arXiv:2303.01554v1 [math.GT] 2 Mar 2023

亏格2代数纤维化中的奇异纤维及其单值化分解

¨Sumeyra Sakalli 和 Jeremy Van Horn-Morris

Abstract. Kodaira 对椭圆纤维化中奇异纤维的分类，以及将其转译为单值化和 Lefschetz 纤维化语言的工作，极大地推动了 4 维流形的研究。在本文中，我们开始着手研究如何在一类由 Namikawa 和 Ueno 于 20 世纪 70 年代描述的奇点中，将代数曲线的亏格2族的奇异纤维与 Lefschetz纤维化的正Dehn扭转分解联系起来。我们考察 $\mathbb{C}^3$ 中的四族超曲面奇点。每个超曲面都带有一个以亏格2代数曲线为纤维的纤维化，这些曲线退化为单个奇异纤维。我们确定了该族中每个奇点的解消，并找到了将解消平坦变形为更简单部分的方式，从而得到一个 Lefschetz 型纤维化。随后，我们将该 Lefschetz 纤维化描述为 Dehn扭转中的正分解。这为某些亏格2纤维化的奇点建立了曲线构型与单值化分解之间的对照表。

1. Introduction

在 [Kod63], Kodaira 对椭圆曲线铅笔中的所有奇异纤维进行了分类，并证明在这种铅笔中，每个纤维要么是椭圆曲线，要么是带有节点或尖点的有理曲线，要么是由若干自交数为 -2的有理曲线构成的特定和。这类奇异纤维有多种用于描述其特征的方式，例如数值代数不变量、管道树，以及奇异纤维链环周围的单值化，等等。

许多数学家将 Kodaira 的研究计划推广到更高亏格，以探讨这一问题的各个方面。Iitaka 和 Ogg [Ogg66] 最先尝试刻画亏格 2 纤维化中的奇异纤维。随后，Namikawa 和 Ueno [NU73a, NU73b] 对亏格二曲线铅笔中奇异纤维的中心纤维管状邻接描述，以及中心纤维在 Siegel 上半空间中的复代表进行了分类。他们统计出 120 种不同类型的中心纤维。Horikawa 也着手研究这一问题 [Hor77，Hor88]并构造了纤维化中奇异纤维的一个数值不变量。

具体而言，设 $\pi : X \to \mathbb{D}$ 是定义在圆盘 $\mathbb{D} = \{t \in \mathbb{C}, |t| < \epsilon\}$ 上的亏格二完备曲线复代数族，其中 X 是极小非奇异复解析曲面，而 π 在穿孔圆盘 $D' = \mathbb{D} - \{0\}$ 上光滑，且具有孤立的代数奇点。因此，对于每个 $t \in D'$，纤维 $\pi^{-1}(t)$ 都是亏格二的紧致非奇异曲线（黎曼曲面），π 在 D' 上的限制是一个光滑纤维丛，而中心纤维是一条奇异复代数曲线。这类曲线族称为代数曲线退化族。

原子奇异纤维定义为：无法通过对退化族作任何扰动，将其分裂为具有多个（更简单）奇异纤维的纤维化的奇异纤维。Xiao 和 Reid 提出了确定所有原子奇异纤维的问题 [Xia85，Rei]，；关于亏格二情形的研究见 [Hor88，Xia85，Per92，AA01]。特别地，在 [AA01] 和 [AA04] 中，Arakawa 和 Ashikaga 研究了超椭圆铅笔的分裂。他们证明，任何亏格二超椭圆曲线的退化都可分为三种类型：一条亏格一节点曲线（类型 0_0）、两条 -2 亏格分别为 0 和 1、且在两点处横截相交的曲线（I 类），以及两条 -1 亏格均为 1、且在一点处横截相交的曲线（II 类）（见其中的推论 3.4）

[AA01]）。他们的分裂结果源于运用 A'Campo-Gusein Zade 理论对奇点进行莫尔斯化的方法 [A'C75，GZ74]，，该方法在解消过程中加入了扰动手段。

可以从奇点中提取的一个不变量是其单值化，即围绕中心纤维的纤维化的单值化，可将其视为所选邻近参考纤维的映射类群中的一个元素。这正是 Matsumoto 和 Montesinos 从拓扑学角度着手研究这一问题的出发点。若一个同胚 $f : \Sigma_g \to \Sigma_g$将一组 $\mathcal{C}$ 两两不相交的简单闭曲线（称为切割曲线）映到自身，并且在其补集上同痕于一个有限阶同胚，即一个周期映射，则称其为伪周期映射。代数族中所有孤立奇异纤维的单值化都是伪周期的。在 [MMA94，MMA11]，Matsumoto 和 Montesinos 证明，事实上，单值化足以恢复 Namikawa 和 Ueno 的分类，至少在同胚意义下如此。他们研究亏格为 $g \geq 2$ 的 Namikawa-Ueno 型纤维化，并证明了以下结论：亏格为 $g \geq 2$ 的黎曼曲面在圆盘上的极小退化族（除原点外均非奇异）的拓扑类型，与映射类群 $MCG(\Sigma_g)$ 中由负扭转伪周期映射表示的共轭类之间存在一一对应关系。这一对应由拓扑单值化给出。（在 $g = 1$ 情形中，Kodaira 证明了类似的对应是满射但非单射的 [Kod63]。）

围绕这一问题的研究过程中，数学家们一直致力于加深对奇点和纤维化的认识。近期的一项尝试来自 Matsumoto 的研究，他在与 Montesinos 合作的工作基础上，试图理解 Namikawa 和 Ueno 提出的一个奇点。在 [Mat04] Matsumoto 研究了由 Σ_2 上的某个对合所产生的奇异纤维化。最终目标是理解如何将其变形为*Lefschetz* 纤维化，这是描述光滑拓扑和辛拓扑的首选方式 [Don98] 并给出相应的正分解。他通过显式变形实现这一目标，并利用计算机计算比较奇异纤维，从而确定相应消失圈的位置。为此，他没有采用初始的全纯纤维化，而是构造了一个与之拓扑等价、复结构未必相同的纤维化，并转而研究后者。这与我们的研究尤为相关：我们不仅运用了相关的计算机计算，而且本文也未涉及这个具体例子。

在 [Ish07]，Ishizaka 从 [MMA94]，中提出的思想出发，这些思想基于 Nielsen 理论以及曲面微分同胚的拓扑学，从而写出闭亏格 $g \geq 2$ 曲面上所有有限阶同胚的 Dehn 扭转分解。事实上，对于那些允许通过超椭圆变形成为 Lefschetz 纤维化的超椭圆周期映射，这些方法适用于任意亏格（另见 [Ish04]）。事实上，Ishizaka 在确定与若干 Namikawa-Ueno 奇点相关的 Lefschetz 纤维化方面取得了初步进展，并计算了我们三个例子（在闭曲面上）对应的分解：ϕ_1，ϕ_2 和 ϕ_3，但将它们推广到了任意亏格。尽管论文中没有明确说明，其中提出的方法本质上等同于我们在本文中使用的方法。由于只研究这三种情形，Ishizaka 仅处理光滑曲面或等奇点变形，因此其工作无需援引 Laufer 的工作。

本文沿用 Ishizaka 的大致思路，考察 $\mathbb{C}^2$ 内分支曲线的双曲椭圆商及其变形。由于我们希望变形的是纤维化本身，因此必须格外谨慎，确保为相关显式奇点的解消构造平坦变形。我们将讨论范围限制在仿射情形，并考察 Namikawa 和 Ueno 在周期同胚子族中使用的多项式。首先，我们构造所有这类奇点的显式解消，接着构造这些

奇异纤维化到 Lefschetz纤维化的变形，同时明确给出 Dehn扭转分解以及参考纤维的识别。我们运用 Laufer 的结果证明这类变形是平坦的。我们的方法与 Ishizaka 的方法相似，都大量运用了超椭圆对合，并特别关注分支轨迹的辫子描述。事实上，贯穿全文的都是分支覆盖。最后，正是由于如此谨慎，这些变形实际上是解消上底层复纤维化的变形，因此，我们的定理既可理解为对这些代数族所对应的辛纤维化的刻画，也可理解为对底层代数曲面的辛结构的刻画；通过我们在奇点解消中构造的管道图，可以更容易地考察这些辛结构。

这些变形将奇点分解为其原子块。Reid 将把奇异纤维化变形为 Lefschetz 纤维化的过程称为莫尔斯化 [Rei],因此，我们给出了这些奇点的显式莫尔斯化。在辛几何背景下，这一做法同样自然,因为 Lefschetz 纤维化与光滑莫尔斯函数（通过把手分解）和复莫尔斯函数（通过 Stein 空间理论）都密切相关。

在 [Sak18] 和 [AS19], Akhmedov 与第一作者研究了以代数纤维化全空间为底空间的闭流形，该代数纤维化具有两个奇异纤维，记作 S^2， F_1， F_2其中奇异纤维属于 [NU73a] 的列表。对于这些代数纤维化中的每一对奇异纤维，我们通过在 Hirzebruch 曲面内寻找相应的亏格二复曲线铅笔，以几何方式重构了其中一个纤维 F_1。通过爆破这些铅笔，我们精确地得到了 Namikawa-Ueno 的特定类型亏格二奇异纤维及其截面。除了以几何方式构造这些奇点之外，我们还引入了二节点球面变形，以此扰动代数纤维化中的对偶纤维 F_2，其底空间为 S^2。随后，我们利用这些变形以及辛手术（辛爆破、辛解消和广义有理爆缩），构造了极小辛四维流形，它们是 $\mathbb{CP}^2\#6\overline{\mathbb{CP}}^2$、$\mathbb{CP}^2\#7\overline{\mathbb{CP}}^2$ 和 $3\mathbb{CP}^2\#k\overline{\mathbb{CP}}^2$ 的异种副本，适用于 $k = 16$、.....、19。

本文研究底空间为 D^2、具有一个或两个边界分支且仅有一个奇异纤维的亏格 2 曲线代数族。我们构造这些奇异纤维，并证明通过复结构的变形，我们所研究的代数纤维化可分解为 Lefschetz 纤维化。我们求出决定这些 Lefschetz 纤维化的全空间的单值化分解，也就是说，我们确定这些奇异纤维化的辛变形类型。我们还构造了 13 种 Namikawa-Ueno 纤维（第 5.1 节和第 5.2 节）；这种做法受到 [NU73b] 中工作的启发，但与之不同，也不同于我们在 [AS19, Sak18] 中采用的方法。具体来说，我们研究 $\mathbb{C}^3$ 中的多项式 $f(x, y, t)$，并将它们的零点集记为 $V(f)$。这些代数簇 $V(f)$ 各自带有一个由代数曲线构成的纤维化，其中有一个比 Lefschetz 奇点更复杂的奇异纤维，而其一般纤维是具有一个或两个边界分支的光滑亏格二曲线。一般而言， $V(f)$ 是一个奇异簇，我们对其进行解消。我们将解消空间称为 X_f。该纤维化提升至 X_f，奇异纤维则提升至其解消图。

本文旨在建立亏格 2 代数纤维化的奇异纤维与其作为 Lefschetz 纤维化的单值化描述之间的对应关系；这些奇异纤维通常通过其解消图被视为复曲线的构型。

Th定理 1.1。 奇异代数簇 $V(f)$ 的解消 X_f，其中 f 是

i) $y^2 - x^5 - t^k$, $k = 1, \dots, 10$,
ii) $y^2 - x^6 - t^k$, $k = 1, \dots, 6$,
iii) $y^2 - x(x^4 + t^k)$, $k = 1, \dots, 8$,
iv) $y^2 - x(x^5 + t^k)$, $k = 1, \dots, 10$,

允许一个由超椭圆曲线构成的（代数）纤维化，除$t=0$外，所有曲线均光滑。中心纤维如图 2、3 4、5、6、7、8和 9所示。

定理 1.2。 奇异代数簇 $V(f)$的解消 X_f上的亏格 2 纤维化，其中 f 为

i) $y^2-x^5-t^k$, $k=1,\dots,6,8,9$, 10, *ii)* $y^2-x^6-t^k$, $k=1,2,4,5,6$, *iii)* $y^2-x(x^4+t^k)$, $k=1,\dots,8$, *iv)* $y^2-x(x^5+t^k)$, $k=1,\dots,10$,

可分解为 *Lefschetz* 纤维化，该纤维化由以下正词之一描述；这些正词属于亏格2曲面（具有 1 个或 2 个边界分支）的映射类群：

$$\phi_1,\phi_2,\phi_3,\phi_4,\phi_{\tilde{2}},\phi_{\tilde{4}},I,\phi_A,\phi_B,\phi_1^2,\phi_1^3,\phi_2^2,\phi_3^2,\phi_4^2,\phi_{\tilde{2}}^2,\phi_{\tilde{4}}^2,\phi_1 I,\phi_2 I,\phi_{\tilde{2}} I,\phi_{\tilde{4}} I,\phi_3\phi_A,\phi_4\phi_B,\tau_\partial$$

其中

- $\phi_1=\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$,
- $\phi_2=\tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$,
- $\phi_{\tilde{2}}=\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2$,
- I 是亏格二曲面上具有分解$I=\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1$的超椭圆对合，

对于具有一个边界分支的曲面，以及对于具有两个边界分支的曲面，我们有，

- $\phi_3=\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5$,
- $\phi_4=\tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5$,
- $\phi_{\tilde{4}}=\tau_{5'}\tau_5\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1$
- $\phi_A=\tau_1\tau_4\tau_3\tau_{a_1}\tau_2\tau_5\tau_1\tau_4\tau_{b_1}\tau_{b_1'}$
- $\phi_B=\tau_4\tau_{a_2}\tau_3\tau_5\tau_2\tau_4\tau_{b_2}\tau_{b_2'}$,

并且 τ_∂ 表示曲面 $\Sigma_{2,1}$ 和 $\Sigma_{2,2}$ 上的边界（多重）扭转（具体取决于所考虑的对象）。

在这里，我们考虑映射类群中的分解

$$\mathrm{MCG}(\Sigma_{2,\epsilon}) := \mathrm{Diff}^+(\Sigma_{2,\epsilon},\partial\Sigma_{2,\epsilon})/\text{isotopy rel boundary},$$

其中， $\epsilon=1$ 或 2 表示一般纤维的边界分支数。Dehn扭转τ_1、$\cdots$、τ_5、$\tau_{5'}$是亏格二曲面的映射类群的双曲子群的标准生成元，如图15所示。 ϕ_A 中的曲线 a_1、 b_1 和 b_1' 见图 19，而 ϕ_B 中的曲线 a_2、 b_2 和 b_2' 见图25。单值化 ϕ_i、$i=1$、2、3、4 分别是边界多重扭转的 10、8、6、5 阶根。

备注 1.3。 定理 1.2陈述中看似存在的笔误，实为有意省略。本定理未讨论两种情形： ϕ_1^7， ϕ_3^3。后者与 *Matsumoto* 构造的纤维化 [Mat04] 以及 $y^2=x^6+t^3$ 上的纤维化有关；它对应于 *Matsumoto* 的分解在具有两个边界分支的亏格2曲面上的某种提升。

在亏格 1 的情形中，Kodaira 的曲线构型与单值化分解之间的对应关系由 Harer-Kas-Kirby 建立 [HKK86]。这对后来构造奇异有理曲面的工作产生了极其重要的影响。典型的有理爆破方法使用曲线构型和截面；这些构型和截面是通过对起始流形（如椭圆曲面）上的 Lefschetz 纤维化的单值化进行分解而构造的 $E(1)$，以及像 I_n 和亏格一纤维化中的鱼尾纤维这样的纤维（例如参见 [PSS05、SS06、Akh07]）。

我们的定理应被理解为建立了亏格 2 中的这一对应关系。给定一个 Lefschetz 纤维化，在定理 1.2 中列出的子词（或可能不止一个）表明，我们可以在该流形中找到相应的曲线构型。对于辛或光滑手术构造而言，需要了解起始 4 维流形内部的辛曲线构型。许多奇异有理曲面的有理爆破构造，起点恰恰是这一对应关系中的另一种语言：单值化分解。从一个有用流形上的已知 Lefschetz 纤维化出发，利用已知奇异纤维的分解来产生特定的曲线构型，然后将其用于手术。

定理 1.4。 给定一个 *Lefschetz* 纤维化，定理 *1.2*中某个词对应的子纤维化包含定理 *1.1*中的相应曲线构型；此外，我们可以将相容的辛结构变形为一种使该曲线构型成为辛的结构。

推论 1.5。 定理 *1.2*中的每个单值化都是周期性的（即，某个幂次的单值化等于边界多重扭转的某个幂次），因此所给出的分解是边界多重扭转的根的正*Dehn*扭转分解。具体而言，我们有

- $\phi_1^{10} = \tau_\partial$，
- $\phi_2^8 = \tau_\partial$。
- $\phi_3^6 = \tau_\partial$，以及
- $\phi_4^5 = \tau_\partial$，

其中，与前文一样，τ_∂ 在前两种情形下表示边界扭转，在后两种情形下表示边界多重扭转。

与页面亏格及开书分解的复杂度的联系。 最后，我们指出，从接触拓扑的角度来看，这些例子也颇有意义。其中若干解消并非沿树的管状邻接，因此构造相容开书分解的唯一方法是代数方法。对于那些由球面沿树管状邻接得到的解消，其树至多有一个坏顶点。没有坏顶点的树对应亏格 0 的开书分解（[Sch05],[EO06a]），至多有一个坏顶点的树则对应亏格 1 的开书分解（[EO06b]）。有趣的是，定理 1.2 所述开书分解的欧拉示性数，有时比 [Sch05], [EO06a] 或 [EO06b]所述开书分解的欧拉示性数更小。从这个意义上说，定理1.2 所述的一些开书分解，其复杂度低于其他构造所预期的水平。举例来说，我们考察 ϕ_2^4和 ϕ_2^6，二者都是页面亏格为 2 且只有一个边界分支的开书分解，因此页面的欧拉示性数为 -3。对于这两种情形，使用 [EO06b], 的算法，与该解消对应的管道化树所关联的开书分解页面，其亏格为 1，欧拉示性数为 -4。

2. Acknowledgements

我们谨此感谢 Wenbo Niu、Lance Miller 和 Cagri Karakurt 与我们进行有益的讨论，并感谢波恩的马克斯·普朗克研究所于我们合作初期给予支持。我们使用 Mathematica 制作了辫子电影。第二作者获得了西蒙斯基金会第 639259 号资助的部分支持。

3. Outline and proofs

由于定理 1.1 和 1.2的证明包含了逐情形分析，且占据了论文的大部分篇幅，我们在此列出这些定理的证明陈述，并简要概述论文内容。

首先，在第4 节中，我们介绍必要的代数背景，以及 Lefschetz纤维化的术语，并简要概述它们与单连通

编织曲面 $\mathbb{C}^2$的分支覆盖之间的对应关系。随后，我们在第5节中计算这些奇点的解消图。我们将解消上的亏格2纤维化分解为 Lefschetz纤维化，并在第6、7、8节中记录相应的 Dehn 扭转分解。

