arXiv:2303.01558v1 [math.FA] 2 Mar 2023

刻画亚纯托普利兹算子的有界性

Lewis Coburn * Michael Hitrik † Johannes Sjöstrand‡

摘要：我们研究 Bargmann 空间上的托普利兹算子，其托普利兹符号为复二次型的指数函数。我们证明，相应韦尔符号的有界性是算子有界性的必要条件，从而在这一情形下完成了 Berger-Coburn 猜想的证明。我们还证明，此类托普利兹算子的紧性等价于其韦尔符号在无穷远处趋于零。

目录

1 引言与结果陈述 1 2 从有界托普利兹算子到有界韦尔符号：定理 1.1 的证明 4 3 刻画紧托普利兹算子：定理 1.2 的证明 11 4 一个具体例子 12

1 引言与结果陈述

Berger-Coburn 猜想 [2], [4], 是托普利兹算子理论中的一个长期猜想，其表述为：Bargmann 空间上的托普利兹算子有界，当且仅当其韦尔符号有界。关于这一猜想的重要部分结果已在 [2]中获得。我们最近的工作 [5], 在Bargmann 空间上的托普利兹算子理论与复域中的傅里叶

*美国纽约州布法罗市 14260，布法罗纽约州立大学数学系，lcoburn@buffalo.edu
†美国加利福尼亚州洛杉矶市 90095-1555，加州大学洛杉矶分校数学系，hitrik@math.ucla.edu
‡法国第戎 FR-21078，BP 47870，A. Savary 大道 9 号，勃艮第大学 IMB；法国国家科学研究中心 UMR 5584，johannes.sjostrand@u-bourgogne.fr

积分算子（傅里叶积分算子）之间建立了某些联系。复傅里叶积分算子的观点已被用于 [5] 证明猜想的充分性部分，具体针对托普利兹符号为复二次型指数函数的特殊情形。随后发表的论文 [6], 将这一结果推广到了托普利兹符号为非齐次二次多项式指数函数的情形，仍然采用傅里叶积分算子的观点。关于这类亚纯托普利兹算子的 Berger-Coburn 猜想的必要性部分，在 [5], [6], 中仍未解决；而本文的目的正是最终解决这一问题，证明韦尔符号的有界性是相应托普利兹算子有界性的必要条件。下面我们将介绍相关假设，并陈述本文的主要结果。

设 Φ_0 是$\mathbf{C}^n$ 上的严格多重次调和二次型，并令

$$\Lambda_{\Phi_0} = \left\{ \left(x, \frac{2}{i}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(x) \right), x \in \mathbf{C}^n \right\} \subset \mathbf{C}^n_x \times \mathbf{C}^n_\xi = \mathbf{C}^{2n}. \tag{1.1}$$

实线性子空间 Λ_{Φ_0} 是 I-拉格朗日的且 R-辛的，即复辛形式在$\mathbf{C}^{2n}$ 上对 Λ_{Φ_0} 的限制是实的且非退化的。我们还可以回顾，在复域中的韦尔量子化背景下，子空间 Λ_{Φ_0} 应视为实相空间，参见 [10], [12]。

与二次型 Φ_0 相对应的是 Bargmann 空间

$$H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n) = L^2(\mathbf{C}^n, e^{-2\Phi_0}L(dx)) \cap \mathrm{Hol}(\mathbf{C}^n), \tag{1.2}$$

其中 $L(dx)$ 是$\mathbf{C}^n$ 上的勒贝格测度。我们有正交投影

$$\Pi_{\Phi_0} : L^2(\mathbf{C}^n, e^{-2\Phi_0}L(dx)) \to H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n). \tag{1.3}$$

设 q 是$\mathbf{C}^n_x$ 上的复值二次型，即关于 x、 $\overline{x}$ 的二次齐次多项式。我们假设

$$\mathrm{Re}\, q(x) < \Phi_{\mathrm{herm}}(x) := (1/2)\left(\Phi_0(x) + \Phi_0(ix)\right), \quad x \neq 0. \tag{1.4}$$

本文沿用 [5], ，研究如下形式的（稠密定义）Toeplitz 算子

$$\mathrm{Top}(e^q) = \Pi_{\Phi_0} \circ e^q \circ \Pi_{\Phi_0} : H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n) \to H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n). \tag{1.5}$$

这类算子可以用韦尔量子化表示,

$$\mathrm{Top}(e^q) = a^w(x, D_x), \tag{1.6}$$

参见 [10], [12], ，其中韦尔符号 $a \in C^\infty(\Lambda_{\Phi_0})$ 定义为

$$a\left(x, \frac{2}{i}\frac{\partial \Phi_0}{\partial x}(x) \right) = \left(\exp\left(\frac{1}{4}\left(\Phi''_{0,x\overline{x}}\right)^{-1} \partial_x \cdot \partial_{\overline{x}} \right) e^q \right)(x). \tag{1.7}$$

以下是本文的首个主要结果。

定理 1.1 设 Φ_0 是 $\mathbf{C}^n$ 上的严格多重次调和二次型， q是 $\mathbf{C}^n$ 上的复值二次型。假设

$$\operatorname{Re} q(x) < \Phi_{\mathrm{herm}}(x) := (1/2)\left(\Phi_0(x) + \Phi_0(ix)\right), \quad x \neq 0 \tag{1.8}$$

and

$$\det \partial_x \partial_{\overline{x}} (2\Phi_0 - q) \neq 0. \tag{1.9}$$

托普利兹算子

$$\mathrm{Top}(e^q) : H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n) \to H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n))$$

有界当且仅当 ***Top(*e^q*)*** 的韦尔符号 $a \in C^\infty(\Lambda_{\Phi_0})$ 满足 $a \in L^\infty(\Lambda_{\Phi_0})$。

