利用闵可夫斯基等折射率时空晶体复制物理运动

Filipa R. Prudêncio[1], [2*]和 Mário G. Silveirinha[1]

[1]里斯本大学 – 高级技术学院和电信研究所，Avenida Rovisco Pais 1，1049-001 里斯本，葡萄牙

[2]里斯本大学学院（ISCTE-IUL），Avenida das Forças Armadas 376，1600-077 里斯本，葡萄牙

摘要

本文展示了具有行波调制的等折射率时空晶体可以严格模拟运动材料系统的响应。一般的时空晶体在共动参考系中具有双各向异性耦合，而等折射率晶体的响应与观察者无关，因此其本构关系是无双各向异性的各向同性本构关系。我们展示了如何利用这一特性，在实验室参考系中计算等折射率时空晶体的能带图，并研究合成菲涅耳拖曳。此外，我们还讨论了在均匀化时空晶体时采用 Galilean 变换或洛伦兹变换的影响，并指出有效响应与所采用的变换无关。

[*] 通讯作者：filipa.prudencio@lx.it.pt

I. 引言

近年来，时变材料响应为超材料和其他光学平台带来了许多有趣的机遇 [1-15]。时间调制材料可用于设计无磁非互易系统，例如单向波导和隔离器 [4, 5, 6, 9]。时间调制系统中的波现象可能非常丰富且独特 [1-15]。

某一类时空晶体因其建模和系统设计相对简单而备受关注：“行波”时空晶体[7-8, 16-22]。在行波晶体中，材料参数（例如介电常数）随空间和时间变化，其形式为 $(x,t)=(x-vt)$，其中 x 是空间中的任意一点，v 是调制速度。值得注意的是，在长波长范围内，材料参数的行波调制可能引发合成菲涅耳拖曳，使得在时空晶体中传播的波被拖向空间中的某个优选方向，即与 v [19]平行或反平行的方向。有趣的是，这些效应可以通过均匀化理论方便地加以描述[18, 20, 21]。具体而言，由层状介质构成的行波晶体在长波长极限下表现为双各向异性非互易材料。在最简单的情形下，晶体由简单的各向同性材料构成，其磁电耦合张量是反对称的，对应于标准的“运动-介质”耦合 [19，20，23]。值得注意的是，通过调控构成时空晶体的材料的光轴和各向异性，可以设计出几乎任意的（厄米）非互易耦合[21]。例如，文献[21] 表明，具有适当滑移旋转对称性的各向异性时空晶体在长波长极限下可能呈现各向同性的有效特勒根（轴子）响应。与运动介质耦合不同，特勒根响应由一个“标量”决定，这是对称磁电耦合

张量 [24-25]。特勒根材料具有非互易性，因此可能适用于实现单向器件 [26-27] 以及具有非平庸拓扑性质的系统 [28-29]。

虽然先前研究表明，具有行波调制的晶体能够有效模拟物理运动 [18-21]，但这种类比在许多方面并不完善，通常仅在长波长极限下成立。例如，等效运动介质的速度通常与晶体的调制速度不一致，更令人费解的是，这两个速度的方向可能相反 [19]。事实上，时空调制介电晶体并不等同于运动介电晶体。原因将在以下章节中详细阐述，但归根结底，这是因为在共动参考系中 –材料响应与时间无关–介电晶体的响应按定义不含磁电耦合，而时空晶体的响应则具有双各向异性。

尽管存在上一段所讨论的限制，我们在此表明，某一特定子类的时空晶体可以在任意工作频率下，精确地复现运动材料物体的响应。具体而言，我们表明，等折射率时空晶体——由折射率恒定的材料构成，——其电磁响应与处于适当“真空”背景中的运动介电材料晶体完全相同。尤其是，我们的分析揭示，等折射率晶体可能是利用时空调制模拟物理运动的理想平台。此外，我们指出，借助广义洛伦兹变换，可以相当直接地确定时空调制等折射率晶体的色散特性，并表征长波长极限下的合成菲涅耳拖曳。最后，我们讨论在分析时空晶体时采用相对论（洛伦兹）变换和非相对论（伽利略）变换所产生的影响。结果表明