定理 *1.1* 的证明。第 5 节的内容即为定理 1.1 的证明。 □

定理 *1.2* 的证明。利用定理 4.3，第 6 节和 8 节的内容即为定理 1.2 的证明。□

定理 *1.4* 的证明。由于 Gompf 的工作 [Gom01]，其将 Lefschetz 纤维化推广了 Thurston 的工作 [Thu76], ，我们只需证明定理 1.1的证明中构造、并在定理 1.2中使用的解消存在 K¨ahler 形式（或者说，任何与复结构弱相容的辛形式）。为证明该解消是 K¨ahler 的，我们将 $\mathbf{C}^3$ 中的奇异仿射超曲面的解消嵌入一个紧致代数曲面。为此，首先将由所列多项式之一描述的奇异仿射超曲面完备化为 $\mathbb{CP}^3$中的奇异射影超曲面。它在一个图中原点处有一个孤立奇点，在 $\mathbb{CP}^2$ 无穷远处则可能有非常复杂的奇点。然后对这些奇点进行解消，得到一个光滑代数曲面，它必然是 K¨ahler 曲面。在仿射图内，唯一的奇点是原点处的孤立奇点；我们可以选择仿射图上方的解消，使其为第 5 节中构造的解消。由此便将该解消嵌入一个 K¨ahler 曲面，因此该解消具有一个与复结构相容的辛形式。

□

推论 *1.5* 的证明。 只需证明相关曲面的映射类群中的每个关系。由于每个单值化都是超椭圆的，只需考察二重商中的编织。在 6.1 中，我们证明了沿链环的单值化 ϕ_1 是对应于 (5,1) 环面结的编织的双重分支覆盖（即五股编织和 1/5 的右手扭转）。它的五次方是全扭转。由于股数为奇数，边界上的覆盖是非平凡二重覆盖，因此 (5,5) 编织提升为超椭圆对合 [BH71]。因此 $\phi_1^{10} = \tau_{\partial}$。出于类似的原因， ϕ_3 是 (6,1) 编织的双重分支覆盖，因此 ϕ_3^6 是边界多重扭转。对于另外两个微分同胚，很容易看出 ϕ_2^8 与 ϕ_1^{10}Hurwitz等价；类似地， ϕ_4^5 与 ϕ_3^6Hurwitz等价。□

4. Background

4.1. Lefschetz 纤维化。 回顾一下，*Lefschetz* 纤维化 是一个满射 $\pi : X \to B$，其中X 的维数为 4， B 的维数为 2，且唯一允许的奇点具有 π 的局部模型：$(z_1, z_2) \to z_1^2 + z_2^2$（在保定向的复坐标下）。我们通常假设所有奇点都位于 π 的不同纤维中（这可以通过微小扰动实现）。当 X 非紧或带边界时，我们假设 π 的临界点位于 X 的内部。纤维化的光滑纤维是定向曲面，每个奇异纤维都是一个节点奇点，它由压缩附近光滑纤维中的一条简单闭曲线（即消失圈）得到。奇异纤维周围的单值化 由沿消失圈的正（右手）Dehn扭转给出。我们选择一个参考纤维（假设其光滑） $\pi^{-1}(x_0) = \Sigma_{g,\,k}$，它是一个亏格为 g 且有 k 个边界分支（若曲面非紧则为端）的曲面，位于参考点 $x_0 \in B$ 上方。对于每个奇异纤维，我们考察从参考纤维到该奇异纤维的一条路径上的纤维化，从而将消失圈确定为 $\pi^{-1}(x_0)$ 中的一条曲线。路径的选择给出了一个循环次序

消失圈的次序。对于一个亏格为 g 、定义在闭4维流形上的 Lefschetz 纤维化 X ，其基空间为 S^2，按照路径选择所诱导的循环次序，将所有消失圈对应的正 Dehn扭转相乘，所得结果等于光滑纤维的映射类群 MCG(Σ_g) 中的单位元$\Sigma_g = \pi^{-1}(x_0)$。基空间为 D^2 的 Lefschetz 纤维化，由其在 ∂D^2 上的单值化分解确定，该分解作为 MCG($\Sigma_{g,\ k}$) 的元素，由正 Dehn扭转组成。我们称 MCG($\Sigma_{g,\ k}$) 中右手 Dehn扭转的有序列表为正分解。[1] 本文中我们将使用辫子记号表示这些分解，因此消失圈的循环次序对应于分解中从左到右的次序。

令τ_γ 表示 Lefschetz 纤维化的一般纤维$\Sigma_{g,k}$ 上绕环路 γ 的一次 Dehn扭转。回忆一下，*Hurwitz*变换 提供了一种改变与循环次序中相邻的两个消失圈相关联的弧的局部构型的方法。对于相应的正分解，我们以下述两种方式之一交换两个连续项的位置：

$$\tau_\alpha\tau_\beta \to (\tau_\alpha\tau_\beta\tau_\alpha^{-1})\tau_\alpha = \tau_{\tau_\alpha^{-1}(\beta)}\tau_\alpha =: \tau_\alpha^{-1}(\tau_\beta)\tau_\alpha$$

or

$$\tau_\alpha\tau_\beta \to \tau_\beta(\tau_\beta^{-1}\tau_\alpha\tau_\beta) = \tau_\beta\tau_{\tau_\beta(\alpha)} =: \tau_\beta\tau_\beta(\tau_\alpha)$$

in MCG($\Sigma_{g,k}$)。如果两个正分解可以通过一系列Hurwitz变换相互得到，则称它们为*Hurwitz*等价（[Mat96],以及 [Ful03、Aur05、GS99]）。

各种曲面的映射类群与具有不同数量标记点的辫群之间存在相互作用。令 B_n 表示 $n \geq 2$上的 n 股辫群。回忆一下， B_n 由 $n-1$ 个标准生成元 $a_1, \cdots, a_{n-1}$生成，它们满足辫关系

$$a_ia_{i+1}a_i = a_{i+1}a_ia_{i+1},\ i = 1, \cdots, n-2, \quad a_ia_j = a_ja_i,\ \text{if } |i-j| > 1$$

上述关系成立。若一个辫子是辫群 B_n的正生成元a_i 的共轭元之积，则称其为拟正辫；也就是说，它可由拟正辫子词 $\prod_{k=1}^m w_k a_{i_k} w_k^{-1}$ 表示，其中 w_1、 $\cdots$、 w_m 是 a_1、 $\cdots$、 a_{n-1}、 a_1^{-1}、 $\cdots$、 a_{n-1}^{-1} [中的任意词 Rud83]。MCG($\Sigma_{g,\epsilon}$)的子群由标准环路 γ_1、 $\cdots$、 $\gamma_{2g+\epsilon-1}$ 生成，其中 $\epsilon = 1$为2；该子群是映射类群的双曲子群，并通过双重分支覆盖与辫群 $B_{2g+\epsilon}$ 相关，如下所述。当我们将亏格为 g 的曲面表示为圆盘在 $2g+\epsilon$ 个点处分支的双重分支覆盖时，Dehn扭转 τ_1、 $\cdots$、 $\tau_{2g+\epsilon-1}$ 是 $B_{2g+\epsilon}$的标准生成元的提升。在这一对应关系下，拟正编织分解提升为正Dehn扭转分解。对标记点中的标准辫生成元进行识别，便得到双重分支覆盖中双曲子群的一组Dehn扭转生成元。

4.2. 辫状曲面与分支覆盖。 我们希望完整地给出与某个奇异簇的解消 X 相关联的 Lefschetz 纤维化的辛描述。对我们而言，这意味着列出通过对某个更复杂的奇异纤维化 π进行平坦变形 π^s而构造的 Lefschetz 纤维化的消失圈，并给出参考纤维的识别（π^s）$^{-1}$（t_0）。

为获取这些信息，我们将其描述为 X 在一条曲线 C 上方的双重分支覆盖 C^2 ，其中分支轨迹是$\mathbb{C}\times\mathbb{C}$中的一个单辫状曲面。

$\mathbb{C}\times\mathbb{C}$ 中的编织曲面 是一个嵌入曲面 Δ，它与到第一因子 p_1的投影的原像横截，$\mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$但有限个相切点除外。全文中，我们将在 $\mathbb{C}^2 = \mathbb{C}\times\mathbb{C}$上使用坐标（$t, x$）。我们称

[1]这是一种分解，正如我们通常将诱导纤维化视为圆盘边界上的纤维化那样。它是一个以 S^1 为底空间的曲面丛，因此具有单值化。 *positive factorization* 就是这一单值化的分解。

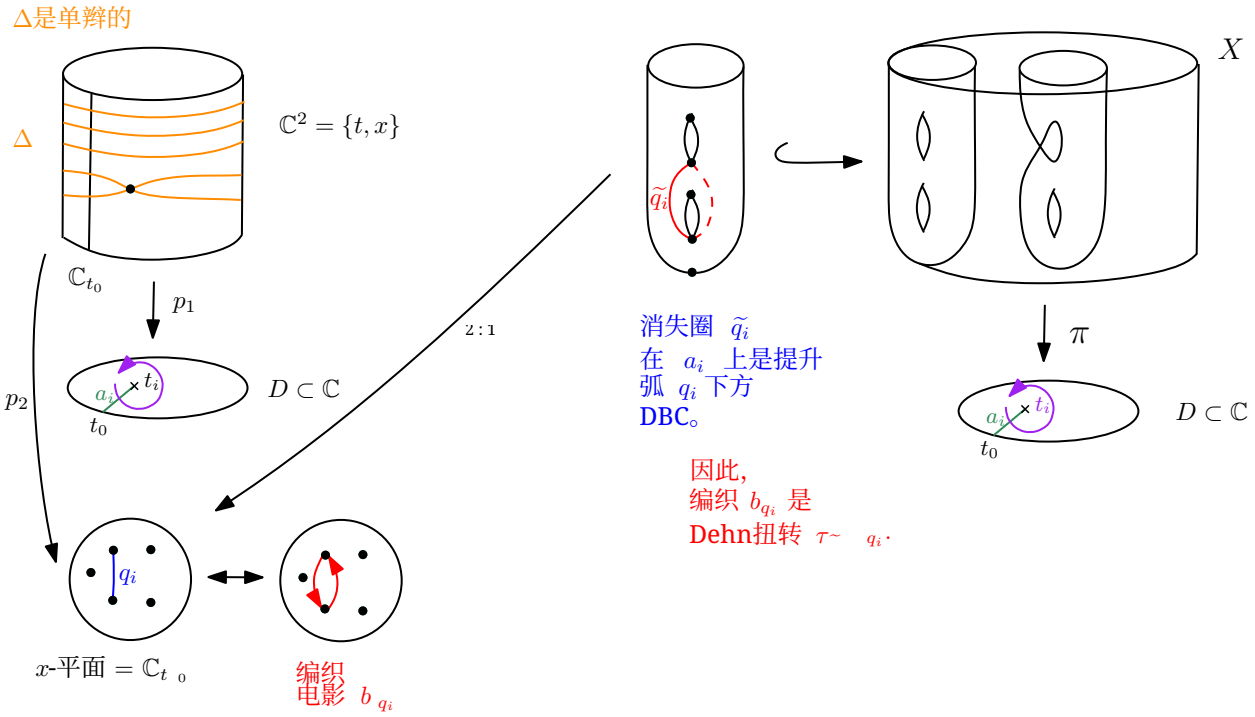


FIGURE 1. Lefschetz 纤维化中的辫状曲面与消失圈

某个切点处的编织或分支是简单的，如果在切点 Δ 处局部参数化为 (s^2, s)（在 (t, x) 坐标中）。通常，我们对 Δ 作扰动，使得每个切点都对应不同的 t值。编织的指标 是曲面 Δ 与任意一个其横截的纤维 $\mathbb{C}_t = p_1^{-1}(t)$ 的交数。

若 Δ 是 $\mathbb{C}^2$ 中的一个简单分歧曲面，且 $D \subset \mathbb{C}$ 是一个半径足够大的圆盘，能够包围所有相切点的 t值，则双重分支覆盖 $Br: X = X_\Delta \to \mathbb{C}^2$ 是一个光滑辛流形，而复合映射 $\pi := p_1 \circ Br: X \to D$ 是一个 Lefschetz 纤维化。在 t的每个取值上方，纤维 Σ_t 是平面 $\mathbb{C}_t$ 沿点集 $\Delta \cap \mathbb{C}_t$分支的双重分支覆盖。这是一个具有 1 个或 2 个边界分支的曲面（取决于 Δ 的指标是偶数还是奇数）；根据黎曼–赫尔维茨公式，这个双覆盖的欧拉示性数为 2 –index(Δ)。

我们也可以确定 π 的消失圈。首先选择一个参考纤维 $t_0 \in \mathbb{C}$（我们通常会选择 $t_0 = 1$），以及从 t_0 到 t 的路径 a_1、……、a_k；这些路径分别通向 Δ 的相切点 t_1、……、t_k 的 t 值，并且避开所有其他相切值。在每条路径上方，Δ 与纤维 $\mathbb{C}_t$ 相交，形成一个由点组成的单参数族；这些点彼此不相交，只有在切点 t_i 上方，两个点会碰撞。由于所有 $\mathbb{C}_t$ 的副本都可通过投影 p_2 与参考纤维 $\mathbb{C}_{t_0}$ 同构，因此沿着这条路径，Δ 可描述为一段电影：x 平面上的互不相交点最终有两个点碰撞。在双重分支覆盖上的 Lefschetz 纤维化 π 中，t_i 上方的纤维是一个 Lefschetz 奇点，而 a_i 上方的消失圈可由这段 Δ 的电影恢复。要找出消失圈，先将电影略微倒回，并用一条弧 q_i 标示两个点碰撞的路径。通过对 x 平面进行同伦，生成 Δ 沿 a_i 的电影，并在该同伦下将这条弧流回 t_0 上方的构型。然后，弧 a_i 上方、t_i 处 π 的消失圈，就是弧 q_i 在双重分支覆盖 [LP01] 下的原像。（见图 1。）

编织曲面的边界是 S^3 中的编织链，且每个边界为 L 的单辫状曲面都对应于 L [Rud83] 的一个拟正分解（模带等价）。拟正扭转图与上述弧直接对应。在拟正分解中，每个拟正扭转都是两个点绕某条选定的弧编织而成。在双重分支覆盖中，这种编织提升为一个右手德恩扭转。如果拟正扭转来自某条路径上的 Δ 电影，那么在双重分支覆盖中，该 Lefschetz 奇点的消失圈就是相应 Dehn 扭转的核心。

为了追踪这幅图景，我们通常通过确定一条由圆与弧构成的链来刻画分支覆盖 Br：$\Sigma_{t_0} \mapsto \mathbb{C}_{t_0}$，这些圆与弧分别构成 Σ_{t_0} 和 $\mathbb{C}_{t_0}$ 的骨架，并且在覆盖映射下彼此对应。

在下一节中，我们将用这种语言描述 Lefschetz 纤维化。首先考虑一个光滑簇 X，它是某个超椭圆曲面的解消。该超椭圆曲面是沿某个编织曲面（不一定是单辫曲面）分支的 $\mathbb{C}^2$ 分支覆盖。我们通过某种 Δ_s 对该曲面进行变形，使其对所有 $s \neq 0$ 而言都是单辫的，并验证在双重分支覆盖 X_s 中，这会产生 X的平坦变形。然后，我们利用沿某些弧的拟正编织 q_i、$\mathbb{C}_{t_0}$中的相应骨架，以及它们在参考纤维 Σ_{t_0}上的提升的描述，恢复出刻画π^s 在 X_s 上的 Lefschetz 纤维化的正分解。

4.3. **代数预备知识**。 本文着重于在两种描述之间转换对复曲面奇点的理解：一种是通过其解消来描述，另一种则使用 Lefschetz 纤维化的语言。本文将始终考虑形如 $y^2 = x^5 + t^k$, $y^2 = x^6 + t^k$, $y^2 = x(x^4 + t^k)$ 和 $y^2 = x(x^5 + t^k)$ 的超曲面奇点。在记号上，我们用 f表示这样的多项式，用 $V(f)$ 表示其在 $\mathbb{C}^3$中的零点集，并用 X_f表示 $V(f)$ 的解消。这些奇异簇及其解消都配备了一个纤维化，该纤维化由投影到 t坐标给出。纤维均为双次数为 (2，5) 或 (2，6) 的超椭圆曲线。从拓扑上看，它们是亏格 2 的曲面，分别具有 1 个或 2 个边界分支。

选择这些奇点的动机来自 Namikawa 和 Ueno 的工作 [NU73a，NU73b]他们在那里描述了亏格 2 曲线的族中可能出现的奇点。为避免原文中出现的各类代数问题，我们在仿射情形下进行研究。遵循 Namikawa 和 Ueno 的做法，我们将簇 V（f）视为由 t 参数化的亏格 2 曲线族，通过投影映射到 t 坐标，π_t： V（f）$\to \mathbb{C}$。这一纤维化延续到解消上，此时中心纤维成为与解消图相关联的曲线的管道拼接。首先，我们将用带权管道树描述这些奇点的解消，然后构造解消上的亏格 2 纤维化向 Lefschetz 纤维化的变形。

我们将超曲面奇点 $V(f)$ 的一种变形 定义为由 $s \in \mathbb{C}$ 参数化的超曲面族 $V(f_s)$，其中 f_s 是关于 (x, y, t) 的多项式，而 $f_0 = f$是所考虑的多项式。

f 的一种分裂 是指一种变形 f_s，使得解消 X_f 和 X_{f_s} 属于一个平坦族。

一般而言，给定任意平坦变形 f_s，解消族 X_{f_s} 不一定是平坦的，而且不同的解消甚至不一定作为流形同胚。然而，在某些约束条件下，可以保证族 X_{f_s} 的平坦性。

现在考虑 $\pi : \mathcal{X} \mapsto B$，其中 $\mathcal{X}$是一个复空间（可能是奇异的），B 是一个复流形，且对于 $t \in B$, $X_t := \pi^{-1}(t)$。

定理 *4.1*。（[GK64]，命题 *2.3*）若 π： $\mathcal{X} \to B$ 是平坦的，且 X_0 是复流形，那么对于每个点 $x_0 \in X_0$，分别存在邻域 $U(x_0)$、$V(0)$ 和 $W(x_0)$，其中 $U(x_0)$ 位于 $\mathcal{X}$ 中，$V(0)$ 位于 M 中，$W(x_0)$ 位于 X_0 中，并存在一个双全纯映射 φ： $U \to V \times W$，满足 $pr_V \circ \varphi = \pi$；其中 pr_V 是到 V 上的投影映射。

定义 4.2。 奇异超曲面族 $\lambda\colon\ \mathcal{V}\to T$ 的非常弱的同时解消是一个映射 $\Pi\colon\ \mathcal{M}\to\mathcal{V}$，满足

(1) Π是适当的。*(2)* $\lambda\circ\Pi\colon\ \mathcal{M}\to T$是平坦的。
(3) 对所有 $s\in T$，$\Pi_s\colon\ M_s\to V_s$ 都是一个解消。

与本小节开头使用的记号对照，$\mathcal{V}=\{V(f_s)\ s\in T\}$，而族 $\mathcal{M}$ 将来自相应的解消 $M_s=X_{f_s}$。由于 M_0 是光滑的，2 中的平坦性 $\lambda\circ\Pi$ 意味着它是 M_0 作为复解析辛流形的一个（局部平凡）变形（见上文定理 4.1 ）。我们将利用这样的解消来分裂奇点的解消。Laufer 的下述定理给出了判据，我们将用它来证明给定变形 $\mathcal{X}$ 之上的解消族 $\mathcal{V}$ 确实是一个分裂。

定理4.3 (Laufer [Lau83], 定理5.7)。 设 $\lambda\colon\ \mathcal{V}\to T$ 是正规 *Gorenstein* 二维奇点 $(V,\ p)$的一个平坦变形胚芽，其中 T 是约化解析空间。那么λ 在可能经过有限基变换后具有非常弱的同时解消，当且仅当 $K_s\cdot K_s$关于 $s\in T$ 是常数。