注。如上所述，Top(e^q) 的韦尔符号有界足以保证托普利兹算子有界，这一点已在 [5], 中得到证明，而本文将只讨论必要性的证明。对于托普利兹符号为 e^q 的特殊情形，其中 q 是 $\mathbf{C}^n$ 上满足 (1.8)、(1.9) 的二次型，定理 1.1 证实了 Berger-Coburn 猜想 [2], [4] 成立。

形式为 (1.5) 的托普利兹算子的紧性也可以用其韦尔符号来刻画，这与 [1] 中提出的一般猜想一致。

定理 1.2 设 Φ_0 是 $\mathbf{C}^n$ 上的严格多重次调和二次型， q 是 $\mathbf{C}^n$ 上满足 (1.8)、(1.9) 的复值二次型。托普利兹算子

$$\mathrm{Top}(e^q) : H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n) \to H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$$

当且仅当托普利兹算子 $\mathrm{Top}(e^q)$ 的韦尔符号 $a \in C^\infty(\Lambda_{\Phi_0})$ 在无穷远处消失时，才是紧的。

注。尽管我们这里考虑的托普利兹符号由复二次型的指数函数给出，构成一个非常受限的类别，但它们仍可能具有一定的意义，因为相应托普利兹算子的类别包括那些处于有界性“边缘”的算子；符号的无界性在无穷远处会因其快速振荡而减弱。另见 [2], [5]。

本文的安排如下。我们在第 2 节证明定理 1.1，并在第 3 节证明定理 1.2。根据 [6], 这里的主要思路，是让（有界）托普利兹算子作用于 Bargmann 空间中的归一化相干态。事实证明，这使我们能够直接提取出韦尔符号的有界性，或者更确切地说，对应的复线性正则变换的正性；而这一过程始终关键性地依赖于 [5]中发展的技术。第 4 节专门讨论模型 Bargmann 空间上的一类显式亚纯托普利兹算子，以此说明定理 1.1 和定理 1.2。

致谢。我们非常感谢 Joe Viola 和 Francis White 提供的宝贵讨论。

谨以此文纪念。Charles Arnold Berger（1937–2014）曾任纽约市立大学数学教授。尽管饱受克罗恩病困扰，他在数学研究中依然坚韧不拔、洞察敏锐，时有灵光闪现，亦不乏幽默。

2 从有界托普利兹算子到有界韦尔符号：定理 1.1 的证明

设 Φ_0 是$\mathbf{C}^n$ 上的严格多重次调和二次型， q 是$\mathbf{C}^n$ 上的复值二次型，且满足 (1.8)、(1.9)。我们回顾 [5] 中的结果：赋予自然（最大）定义域后，

$$\mathcal{D}(\mathrm{Top}(e^q)) = \left\{ u \in H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n); e^q\, u \in L^2(\mathbf{C}^n, e^{-2\Phi_0} L(dx)) \right\}, \tag{2.1}$$

托普利兹算子

$$\mathrm{Top}(e^q) = \Pi_{\Phi_0} \circ e^q \circ \Pi_{\Phi_0} : H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n) \to H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n) \tag{2.2}$$

成为稠密定义的算子。

$a \in C^\infty$(Λ$_{\Phi_0}$) 是 (1.7) 中引入的 Top(e^q) 的韦尔符号。回顾一下，蕴含关系 $a \in L^\infty$(Λ$_{\Phi_0}$) $\Longrightarrow$ Top(e^q) $\in \mathcal{L}$(H_{Φ_0}($\mathbf{C}^n$) H_{Φ_0}($\mathbf{C}^n$) 已在 [5, 定理 1.2] 中得到了证明。因此，我们只需检验条件 $a \in L^\infty$(Λ$_{\Phi_0}$) 对托普利兹算子有界性的必要性。

这样做时，根据 [5], [6], ，我们将 $u \in \mathcal{D}$(Top(e^q)) 记作，

$$\mathrm{Top}(e^q)u(x) = C \iint_\Gamma e^{2(\Psi_0(x,\theta) - \Psi_0(y,\theta)) + Q(y,\theta)} u(y)\, dy\, d\theta, \quad C \neq 0. \tag{2.3}$$

这里， Γ 是 $\mathbf{C}^{2n}_{y\,\theta}$, 中的积分路径，由 $\theta = \overline{y}$ 给出； Ψ_0 和 Q 分别是 Φ_0 和 q 的极化，即定义在 $\mathbf{C}^{2n}_{y\,\theta}$, 上的全纯二次型，满足 $\Psi_0|_\Gamma = \Phi_0$、$Q|_\Gamma = q$。按照 [5], ，我们将 (2.3) 中的 Top(e^q) 视为复域中的亚纯辛傅里叶积分算子。全纯二次型

$$F(x, y, \theta) = \frac{2}{i}\left(\Psi_0(x, \theta) - \Psi_0(y, \theta)\right) + \frac{1}{i} Q(y, \theta) \tag{2.4}$$

按照 Hörmander 的意义，这是一个非退化相位函数 [9], 鉴于 $\partial_x \partial_\theta \Psi_0$的非退化性，并结合（1.9），我们如 [5], 所述得出，其对应的典范关系

$$\kappa : \mathbf{C}^{2n} \ni \left(y, -F'_y(x, y, \theta)\right) \mapsto (x, F'_x(x, y, \theta)) \in \mathbf{C}^{2n}, \quad F'_\theta(x, y, \theta) = 0, \tag{2.5}$$

是一个复线性正则变换的图像。由 [5, 命题 B.1] 可知，Top(e^q) 的韦尔符号 a 满足 $a \in L^\infty(\Lambda_{\Phi_0})$，当且仅当（2.5）中的典范变换 κ相对于 Λ_{Φ_0}为正，即，

$$\frac{1}{i}\Big(\sigma(\kappa(\rho),\iota_{\Phi_0}\kappa(\rho)) - \sigma(\rho,\iota_{\Phi_0}(\rho))\Big) \geq 0, \quad \rho \in \mathbf{C}^{2n}. \tag{2.6}$$

