具有环面结构的规则轨迹。通过追踪理论预测中变量（q、 p、 Q、 P）以及实验结果中变量（I_{L_1}、V_{C_1}、 I_{L_2}、 V_{C_2}）的时间演化，可以确认这一观察结果。

为了完整起见，我们考察了 α_c附近的两种参数配置：$\alpha = 1.41$ [见图3(**f**)] 以及$\alpha = 1.43$ [见图3(**g**)]。当 $\alpha = 1.41 \lesssim \alpha_c$时，系统仍呈现两个不连通势阱，但由于接近临界值，二者之间的势垒较低。对于这种情况，我们在右侧势阱中设置了一个初始条件，以确定电子噪声是否足以促使轨迹移向左侧势阱。结果表明，随机涨落不足以使轨迹移向左侧势阱，如图3(**f**)所示。值得注意的是，当形变强度达到临界值 $\alpha = \alpha_c$时，右侧势阱消失，导致第二个势阱出现时的能量与对数激发态量子相变的能量重合。

，此时系统呈现一个具有平稳动力学的拐点。如图3(g)所示，当 $\alpha = 1.43 \approx \alpha_c$时，轨迹最终落入左侧势阱，并表现出规则行为。

最后，我们分析了超过 α_c时两种不同的形变强度取值。如前所述，当 $\alpha > \alpha_c$时，系统仅呈现一个势阱。我们考察了一个初始条件：当$\alpha = 1.5$时，其动力学呈现混沌；该情况出现在能量足够高时， $E \approx 2$，如图3(h)所示。另一方面，当 $E \approx -12.0001$和$\alpha = 1.5$时，规则动力学主导相平面，如图3(i)所示。这是因为该轨迹的能量接近基态能量，此时变形迪克模型可由一组绝热不变量描述，因此近似可积[25, 62, 63]。

V. 结论

我们利用一套经过改造的先进电子平台，实验实现了变形迪克模型的半经典版本。该平台由运算放大器有源网络和无源元件构成。通过外部电压对双参数电子平台进行参数配置，使我们得以实验研究系统丰富的动力学，并直接观察参数空间不同区域中的规则与混沌动力学。特别是，我们实验追踪了基态随耦合强度 γ 和形变强度 α的变化。此外，我们绘制了变形迪克模型经典版本关于 γ 和 α 的二维相图，并研究了若干代表性现象，例如从两个等价势阱到单个变形势阱的转变、基态动力学以及能量势阱的不对称性。重要的是，实验测量清晰揭示了形变强度引起的宇称对称性破缺。实验结果与数值模拟的预期结果高度吻合，证明了我们的电子平台能够准确模拟变形迪克模型半经典版本。

致谢

MAQ-J 衷心感谢 CONAHCyT 通过项目 CF-2023-I-1496 以及 DGAPA-UNAM 通过项目 UNAM-PAPIIT TA101023 提供的经费支持。J.G.H. 获得了项目 UNAM-PAPIIT IN109523 提供的部分经费支持。A.L.C.、R.A.M. 和 A.R. 获得了西班牙资助项目 PGC2018-094180-B-I00 和 PID2019-106820RB-C21 的支持，这些项目由科学与创新部/国家研究机构 MCIN/AEI/10.13039/501100011033 和欧洲区域发展基金资助，口号为“建设欧洲的方式”。A.L.C. 感谢 ‘la Caixa’ 基金会（ID 100010434）通过奖学金 LCF/BQ/DR21/11880024 提供的经费支持。R.J.L.-M. 衷心感谢 DGAPA-UNAM 通过项目 UNAM-PAPIIT IN101623 提供的经费支持。本文的正式版本发表于《The European Physical Journal Plus》，并可在线获取：https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04391-6。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性