我们将利用Laufer定理构造非常弱的同时解消。在每个例子中，我们构造二维奇点 $V(f)$的平坦变形 $V(f_s)$，并根据相应解消 X_{f_s}上的取值计算$K_s\cdot K_s$。

我们的所有奇点都是超曲面，因此也是Gorenstein的。每个 X_s 都带有由投影到 t 坐标所诱导的代数曲线纤维化。截取一个大半径圆盘后，边界便具有开书分解 B 在 $Y=\partial X_s$上的结构，且与s无关；每个 X_s 都是伪凸的，其边界上的平面场与由 B承载的接触结构 ξ同痕。于是，对每个 X_s，我们都有

$$K(X_s)^2=c_1^2(X_s)=4d_3(\xi)+2\chi(X_s)+3\sigma(X_s)$$

其中 $\chi(X_s)$ 是欧拉示性数，$\sigma(X_s)$ 是符号数，而 d_3 是平面场 ξ [Gom98] 的Gompf 三维不变量。由于 d_3 由 ξ决定，因此它与变形的选择无关。因此，当 X_{f_s} 的欧拉示性数和符号数与 s无关时，变形恰好确定一个分裂。

命题 4.4。 设 (V,p) 是一个孤立二维奇点，其链环为严格伪凸的，并且其解消 X 与一个 *Stein* 域辛变形等价。设 V_s 是 (V,p) 的一个具有孤立奇点和严格伪凸边界的平坦变形，并且具有极小解消 X_s，后者也与一个 *Stein* 域辛变形等价。那么，族 X_s 构成 X 的平坦变形（可能在有限基变换之后）当且仅当 X_s 具有与 X相同的 b_1、b_2^+和 b_2^-。

证明。 假设族 X_s 是 X 的平坦变形（可能在有限基变换之后），则所有纤维 X_s 均微分同胚，因此都具有相同的 b_1、b_2^+和 b_2^-值。

反过来，假设所有纤维都具有相同的 b_1、b_2^+和 b_2^-。由于（V，p）的变形在奇点之外是光滑的，伪凸边界上的接触结构保持不变，因此 Gompf 的 d_3 公式，即上面的 4.3 式，d_3、b_1、b_2^+、b_2^-中的所有项都是常数，从而 $K_s\cdot K_s$ 也是常数。于是，根据 Laufer，族 X_s 构成 V_s 的一个非常弱的同时解消（可能在有限基变换之后），因而特别是平坦的。□

此外，纤维化结构由到 t 坐标上的公共投影诱导，该结构在解消后仍然存在，因此同时解消还为我们提供了一个

相应纤维化的变形。在每种情形下，我们最终都会完全变形为一个 Lefschetz 纤维化。

5. Resolutions

在本节中，我们解消下面将分类讨论的奇点，并给出它们的解消图。

重构 Namikawa-Ueno 纤维

在第 5.1 和 5.2 小节中，我们以不同于 [NU73b] 的方式构造 Namikawa-Ueno 纤维的 13 种类型。具体而言，我们通过 [N´em00], 第 3.6 节中的 Nemethi 算法及定理 3.7 a) 来构造它们（另见 [N´em99], III. 附录1）。

5.1. ϕ_1^k: $y^2 = x^5 + t^k$。我们首先通过连续膨胀来解消平面曲线奇点 $x^5 - y^2 = 0$。由此得到一棵树 $\mathcal{T}$，其四个顶点 w_i's 表示来自例外因子的 2-球面，其重数分别为 5、10、4、2，自交数分别为 -2，-1，-3，-2。（可用 MAGMA 验证此图。）每个球面 w_i 与 w_{i-1} 和 w_{i+1} 相交；在重数为 10 的顶点处有一个箭头，表示起始奇异曲线的严格变换。见图 2 的第一步，其中重数标在括号内。

$k = 1$: 为求 $y^2 = x^5 + t$的解消，我们对上面的树 $\mathcal{T}$应用 [N´em00], 第 3.6 节中的 Nemethi 算法 $N = 1$。由于 $\mathcal{T}$（即 t的幂）的覆盖次数为 $N = 1$，我们只需从 $\mathcal{T}$开始，依次 blow down 这些 -1 曲线。这给出了 (2，5) 尖点，因此我们得到 Namikawa-Ueno 列表中的 VIII-1 型纤维，见 [NU73a]。见图2，第一步之后我们使用对偶图记法，并用线段/曲线表示球面。

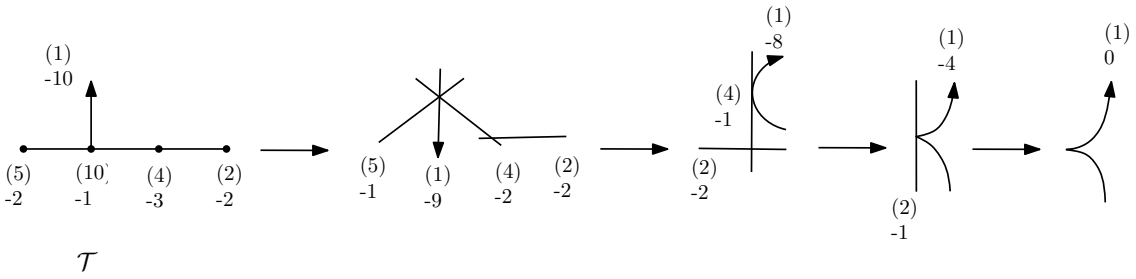


Figure 2. ϕ_1 - VIII-1 型纤维

$k = 2$: 为求 $y^2 = x^5 + t^2$ 的解消，对上面的树 $\mathcal{T}$，我们应用 Nemethi 算法，并取 $N = 2$。具体而言，我们首先求出 $\mathcal{T}$ 的每个顶点在二次覆盖下的原像。将树 $\mathcal{T}$、w_1、$\cdots$、w_4 中重数分别为 5、10、4、2 的顶点记为.....在算法中，s_{w_i} 表示与 w_i 相邻的所有顶点和箭头的数目。若 $\{u_1, \cdots, u_s\}$ 是 w_i 的邻点集合，则 d_{w_i} 表示 gcd(m_{w_i}、m_{u_1}、$\cdots$、m_{u_s})，其中 m 是顶点的重数。若覆盖次数为 N，则在顶点 w_i 上方有 gcd(d_{w_i}、N) 个顶点，每个顶点的重数为 $\frac{m_{w_i}}{\text{gcd}(m_{w_i}, N)}$。在本例中，由 $\mathcal{T}$ 得到 $s_{w_1} = 1$、$s_{w_2} = 3$、$s_{w_3} = 2$ 和 $s_{w_4} = 1$；以及 $d_{w_1} = 5$、$d_{w_2} = 1$、$d_{w_3} = 2$ 和 $d_{w_4} = 2$。对于 w_1 和 w_2 的每个原像，我们得到一个重数为 5 的顶点。在 w_3 的原像中有两个重数为 2 的顶点，而在 w_4 的原像中有两个重数为 1 的顶点。我们还计算得到，所有这些顶点的亏格均为 0（参见 [N´em00], 第114页中的步骤2的亏格公式，或 [N´em99], III. 附录1中的步骤1）。

附录1）。接下来，我们按如下方式求出 $\mathcal{T}$ 中所有边和箭头的原像（其中箭头是平面中起始奇异曲线的严格变换）。根据算法，在端点权重为 5、10 的边 (5, 10) 上方，有 gcd(5, 10, 2) 个 $= 1$ 条类型为 G(5, 10, 2) 的链（链记号参见 [N´em99], III. 附录1）。因此，我们解 $10 + x \cdot 5 \equiv 0$ (mod 2)。由于 $0 \leq x_1 = 0 < 2$ 是解，这表明链中端点之间没有顶点。因此，在边 (5, 10) 上方有一条边，其端点权重均为 5。同理，在边 (10, 4) 上方有 gcd(10, 4, 2) 个 $= 2$ 条类型为 G(5, 2, 1) 的链。然后我们解 $2 + x \cdot 5 \equiv 0$ (mod 1)。由于解为 $x_1 = 0$，两条链中各自的端点之间都没有顶点。因此得到两条边，它们共用一个重数为 5 的起始顶点，且两个端点的重数均为 2。在边 (4, 2) 上方有 gcd(4, 2, 2) 个 $= 2$ 条类型为 G(2, 1, 1) 的链。我们解 $1 + x \cdot 2 \equiv 0$ (mod 1)，发现链中没有额外的顶点。因此，在边 (4, 2) 上方得到两条边，每条边的端点重数分别为 2 和 1。最后，在树 $\mathcal{T}$ 的箭头上方有一条类型为 G(10, 1, 2) 的链，其一端是重数为 5 的顶点，另一端是箭头端。我们解 $1 + x \cdot 5 \equiv 0$ (mod 1)，由于 $x_1 = 0$，重数为 5 的顶点与箭头端之间没有额外的顶点。然后，根据算法计算所有顶点的自交数（参见 13, [页上的公式 (∗)，´N99]em）。由此得到图3 a) 部分所示的图。缩并 -1 个球面后，我们得到图3 b) 部分所示的构型。值得注意的是，这恰好是 [NU73a] 中按 Namikawa-Ueno 记号记作 IX-1 类型的奇异纤维。我们还指出，Namikawa-Ueno 在 [NU73b] 中通过轨形商得到这些亏格二奇异纤维，而我们在此以不同方式构造它们。

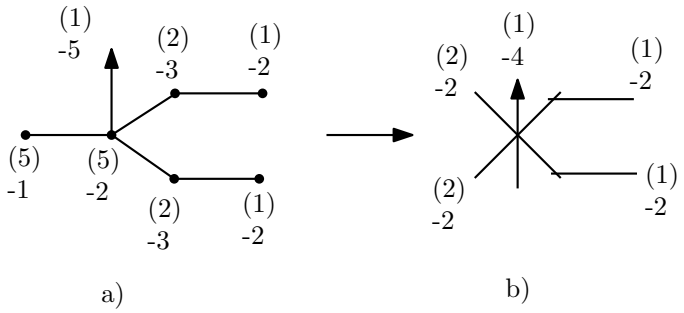


FIGURE 3. ϕ_1^2 - 纤维 IX-1

$k = 3, \cdots, 10$：为了求出 $y^2 = x^5 + t^k$，$k = 3, \cdots, 10$ 的解消，我们按照上述 $k = 2$ 情形中的相同步骤。对于树 $\mathcal{T}$，我们应用 Nemethi 算法，取 $N = k$。我们在图4 中总结了这些结果，其中第二列为应用 Nemethi 算法后的图，并标出了各分支的自交数和重数。请注意，最后一行中，中心顶点的亏格为二。表格第三列展示了连续吹下后得到的图。第三列还标出了纤维的类型，采用 Namikawa-Ueno 记号。

5.2. **ϕ_3^k: $y^2 = x^6 + t^k$**。为了求出 ϕ_3^k的解消图，我们按照上述 ϕ_1^k 情形中的相同步骤。我们首先通过连续膨胀解消平面曲线奇点 $x^6 - y^2 = 0$，得到一棵树$\mathcal{D}$，其上有两个箭头和三个顶点，重数分别为 6、4、2，自交数分别为 -1、-2、-2，如图 5 的第一步所示。

$k = 1$：为了求出 $y^2 = x^6 + t$ 的解消，我们对树 $\mathcal{D}$ 应用带有 $N = 1$ 的 Nemethi 算法。$\mathcal{D}$ 的覆盖次数为 $N = 1$，因此我们只需依次吹下 -1 条 $\mathcal{D}$ 曲线

。由此得到两个自交数为 -3 、重数为 1 的 2-球面，它们彼此相交一次，交数为 3（见图 5）。因此，我们得到 Namikawa-Ueno 列表中 [NU73a] 型纤维。

$k = 2, \cdots, 6$：我们通过对树 $y^2 = x^6 + t^k$， $k = 2, \cdots, 6$ 应用 Nemethi 算法，得到它们的解消图。我们在图 $N = k$中总结了这些结果。树 $\mathcal{D}$。我们在图 6 中总结了这些结果：第二列是应用 Nemethi 算法后的图，第三列则展示了连续吹下后得到的图。请注意，在第一种情形中，ϕ_3^2，应用 Nemethi 算法后直接得到一个极小图，它是 III 型纤维。还要注意， ϕ_3^2 和 ϕ_3^4 得到的极小解消图都对应 III 型纤维。

二重覆盖

在前面的小节中，我们从 xy-平面上的平面曲线奇点出发，并通过连续膨胀对它们进行解消。在所得的图中，箭头表示起始奇异曲线的严格变换。随后，我们对这些图应用 Nemethi 算法（[N´em00],第 3.6 节和定理 3.7 a)），每种情形取不同的 N （其中 N 是多项式中t 的幂）；也就是说，我们对每种情形下的图取不同次数的覆盖。因此，我们构造了 13 种 Namikawa-Ueno 纤维类型，如图 2、3 4、5、6所示。

然而，为了求出以下小节中的解消图，我们从 xt-平面上的平面曲线奇点入手，并通过连续膨胀对其进行解消。然后，我们对解消图应用 Nemethi 算法，取 $N = 2$ （它是所有多项式中 y 的幂）；也就是说，在以下所有情形中，我们都对这些图取二重覆盖。此外，在其余小节中，我们省略解消图中的箭头和不可约分支的重数。关于这一版本的算法，参见 [N´em00], 定理 3.7 b)。

5.3. **ϕ_2^k： $y^2 = x(x^4 + t^k)$。 $k = 1$**：我们首先通过迭代膨胀解消 $x(x^4+t)$ 在 xt-平面上的奇点，由此得到图 7 中的第一张图。然后，我们对该图应用取 $N = 2$ 的 Nemethi 算法，以解消 $y^2 = x(x^4 + t)$。图 7 中的第二张图展示了所得构型。接着，我们如图中第三步所示省略箭头。最后，我们依次压缩 -1 曲线，得到一个自交数为 -2 的 2-球面。在最后一步中，我们证明这确实是 Namikawa-Ueno 的 VII 型纤维的子集，该纤维由同一个多项式 $y^2 = x(x^4 + t)$ 给出。图中以蓝色标出了缺失的分支，即 (2, 3)-尖点。

$k = 2, \cdots, 8$：为求出 $y^2 = x(x^4 + t^k)$ 的解消 $k = 2, \cdots, 8$，我们按照上述$k = 1$ 情形进行。我们在图8中汇总了这些结果。第一列展示了 $x(x^4 + t^k)$ 在 xt-平面上的解消图。随后，我们对这些图取二重覆盖，也就是说，对 $x(x^4 + t^k)$ 的图应用 Nemethi 算法，其中 $N = 2$。第二列展示了应用算法后得到的 $y^2 = x(x^4 + t^k)$ 的解消图。接下来，我们去掉箭头，并将所有 -1 球面收缩。图 8 的最后一列以黑色展示了这些图。请注意，它们是某些类型的 Namikawa-Ueno 纤维的子集。最后一列标出了这些图所属的 Namikawa-Ueno 纤维类型。缺失的分支以蓝色标出。

5.4. **ϕ_4^k： $y^2 = x(x^5 + t^k)$、 $k = 1$、⋯、5**。为了求出 $k = 1$、$\cdots$、5 时 $y^2 = x(x^5 + t^k)$ 的解消，我们按照上述 ϕ_2^k 情形中的方法进行。我们将结果汇总于图 9。第一列展示了 xt 平面上 $x(x^5 + t^k)$ 的解消图。然后，我们对这些图取二重覆盖，即对 $x(x^5 + t^k)$ 的图应用带有 $N = 2$ 的 Nemethi 算法。第二列展示了应用该算法后得到的 $y^2 = x(x^5 + t^k)$ 解消图。接下来，我们去掉箭头，并将所有 -1 球面压下去。图9最后一列展示了这些图。

5.5. **低亏格边界扭转的解消**。在最后这一节中，我们考虑4种特殊情形。为了求出解消，我们按照上述 ϕ_2^k 和 ϕ_4^k 情形中的步骤进行。也就是说，我们首先解消 xt 平面上的平面曲线奇点。然后，我们应用带有$N=2$的 Nemethi 算法。接下来，我们去掉箭头，并将所有 -1 球面压下去。

$\boldsymbol{y^2=x^3+t^6}$：我们首先解析 $x^3+t^6=0$，得到图10中的第一个图。按照 Nemethi 算法取二重覆盖后，得到同一图中的第二个图。然后去掉箭头，并吹下 -1 球面。因此，我们得到一个亏格一、自交数为-1的顶点。

$\boldsymbol{y^2=x(x^2+t^4)}$：这种情形与前一种情形相同。当我们解析 $x(x^2+t^4)$时，再次得到图10中的第一个图。因此，经过相同的步骤后，我们得到一个亏格一、自交数为 -1的顶点。

$\boldsymbol{y^2=x^4+t^4}$：我们首先解析 $x^4+t^4=0$，得到图11中的第一个图。按照 Nemethi 算法取二重覆盖后，得到同一图中的第二个图。然后去掉箭头，因此我们得到一个亏格一、自交数为 -2的顶点。

$\boldsymbol{y^2=x(x^3+t^3)}$：再一次，这种情形与前一种情形相同。解消 $x(x^3+t^3)$ 时，我们得到图 11中的第一幅图，这与解消 $y^2=x^4+t^4$ 时一样。因此，最后我们再次得到一个亏格为一、自交数为 -2 的顶点。

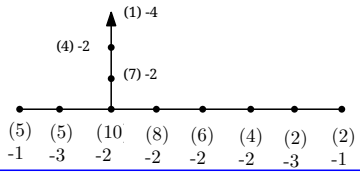
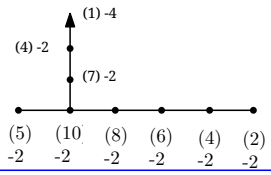
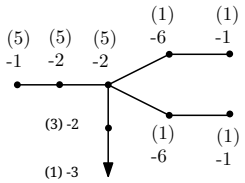
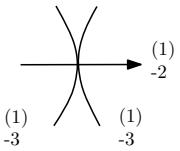
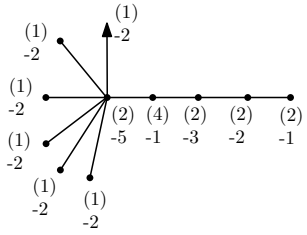
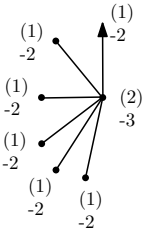
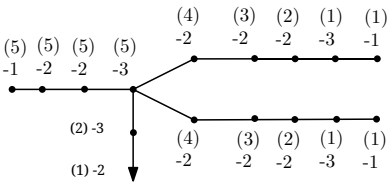
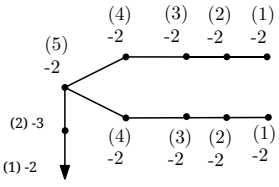
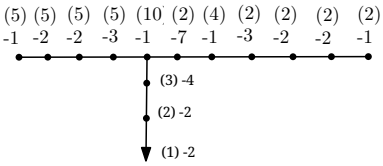
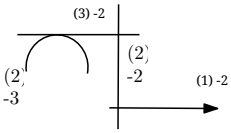
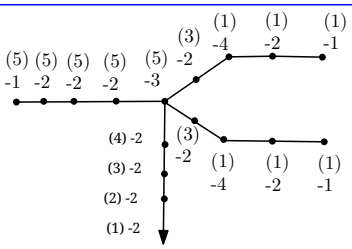
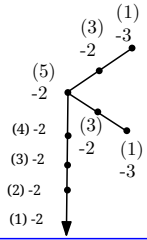
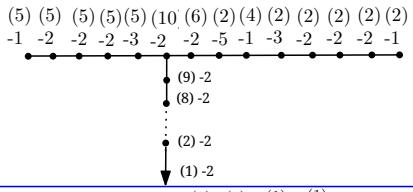
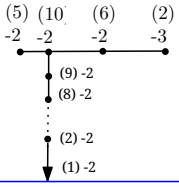
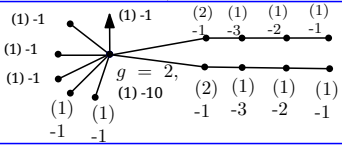
ϕ_1^3			：纤维 VIII-2
ϕ_1^4			：纤维 IX-2
ϕ_1^5			：纤维 I*
ϕ_1^6			：纤维 IX-3
ϕ_1^7			：纤维 VIII-3
ϕ_1^8			：纤维 IX-4
ϕ_1^9			：纤维 VIII-4
$\phi_1^{10} = id$			：一般纤维