这里 ι_{Φ_0} :$\mathbf{C}^{2n} \to \mathbf{C}^{2n}$ 是满足 $\iota|_{\Lambda_{\Phi_0}} = 1$ 的唯一反线性对合，参见 [5],和

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} d\xi_j \wedge dx_j \tag{2.7}$$

是 $\mathbf{C}^{2n} = \mathbf{C}^n_x \times \mathbf{C}^n_\xi$ 上的复辛形式。

假设

$$\mathrm{Top}(e^q) \in \mathcal{L}(H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n), H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)), \tag{2.8}$$

我们先来验证，只需证明当 Φ_0 的多调和部分消失时， $a \in L^\infty(\Lambda_{\Phi_0})$。事实上，将其分解为

$$\Phi_0 = \Phi_{\mathrm{herm}} + \Phi_{\mathrm{plh}}, \tag{2.9}$$

其中 $\Phi_{\mathrm{herm}}(x) = (\Phi_0)''_{\overline{x}x} x \cdot \overline{x}$是厄米正定的，而 $\Phi_{\mathrm{plh}}(x) = \mathrm{Re} f(x)$，其中 $f(x) = (\Phi_0)''_{xx} x \cdot x$，是多调和的。令

$$A = \frac{2}{i}(\Phi_0)''_{xx}, \tag{2.10}$$

并按照 [5], [7], ，引入复线性正则变换

$$\kappa_A : \mathbf{C}^{2n} \ni (y,\eta) \mapsto (y, \eta - Ay) \in \mathbf{C}^{2n}, \tag{2.11}$$

满足

$$\kappa_A(\Lambda_{\Phi_0}) = \Lambda_{\Phi_{\mathrm{herm}}}. \tag{2.12}$$

与 κ_A 相关联的是酉元辛傅里叶积分算子

$$\mathcal{U} : H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n) \ni u \mapsto ue^{-f} \in H_{\Phi_{\mathrm{herm}}}(\mathbf{C}^n), \tag{2.13}$$

并令

$$\Pi_{\Phi_{\mathrm{herm}}} : L^2(\mathbf{C}^n, e^{-2\Phi_{\mathrm{herm}}} L(dx)) \to H_{\Phi_{\mathrm{herm}}}(\mathbf{C}^n) \tag{2.14}$$

为正交投影，我们注意到

$$\Pi_{\Phi_0} = \mathcal{U}^{-1} \circ \Pi_{\Phi_{\mathrm{herm}}} \circ \mathcal{U}. \tag{2.15}$$

因此，假设 (2.8) 表明托普利兹算子

$$\Pi_{\Phi_{\mathrm{herm}}} \circ e^q \circ \Pi_{\Phi_{\mathrm{herm}}} = \mathcal{U} \circ \mathrm{Top}(e^q) \circ \mathcal{U}^{-1} : H_{\Phi_{\mathrm{herm}}}(\mathbf{C}^n) \to H_{\Phi_{\mathrm{herm}}}(\mathbf{C}^n) \tag{2.16}$$

是有界的，并且按照上述论证，我们可以将算子 (2.16) 视为与复线性正则变换相关联的亚纯辛傅里叶积分算子

$$\kappa_{\mathrm{herm}} : (y, -\partial_y F_{\mathrm{herm}}(x,y,\theta)) \mapsto (x, \partial_x F_{\mathrm{herm}}(x,y,\theta)), \quad \partial_\theta F_{\mathrm{herm}}(x,y,\theta) = 0. \tag{2.17}$$

Here

$$F_{\mathrm{herm}}(x,y,\theta) = \frac{2}{i}\left(\Psi_{\mathrm{herm}}(x,\theta) - \Psi_{\mathrm{herm}}(y,\theta)\right) + \frac{1}{i}Q(y,\theta), \tag{2.18}$$

其中 Ψ_{herm} 是 Φ_{herm}的极化。注意到

$$F(x,y,\theta) = F_{\mathrm{herm}}(x,y,\theta) + \frac{1}{2}Ax\cdot x - \frac{1}{2}Ay\cdot y,$$

w我们看到，(2.5) 中的典范变换 κ 可作如下因子分解

$$\kappa = \kappa_A^{-1} \circ \kappa_{\mathrm{herm}} \circ \kappa_A. \tag{2.19}$$

结合 (2.19) 与以下事实

$$\iota_{\Phi_0} = \kappa_A^{-1} \circ \iota_{\Phi_{\mathrm{herm}}} \circ \kappa_A, \tag{2.20}$$

由 [5], 可知， κ 相对于 Λ_{Φ_0}是正的，也就是说，(2.6) 成立，当且仅当典范变换 κ_{herm} 相对于 $\Lambda_{\Phi_{\mathrm{herm}}}$是正的，即

$$\frac{1}{i}\big(\sigma(\kappa_{\mathrm{herm}}(\rho), \iota_{\Phi_{\mathrm{herm}}}\kappa_{\mathrm{herm}}(\rho)) - \sigma(\rho, \iota_{\Phi_{\mathrm{herm}}}(\rho))\big) \geq 0, \quad \rho \in \mathbf{C}^{2n}. \tag{2.21}$$

因此，以下我们假设 Φ_0 的多调和部分为零，从而

$$\Phi_0(x) = (\Phi_0)''_{\overline{x}x}\, x\cdot\overline{x}, \quad x \in \mathbf{C}^n, \tag{2.22}$$

and

$$\Psi_0(x,y) = (\Phi_0)''_{\overline{x}x}\, x\cdot y, \quad x,y \in \mathbf{C}^n. \tag{2.23}$$