支持本研究发现的数据可根据合理请求从通讯作者处获取。

A. 附录：实验装置

在本附录中，我们介绍修正版本的迪克模型的实验实现。具体而言，我们实现了有源电网络，能够准确再现式（3）所描述运动方程的动力学。这些网络由专用电子元件构成，例如运算放大器、电阻器、电容器和电感器，它们相互连接组成电路，可执行从简单加减运算到复杂微分方程等各种数学运算。在此，电路的电压和电流代表所研究系统的连续物理量。我们采用四种运算放大器配置，即加法放大器、差分放大器、积分器和增益放大器，来构建系统（3）的线性项。这些配置由金属电阻器（容差为 1%）、聚酯电容器和通用型 LF353 运算放大器构成。为实现平方、开平方、变量间乘法和除法等非线性函数，我们使用了典型误差小于 1% 的 AD633JN 模拟乘法器。

重要的是，我们在增益放大器配置中加入缩放因子，以避免变量的振幅超过电源限制。特别是，开平方运算要求对振幅进行精确控制，因为它对负信号高度敏感。形变强度（α）、耦合强度（γ）、量子化辐射场的频率（ω）以及

原子频率（ω_0）和初始条件（$I_{L_1}(0)$ $V_{C_1}(0)$ $I_{L_2}(0)$ $V_{C_2}(0)$）均通过外部电压信号设定。这些信号由独立的数模转换器生成，并通过串行外设接口（SPI）协议，使用控制位和数据位（即 LDAC、DATA 和 CLK）与主8位微控制器（PIC18系列）通信。具体而言，我们使用 MCP492系列的数模转换器，其分辨率为12位，参考电压为5伏。因此，电压分辨率为1.22 mV。该分辨率使我们能够将参数值设定至多达三个有效数字。因此，初始条件

图中用于实验复现结果的参数3 以及正文和图注末尾列出的参数最多保留三位小数。初始条件设定在每个积分放大器的输出端。我们加入了模拟开关，以便在设定初始条件后隔离数字和模拟组件。由于这些器件切换至高阻抗状态，数字电路不会影响系统的动力学。为设备供电，我们使用双极性直流电源提供±12V 偏置电压，为运算放大器和模拟乘法器供电。

[1] K. Baumann、C. Guerlin、F. Brennecke 和 T. Esslinger，《自然》**464**，1301–1306（2010年）。[2] J. Muniz、D. Barberena、R. Lewis-Swan、D. Young、J. Cline、A. Rey 和 J. Thompson，《自然》**580**，602（2020年）。[3] S. Sachdev，*Quantum phase transitions (2nd edition)*（剑桥大学出版社，2011年）。[4] P. Cejnar、P. Str´ansk´y、M. Macek 和 M. Kloc，《物理学杂志A：数学与理论》**54**，1

[5] R. H. Dicke，《物理评论》93，99（1954年）。[6] A. L. Corps 和 A. Rela˜no，《物理评论A》105，052204（2022年）[7] A. L. Corps 和 A. Rela˜no，《物理评论快报》127，130602（2021年）。[8] M. A. Bastarrachea-Magnani、S. Lerma-Hern´andez 和 J. G. Hirsch，《物理评论A》89，032101（2014年）。[9] R. Puebla、A. Rela˜no 和 J. Retamosa，《物理评论A》87，023819（2013年）。[10] A. Rela˜no、J. M. Arias、J. Dukelsky、J. E. Garc´ıa-Ramos 和 P. P´erez-Fern´andez，《物理评论A》78，060102（2008年）。[11] P. Str´ansk´y、P. Cejnar 和 R. Filip，《物理评论A》104，053722（2021年）。[12] M.-J. Hwang、R. Puebla 和 M. B. Plenio，《物理评论快报》115，180404（2015年）。[13] R. Puebla、M.-J. Hwang 和 M. B. Plenio，《物理评论A》94，023835（2016年）。[14] J. Klinder、H. Keß ler、M. Wolke、L. Mathey 和 A. Hemmerich，《美国国家科学院院刊》112，329