FIGURE 4. ϕ_1^k, $k = 3, \cdots, 10$

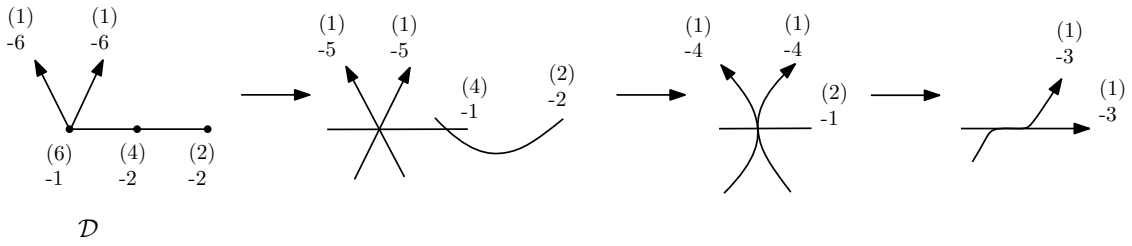


FIGURE 5. ϕ_3 - 纤维V

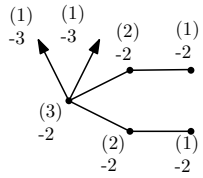
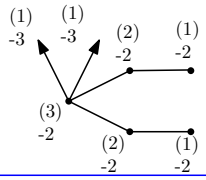
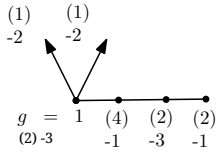
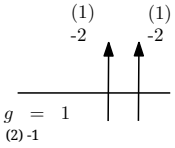
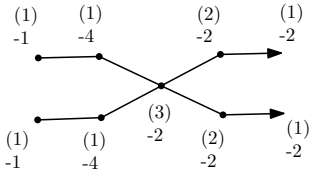
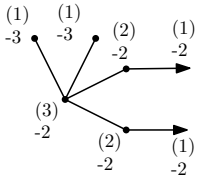
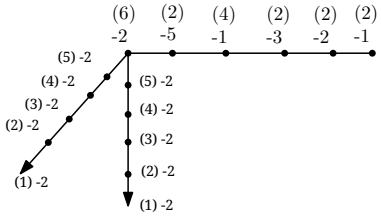
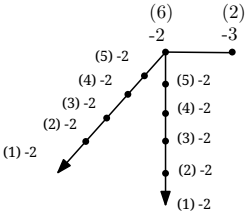
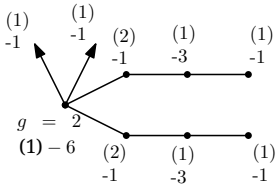
ϕ_3^2		 : III 型纤维
ϕ_3^3		 : II 型纤维（Matsumoto）
ϕ_3^4		 : III 型纤维
ϕ_3^5		 : V* 型纤维
$\phi_3^6 = id$		 : 一般纤维

FIGURE 6. $\phi_3^k, \quad k = 2, \cdots, 6$

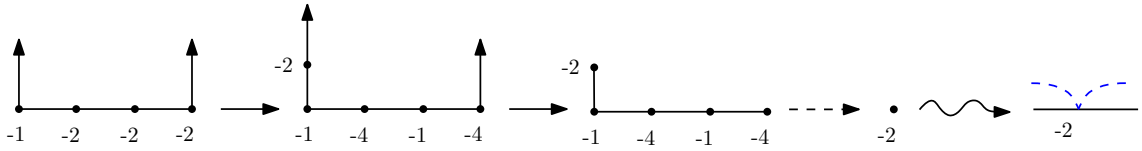


FIGURE 7. ϕ_2 和纤维 VII

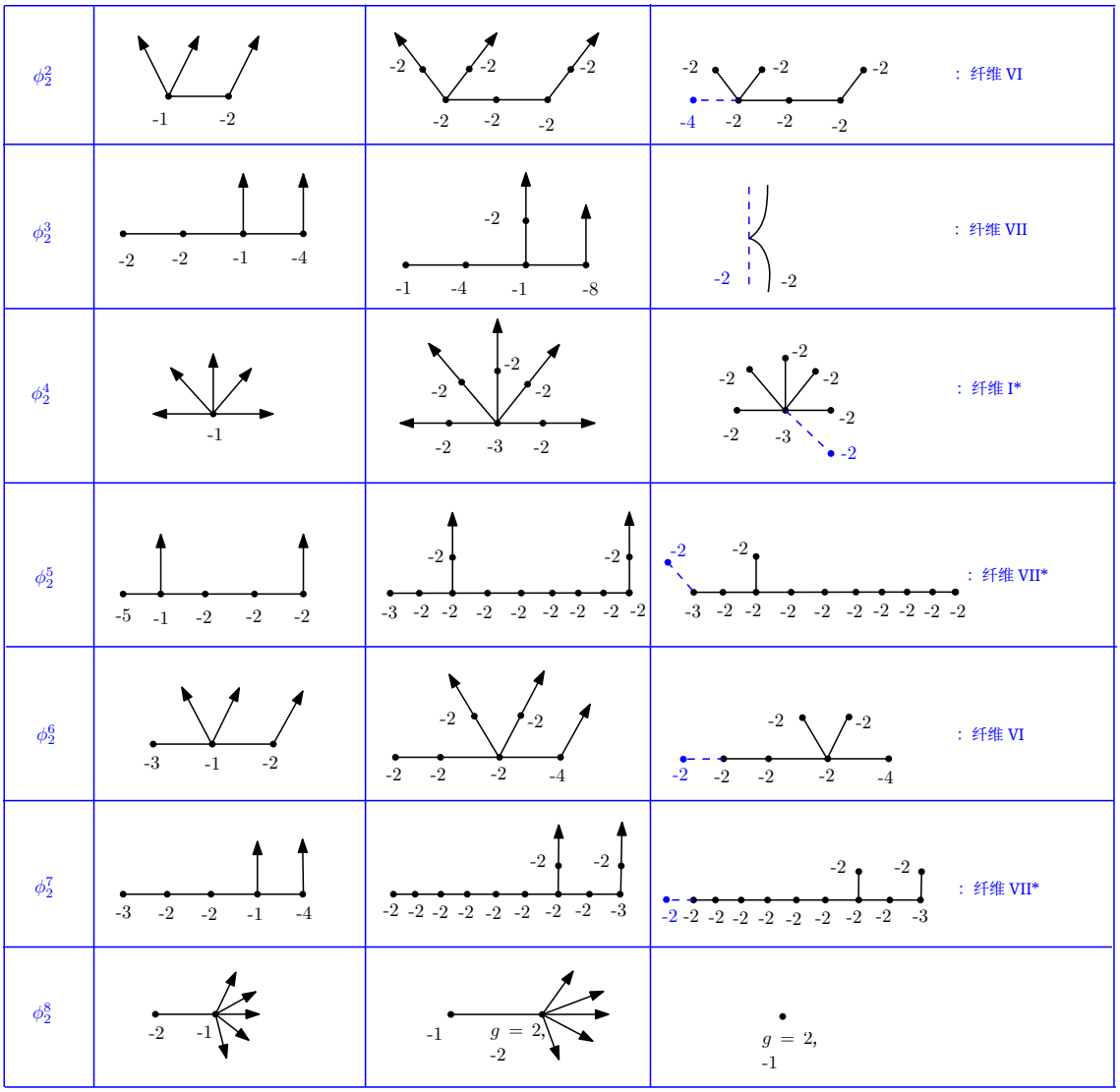


FIGURE 8. ϕ_2^k, $k = 2, \cdots, 8$

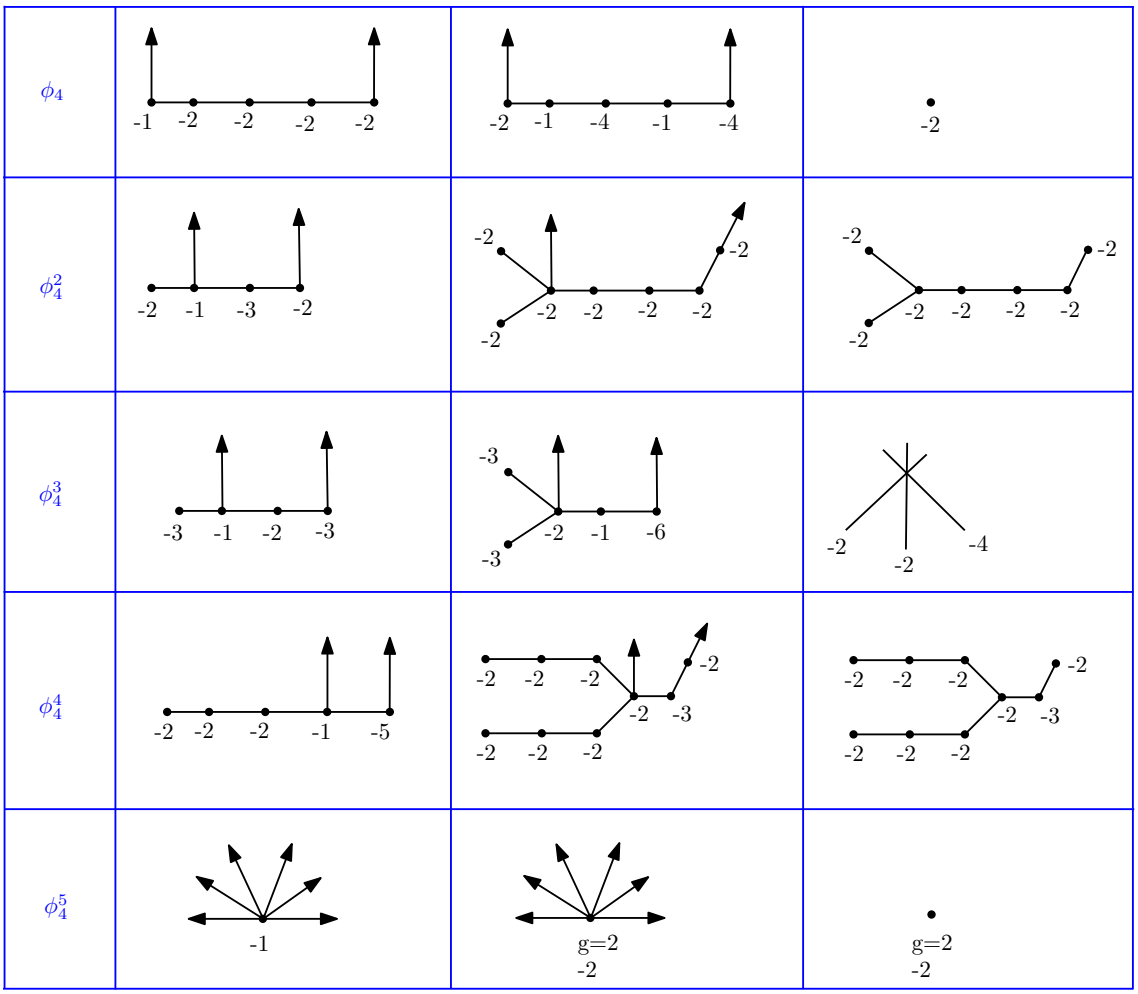


FIGURE 9. $\phi_4^k, \quad k = 1, \cdots, 5$

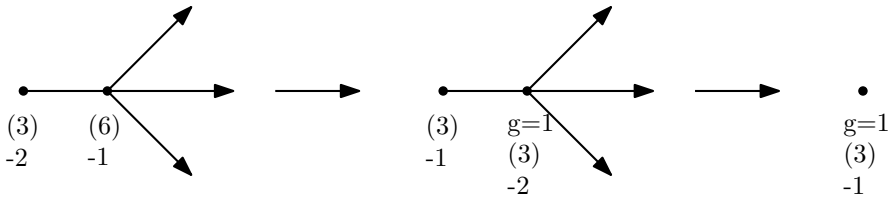


FIGURE 10. $y^2 = x^3 + t^6$ 和 $y^2 = x(x^2 + t^4)$的解消

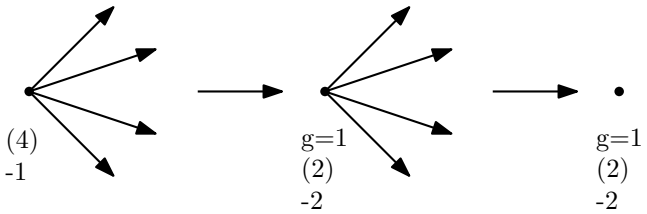


FIGURE 11. $y^2 = x^4 + t^4$ 和 $y^2 = x(x^3 + t^3)$的解消

6. First examples: ϕ_1 and ϕ_1^2

6.1. ϕ_1。本节首先简要概述如何将带有奇异纤维的纤维化变形为 Lefschetz 纤维化。我们将这一过程称为分裂。 X将是某个仿射簇 V 的解消，该仿射簇由 $\mathbb{C}^3$中的一个多项式定义。我们始终使用形如 $y^2 - f(x,t)$的多项式，因此将该簇记为 $V(f)$，并将其解消记为 X_f。注意，按照构造， $V(f)$总是具有由（x, y, t） $\to$ （$x, -y, t$）给出的超椭圆对合，这一结构对于刻画我们的分裂至关重要。此外，通过投影到 t 坐标， $V(f)$将具有纤维化结构 π_t： $V(f) \to \mathbb{C}$；对于我们所考虑的多项式，所有非奇异纤维都是带有一个或两个边界分支的亏格 2 光滑曲线。 $t = 0$ 上的纤维将是奇异的，在原点处具有一个孤立奇点，且其退化程度总是高于标准 Lefschetz 奇点。通常， $V(f)$本身将是一个奇异代数曲面，此时我们将把 $V(f)$解消为 X_f。纤维化 π_t提升为 X_f，而 0 上方的纤维带有该解消的管道化树。我们希望通过辛纤维化将（X_f, π_t）变形为 Lefschetz 纤维化（$X_s, \tilde{\pi}$），并记录消失圈以及两种纤维化的参考纤维之间的识别；也就是说，我们希望找到定义在 X_f上的奇异纤维化 π_t 的一种分裂。

作为第一个例子，我们考虑情形 $y^2 - (x^5 + t)$。计算导数可得， $\partial/\partial t = 1 \neq 0$因此 $V(f)$ 已经是 $\mathbb{C}^3$ 中的光滑子簇，且 $X = X_f = V(f)$。 X 具有一个纤维化 π_t（通过与超平面 $t = const$ 相交得到）。该纤维化除 $t = 0$ 外均光滑。纤维是 $\mathbb{C}^2$ 中的超曲面五次曲线 $y^2 - x^5 = -c$，可将其视为超平面 $t = c$ 的子集。对于 $t \neq 0$，这些都是 $\mathbb{C}^2$ 中光滑的亏格 2 曲面，而大半径 $S^3 s$ 的链环是一个 (2，5) 环面纽结。在 $t = 0$ 处，纤维是一个尖点五次曲线， $y^2 = x^5$。这是与 (2，5) 环面纽结相关联的奇点。事实上， $X = \mathbb{C}^2$，而纤维化 π_t 是与 (2，5) 环面纽结相关联的 Milnor 纤维化： $\pi(x, y) = x^5 - y^2$。

与多项式 f 相关联的是一个光滑代数簇 X 以及一个以亏格 2 曲面（带有一个边界分支）为纤维的纤维化；除中心纤维 $t = 0$ 外，该纤维化是光滑的。我们希望将这一纤维化结构（以及可能还有 X 上的代数结构）变形为一种所有奇异纤维均为 Lefschetz 型的结构。为此，我们利用 f 的超椭圆性质： X 具有一个超椭圆映射 h （因此 $\pi_t \circ h = \pi_t$）。该映射明确表示为 $y \mapsto -y$。 h 作用不是自由的，但其商空间是 $X/h = \mathbb{C}^2$，且分支轨迹由$\Delta = \{y = 0\} = \{0 = x^5 + t\}$给出。这是 $\mathbb{C}^2$ 的一个光滑子簇；从拓扑上看，它是一个由 (5,1)-环面纽结（即平凡纽结）所界定的圆盘。 $\mathbb{C}^2$ 在 Δ 上的双重分支覆盖再次是 $\mathbb{C}^2$。从这一角度看，该纤维化在 $t = 0$ 处是奇异的，因为 Δ 与超平面 $t = 0$ 相切（相切阶数为 5）。

为分裂 $t = 0$ 处的奇点，我们对 Δ 进行代数变形： $\Delta_s = \{x^5 + sx + t = 0\}$ 并将相应的变形提升到 V 和 X。每个 Δ_s 仍然光滑，并且可通过 $\mathbb{C}^2$ 中的光滑子簇与 Δ 同痕。通过取 Δ_s 的双覆盖构造出的相应族 X_s，由 $\mathbb{C}^2$ 的变形等价副本组成，但纤维化 π_t 会发生变化。对于 $s \neq 0$， Δ_s 与 t 纤维有 4 个相切点，它们位于这些点

$$(t, x) = \left(\frac{-4s}{5} \left(\frac{-s}{5} \right)^{1/4}, \left(\frac{-s}{5} \right)^{1/4} \right)$$

这些点（c, p）都是二阶相切点： Δ_s 由 $\{(t - c) = C(x - p)^2 (x - p_1)(x - p_2)(x - p_3)\}$ 给出，其中 C取某个非零值， p, p_1, p_2, p_3取互不相同的值。在双重分支覆盖 X_s 上，(c, p)的提升附近有一个 Lefschetz 奇点（在适当坐标下的局部模型为 $y^2 - x^2 = 0$ ）。观察 t 平面中纤维化的奇异值，当s 从 0 增至 1 时， $t = 0$处的奇异纤维分裂成 4 个不同位置的简单分歧点，它们沿着

极角为 $\pm\pi/4$ 和 $\pm 3\pi/4$ 、半径等于 $4^{\frac{|s|^{5/4}}{5^{5/4}}}$ 的射线。对于$s\neq 0$，所有纤维化都是同构的 Lefschetz 纤维化。我们希望完整描述 X_s上的 π_t^s。对我们而言，这意味着描述 X_s上的 Lefschetz 纤维化，通常将 π_t^s 的消失圈 按顺序列出，并将参考纤维（π_t^s）$^{-1}$(1) 与 X的参考纤维 π_t^{-1}(1) 识别起来。