我们有

$$2\mathrm{Re}\,\Psi_0(x,\overline{y}) - \Phi_0(x) - \Phi_0(y) = -(\Phi_0'')_{\overline{x}x}(x-y)\cdot(\overline{x-y}) = -\Phi_0(x-y) \tag{2.24}$$

假设（2.8）成立，接下来 [6], 我们将考察 Top(e^q) 在“相干态”上的作用，即 Bargmann 空间 $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$ 中的归一化再生核。令

$$k_w(x) = C_{\Phi_0}\, e^{2\Psi_0(x,\overline{w}) - \Phi_0(w)}, \quad w \in \mathbf{C}^n, \tag{2.25}$$

利用（2.24）并回顾（1.8），我们看到

$$k_w \in \mathcal{D}(\mathrm{Top}(e^q)), \quad w \in \mathbf{C}^n, \tag{2.26}$$

并适当地选择常数 $C_{\Phi_0}>0$，我们得到$||\,k_w\,||_{H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)}=1,\quad w\in\mathbf{C}^n$。因此，根据（2.3），我们可以写成

$$\left(\mathrm{Top}(e^q)k_w\right)(x)=C\,C_{\Phi_0}\,e^{-\Phi_0(w)}\iint_\Gamma e^{2\Psi_0(x,\theta)+Q(y,\theta)+2\Psi_0(y,\overline{w})-2\Psi_0(y,\theta)}\,dy\,d\theta. \tag{2.27}$$

接下来，我们提出以下一般性观察。

命题 2.1 设 g 是$\mathbf{C}^n$ 上的复值二次型，满足$\mathrm{Re}\,g<0$以二次型的意义下。设 G 是 g 的极化。那么$\mathbf{C}^{2n}$ 上的全纯二次型 G 是非退化的。

证明： 多重调和二次型 $\mathrm{Re}\,G$ 满足

$$\mathrm{Re}\,G|_\Gamma<0, \tag{2.28}$$

其中 $\Gamma\subset\mathbf{C}^{2n}_{x,\,y}$ 是反对角线，$y=\overline{x}$。由此可知，$\mathrm{Re}\,G$ 的惯性指数为 $(2n,2n)$，因此 $\mathrm{Re}\,G$ 是非退化的，

$$|\nabla\mathrm{Re}\,G(x,y)|\asymp|x|+|y|\quad\text{ on }\ \mathbf{C}^{2n}_{x,y}, \tag{2.29}$$

其中梯度是在$\mathbf{R}^{4n}$的实意义下取的。根据以下一般事实即可得出结果：设 $U\in$属于 $\mathrm{Hol}(\mathbf{C}^N_z)$。那么

$$|\nabla\mathrm{Re}\,U(z)|=2\,|\partial_z\mathrm{Re}\,U(z)|=|\partial_z U(z)|\,. \tag{2.30}$$

□

应用命题 2.1 和 (1.8)，我们可以得出全纯二次型

$$\mathbf{C}^{2n}_{y,\theta}\ni(y,\theta)\mapsto Q(y,\theta)-2\Psi_0(y,\theta) \tag{2.31}$$

非退化，因此将精确（二次）驻相法 [12, Lemma 13.2]应用于 (2.27)，可得（其中 C 是一个新的常数）：

$$\left(\mathrm{Top}(e^q)k_w\right)(x)=C\,e^{2f(x,\overline{w})-\Phi_0(w)},\quad 0\neq C\in\mathbf{C}. \tag{2.32}$$

这里，$f(x,z)$ 是定义在 $\mathbf{C}^{2n}_{x,\,z}$ 上的全纯二次型，定义如下：

$$2f(x,z)=\mathrm{vc}_{y,\theta}\left(2\Psi_0(x,\theta)+Q(y,\theta)+2\Psi_0(y,z)-2\Psi_0(y,\theta)\right). \tag{2.33}$$

这里我们用“vc”表示临界值。

为供后文参考，我们作如下观察。

命题 2.2 我们有

$$\det f''_{xz}\neq0. \tag{2.34}$$

证明: 根据（2.33）和（2.23），我们有,

$$2f(x,z)=\mathrm{vc}_{y,\theta}\left(2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}x\cdot\theta+Q(y,\theta)+2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}y\cdot z-2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}y\cdot\theta\right),\tag{2.35}$$

并令 $(y,\theta)=(y(x,z)\ \theta(x,z))\in\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n$ 为对应于（2.35）中的临界值的唯一临界点, 我们得到

$$f'_x(x,z)=(\partial_x\Psi_0)(x,\theta)=(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\,\theta(x,z),\quad f''_{xz}=(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\,\partial_z\theta(x,z).\tag{2.36}$$

我们需要证明 $\partial_z\theta(x,z)$ 可逆。为此，我们注意到临界点 $(y,\theta)=(y(x,z)\ \theta(x,z))$ 满足

$$2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}y-Q'_\theta(y,\theta)=2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}x,\quad 2(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\theta-Q'_y(y,\theta)=2(\Phi_0)''_{x\overline{x}}z.\tag{2.37}$$

记

$$Q(y,\theta)=\frac{1}{2}Q''_{yy}y\cdot y+Q''_{y\theta}\theta\cdot y+\frac{1}{2}Q''_{\theta\,\theta}\theta\cdot\theta,\quad(y,\theta)\in\mathbf{C}^n\times\mathbf{C}^n,\tag{2.38}$$

我们看到，方程（2.37）可写成如下形式:

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}x\\2(\Phi_0)''_{x\overline{x}}z\end{pmatrix}.\tag{2.39}$$

这里的 $2n\times 2n$ 矩阵

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}-Q''_{\theta y}&-Q''_{\theta\,\theta}\\-Q''_{yy}&2(\Phi_0)''_{x\overline{x}}-Q''_{y\theta}\end{pmatrix}.\tag{2.40}$$