[15] J. Mut-Petit、A. Rela˜no、R. A. Molina 和 D. Jaksch，《自然·通讯》9，2006（2018）。[16] P. P´erez-Fern´andez、A. Rela˜no、J. M. Arias、P. Cejnar、J. Dukelsky 和 J. E. Garc´ıa-Ramos，《物理评论E》83，046208（2011）。[17] M. A. Bastarrachea-Magnani、S. Lerma-Hern´andez 和 J. G. Hirsch，《物理评论A》89，032102（2014）。[18] R. Lewis-Swan、A. Safavi-Naini、J. Bollinger 和 A. Rey，《自然·通讯》10，1581（2019）。[19] S. Pilatowsky-Cameo、D. Villase˜nor、M. Bastarrachea- Magnani、S. Lerma-Hern´andez、L. Santos 和 J. Hirsch，《自然·通讯》，865（2021）。[20] S. Pilato wsky-Cameo、J. Ch´avez-Carlos、M. A. Bastarrachea-Magnani、P. Str´ansk´y、S. Lerma- Hern´andez、L. F. Santos 和 J. G. Hirsch，《物理评论E》101，010202（2020）。

[21] A. Rela˜no，《物理评论快报》121，030602（2018）。[22] M. Kloc、P. Str´ansk´y 和 P. Cejnar，《物理评论A》98，013836（2018）。[23] J. Ch´avez-Carlos、B. L´opez-del Carpio、M. A. Bastarrachea-Magnani、P. Str´ansk´y、S. Lerma- Hern´andez、L. F. Santos 和 J. G. Hirsch，《物理评论快报》122，024101（2019）。[24] C. M. L´obez 和 A. Rela˜no，《物理评论E》94，012140（2016）。[25] A. L. Corps、R. A. Molina 和 A. Rela˜no，《物理学杂志A：数学与理论》55，084001（202

。[26] C. Emary 和 T. Brandes，《物理评论快报》**90**，044101（2003年）。[27] Q. Wang，《熵》**24**，1415（2022年）。[28] J. Larson 和 T. Mavrogordatos，*The Jaynes–Cummings Model and Its Descendants, Modern research*

（IOP 电子书，2021年）。[29] J. Larson 和 E. K. Irish，《物理学杂志 A：数学与理论》**50**，174002（201

[30] A. L. Corps 和 A. Rela˜no，《物理评论A》106，047701（2022年）。[31] P. P´erez-Fern´andez、P. Cejnar、J. M. Arias、J. Dukelsky、J. E. Garc´ıa-Ramos 和 A. Rela˜no，《物理评论A》83，033802（2011年）。[32] T. Brandes，《物理评论E》88，032133（2013年）。[33] M. De Aguiar、K. Furuya、C. Lewenkopf 和 M. Nemes，《物理学年鉴》216，291（1992年）。[34] J. Ch´avez-Carlos、M. Bastarrachea-Magnani、S. Lerma-Hern´andez 和 J. Hirsch，《物理评论E》94，022209（2016年）。[35] M. A. Quiroz-Ju´arez、J. Ch´avez-Carlos、J. L. Arag´on、J. G. Hirsch 和 R. de J. Le´on-Montiel，《物理评论研究》2，033169（2020年）。[36] F. Dimer、B. Estienne、A. Parkins 和 H. Carmichael，《物理评论A》75，013804（2007年）。[37] P. Kongkhambut、H. Keßler、J. Skulte、L. Mathey、J. G. Cosme 和 A. Hemmerich，《物理评论快报》127，253601（2021年）。[38] A. Gonz´alez-Tudela 和 D. Porras，《物理评论快报》110，080502（2013年）。[39] J. A. Mlynek、A. A. Abdumalikov、C. Eichler 和 A. Wallraff，《自然·通讯》5，1（2014年）。[40] Z. Zhiqiang、C. H. Lee、R. Kumar、K. Arnold、S. J. Mas- son、A. Parkins 和 M. Barrett，《光学》4，424（2017年）。[41] S. J. Masson、M. Barrett 和 S. Parkins，《物理评论快报》119，213601（2017年）。