为了完全理解 Δ_s 的分支，我们沿着 t 平面中半径接近 $4^{\frac{|s|^{5/4}}{5^{5/4}}}$ 的圆进行遍历，并观察在 Δ_s 中发生的编织与碰撞（也就是说，在 Δ_s 与 $(\pi_t^s)^{-1}(p)$ 的交集中）。在 $s=0$ 处， $p=1$ 上方的 Δ 由 -1 的五次方根组成。随着 s 增大，这些点会稍微变形，其中实根从 -1 移动到 $-4/5^{5/4}$。固定一个非零的 s 值后，我们将沿实轴在 t 平面中从 1 沿路径走到 $4^{\frac{|s|^{5/4}}{5^{5/4}}}$，接着逆时针遍历半径为 $4^{\frac{|s|^{5/4}}{5^{5/4}}}$ 的圆，最后再沿实轴回到 1。沿实轴进出，只会使 -1 处的交点沿实轴进出滑动。遍历圆时，实轴上的点沿逆时针路径移动，依次与另外四个点碰撞并编织。将移动的点标记为 1，其余点按逆时针顺序标记为 2、3、4、5。将这些碰撞拉回到 $t=1$ 处的参考点后，我们看到加入了四条带。第一条位于 1 和 2 之间，对应一个圆盘带；接下来，移动的点继续逆时针移动，在与 3 编织之前经过它，随后继续经过 4，最后经过 5。不过，要在辫群中写出这个分解，我们需要为编织固定参考点，并且需要在 t 平面中选取锚定弧，将 $t=1$ 与发生分支的四个点分别连接起来。为使其与上文所见的碰撞相对应，我们取从 1 出发、半径固定的逆时针弧，先延伸至经过相应分支点的射线，再沿射线向内延伸，直至到达分支点。我们假设 s 是一个很小的实数，使得分支点位于 $\mathbb{C}$ 中半径很小的位置。接近分支点时，我们看到两个标记点碰撞，从而产生局部编织以及曲面 Δ_s 的一条带。为将其补全为拟正分解，我们标记出表示这两个点碰撞时所经过路径的弧，然后沿上述路径将该弧拉回到 $t=1$。该弧在（5，1）环面纽结的辫子描述中给出一个拟正半扭转，并给出扰动分支曲面 Δ_s 的拟正带描述。

上文所述的 t平面中的路径如图12 所示，同时还展示了拉回到 $t=1$处参考纤维上的相应带。在对 s进行变形后，纤维化 X分解为与正辫相关的 Lefschetz 纤维化，其消失圈来自辫扭转 $a_1a_2a_3a_4$ （作为辫子，其书写方向为从左到右）。相应的 Lefschetz 纤维化的 Dehn 扭转词为

$$\phi_1=\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$$

（同样按从左到右的方向书写），其中 τ_i 是标准链中的 Dehn 扭转，利用图12所示的骨架，将其与 $t=1$ 上方的纤维对应起来。

引理 6.1。设有一个辫子分解 $B=B_fabB_e$，其准正带为 a，且 b 如图13所示， B 在 *Hurwitz*（或带）等价意义下，同时等价于 B_fbcB_e 和 B_fcaB_e，其中 a、 b 和 $c=b(a)=a^{-1}(b)$ 的局部图示如图所示。双重分支覆盖中的 *Dehn* 扭转分解也有相同结论。

引理 6.2。 分解 $\phi_1=\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$ 与下列所有分解 *Hurwitz*等价：ϕ_1 将图 12 中的辫子分解旋转 $2\pi/5$ 的某个整数倍，再经由分支双覆盖提升所得。更明确地说，由于单值化 ϕ_1 由这一刚性旋转 $2\pi/5$表示，因此我们有 $\phi_1^k(\phi_1)$ 与 ϕ_1*Hurwitz*等价。

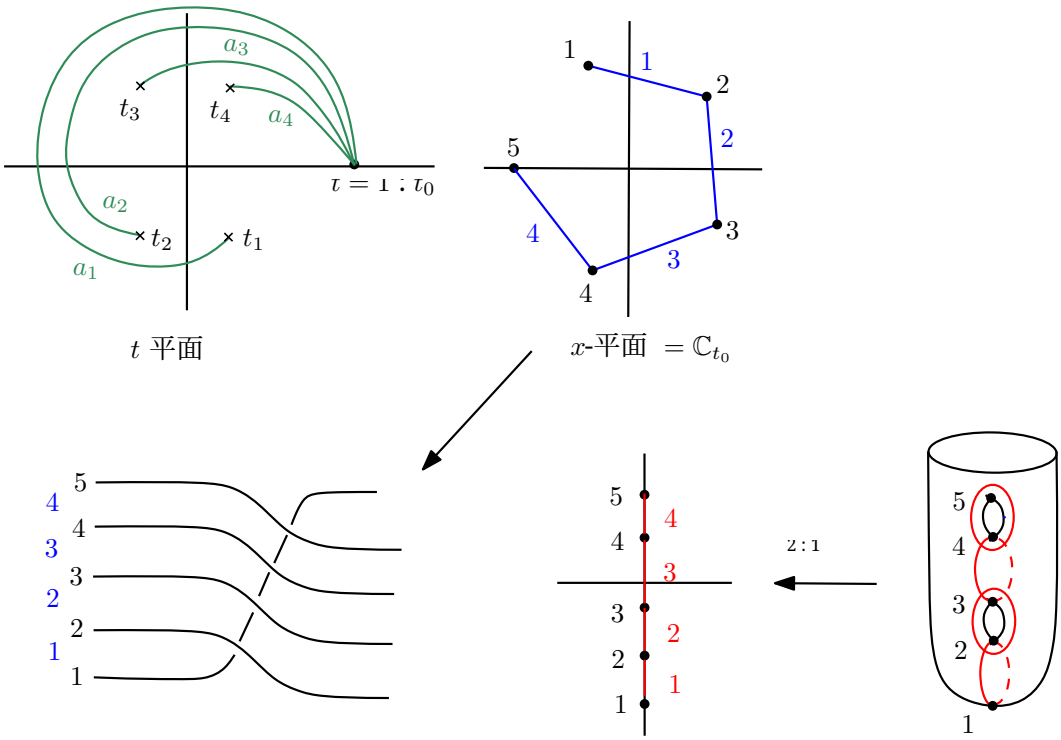


FIGURE 12. 与q_i相关的拟正编织分解 Δ_s 对应于 $f(x,\ t) = x^5 + t$。上图：左侧展示了在 t-平面中选取的路径，右侧展示了编织发生时所对应的弧 q_i 。其下方展示了双重分支覆盖的选取（以脊骨标示）以及亏格2曲面的映射类群中的对应分解。左下角展示了通过与 Δ 中多圆盘边界相交而形成的辫子的对应拟正分解。半扭转以数字标记，表示它们在编织词中的出现顺序。如引理6.2所述，此分解与将给定分解绕原点旋转任意整数倍 $2\pi/5$角后得到的每个分解均为 Hurwitz等价。

注意：这里我们所说的 Hurwitz等价，确实是最严格意义上的：在定理的证明中，只允许或需要使用 Hurwitz变换，既不使用循环置换，也不使用全局共轭。稍后我们用这个词来合成或分解复合奇点的分解时，这一点尤为重要。

证明。从孤立奇点的角度来看，这显而易见。我们总可以通过将用于识别消失圈的路径与一条逆时针环绕所有奇异值的完整闭合路径首尾相接，来用单值化自身对单值化进行共轭。不过，由于这个论证并不复杂，我们仍单独给出一个直接证明。反复应用引理6.1，我们可以将 ϕ_1 分解中的第一个 Dehn扭转移至五边形的空边。（同样，我们也可以使用 Hurwitz变换将最后一个 Dehn扭转移至空边。）□

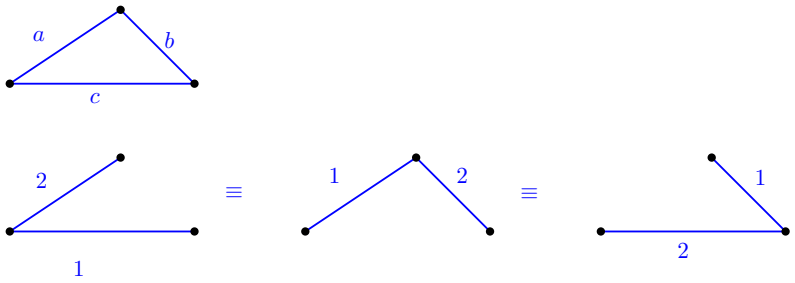


FIGURE 13. 辫子分解的局部图，以及两个带状/Hurwitz等价的分解。顶部的三角形标出了平面中弧的构型。底排各图中，蓝色的弧表示我们沿其进行辫子半扭转的弧，编号则表示辫子半扭转发生的顺序。因此，底排从左至右依次是 $ca = a(b)a$，ab，以及 $bb(a) = bc$的局部子词。引理 6.1 的结论是，这三个分解两两Hurwitz等价。

6.2. ϕ_1^2。我们研究的多项式中，只有少数几个对应的超曲面在 $\mathbb{C}^3$ 中是光滑的。为说明如何分解更复杂的奇点，我们从 $y^2 - (x^5 + t^2)$这一代表性情形入手。

我们将说明，与 $y^2 - (x^5 + t^2)$ 的解消相关联的纤维化如何分裂为两份 ϕ_1，从而使解消 X_f 具有与词 $\phi_1^2 = (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)^2$ 相关联的 Lefschetz 纤维化，其中 ϕ_1 是第 6.1 节中得到的分解。我们需要论证这确实是该解消的一种变形，因此 X 与由正词 $\phi_1^2 = (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)^2$给出的 Lefschetz 纤维化变形等价。为此，我们将检验弱同时解消的 Laufer 判据，即 K^2 为常数。首先，我们指出以下几点观察：

- 奇异簇 $V(f)$ 是标准的 A_4 Du Val 奇点，因此其解消$X_f = X$ 是沿着类型为 A_4 的 Dynkin 图管状邻接的 -2 个球面组成的管状邻接。该流形是负定的，且 $b_2 = 4$。
- 变形 $f_s = y^2 - (x^5 + t(t - s))$ 将 $f = f_0$ 的奇点分裂为两个奇点，每个都与 $y^2 = x^5 + t$ 同构（即属于类型 ϕ_1），其中一个位于 $(t, x, y) = (0, 0, 0)$，另一个位于 $(s, 0, 0)$。
- 这两个奇点的具体局部模型分别是 $y^2 = x^5 - t$ 位于 $t = 0$ 和 $y^2 = x^5 + t$位于 $t = s$，由此得到一个光滑曲面 X_s。后一个奇点可以识别为用于 $x^5 + t$ 的分解 ϕ_1，与前一种情形相同；但前一个奇点则不同。我们通过 $t \to -t$ 将原始构型与 $x^5 + t$ 的模型相识别，并沿负实轴上的一条弧，相对于参考点 $t = -1$ 进行测量。若选择一条从 $t = 1$ 到 $t = -1$ 的路径，我们便可将此分解拉回到原始基点 $t = 1$。若令该路径位于单位圆上且虚部为负，则通过对纤维作 $2\pi/5$的顺时针旋转，可将 $t = 1$ 处的纤维与 $t = -1$ 处的纤维相识别。因此，将分解拉回后，得到与单值化分解 $\phi_1\phi_1(\phi_1)$ 相关联的 Lefschetz 纤维化。然而，正如引理 6.2 所示，该分解与较简单的分解 ϕ_1^2 Hurwitz等价。

- 每个 X_s 都是光滑的。值得注意的是（尽管后面的观察会使这一点显得多余），检查由 Lefschetz 纤维化 ϕ_1^2 得到的 X_s 的手柄分解可知，每个 X_s 都与沿着 A_4 Dynkin 图对 -2 个球面进行管状邻接所得的空间微分同胚。

- 每个 X_s 都是 Lefschetz 纤维化，其边界是 $Y = \partial X_s$ 上的一个开书分解，且与 s 无关。
- 每个 X_s 都是伪凸的，其边界是一个平面场，并与该开书分解所承载的接触结构 ξ同痕。
- 对于每个 X_s，我们有

$$K(X_s)^2 = c_1^2(X_s) = 4d_3(\xi) + 2\chi(X_s) + 3\sigma(X_s)$$

  其中 $\chi(X_s)$ 是欧拉示性数，$\sigma(X_s)$ 是符号数，而 d_3 是平面场 ξ [Gom98]的 Gompf 三维不变量。
- 由于 X_s 与 X_0 微分同胚，它们具有相同的欧拉示性数和符号数，因此$K(X_s)^2$ 是常数。

因此，最后需要指出的是，所有的 X_0 与附近的纤维 X_s 都具有相同的K^2 值，故 Laufer定理适用，并且（经过可能的有限基变换后）该族是平坦的。因此，对任意正实数 s，上述通过 X_s 给出的变形表示了解消$X_f = X_0$ 的一个变形，且所有附近的纤维 X_s 都与 X_f 微分同胚，并表示复结构在 X_f上的变形。

7. Smaller degree base cases: Lower genus boundary twists

虽然以下情形也可以采用我们在后文讨论其余情形时所用的同类论证，但我们可以直接用更简单的方法处理它们，而且后面的例子也会用到这些结果。

$\boldsymbol{y^2 = x^4 + t}$: 此情形与上文介绍的 ϕ_1 例子直接对应。经过变形后，可得到亏格 1 曲面（带 2 个边界分支）上的三链分解 $\tau_1\tau_2\tau_3$。

$\boldsymbol{y^2 = x^4 + t^4}$: 此情形类似。其双曲椭圆商是 (4，4)-环面纽结上的锥。该奇异曲面由两次穿孔的环面纤维化，单值化是一个边界多重扭转。解消后得到 $b_1 = 2$ 和 $b_2 = 1$，并由一条亏格为 1 的复曲线表示。单值化分解必须由一对绕同调的本质曲线的扭转组成，其乘积为边界多重扭转。对边界分支进行封帽后，这种分解会得到一个含有两个奇异纤维的（非极小）闭椭圆纤维化，因此分解中的两个 Dehn 扭转必须绕在闭亏格 1 曲面上零伦的曲线进行。在两次穿孔的环面中，这两条曲线必须既是同调本质曲线，又是分离曲线，因而必定与边界平行。这就得到了预期的分解，即绕两个边界分支的多重扭转。

$\boldsymbol{y^2 = x\,(x^3 + t^3)}$：这是超椭圆的，其双曲椭圆商是由平凡纽结及其（3，3）环面纽结卫星结组成的并集上的锥，并在 $\mathbb{C}^2$ 中以此方式编织，纤维化结构由投影到第一因子给出。该双覆盖仍然是一个由两次带孔环面纤维化的奇异曲面。基于上述确切理由，单值化分解必定由一对关于将亏格 1 曲面分离出来的曲线的 Dehn扭转组成，因此必定是边界多重扭转。

8. Splittings

在本节中，我们将通过为所有剩余情形构造分裂，完成定理 1.2 的证明。

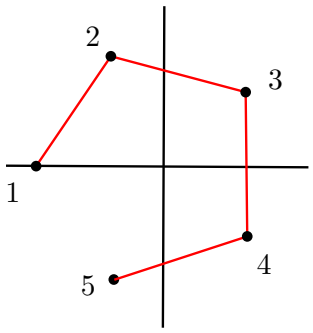


FIGURE 14. 识别曲线 $y^2 = x^5 + 1$ 与标准属2曲面 $t = 1$ 的骨架$\Sigma_{2,\ 1}$。

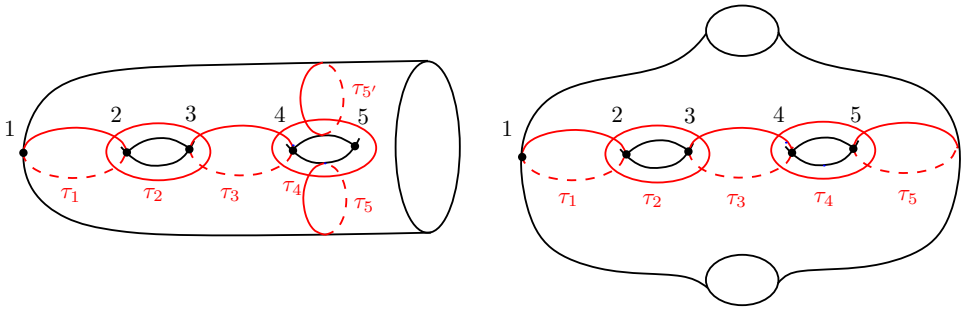


FIGURE 15. Lefschetz 纤维化中所用正 Dehn 扭转的排列。

8.1. ϕ_1^k。 我们从族 $y^2 = x^5 + t^k$ 开始。

为了让本节整体更易于处理，我们将稍微调整分支双覆盖 $\mathbb{C}$ （其分支点为 $x^5+1=0$ ）与曲面 $\Sigma_{2,\ 1}$ 之间的识别。图14给出了图及其排序，它们将提升为图15所示的双曲映射类群标准生成元。这与第 $y^2 = x^5 + t$节中的情形6.1 所用的识别可通过平面旋转得到。

情形 $y^2 = x^5 + t$：我们在第6.1 节看到， X 可变形为单值化由词 $\phi_1 = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$给出的 Lefschetz 纤维化，但使用的是该节中的骨架。要为此骨架得到这一分解，我们只需应用引理6.2。

情形 $y^2 = x^5 + t^2$：我们在第 6.2 节看到， X 变形为单值化由正词给出的 Lefschetz 纤维化 $\phi_1^2 = (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)^2$。

情形 $y^2 = x^5 + t^3$：首先，注意到由于通过 $t \mapsto t^3$, $V(f)$ 是 $V(y^2 - (x^5 + t))$ 的三重覆盖，且分支点位于纤维 $t = 0$ 上，因此相应开书分解的单值化为 ϕ_1^3。我们将证明，这个纤维化确实可分解为与正词 $(\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)^3$. 相关联的 Lefschetz 纤维化

利用 Laufer 定理4.3，我们将看到该变形

$$y^2 = x^5 + t^3 + st$$

存在非常弱的同时解消，因此给出了该解消 X_0 的分裂。因此，当 s 充分小时，解消 X_s 和 X_0 同构。对于 $s \neq 0$，我们看到 $t = 0$ 处的奇点分裂为三个奇点，它们的类型均为 $y^2 = x^5 + t$，分别位于 $t = 0$ 和 $t = \pm\sqrt{s}$。对于

$s \neq 0$， X_s 是光滑的，且三个奇异纤维分别变形为 ϕ_1 的副本。我们可以分别将它们变形为 Lefschetz 纤维化，然后将这些分解拉回到基点 $t = 1$。选择任意路径即可得到形如 $\phi_1^{k_1}(\phi_1)\phi_1^{k_2}(\phi_1)\phi_1^{k_3}(\phi_1)$ 的分解；根据推论，该分解与 ϕ_1^3 Hurtwitz 等价。因此，该纤维化变形为由正词 $\phi_1^3 = (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)^3$. 给出的 Lefschetz 纤维化

原奇点的解消 X_0在第5.1 节中被证明是具有E_8 的负定 $b_2 = 8$管状邻接（见图4）。为作比较，我们画出 X_s 对应的 ϕ_1^3把手体分解。将每个 1-把手分别与其中一个 τ_i相消后，我们得到一个 2-把手体，其形状类似于 Fuller 构造的椭圆纤维化示意图[Ful99]。交叉形式是负定的，且 $b_2 = 8$。这表明K_X^2 是常数，因此该变形允许非常弱的同时解消，并且 X_0 变形为 Lefschetz 纤维化 $X_s = \phi_1^3$。

关于负定性的间谈

预先明确给出一个负半定 Lefschetz 纤维化将会很有帮助。以下给出的所有其他分解都是这个例子的子纤维化，因此我们可以得出结论：后续所有例子都是负定的。这个例子中的纤维化 I^2 是定义在D^2上的纤维化，其纤维亏格为 2，且有一个边界分支，并与正词相关联

$$I^2 = (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_5\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1)^2$$