由于（2.31）中的二次型非退化，该矩阵可逆；此外，根据（1.9）， A_{11} 也可逆。令

$$\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},\tag{2.41}$$

由舒尔补公式可知 B_{22} 可逆，参见 [11,引理 3.1]。因此 $\partial_z\theta(x,z)$ 可逆，并由 (2.36) 得出 (2.34)。□

由 (2.26) 和 (2.32) 可得

$$e^{2f(\cdot,\overline{w})}\in H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n),\quad w\in\mathbf{C}^n,\tag{2.42}$$

特别是，我们由（2.42）推得

$$2\mathrm{Re}\,f(x,0)-\Phi_0(x)<0,\quad 0\neq x\in\mathbf{C}^n.\tag{2.43}$$

利用（2.32），并记

$$|| \operatorname{Top}(e^q)k_w ||^2_{H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)} = C^2 e^{-2\Phi_0(w)} \int e^{4\mathrm{Re}\, f(x,\overline{w})-2\Phi_0(x)}\, L(dx), \tag{2.44}$$

由此，结合 (2.43) 和驻相法的二次型版本（拉普拉斯方法） [12,引理 13，2] 我们得出

$$|| \operatorname{Top}(e^q)k_w ||^2_{H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)} = \widetilde{C}^2 e^{-2\Phi_0(w)} \exp\left(\sup_x \left(4\mathrm{Re}\, f(x,\overline{w}) - 2\Phi_0(x)\right)\right), \quad \widetilde{C} \neq 0. \tag{2.45}$$

因此，我们得到托普利兹算子 $\mathrm{Top}(e^q)$ 在 $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$ 上有界的以下必要条件：

$$\sup_x \left(4\mathrm{Re}\, f(x,\overline{w}) - 2\Phi_0(x)\right) - 2\Phi_0(w) \leq 0, \quad w \in \mathbf{C}^n, \tag{2.46}$$

换言之，

$$2\mathrm{Re}\, f(x,\overline{w}) \leq \Phi_0(x) + \Phi_0(w), \quad (x,w) \in \mathbf{C}^n_x \times \mathbf{C}^n_w. \tag{2.47}$$

因此，定理 1.1 可由以下结果推出。

命题 2.3 假设条件(2.47) 成立，其中全纯二次型 $f(x,z)$ 由(2.33)给出。则托普利兹算子 $\mathrm{Top}(e^q)$ 的韦尔符号 $a \in C^\infty(\Lambda_{\Phi_0})$ 满足 $a \in L^\infty(\Lambda_{\Phi_0})$。

证明： 我们将证明典范变换 κ 在 (2.5) 中相对于 Λ_{Φ_0}是正的。为此，令

$$\varphi(x,y,z) = \frac{2}{i}\left(f(x,z) - \Psi_0(y,z)\right). \tag{2.48}$$

相位函数 $\varphi(x,y,z)$ 按照 Hörmander 的定义是非退化的，其中 $z \in \mathbf{C}^n$视为纤维变量。由命题 2.2 可知，典范关系

$$\widetilde{\kappa} : \mathbf{C}^{2n} \ni \left(y, -\varphi'_y(x,y,z)\right) \mapsto (x, \varphi'_x(x,y,z)) \in \mathbf{C}^{2n}, \quad \varphi'_z(x,y,z) = 0, \tag{2.49}$$

是一个复线性正则变换的图，见 [3]。更具体地说，

$$\widetilde{\kappa} : \left(y, \frac{2}{i}\partial_y \Psi_0(y,z)\right) \mapsto \left(x, \frac{2}{i}\partial_x f(x,z)\right), \quad \partial_z f(x,z) = \partial_z \Psi_0(y,z), \tag{2.50}$$

或者等价地，回忆（2.23），

$$\widetilde{\kappa} : \left(y, \frac{2}{i}(\Phi_0)''_{x\overline{x}} z\right) \mapsto \left(x, \frac{2}{i} f'_x(x,z)\right), \quad f'_z(x,z) = (\Phi_0)''_{\overline{x}x} y. \tag{2.51}$$

在 [5, 命题 3.2] 的证明中，我们说明了条件（2.47）如何推出典范变换 $\widetilde{\kappa}$ 相对于 Λ_{Φ_0} 为正；现在我们进一步声称，事实上，$\widetilde{\kappa}=\kappa$ 在（2.5）中。确实，回忆 [8], [10]，（1.3）中的正交投影Π_{Φ_0} 由下式给出：

$$\Pi_{\Phi_0}u(x)=a_0\iint e^{2\Psi_0(x,\overline{y})}u(y)\,e^{-2\Phi_0(y)}\,dy\,d\overline{y}\quad a_0\neq 0, \tag{2.52}$$

并将 Top(e^q) 作用于

$$u(x)=\Pi_{\Phi_0}u(x)=a_0\iint e^{2\Psi_0(x,\overline{y})}u(y)\,e^{-2\Phi_0(y)}\,dy\,d\overline{y},\quad u\in\mathcal{D}(\mathrm{Top}(e^q)), \tag{2.53}$$

回顾 (2.25)、(2.32)，我们得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{Top}(e^q)u(x)=a_0\iint(\mathrm{Top}(e^q)k_y)(x)\,u(y)\,e^{-\Phi_0(y)}\,dy\,d\overline{y}\\&=C\iint e^{2f(x,\overline{y})}u(y)e^{-2\Phi_0(y)}\,dy\,d\overline{y}=C\iint_\Gamma e^{2(f(x,z)-\Psi_0(y,z))}u(y)\,dy\,dz,\quad C\neq 0.\end{aligned} \tag{2.54}$$