[42] A. Carlson、G. Hannauer、T. Carey 和 P. J. Holsberg, Inc.：普林斯顿，新泽西州（1967年）。[43] C. L. Johnson, *Analog computer techniques*（McGraw-Hill，1963年）。[44] A. Noordergraaf、P. D. Verdouw 和 H. B. Boom，《心血管疾病进展》5，419（1963年）。[45] C. Moore，《理论计算机科学》201，99（1998年）。[46] R. Vazquez-Medina、O. Jimenez-Ramirez、M. Quiroz-Juarez 和 J. Aragon，《混沌、孤子与分形》51，36（2013年）。[47] M. Quiroz-Ju´arez、O. Jim´enez-Ram´ırez、R. V´azquez- Medina、V. Bre˜na-Medina、J. Arag´on 和 R. Barrio，《科学报告》9，1（2019年）。[48] O. Jim´enez-Ram´ırez、E. Cruz-Dom´ınguez、M. Quiroz- Ju´arez、J. Aragon 和 R. V´azquez-Medina，《混沌、孤子与分形：X》6，100058（2021年）。[49] A. Escobar-Ruiz、M. Quiroz-Juarez、J. Del Rio-Correa 和 N. Aquino，《科学报告》12，13346（2022年）。[50] S.-B. Chen、H. Jahanshahi、O. A. Abba、J. Sol´ıs-P´erez、S. Bekiros、J. G´omez-Aguilar、A. Yousefpour 和 Y.-M. Chu，《混沌、孤子与分形》140，110223（2020年）。[51] R. de J. Le´on-Montiel、M. A. Quiroz-Ju´arez、R. Quintero- Torres、J. L. Dom´ınguez-Ju´arez、H. M. Moya-Cessa、J. P. Torres 和 J. L. Arag´on，《科学报告》5，1（2015年）。[52] M. Quiroz-Ju´arez、J. Arag´on、R. de J. Le´on- Montiel、R. V´azquez-Medina、J. Dom´ınguez- Ju´arez 和 R. Quintero-Torres，《欧洲物理快报》116，50004（2017年）。[53] R. de J. Le´on-Montiel、M. A. Quiroz-Ju´arez、J. L. Dom´ınguez-Ju´arez、R. Quintero-Torres、J. L. Arag´on、A. K. Harter 和 Y. N. Joglekar，《通讯物理》1, 1 (2018). [54] M. A. Quiroz-Ju´arez, C. You, J. Carrillo- Mart´ınez, D. Montiel- ´Alvarez, J. L. Arag´on, O. S. Maga˜na-Loaiza, and R. de J. Le´on-Montiel,《物理评论研究》3, 013010 (2021年). [55] M. A. Quiroz-Ju´arez, K. S. Agarwal, Z. A. Cochran, J. L. Arag´on, Y. N. Joglekar, and R. de J. Le´on-Montiel,《物理评论应用》18, 054034 (2022年). [56] J. Dong, V. Juriˇci´c, and B. Roy,《物理评论研究》3, 023056 (2021年). [57] C. Hua Lee, S. Imhof, C. Berger, F. Bayer, J. Brehm, L. W. Molenkamp, T. Kiessling, and R. Thomale,《通讯物理》1, 39 (2018). [58] S. Imhof, C. Berger, F. Bayer, J. Brehm, L. W. Molenkamp, T. Kiessling, F. Schindler, C. H. Lee, M. Greiter, T. Neupert, *et al.*,《自然·物理》14, 925 (2018). [59] V. V. Albert, L. I. Glazman, and L. Jiang,《物理评论快报》114, 173902 (2015年). [60] G.-Q. Zhong and F. Ayrom,《国际电路理论与应用期刊》13, 93 (198

[61] N. Kuznetsov、T. Mokaev、V. Ponomarenko、E. Seleznev、N. Stankevich 和 L. Chua，《非线性动力学》**111**，5859（2023）。[62] A. Rela˜no、M. Bastarrachea- Magnani 和 S. Lerma-Hern´andez，《EPL（欧洲物理快报）》**16**，50005（2016）。[63] M. Bastarrachea-Magnani、A. Rela˜no、S. Lerma-Hern´andez、B. L´opez-del Car- pio、J. Ch´avez-Carlos 和 J. G. Hirsch，《物理学杂志A：数学与理论》**50**，144002（201