（我们将在奇点 $y^2 = x^5 + t^5$ 中再次看到这个词 I。）

相应的闭纤维化由 Endo 和 Meyer 研究过。上述例子是他们的例子去掉一个纤维和一个截面后的结果。它们的邻域是一个符号数为 0 的管状邻接。Meyer 计算出的符号数为 -12。边界三维流形具有 $b_1 = 4$。在 I^2 中，我们可以消去所有 1-把手。剩下的 16 个 2-把手都生成 b_2，因此 $b_2^0 = 4$ 和 $b_2^- = 12$，并且该纤维化 I^2 是负半定的。我们将在各个情形 $y^2 = x^5 + t^k$ 中看到的所有其余分解，都是 I^2 的子词；由于即将讨论的所有其余纤维化的边界都是有理同调球面（对应于边界扭转或边界多重扭转的纤维化除外），相应的 Lefschetz 纤维化全都是负定的。

情形 $y^2 = x^5 + t^4$：乍看之下，这似乎与情形 $y^2 = x^5 + t^3$非常相似。的链环$V(f)$ 具有一个开书分解，其单值化为 ϕ_1^4。然而，该奇点的解消具有$b_2 = 2$，并且是负定的（见图 4）；而与正词 $(\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)^4$ 相关的 Lefschetz 纤维化具有 $b_2 = 12$，且并非负定。必定还有其他情况正在发生。

为了确定正确的 Lefschetz 纤维化，我们考虑变形 $y^2 = (x+s)x^4+t^4$。对于$s \neq 0$，这里有五个奇点。在 $t = 0$ 处，我们有一个形如 $y^2 = x^4+t^4$ 的复合奇点，位于 (0, 0, 0)（此外还有一个可由 $y^2 = x+s$近似的光滑分支）。正如我们在第7节中所见，这个奇点的解消变形为与一对 Dehn 扭转相关联的 Lefschetz 纤维化，该纤维化分离出一个具有两个边界分支的亏格 1 曲面。另有四个奇点，均为 Lefschetz 型。要看清它们的类型，再次考察超椭圆对合的商空间中的分支轨迹会更容易： Δ_s： $\{(x + s)x^4 + t^4 = 0\}$。这里， Δ_s 在 $t = 0$处是奇异的；观察绕 $t = 0$ 的小环时看到的编织中，与 $x^4 + t^4$ 对应的四个点绕行一整圈，方向为逆时针。我们取一个以原点为中心、位于 t平面内的圆，并逐渐增大其半径，就能观察到 Δ_s中出现简单分歧的时刻。当半径再次达到 $4(s/5)^{5/4}$ 时， t 在 $t = -4(s/5)^{(5/4)}$的四个取值处发生简单分歧。增大 s 会使 Δ 在 $t = 0$ 上方的单个分歧点分裂为 Δ_s上的两个点，一个位于 $x = -s$ 处，重数为一；另一个位于 $x = 0$ 处，重数为 4。从实轴上的 $t = 0$ 移动到 $t = 4(s/5)^{5/4}$ 时， $x = 0$ 处的点分裂为四个不同的点，大致位于四个象限的中心

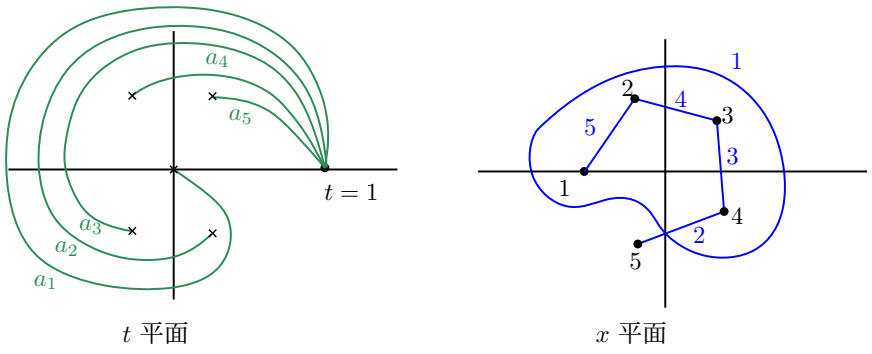


FIGURE 16. 用于求得 ϕ_1^4 分解的 t 平面上的路径，以及对应于 $\phi_{\tilde{4}}$ 的分解。位于 $t=0$ 上方（并对应于标记为 a_1 的路径）的奇点，是围绕所包围点的全扭转；它提升为一对 Dehn 扭转，将一个带有两个边界分支的亏格一曲面分离出来。

$\mathbb{C}$。随着 t 的角度从 0 增大到 2π，这四个点旋转经过负实轴，并与最初对应于 $x=-s$的点相撞。这些是四个简单分歧点；在它们上方的 $V(f_s)$和 X_s 中，有四个 Lefschetz 奇异纤维。

为了追踪分支发生的位置，并以得到相应 Lefschetz 纤维化的正词描述为目标，我们选择 t-平面上的路径，将参考纤维$t=1$ 连接到 Δ_s 发生分支的位置，然后将碰撞弧拉回。对全部五个奇点重复这一操作后，我们得到图 16所示的分解。选择一种与用于 ϕ_1 的不同的骨架识别方式，可以得到一个简洁且特别有用的分解。分离扭转对应于涉及原点上方 x^4+t^4 奇点的那些点，并提升为扭转 τ_5 和 $\tau_{5'}$ （如图 15所示）。我们将其简记为 $\phi_{\tilde{4}}$:

$$\phi_{\tilde{4}} = \tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1.$$

这个词的长度为 6。相应的 Lefschetz 纤维化产生一个流形，具有 $b_2=2$ 且该流形是负定的，因此 K^2 与解消的结果一致。（见 8.1。）根据 Laufer，这个变形产生一个同时解消，因此这个 Lefschetz 纤维化是 $y^2=x^5+t^4$上的纤维化的一个变形。

情形 $y^2=x^5+t^5$：这是另一个重要情形，但实际上可以归结为先前的工作。边界处开书分解的单值化是 带有一个边界分支的亏格 2 曲面上的超椭圆对合。分支曲线 x^5+t^5 是（5，5）环面纽结的锥，即带有全扭转的 5 股辫。我们将看到，解消就是与该词相关的 Lefschetz 纤维化，

$$I = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1$$

这种分裂相当直接。将 $y^2=x^5+t^5$ 变形为 $y^2=x^5+t^4(t+s)$。这里有两个奇点，一个是位于 $\phi_{\tilde{4}}$ 上方的 $t=0$ 类型，另一个是位于 ϕ_1 上方的 $t=-s$类型。我们选择平面中从 $t=1$ 到这些奇点的路径，使得通往 $t=-s$ 的路径位于右侧，而通往$t=0$ 的路径位于实轴上。为了使用这一特定分解，我们选择对纤维 $t=1$ 沿用与 $\phi_1^4=\phi_{\tilde{4}}$的框架相同的识别方式，使单值化直接分解为两项的乘积：第一项是 ϕ_1 的一个共轭，第二项是 $\phi_{\tilde{4}}$。 的这个特定共轭只不过是逆时针旋转 $4\pi/5$ ，因此根据引理 6.2 ，它与标准分解 Hurwitz 等价，只是写在新的骨架上。由此得到分解：

$$\phi_1^5 = \phi_1\phi_{\tilde{4}} = I = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1.$$

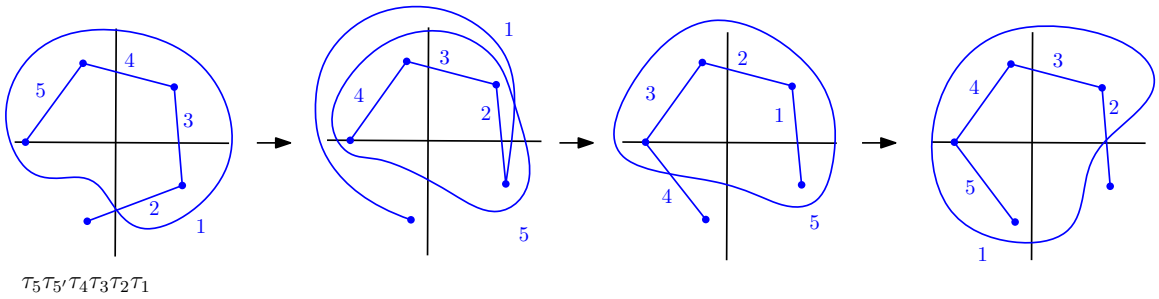


FIGURE 17. 将 $\phi_{\tilde{4}}$ 与 $\phi_1(\phi_{\tilde{4}})$ 联系起来的 Hurwitz 变换序列（如商平面中的图示）。首先，我们用闭曲线所指示的 Dehn 扭转对各项作共轭。然后，将第一条弧依次移过其余各弧，直到它再次落在五边形上。最后，将 Dehn 扭转依次移过所有半扭转。曲线上的标记表示它们在分解中的顺序。

词 $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1$ 是负定的，其中 $b_2 = 6$。这与第 5.1节给出的解消一致，因此它允许同时解消，而由正词 I 给出的 Lefschetz 纤维化是解消上的纤维化的一个变形。

情形 $y^2 = x^5 + t^6$：与前一种情形一样，这可以通过 $y^2 = x^5 + t^5(t + s)$ 分裂为位于 $t = 0$ 处的类型 I 奇点，以及位于 $t = -s$ 处的类型 ϕ_1 奇点。和之前一样，对 $t = -s$ 处奇点的识别可能出现某种异常，从而产生形如 $\phi_1^k(\phi_1)$ 的项，但它与 ϕ_1 Hurwitz等价。这给出分解 $\phi_1^6 = \phi_1 I$。与正词 $\phi_1 I$ 对应的 Lefschetz 纤维化是负定的，其中 $b_2 = 10$。这与第 5.1 节给出的解消一致，因此它允许同时解消，而与正词对应的 Lefschetz 纤维化

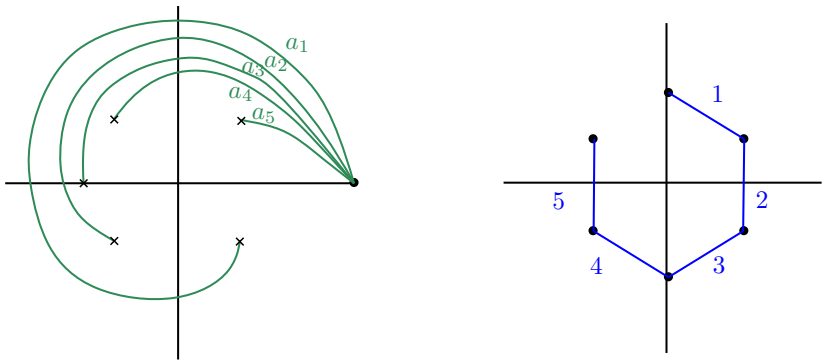
$$\phi_1^6 = \phi_1 I$$

是解消上的纤维化的一种变形。

引理8.1。 分解 $\phi_{\tilde{4}} = \tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1$ 与通过将相应的辫子分解旋转若干个 $2\pi/5$ 的倍数，再经由分支双覆盖提升所得到的所有其他分解均为 *Hurwitz*等价。更明确地说， $\phi_1^k(\phi_{\tilde{4}})$ 与 $\phi_{\tilde{4}}$为 *Hurwitz*等价。

证明。 如前所述，这实际上可由单值化相等 $\phi_{\tilde{4}} = \phi_1^4$ 以及 $I = \phi_1^5$ 是超椭圆对合、因而与一切元素可交换这一事实推出；不过，我们将用 Hurwitz变换给出直接证明。图 17展示了示意图。首先，我们用绕该闭曲线的 Dehn扭转对所有辫子半扭转进行共轭。然后应用 Hurwitz变换，将第一条弧依次滑过其余弧，直到它再次落在五边形上。最后，由于所有半扭转的乘积是绕 $2\pi/5$的逆时针旋转，我们用这个半扭转乘积对 Dehn扭转进行共轭，从而得到最终所需的分解。 □

情形 $y^2 = x^5 + t^8$：该分裂再次与前面的情形相似。通过变形$y^2 = x^5 + t^4(t - is)^4$, , 它分裂为两个类型为 $\phi_{\tilde{4}}$ 的奇点，一个位于 $t = 0$ ，另一个位于 $t = is$。将位于 $t = is$ 的纤维与原来的 $x^5 + t^4$ 奇点进行识别，是通过平面中的某个刚性旋转实现的，因此得到正词 $\phi_1^k(\phi_{\tilde{4}})\phi_{\tilde{4}}$ ；但根据前面的引理，它与分解 $\phi_{\tilde{4}}^2$Hurwitz等价。与正词 $\phi_{\tilde{4}}^2$ 对应的Lefschetz 纤维化是负定的，并且具有 $b_2 = 8$。这与第 5.1 节给出的解消一致，因此它允许同时解消，而由正词$\phi_{\tilde{4}}^2 =($ $\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1)^2$ 给出的Lefschetz 纤维化是解消上纤维化的一个变形。



t平面　　x平面

FIGURE 18. ϕ_3的正分解。左侧展示了从参考纤维到奇异纤维的路径，它们位于t平面中。右侧展示了相应的辫半扭转发生所沿的弧。Lefschetz 纤维化中的 Dehn 扭转，是这些辫半扭转在以标记点为分支点的圆盘双覆盖上的提升。

情形 $\boldsymbol{y^2 = x^5 + t^9}$：它通过变形 $y^2 = x^5 + t^5(t - is)^4$进行分裂。在 $t = 0$ 处有一个类型为 I 的奇点，在 $t = is$处有一个类型为 $\phi_{\tilde{4}}$ 的奇点。位于 $t = is$ 的奇点具有 $y^2 = x^5 + (-is)^5(t - is)^4$，的形式，这再次是分解 $\phi_{\tilde{4}}$的旋转。该分裂产生形如 $\phi_1^k(\phi_{\tilde{4}})I$的分解，根据引理8.1，它与 $\phi_{\tilde{4}}I$ Hurwitz等价。与正词 $\phi_{\tilde{4}}I$ 对应的Lefschetz 纤维化是负定的，并且具有 $b_2 = 12$。这与第5.1节给出的解消一致，因此它允许同时解消，而由正词 $\phi_{\tilde{4}}I$ 给出的Lefschetz 纤维化是解消上纤维化的一个变形。

情形 $\boldsymbol{y^2 = x^5 + t^{10}}$：在 ϕ_1^{10}的解消中，若去掉箭头，则在连续吹下结束时，我们得到一个自交数为 -1 的亏格 2 曲面（见图 4的最后一行）。因此，该奇点的解消具有 $b_1 = 4$和 $b_2 = 1$，所以必定由单个分离型 Dehn 扭转给出。单值化是一个边界扭转，$\phi_1^{10} = \tau_\partial$，因此分解也必定是一个边界扭转。

8.2. $\boldsymbol{\phi_3^k}$。这是族 $y^2 = x^6 + t^k$。

情形 $\boldsymbol{y^2 = x^6 + t}$：此情形与 ϕ_1 情形类似，实际上几乎完全相同。我们通过变形 $y^2 = x^6 + sx + t$ 将其分解。将 ϕ_1的图形复制一份并将次数增加一阶，即可得到 ϕ_3 的 $a_1a_2a_3a_4a_5$辫子描述。于是，Lefschetz 纤维化的正词为$\phi_3 = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5$，其骨架如图18所示。我们注意到，与许多其他情形一样，此曲面的总辫子单值化是 $2\pi/6$ 的逆时针旋转，因此，通过改变奇点处的参考弧，我们可以将骨架变换为该旋转的任意次幂，这便得到一个 Hurwitz等价的正词。

引理8.2. 分解 $\phi_3 = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5$ 与通过将图 ϕ_3 *18*中的辫子分解旋转 $2\pi/6$ 的若干倍并经分支双覆盖提升所得到的其他所有 ϕ_3 分解 *Hurwitz*等价。更明确地说，由于单值化 $2\pi/6$由这一刚性旋转 ϕ_3^k表示，ϕ_3我们有*(* ϕ_3*) Hurwitz*等价于。

证明。 证明与引理 6.2的证明完全类似。 □

情形 $y^2 = x^6 + t^2$：该奇点的解消有 $b_1 = 0$ 和 $b_2 = 5$。对应正词的长度为 10，我们可以通过将该奇点分裂为$y^2 = x^6 + t(t + s)$，得到两个类型为 ϕ_3 的奇点，一个位于 $t = 0$，另一个位于 $t = -s$。沿实轴将位于 $t = 0$ 的奇点从 $t = 1$ 识别到 $t = 0$，与前一种情形中的处理一致。沿一条虚部坐标为正的路径对位于 $t = -s$ 的奇点进行识别，可得到一对共轭的 $\phi_3^k(\phi_3)$。根据引理 8.2，这与我们偏好的分解 Hurwitz等价

$$\phi_3^2 = (\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5)^2.$$

情形 $y^2 = x^6 + t^4$：该奇点的解消具有 $b_1 = 0$ 和 $b_2 = 5$，因此 Lefschetz 纤维化对应一个长度为 10 的词。我们通过变形（$x^2 - s$）$x^4 + t^4$将其分解，得到一个位于 (0，0) 的 $x^4 + t^4$ 奇点；在分支覆盖中，它由两个 Dehn 扭转构成，形成一个分离对，此外还有 8 个其他分支点。在上述变形之前，分支轨迹 Δ 与位于 $t = 1$ 上方的纤维相交于 -1 的六次方根处。该变形使这组呈六边形排列的点的实部模长减小、虚部模长增大，从而使六边形沿竖直方向轻微拉伸。$t = 0$ 上方的奇点是最靠近原点的四个点之间的全扭转，这些点不位于虚轴上。其余分支点奇点分成四组匹配对，每对都位于同一个 t 纤维中，且角分量为 $\pi/4$，$3\pi/4$，$5\pi/4$，和 $7\pi/4$。在 $\pi/4$ 处射线上的奇点周围，编织由中心四点中的两个点（即笛卡尔平面第一和第三象限中的点）与虚轴上的两个点相互编织而成。沿着绕原点的圆在 t 平面中继续移动时，这一电影会重复播放，但六边形已经旋转。于是，为了得到分解，我们选择奇点所在圆盘之外的路径，并沿这些路径拉回编织。该图形呈旋转对称，我们可以看到，分解由四组辫半扭转构成（首尾两组最终相同）。

沿着匹配的分支追踪，我们得到 ϕ_3^4 的分解，由 10 个扭转组成，其中所有曲线均展示于图19。接着，我们选用为 ϕ_3 所选的同一骨架，将图像与标准生成元对齐，从而得到分解：

$$\phi_3^4 = \phi_A = \tau_1\tau_4\tau_3\tau_{a_1}\tau_2\tau_5\tau_1\tau_4\tau_{b_1}\tau_{b_1'}$$