表示式 (2.54) 提供了另一种方式来表示 (2.3) 中的傅里叶积分算子 Top(e^q)，其中使用了 (2.48) 中的相位函数——按照 [5], 的术语，(2.54) 给出了算子 Top(e^q) $\in\mathcal{L}($ $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$) 的 Bergman 形式。因此，我们预期典范变换 (2.49) 与 (2.5) 相等，下面也通过直接计算来验证这一点。由 (2.4)、(2.5) 和 (2.23)，可知典范变换 κ 具有如下形式

$$\kappa:\left(y,\frac{2}{i}(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\theta-\frac{1}{i}Q'_y(y,\theta)\right)\mapsto\left(x,\frac{2}{i}(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\theta\right),\quad 2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}(x-y)+Q'_\theta(y,\theta)=0, \tag{2.55}$$

换言之，

$$\kappa:\left(y,\frac{2}{i}(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\theta-\frac{1}{i}Q'_y(y,\theta)\right)\mapsto\left(y-\frac{1}{2}\left((\Phi_0)''_{\overline{x}x}\right)^{-1}Q'_\theta(y,\theta),\frac{2}{i}(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\theta\right). \tag{2.56}$$

另一方面，考虑到 (2.35)，写成

$$2f(x,z)=\mathrm{vc}_{\widetilde{y},\theta}\left(2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}x\cdot\theta+Q(\widetilde{y},\theta)+2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}\widetilde{y}\cdot z-2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}\widetilde{y}\cdot\theta\right), \tag{2.57}$$

我们得到

$$f'_x(x,z)=(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\theta(x,z),\quad f'_z(x,z)=(\Phi_0)''_{\overline{x}x}\widetilde{y}(x,z), \tag{2.58}$$

其中，$\widetilde{y}(x,z)$ $\theta(x,z)$ 是与式 (2.57) 中的临界值相对应的唯一临界点。因此，利用式 (2.51) 和 (2.58)，我们得到

$$\widetilde{\kappa}:\left(y,\frac{2}{i}(\Phi_0)''_{x\overline{x}}z\right)\mapsto\left(x,\frac{2}{i}(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\theta(x,z)\right),\quad\widetilde{y}(x,z)=y. \tag{2.59}$$

这里，正如我们在式 (2.37) 中已经看到的，临界点 $(\widetilde{y},\theta) = (\widetilde{y}(x,z)\ \theta(x,z))$ 满足

$$2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}x = 2(\Phi_0)''_{\overline{x}x}\widetilde{y} - Q'_\theta(\widetilde{y},\theta), \quad 2(\Phi_0)''_{x\overline{x}}z = 2(\Phi_0)''_{x\overline{x}}\theta - Q'_y(\widetilde{y},\theta). \tag{2.60}$$

比较 (2.59)、(2.60) 与 (2.56)，我们得出 $\widetilde{\kappa} = \kappa$，因此，后一个典范变换相对于 Λ_{Φ_0} 是正的。证明完毕。□

3 紧托普利兹算子的刻画：定理 1.2 的证明

本节中，令 q 为$\mathbf{C}^n$ 上满足 (1.8)、(1.9) 的一个复值二次型，其中给定$\mathbf{C}^n$ 上的一个严格多重次调和二次型 Φ_0。本节的目的是证明定理 1.2；为此，我们将首先验证，韦尔符号在无穷远处消失是托普利兹算子 Top(e^q) 在 $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$ 上紧的充分条件。事实上，这一结果基本上已在 [5] 中得到证明。

回顾托普利兹算子 Top(e^q) 的韦尔符号 a 由 (1.7) 给出，我们注意到，按照 [5]，可以将其写为

$$a(x,\xi) = C\, e^{iF(x,\xi)}, \quad (x,\xi) \in \Lambda_{\Phi_0}, \tag{3.1}$$

对于某个 $C \neq 0$，其中 F 是定义在 $\mathbf{C}^{2n}_{x,\xi}$ 上的全纯二次型。由此可知，a 在无穷远处的消失等价于椭圆性

$$\operatorname{Im} F\left(x, \frac{2}{i}\frac{\partial\Phi_0}{\partial x}(x)\right) \asymp |x|^2, \quad x \in \mathbf{C}^n, \tag{3.2}$$

应用 [5, 命题 B.1] 可知，(3.2) 等价于 (2.5) 中的典范变换 κ 相对于 Λ_{Φ_0} 具有严格正性，因此

$$\frac{1}{i}\Big(\sigma(\kappa(\rho), \iota_{\Phi_0}\kappa(\rho)) - \sigma(\rho, \iota_{\Phi_0}(\rho))\Big) > 0, \quad 0 \neq \rho \in \mathbf{C}^{2n}. \tag{3.3}$$

应用 [5, 命题 3.3] 可知，算子 Top(e^q) 在 $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$ 上是紧的，事实上属于迹类，并且具有快速衰减的奇异值。

在证明 Weyl 符号在无穷远处消失是 Top(e^q) 紧性的必要条件时，我们也可以等价地证明 (2.5) 中的典范变换 κ 具有严格正性，并且按照第 2 节中的论证，我们可以先化归到 Φ_0 的多调和部分消失的情形。接下来按照第 2 节中的方法，我们将考察紧算子 Top(e^q) 在相干态空间k_w, $w \in$$\mathbf{C}^n$上的作用，该作用由 (2.25) 给出。首先作如下众所周知的观察，见 [1]。

引理 3.1 我们有 $k_w \to 0$ 在 $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$中弱收敛，其中 $|w| \to \infty$。

证明： 存在某个常数 $C \neq 0$，使得

$$(k_w, k_z)_{H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)} = C\, e^{2\Psi_0(z,\overline{w})-\Phi_0(z)-\Phi_0(w)}, \quad w, z \in \mathbf{C}^n, \tag{3.4}$$