亏格 2 曲面上的曲线 a_1、b_1和 b_1' 如图 19所示。

情形 $y^2 = x^6 + t^5$：

该奇点的解消有 $b_1 = 0$ 和 $b_2 = 10$，因此 Lefschetz 纤维化对应于一个长度为 15 的词。我们通过变形 $x^6 + t^4(t + s)$ 将其分解，得到两个奇点，一个是位于 $\phi_3 = x^6 + t$ 处的 $t = -s$ 类型，另一个是位于 $\phi_3^4 = x^t + t^4$ 处的 $t = 0$类型。我们选择路径，使得从 $t = 1$ 到 $t = 0$ 的路径位于实轴上，而通往 $t = -s$ 的路径位于右侧。经过若干次 $t = -s$ 旋转后，该处的奇点与 ϕ_3 相同，而拉回也会使这一识别改变若干次 ϕ_3，因此得到正词 ϕ_3、$\phi_3^k(\phi_3)\phi_A$。根据引理 8.2，这与词 Hurwitz等价：

$$\phi_3^5 = \phi_3\phi_A.$$

情形 $y^2 = x^6 + t^6$：在对 ϕ_3^6进行解消时，如果我们去掉两个箭头，那么在连续吹下的最后会得到一个自交数为 -2 的亏格 2 曲面（见图6的最后一行）。该奇点的解消因此有 $b_1 = 4$ 和 $b_2 = 1$，所以必定由两个 Dehn

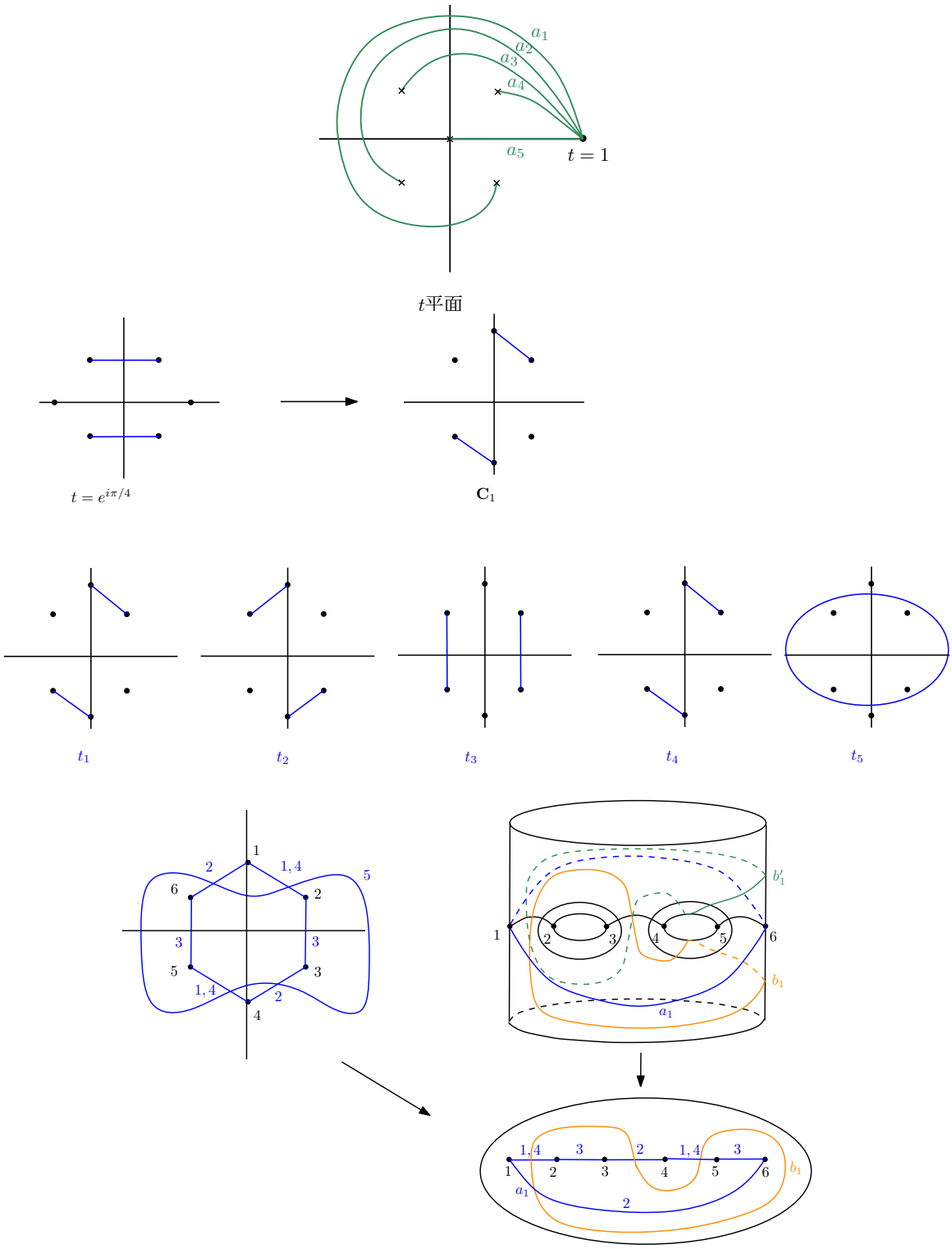


FIGURE 19. 正分解 ϕ_A 对于 ϕ_3^4。该分解由 4 对扭转组成，每对扭转分别沿六边形的相对边进行，此外还有一对扭转将一个亏格 1 子曲面分离出来。我们绘制双曲椭圆商的分支轨迹，然后将该分解提升到亏格2曲面上。30

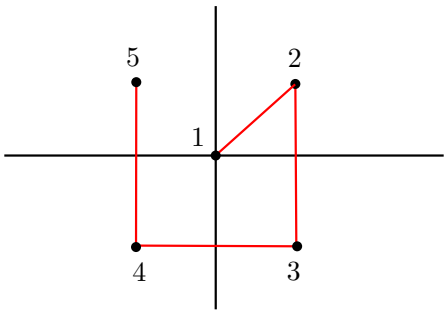


FIGURE 20. 对 $y^2 = x(x^4+1)$ 与标准属2曲面的识别，$\Sigma_{2,\ 1}$，见图15。

沿两条同调曲线进行扭转。因此，单值化是边界多重扭转 $\phi_3^6 = \tau_\partial$，分解也必须是边界多重扭转。

8.3. $\boldsymbol{\phi_2^k}$。我们接下来考察的族是 $y^2 = x(x^4 + t^k)$。与之前一样， k 重分支覆盖位于 $k = 1$, $y^2 = x(x^4 + t)$ 的主情形之上，并在 $t = 0$ 处沿奇异纤维分支。我们将主情形的单值化记为 ϕ_2，并将证明该奇点的解消对应于具有词 $\phi_2 = (\tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)$ 的 Lefschetz 纤维化。该奇点链环上的开书分解的单值化就是 ϕ_2, ϕ_2^k 的 k 次幂。对于每种情形，我们都会找出描述解消上的 Lefschetz 纤维化的正词。对于这个族， $t = 1$ 上的纤维是曲线 $y^2 = x(x^4 + 1)$，它是超椭圆曲线，也是以点 $x(x^4 + 1) = 0$ 为分支点的 $\mathbb{C}$ 的分支双覆盖。我们选择使用图20所示的骨架，将该曲线与图15所示的标准曲线识别。

情形 $\boldsymbol{y^2 = x(x^4 + t)}$：曲线 $\Delta = \{(t, x) \big| x(x^4 + t) = 0\}$ 有两个分支：直线 $x = 0$和四次曲线 $x^4 + t$。这两条曲线均光滑，在 (0, 0) 处横截相交，但四次曲线分支与纤维 $t = 0$相切。选择变形 $(x - is)(x^4 + t)$，通过 Δ_s 对 Δ 进行变形，使两个分支的交点与纤维化横截相交，局部模型为 $x^2 + t^2$。沿 $\mathbb{C}^2$ 分支化的双覆盖，其双覆盖曲面是 du Val奇点 A_1对应的标准双重点。从拓扑上说，通过粘入一个 -2 球面即可将其解消，相应的 Lefschetz 纤维化具有两个平行的 Dehn扭转。对于 $s \neq 0$， X_s 上的纤维化有两个奇异纤维，其中一个的局部模型为 $x^4 + t$，另一个如上所述。我们在第7节看到， $x^4 + t$ 分解为单值化为 $\tau_1\tau_2\tau_3$ 的 Lefschetz 纤维化，因此只需确定来自 A_1 奇点的 Dehn扭转与来自 $x^4 + t$奇点的 Dehn扭转如何相互作用。

为此，我们明确追踪从 $t = 1$测得的两个奇点的单值化。奇异纤维位于 $t = 0$ 和 $t = -s^4$处。沿图 21所示的路径，位于 $t = -s^4$ 处的奇点给出双重点，其单值化为 ϕ_1^3。绕过位于 $t = 0$ 处的奇点，会使 -1的四次方根发生逆时针四分之一转动。奇点 $x^4 + t = 0$ 的分解中的弧与生成元 τ_2、τ_3 和 τ_4相对应。综上，在 X_s 上得到一个 Lefschetz 纤维化，其单值化为

$$\phi_2 = \tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4.$$

与解消相比，这个分解得到的流形具有 $b_1 = 0$ 和 $b_2 = 1$，这与第5.3节中的解消一致，正如所要求的那样。

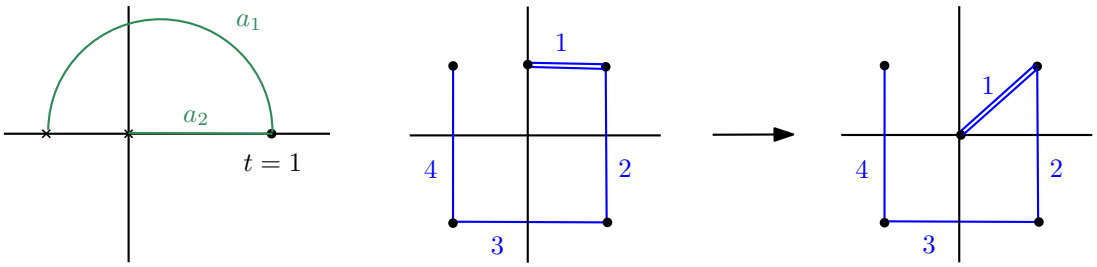


FIGURE 21. 左侧展示了在对 ϕ_2 求值时，变形 $x - s(x^4 + t)$ 中通往退化奇点的两条路径。右侧的两幅图对应于在 $t = 1$ 处测得的 ϕ_2 分解。左图是变形后的分解，其中 s 为正实数；右图则是将该分解拉回到纤维 $t = 1$ （当 $s = 0$ 时）所得的结果。

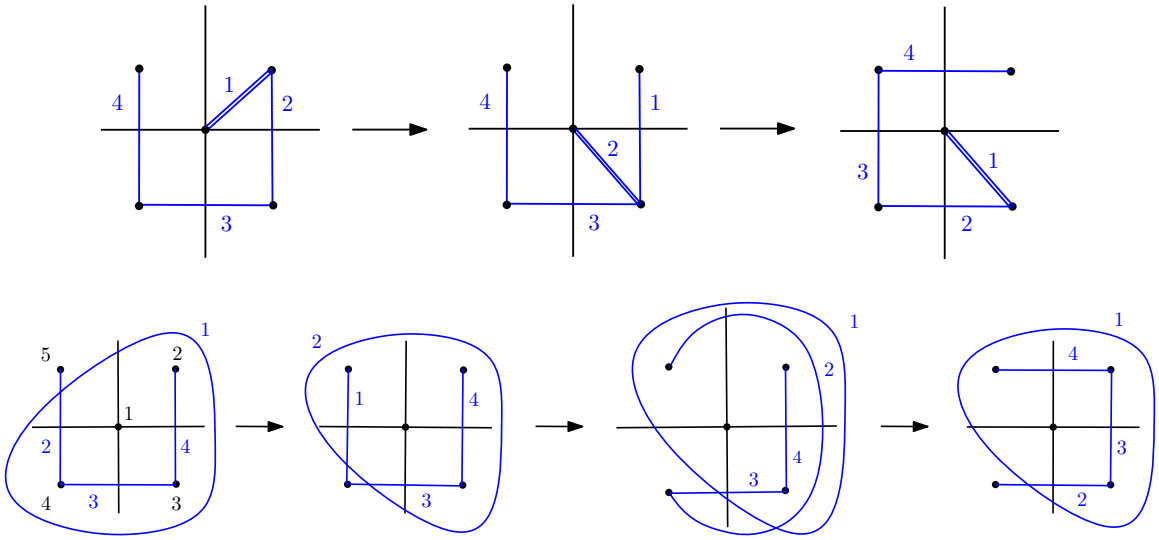


FIGURE 22. 将分解 ϕ_2 与ϕ_2^{-1}(ϕ_2联系起来的 Hurwitz变换序列。图中还展示了将 $\phi_{\tilde{2}}$ 与 ϕ_2^{-1}($\phi_{\tilde{2}}$联系起来的变换序列。这些变换将在引理8.3中讨论。

引理 8.3。 与 ϕ_1 的情形一样， ϕ_2 的这个分解与通过将平面旋转 $2\pi/4$ 的整数倍所得到的所有其他分解 *Hurwitz*等价。等价地，分解 $\phi_2^k(\phi_2)$ 与 ϕ_2 *Hurwitz*等价。对于分解$\phi_{\tilde{2}}$，这一结论同样成立： $\phi_2^k(\phi_{\tilde{2}})$ 与 $\phi_{\tilde{2}}$ *Hurwitz*等价。

证明。对于 $\phi_2 = \tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4$ 的分解，我们先将第一个位置的双扭转共轭移过下一个扭转，得到第二幅图。接着，将现在标记为 1 的曲线滑过其余所有曲线，便得到第三幅也是最后一幅构型， $\phi_2^{-1}(\phi_2)$。

对于 $\phi_{\tilde{2}} = \tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2$的分解，我们先将全扭转 1 滑过扭转 2。然后反向操作，将现在标记为 1 的半扭转滑过现在标记为 2 的全扭转。接着将标记为 2 的半扭转滑过 3 和 4，得到分解 $\phi_2(\phi_{\tilde{2}})$。（见图22。）□

情形 $y^2 = x(x^4 + t^2)$：通过 $x(x^4 + t(t - s))$ 变形得到纤维化 X_s，其具有两个类型为 ϕ_2的奇点，分别位于 $t = 0$ 和 $t = s$。对这些奇点进行解消后，得到一个具有 $b_1 = 0$ 和 $b_2 = 6$的曲面，与

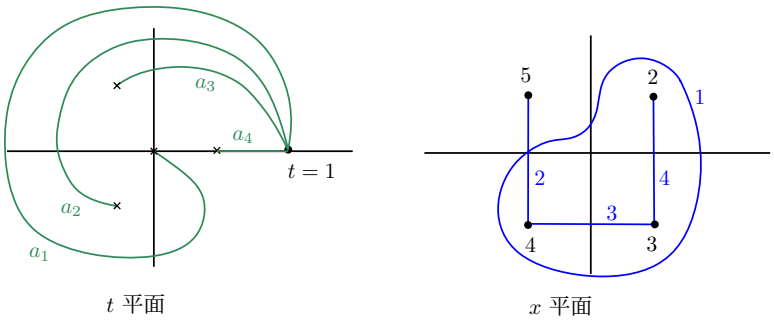


FIGURE 23. $\phi_{\tilde{2}}$ 的单值化，以及在 t平面中实现该单值化的路径。

对 $y^2 = x(x^4 + t^2)$ 的解消（见第 5.3 节）。因此， $\tilde{X}$ 上的纤维化变形为由正词 $\phi_2^2 = (\tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4)^2$ 给出的 Lefschetz 纤维化。

情形 $y^2 = x(x^4 + t^3)$：所得单值化与 ϕ_1的单值化非常相似，而且封帽后两者确实同构。我们将所得分解称为 $\phi_{\tilde{2}}$。

将分支曲线 Δ 变形为 $x((x-s)x^3 + t^3)$。这在 X_s 上产生了纤维化，其中有四个奇异纤维。一个奇点的类型为 $x(x^3 + t^3)$，位于 $t = 0$处。如第 7节所示，这对应于一个将亏格 1 子曲面分离出来的 Dehn 扭转。其余奇点均为简单辫。位于 $t = 0$ 处的奇异纤维解析为沿两条曲线的 Dehn 扭转，这两条曲线将一个带有两个边界分支的亏格1曲面分离出来。其余三个奇点位于 $3^3/4^4 s^4$的三次方根处。

沿着图中所示 t-平面内的路径追踪单值化23，我们可以看出这四个 Dehn 扭转彼此之间的排列方式。这给出了一个单值化为

$$\phi_{\tilde{2}} = \tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2.$$

全空间具有 $b_1 = 0$和 $b_2 = 1$，与图 8中的解消相符，因此这是该解消的一种变形。

情形 $y^2 = x(x^4 + t^4)$：这个 Lefschetz 纤维化结果与 $\phi_1^5 = I = \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1$ 相同，论证也十分相似。我们将 $x(x^4 + t^4)$ 分解为 $x(x^4 + (t+s)t^3)$，其中在 $t = 0$ 处有一个类型为 $\tilde{\phi_2}$ 的奇点（ $x(x^4 + t^3)$ ），在 $t = -s$ 处有一个类型为 ϕ_2 的奇点（ $x(x^4 + t)$ ）（经过某种识别）。沿着实轴从 $t = 1$ 到 $t = 0$ 取路径，我们可以直接沿用 $y^2 = x(x^4 + t^3)$ 情形中关于 $\phi_{\tilde{2}}$ 奇点的全部结果。如果取一条虚部为正的路径，通往 $t = -s$ 处的 ϕ_2 奇点，那么我们得到的 ϕ_2 分解是经过某个 ϕ_2 的幂共轭后的结果。根据引理 8.3，这个共轭与分解 ϕ_2 Hurwitz等价。由此得到分解： $\phi_2^4 = \phi_2\phi_{\tilde{2}} = \tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2$。要得到所需的 $\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1$ 字，我们可以对 τ_1 的第一次出现应用 Hurwitz 变换，使其滑过该字的其余部分。该字的其余部分是 $I\tau_1^{-1}$，而且由于 τ_1 是超椭圆的，共轭后我们会得到沿同一条曲线的 Dehn 扭转。因此我们有

$$\phi_2^4 = \phi_2\phi_{\tilde{2}} = \tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2 \equiv \tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_{5'}\tau_4\tau_3\tau_2\tau_1 = I.$$

这正是为 $f(x,\ t) = x^5 + t^5$ 找到的词。

情形 $y^2 = x(x^4 + t^5)$：该奇点的解消包含 $b_1 = 0$ 和 $b_2 = 11$ ，因此其 Lefschetz 纤维化将具有长度为 15 的正词分解。利用变形 $y^2 =$

$x(x^4+t^4(t+s))$，这分裂为以下类型的奇点： $y^2=x(x^4+t^4)$ 位于 $t=0$，以及 $y^2=x(x^4+(t+s))$ 位于 $t=-s$。在平面中选取路径，使通往 $t=s$ 的路径位于右侧，而通往 $t=0$ 的路径位于实轴上，这样便可将我们的正分解写为 $\phi_2^5=\phi_2^k(\phi_2)I$，根据引理 8.3，它与 $\phi_2 I$ 等价于 Hurwitz 等价。

情形 $y^2=x(x^4+t^6)$: 解消得到 $b_1=0$ 和 $b_2=6$，因此我们的 Lefschetz 纤维化的词长为 10。通过 $x(x^4+t^3(t-s)^3)$ 分裂后，得到两个类型为 $x(x^4+t^3)$ 的奇点，一个位于$t=0$，另一个位于 $t=s$，从而得到分解 ϕ_2^2。

情形 $y^2=x(x^4+t^7)$：解消得到 $b_1=0$ 和 $b_2=11$，因此我们的 Lefschetz 纤维化的词长为 15。我们通过变形 $x(x^4+t^4(t+s)^3)$ 得到一个类型为 I、位于 $t=0$ 和 $\phi_{\tilde{2}}$、位于 $t=s$的奇点。我们按照情形 $y^2=x(x^4+t^5)$ 中的方法继续，利用引理 8.3 得到˜正分解 $\phi_2 I$。

情形 $y^2=x(x^4+t^8)$：在解消 ϕ_2^8 后，我们得到一个自交数为 -1的亏格 2 曲面（见图 8最后一行）。因此，该奇点的解消具有 $b_1=4$ 和 $b_2=1$，所以必由一个分离型 Dehn 扭转给出。单值化是一个边界扭转， $\phi_2^8=\tau_\partial$因此分解也必定是一个边界扭转。

8.4. ϕ_4^k。最后，我们考察族 $y^2=x(x^5+t^k)$。在映射类群中， $k=1$ 的单值化可写为 $\tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5$，它是边界多重扭转的 5 次方根。

情形 $y^2=x(x^5+t)$：与 ϕ_2 情形类似，由 $x(x^5+t)$ 定义的分支曲线有两个分支，它们在 (0, 0) 相交。我们通过变形 $y^2=(x+s)(x^5+t)$ 将该奇点分裂，这使交点移动到 $(-s,s^5)$，此处两个分支横截相交。变形后，我们看到在 $t=0$ 和 $t=s^5$处分支，从而将该奇点分裂为位于 $t=0$ 的一个 x^5+t 奇点，以及位于 $t=s^5$ 的一个横截双重点。我们分别考察这两个单值化；与 ϕ_2 情形一样，我们需要追踪这两种识别如何匹配。为方便起见，我们取 s 为正实数扰动，并使用图 24 所示的弧。双重点给出一个 τ_1^2 因子，而原点处的 x^5+t 奇点则分裂成可利用所选骨架识别为 ϕ_1, $\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5$ 的对象。这给出了

$$\phi_4=\tau_1\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5.$$

这就得到一个具有 $b_1=0$ 和 $b_2=1$的全空间，它与解消的全空间一致，因此给出了该解消的平坦变形。

引理 8.4。 $\phi_4=\tau_1^2\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5$ 的分解与通过将平面旋转 $2\pi/5$ 的整数倍并作拉回而得到的所有其他分解均为*Hurwitz*等价。等价地，分解 $\phi_4^k(\phi_4)$ 与 ϕ_4 为*Hurwitz*等价。

证明。 此情形的证明与引理 8.3第一种情形（即 ϕ_2 的情形）的证明完全类似。

□

情形 $y^2=x(x^5+t^2)$：通过 $x(x^5+t(t+s))$ 分裂此奇点，得到两个类型为 ϕ_4 的奇点。根据引理8.4，这给出单值化

$$\phi_4^2=(\tau_1\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5\tau_5)^2.$$

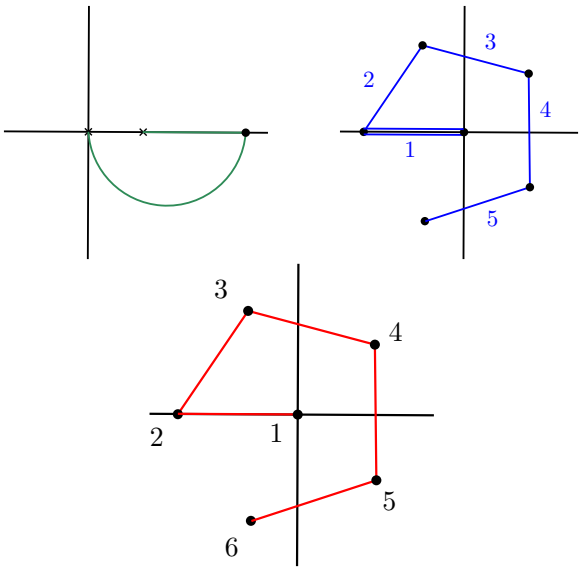


FIGURE 24. 顶行显示了 ϕ_4 的单值化以及用于识别它的路径。第二行显示了用于将 $t = 1$ 处的纤维与标准曲面$\Sigma_{2,\ 2}$识别的骨架。

这具有所需的 $b_1 = 0$ 和 $b_2 = 7$ 值，因此相应解消的变形是平坦的。

情形 $\boldsymbol{y^2 = x(x^5 + t^3)}$：这通过变形 $y^2 = x(x^3(x^2 - s) + t^3)$ 分裂。我们将把与 Lefschetz 纤维化 ϕ_B 相关联的正词称为。该变形产生了一个具有三个奇异纤维的纤维化，它们位于 $t = 0$ 以及六个点 $t = (\pm(4s(3s/5)^{1/2} - 6(3s/5)^{5/2})^{1/3}$之上；这些点位于角度为 $\theta = k * \pi/3$、 $k = 0$、.....5 的六条射线上。 $t = 0$ 纤维具有一个类型为 $x(x^3 + t^3)$ 的奇点，它产生一对 Dehn扭转，并将一个亏格 1 曲面分离出来。对于其余六个奇点中的每一个，我们取从 $t = 1$ 到该奇异值的路径，并将辫碰撞拉回以得到分解。这些碰撞发生在一对点之间，这对点交替地在 $x = 1$ 和 $x = -1$ 处碰撞。按照图25所示，使用 t-平面中的弧，将这些碰撞拉回到 $t = 1$ 处的参考点，我们得到分解

$$\phi_4^3 = \phi_B = \tau_4\tau_{a_2}\tau_3\tau_5\tau_2\tau_4\tau_{b_2}\tau_{b_2'}$$

其中，Dehn扭转的标记与超椭圆对合下各商空间上显示的标记相对应。这是一个词长为 8 的纤维化，其全空间具有 $b_1 = 0$和 $b_2 = 3$，符合要求。

情形 $\boldsymbol{y^2 = x(x^5 + t^4)}$：此例的解消具有 $b_1 = 0$ 和 $b_2 = 9$，因此我们要寻找一个词长为 14 的分解。将奇点分裂为 $y^2 = x(x^5 + t^3(t + s))$ 会得到两个奇点。在 $t = 0$ 处，我们有一个类型为 ϕ_B（前一情形）的奇点，其词长为 8；在 $t = -s$ 处，则有一个类型为 ϕ_4 的奇点，其词长为 6。令 s 为正虚数，并选取弧，使得从 $t = 1$ 到 $t = 0$ 的路径位于实轴上，且路径 $t = -s$ 位于右侧，然后将这两个情形中的分解拉回到 $t = 1$。由此得到一个正词 $\phi_3^4 = \phi_4^k(\phi_4)\phi_B$。根据引理 8.4，此分解与以下分解 Hurwitz等价：

$$\phi_4^4 = \phi_4\phi_B = (\tau_1^2\tau_2\tau_3\tau_4\tau_5)(\tau_4\tau_{a_2}\tau_3\tau_5\tau_2\tau_4\tau_{b_2}\tau_{b_2'}).$$

其词长正确，因此给出了该解消的平坦变形。

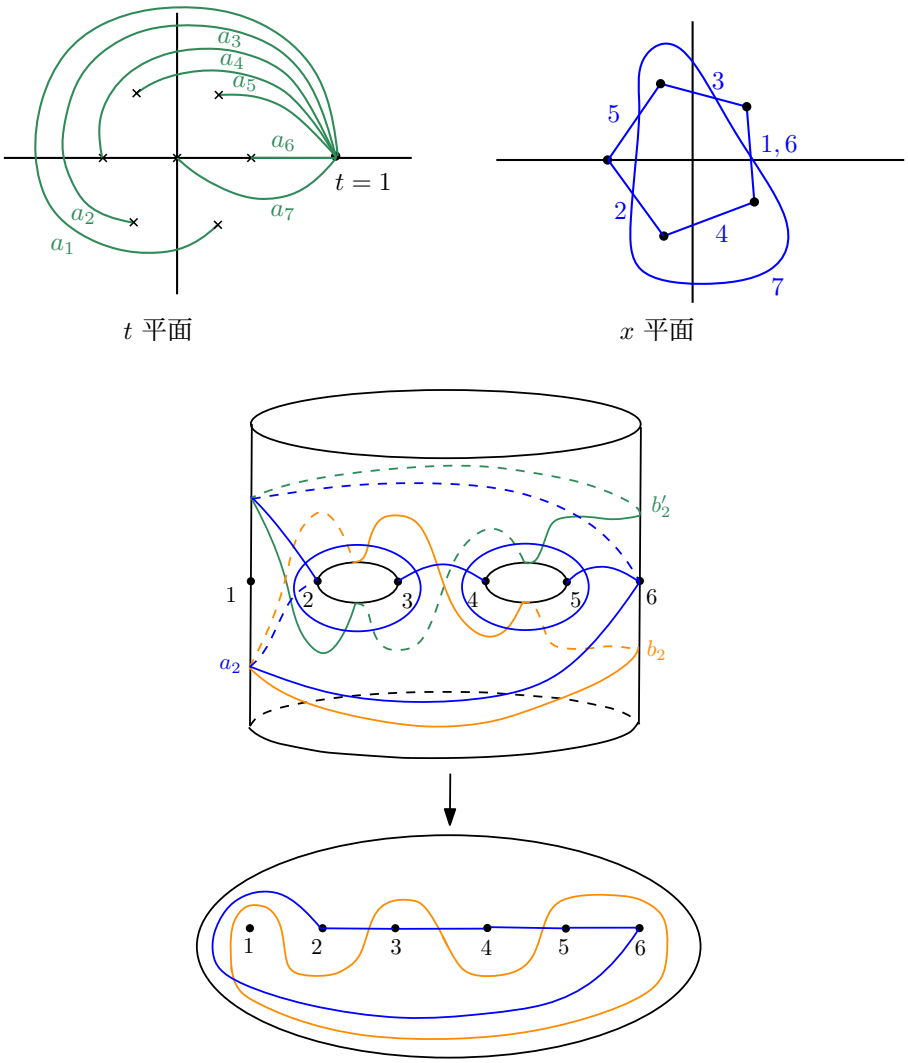


FIGURE 25. 单值化的分解 ϕ_B ϕ_4^3。

情形 $y^2 = x(x^5 + t^5)$：在 ϕ_4^5 的解消中，我们得到一个自交数为 -2 的亏格 2 曲面（见图 9 的最后一行）。该奇点的解消于是具有 $b_1 = 4$ 和 $b_2 = 1$，因此必定由沿两条同调曲线的两个 Dehn扭转给出。于是单值化为边界多重扭转 $\phi_4^5 = \tau_\partial$，分解也必定是边界多重扭转。

REFERENCES

[AA01] Tatsuya Arakawa 和 Tadashi Ashikaga, *Local splitting families of hyperelliptic pencils. I*, 《东北数学杂志》(2 **53** 2001 3, 369 394 1844374) ( ), 第 – 号。MR AA, *Local splitting families of hyperelliptic pencils. II*, [04]
《名古屋数学杂志》**175** (2004), 103–124。MR 2085313[A'C75] Norbert A'Campo,
Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes. I, 《数学年刊》
213 1975 1 32 377108 ( ), –。MR Akh Anar Akhmedov, *Construction of exotic smooth structures*, 《拓 [07]
扑学及其应用》**154** (2007), 第 6 号, 1134–1140。MR 2298629[AS19] Anar Akhmedov 和 S
¨ *Deformation of singular fibers of genus two fibrations and small exotic* umeyra Sakallı, , 《国际数
symplectic 4-manifolds **30** 2019 3, 1950017, 37 3941983
学杂志》( ), 第 号。MR

[05] *A stable classification of Lefschetz fibrations* **9** 2005 203 217 2115673 Aur Denis Auroux, ,
[71] *On the mapping class groups of closed surfaces as covering spaces*
Geom. Topol. ( ), –。MR BH Joan S. Birman 和 Hugh M. Hilden, , 《黎曼曲面理论进展》（会议录，石溪，纽约州，1969），数学年刊研究丛书，第 66, 1971, 81 115 0292082 号，普林斯顿大学出版社，普林
[98] *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*
斯顿，新泽西州，第 – 页。MR Don S. K. Donaldson, 《国际数学家大会论文集》，第 II 卷（柏林, 1998 1998, 309 314 1648081 ），Extra Vol. II，第 – 页。MR EO
[06] ¨ *Explicit horizontal open books on some plumbings*
a Tolga Etgu 和 Burak Ozbagci, 《国际数学杂志》17 (2006 9, 1013 1031 2274008)，第 – 号。MR EO b John B.
[06] *Open books and plumbings* 2006 72710, ,
Etnyre 和 Burak Ozbagci, 17 2272094
《国际数学研究通讯》( )，文章编号。MR [Ful99] Terry Fuller, *Generalized nuclei of complex surfaces*, 《太平洋数学杂志》187 (1999)，第 2 号，281–295。MR 1675025[Ful03] , *Lefschetz fibrations of 4-dimensional manifolds*, 《Cubo 数学教育》5 (2003)，第 3 号，275–294。MR 2065735[GK64] Hans Grauert 和 Hans Kerner, *Deformationen von singularitäten komplexer räume*, 《数学年刊》153 (1964)，236–260。[Gom98] Robert E. Gompf, *Handlebody construction of Stein surfaces*, 《数学年刊》（第 2 辑）148 (1998)，第 2 号，619–693。MR 1668563
[01] *The topology of symplectic manifolds* **25** 2001 1, 43 59 1829078 Gom, , 《土耳其数学杂
[99] ´ *4-manifolds and Kirby calculus*
志》( )，第 – 号。MR GS Robert E. Gompf 和 Andras I. Stipsicz, 《数学研究生教程》，第 20, 1999 1707327 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗德岛州，。
[74] ¯ ˘
MR GZ S. M. Guseın-Zade, *Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables*, 《函数分析及其应用》 **8** 1974 1, 11 15 0338437 ( )，第 – 号。MR HKK John Harer、Arnold Kas 和 Robion Kirby,
[86] *Handlebody decompositions of complex surfaces*, 《美国数学会回忆录》 **62** 1986 350, +102 849942 ( ),
[77]
第 iv 号。MR Hor E. Horikawa, *On algebraic surfaces with pencils of curves of genus* 2, 《复分析与代数几何》，岩波书店，东京, 1977, 79 90 0453756 第 – 页。MR Hor Eiji Horikawa, 《日本科学院院刊 A 辑数学
[88] *Local deformation of pencil of curves of genus two*
科学》64 (1988 7, 241 244 974083)，第 – 号。MR Ish Mizuho Ishizaka,
[04]
Classification of the periodic monodromies of hyperelliptic families, 《名古屋数学杂志》174 (2004 187 199 2066108)，–。
[07]
MR Ish, *Presentation of hyperelliptic periodic monodromies and splitting families*, 《马德里康普顿斯大学数学杂志》20 (2007 2, 483 495 2351120)，第 – 号。MR Kod K. Kodaira, *On compact analytic surfaces. II III*, 《数学年刊》
[63]
（第 2 辑）77 (1963)，563–626；同刊 78 (1963)，1–40。MR 0184257[Lau83] Henry B. Laufer,
Weak simultaneous resolution for deformations of Gorenstein surface singularities, 《奇点》，第 2 部分（阿卡塔，加利福尼亚州，1981），《纯数学研讨会论文集》，第 40 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州, 1983, 1 29 713236 第 – 页。
[01]
MR LP Andrea Loi 和 Riccardo Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of* B^4, 《发明数学》143 (2001)，第 2 号，325–348。MR 1835390[Mat96] Yukio Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two—a topological approach*, 《拓扑学与 Teichm¨uller 空间》（卡廷库尔塔, 1995 1996, 123 148 1659687 ），World Sci. Publ., River
[04] *Splitting of certain singular fibers of genus two* 3 **10** 2004
Edge，新泽西州，第 – 页。MR Mat, , 《墨西哥数学会公报》( ) ( )，特别号，331–355。MR 2199357[MMA94] Yukio Matsumoto 和 Jos ´ ´ *Pseudo-periodic homeomorphisms and degenera-* e Marıa
tion of Riemann surfaces **30** 1994 1, 70 75
Montesinos-Amilibia, 《美国数学会公报》（新系列）( )，第 – 号。MR 1217354
[11] *Pseudo-periodic maps and degeneration of Riemann surfaces* MMA, , 《数学讲义》，第 2030, 2011 2839459 卷，施普林格，海德堡，。MR Nem A. Nemethi,
[´ 99] —´
Five lectures on normal surface singularities, 《低维拓扑》（埃格尔，1996／布达佩斯，1998），Bolyai 数学研究丛书，第 8 卷，J´ anos Bolyai 数学学会，布达佩斯，1999，在´Agnes Szil ´ ´ ´ 269 351 1747271 ard 和
[´ 00] ´ ´
Sandor Kovacs 协助下，第 – 页。MR Nem Andras Nemethi, *Resolution graphs of some surface singularities. I. Cyclic coverings*, 《代数与解析几何中的奇点》（圣安东尼奥，得克萨斯州，1999），当代数学，第 266 卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2000，第 89–128 页。MR 1792151[NU73a] Yukihiko Namikawa 和 Kenji Ueno,
The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two, 《数学手稿》9 (1973)，143–186。MR 369362

[NU73b] , *On fibres in families of curves of genus two. I. Singular fibres of elliptic type*, 数论、代数几何与交换代数：谨以此纪念 Yasuo Akizuki，纪伊国屋书店，东京，1973 年，第 297–371 页。MR 0384794[Ogg66] A. P. Ogg, *On pencils of curves of genus two*, 《拓扑学》**5** （1966），355–362。MR 201437[Per92] Ulf Persson, *Genus two fibrations revisited (a preliminary report)*, 《复代数簇》（拜罗伊特，1990），《数学讲义》，第 1507 卷，施普林格，柏林，1992 年，第 133–144 页。MR 1178724[PSS05] Jongil Park、Andr´as I. Stipsicz 和 Zolt´an Szab´o, *Exotic smooth structures on $\mathbb{CP}^2\#5\overline{\mathbb{CP}}^2$*, 《数学研究快报》 **12** 2005 5 6, 701 712 2189231 （），第 - 期，– 。[ ] MR Rei Miles Reid, *Problems on pencils of small genus https://homepages.warwick.ac.uk/ masda/surf/more/atoms.pdf*。[Rud83] Lee Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, 《拓扑学》**22** （1983），第 2 期，191–202。MR 683760[Sak18] S ¨ umeyra Sakallı, , *New Exotic Symplectic 4-Manifolds with Nonnegative Signatures and Exotic Smooth Structures on Small 4-Manifolds* 2018, ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，博士论文——明尼苏达大学。MR 3885590[Sch05] Stephan Schonenberger, *Planar open books and symplectic fillings*, ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2005 年，博士论文——宾夕法尼亚大学。MR 2707472 [06] ´ ´ ´ SS Andras I. Stipsicz 和 Zoltan Szabo, *Small exotic 4-manifolds with $b_2^+ = 3$*, 《伦敦数学会公报》**38** （ 2006 3, 501 506 2239045 ），第 – 期。MR [76] Thu W. P. Thurston, *Some simple examples of symplectic manifolds* **55** 1976 2, , 《美国数学会会刊》（），第 – 期。MR 402764[Xia85] Gang Xiao, *Surfaces fibrées en courbes de genre deux*, 《数学讲义》，第 1137 卷，施普林格出版社，柏林，1985 年。MR 872271 467 468

Email address: ssakalli@uark.edu*URL*: https://sites.google.com/umn.edu/ssakalli/home
Department of Mathematical Sciences, University of Arkansas, Fayetteville, AR 72701, USA
Email address: jv002@uark.edu*URL*: https://jv002.hosted.uark.edu
Department of Mathematical Sciences, University of Arkansas, Fayetteville, AR 72701, USA