因此，根据 (2.24)，我们得到 $(k_w, k_z)_{H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)} \to 0$ 当 $|w| \to \infty$ 时。对 k_z 取线性组合可得

$$(k_w, g)_{H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)} \to 0, \tag{3.5}$$

当 $|w| \to \infty$ 对 $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$ 的稠密子空间中的所有 g 均成立，这便推出了结论。□

由引理 3.1 及 Top(e^q) 的紧性可知，Top$(e^q)k_w \to 0$ 属于 $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$，当 $|w| \to \infty$ 时；再利用 (2.45)、(2.43)，得到

$$2\mathrm{Re}\, f(x, \overline{w}) < \Phi_0(x) + \Phi_0(w), \quad (0,0) \neq (x, w) \in \mathbf{C}^n_x \times \mathbf{C}^n_w. \tag{3.6}$$

由 (3.6)、命题 2.3 以及对命题 3.2] 的直接修改可知，(2.5) 中的典范变换 κ 相对于 Λ_{Φ_0} 具有严格正性。定理 1.2 的证明至此完成。

注。请注意，命题 3.2] 仅涉及正典范变换，并未明确讨论严格正性问题。因此，上述论证采用的是严格正性情形下命题 3.2] 的自然类比，由此可得，只要严格不等式 (3.6) 成立，(2.49) 中的典范变换 $\tilde{\kappa}$ 相对于 Λ_{Φ_0} 就具有严格正性。通过考察命题 3.2], 的证明，并借助严格正性情形下定理 2.1] 的自然类比，可以得到严格正性情形下命题 3.2] 的这一类比的证明——另见命题 1.2.8], ，其中明确陈述了这一结果，它给出了严格正的拉格朗日平面的刻画。

4 一个具体例子

本节旨在讨论 Bargmann $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$ 空间上某一类具体的亚纯托普利兹算子的有界性和紧性，并以模型权函数 Φ_0 为例说明定理 1.1 和定理 1.2 在此情形下的结论。本节始终假设

$$\Phi_0(x) = \frac{|x|^2}{4}, \quad x \in \mathbf{C}^n, \tag{4.1}$$

因此，极化由下式给出

$$\Psi_0(x, y) = \frac{1}{4} x \cdot y, \quad x, y \in \mathbf{C}^n. \tag{4.2}$$

设 $\lambda \in \mathbf{C}$，令 A 为一个复对称 $n \times n$ 矩阵，并设

$$q(x) = \lambda |x|^2 + A\overline{x} \cdot \overline{x}, \quad x \in \mathbf{C}^n. \tag{4.3}$$

我们假设

$$\operatorname{Re} \lambda + ||\, A \,|| < \frac{1}{4}, \tag{4.4}$$

其中，$||\, A \,||$ 是 A 的欧几里得算子范数：$\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$。特别地，由此可知 (1.8) 成立，因此托普利兹算子 Top(e^q) 在 $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$ 上稠密定义。假设 (1.9) 也成立。这里我们旨在通过用参数 λ 和 $||\, A \,||$刻画 Top(e^q) 的有界性与紧性，来阐释定理 1.1 和定理 1.2。

定理 4.1 设 $\Phi_0(x) = \dfrac{|x|^2}{4}$, $x \in \mathbf{C}^n$。设 $\lambda \in \mathbf{C}$，且 A 是一个满足 $\operatorname{Re} \lambda + ||\, A \,|| < \dfrac{1}{4}$ 的 $n \times n$ 复对称矩阵。令 $q(x) = \lambda |x|^2 + A\overline{x} \cdot \overline{x}$, $x \in \mathbf{C}^n$。托普利兹算子

$$\operatorname{Top}(e^q) : H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n) \to H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$$

有界，当且仅当

$$4||\, A \,|| \le \frac{1 - |\gamma|^2}{|\gamma|^2}, \quad \gamma = \frac{1}{1 - 2\lambda}. \tag{4.5}$$

此外，当且仅当式 *(4.5)* 中的不等式为严格不等式时，$\operatorname{Top}(e^q)$ 在 $H_{\Phi_0}(\mathbf{C}^n)$ 上是紧算子。

证明： 我们首先讨论有界性问题。根据定理 1.1，只需证明当且仅当式 (4.5) 的条件成立时，算子 Top(e^q) 的韦尔符号沿着 Λ_{Φ_0}有界。这里，与其通过计算适当的高斯积分来求出 Top(e^q) 的韦尔符号（参见式 (1.7)），不如直接证明该复线性正则变换

$$\kappa : \left(y, -F'_y(x, y, \theta)\right) \mapsto \left(x, F'_x(x, y, \theta)\right), \quad F'_\theta(x, y, \theta) = 0, \tag{4.6}$$

其中

$$F(x, y, \theta) = \frac{2}{i}\left(\Psi_0(x, \theta) - \Psi_0(y, \theta)\right) + \frac{1}{i} Q(y, \theta) = \frac{1}{i}\left(\frac{(x - y) \cdot \theta}{2} + \lambda y \cdot \theta + A\theta \cdot \theta\right), \tag{4.7}$$

相对于 Λ_{Φ_0} 是正的。

式 (4.7) 中非退化相位函数 $F(x, y, \theta)$ 的临界流形为 $F'_\theta(x, y, \theta) = 0 \iff x = (1 - 2\lambda) y - 4A\theta$，利用 (4.6)、(4.7) 进行简单计算可得典范变换 κ 为

$$\kappa : \mathbf{C}^{2n} \ni (y, \eta) \mapsto \left((1 - 2\lambda)y - \frac{8iA\eta}{1 - 2\lambda}, \frac{\eta}{1 - 2\lambda}\right) = \left(\frac{y}{\gamma} - 8i\gamma A\eta, \gamma\eta\right) \in \mathbf{C}^{2n}. \tag{4.8}$$

由 [5, 方程 (2.4)] 可知，固定Λ_{Φ_0}的反线性对合 $\iota_{\Phi_0}:\mathbf{C}^{2n}\to\mathbf{C}^{2n}$ 由下式给出

$$\iota_{\Phi_0}:(y,\eta)\mapsto\left(\frac{2\overline{\eta}}{i},\frac{\overline{y}}{2i}\right), \tag{4.9}$$

因此，我们有，

$$\frac{1}{i}\sigma\left((y,\eta),\iota_{\Phi_0}(y,\eta)\right)=\frac{1}{i}\sigma\left((y,\eta),\left(\frac{2\overline{\eta}}{i},\frac{\overline{y}}{2i}\right)\right)=\frac{1}{2}\left|y\right|^2-2\left|\eta\right|^2. \tag{4.10}$$

回顾（2.6），我们得出，（4.6）中的典范变换 κ 相对于 Λ_{Φ_0} 具有正性，当且仅当

$$\left|\frac{y}{\gamma}-8i\gamma A\eta\right|^2-\left|y\right|^2+4\left(1-\left|\gamma\right|^2\right)\left|\eta\right|^2\geq 0,\quad (y,\eta)\in\mathbf{C}^{2n}, \tag{4.11}$$

换句话说，

$$\left(\frac{1-\left|\gamma\right|^2}{\left|\gamma\right|^2}\right)\left|y\right|^2+16\mathrm{Re}\left(i\frac{\overline{\gamma}}{\gamma}\overline{A\eta}\cdot y\right)+64\left|\gamma\right|^2\left|A\eta\right|^2+4\left(1-\left|\gamma\right|^2\right)\left|\eta\right|^2\geq 0,\quad (y,\eta)\in\mathbf{C}^{2n}. \tag{4.12}$$

现在可以直接验证，（4.12）的正性由（4.5）推出；在此过程中，我们可以假设矩阵 A 非零，因此 $|\gamma|<1$。（4.12）因此可以等价地改写如下，

$$\left|y\right|^2+2\mathrm{Re}\left(i\overline{a}\,\overline{A\eta}\cdot y\right)+b\left|A\eta\right|^2+c\left|\eta\right|^2\geq 0,\quad (y,\eta)\in\mathbf{C}^{2n}, \tag{4.13}$$

换句话说，

$$\left|y-iaA\eta\right|^2+\left(b-\left|a\right|^2\right)\left|A\eta\right|^2+c\left|\eta\right|^2\geq 0,\quad (y,\eta)\in\mathbf{C}^{2n}. \tag{4.14}$$

Here

$$a=\frac{8\left|\gamma\right|^2}{1-\left|\gamma\right|^2}\frac{\gamma}{\overline{\gamma}},\quad b=\frac{64\left|\gamma\right|^4}{1-\left|\gamma\right|^2}>0,\quad c=4\left|\gamma\right|^2>0. \tag{4.15}$$

现在，（4.14）成立当且仅当

$$c\left|\eta\right|^2\geq\left(\left|a\right|^2-b\right)\left|A\eta\right|^2,\quad \eta\in\mathbf{C}^n, \tag{4.16}$$

并注意到，根据（4.15），

$$\left|a\right|^2-b=\frac{64\left|\gamma\right|^6}{\left(1-\left|\gamma\right|^2\right)^2},$$

由此我们立即得出，(4.16) 可由 (4.5) 推出。类似的论证表明，条件 (4.5) 对于典范变换κ 相对于 Λ_{Φ_0} 的正性也是必要的，因此，当且仅当 (4.5) 成立时，算子 Top(e^q) 的韦尔符号有界。类似地，Top(e^q) 的紧性也可用相同方式刻画，因为它等价于典范变换κ 相对于 Λ_{Φ_0}的严格正性。□

参考文献

[1] W. Bauer、L. A. Coburn 和 J. Isralowitz，《热流、有界平均振荡与托普利兹算子的紧性》，《函数分析杂志》**259** (2010)，57—78。[2] C. A. Berger 和 L. A. Coburn，《热流与贝雷津-托普利兹估计》，《美国数学杂志》**116** (1994)，563—590。[3] E. Caliceti、S. Graffi、M. Hitrik 和 J. Sjöstrand，《具有实谱且相似于自伴算子的二次 PT 对称算子》，《物理学杂志A》，2012。[4] L. A. Coburn，《福克空间、海森堡群、热流与托普利兹算子》，载于《解析算子理论手册》第1章（第1–15页），朱克和主编，CRC出版社，2019。[5] L. Coburn、M. Hitrik 和 J. Sjöstrand，《正性、复傅里叶积分算子与托普利兹算子》，《纯粹与应用分析》**1** (2019)，327—357。[6] L. Coburn、M. Hitrik、J. Sjöstrand 和 F. White，《韦尔符号与托普利兹算子的有界性》，《数学研究快报》**28** (2021)，681–696。[7] M. Hitrik、R. Lascar、J. Sjöstrand 和 M. Zerzeri，《复域中的半经典盖沃雷算子》，《傅里叶研究所年刊》，即将发表。[8] M. Hitrik 和 J. Sjöstrand，《解析微局部分析两篇短课程》，载于《代数与解析微局部分析》，施普林格数学与统计学会议论文集**269** (2018)，483–540。[9] L. Hörmander，《傅里叶积分算子》I，《数学学报》**127** (1971)，79—183。[10] J. Sjöstrand，《与全局I-拉格朗日流形相关的函数空间》，载于《微分方程解的结构》，片田/京都，1995，世界科学出版社，新泽西州里弗埃奇（1996）。[11] J. Sjöstrand 和 M. Zworski，《高级谱问题的初等线性代数》，《傅里叶研究所年刊》**57** (2007)，2095—2141。[12] M. Zworski，《半经典分析》，美国数学学会，2012。