尽管这两类变换在长波长极限下预测出相同的物理现象和相同的有效响应，但在等折射率晶体的情况下，使用洛伦兹变换能够大幅简化分析。

II. 等折射率时空晶体

A. 时空晶体的坐标变换与本构关系

我们关注具有行波调制且本构关系各向同性的时空晶体，

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t)=\varepsilon_0\varepsilon(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\mathbf{E}(\mathbf{r},t),\qquad \mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mu_0\mu(\mathbf{r}-\mathbf{v}t)\mathbf{H}(\mathbf{r},t). \tag{1}$$

不失一般性，我们假设调制速度沿x方向，，因此 表示一种函数，其形式为，仅由三个独立自由度决定。

显然，在以速度 相对于实验室参考系运动的惯性（共动）参考系中，材料响应与时间无关。本文通过如下形式的广义洛伦兹变换，将两个参考系的坐标联系起来：

$$x'=\gamma(x-vt),\qquad y'=y,\qquad z'=z \tag{2a}$$

$$t'=\gamma\left(t-x\frac{v}{c_0^2}\right), \tag{2b}$$

其中 为洛伦兹因子。这里， 是一个具有速度量纲的自由正参数。若将其取为真空光速，，则可恢复标准洛伦兹变换；而若 则得到简单的伽利略坐标变换。

只要电磁场按通常方式进行变换，麦克斯韦方程组的结构在任意广义洛伦兹变换下都保持不变 [23,

30]:

$$\mathbf{E}'_{\parallel}=\mathbf{E}_{\parallel},\qquad \mathbf{B}'_{\parallel}=\mathbf{B}_{\parallel}, \tag{3a}$$

$$\mathbf{E}'_{\perp}=\gamma\left(\mathbf{E}_{\perp}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right),\qquad \mathbf{B}'_{\perp}=\gamma\left(\mathbf{B}_{\perp}-\frac{1}{c_0^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right), \tag{3b}$$

and

$$\mathbf{D}'_{\parallel}=\mathbf{D}_{\parallel},\qquad \mathbf{H}'_{\parallel}=\mathbf{H}_{\parallel}, \tag{4a}$$

$$\mathbf{D}'_{\perp}=\gamma\left(\mathbf{D}_{\perp}+\frac{1}{c_0^2}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right),\qquad \mathbf{H}'_{\perp}=\gamma\left(\mathbf{H}_{\perp}-\mathbf{v}\times\mathbf{D}\right). \tag{4b}$$

此处 ∥ 和 ⊥ 分别表示平行于和垂直于速度的场分量。显然，当 时，带撇场具有很强的物理意义，因为在这种情况下，它们与相关惯性参考系中测得的物理场重合。当 时，应将带撇场简单地视为辅助场，用于简化时空晶体中波传播问题的数学处理。

如先前研究所示 [20, 21], ，广义洛伦兹变换得出带撇场的以下本构关系（与式 (1) 比较）：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{D}'\\ \mathbf{B}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_0\overline{\varepsilon}' & \frac{1}{c}\overline{\xi}'\\ \frac{1}{c}\overline{\zeta}' & \mu_0\overline{\mu}'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}'\\ \mathbf{H}'\end{pmatrix} \tag{5a}$$

其中，变换后的介电常数、磁导率和磁电张量满足:

$$\overline{\varepsilon}'=\varepsilon'_t\left(\mathbf{1}-\hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{\mathbf{x}}\right)+\varepsilon'\hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{\mathbf{x}},\qquad \varepsilon'_t=\varepsilon'\frac{1-\left(v/c_0\right)^2}{1-\left(v/v_{\mathrm{d}}\right)^2}, \tag{5b}$$

$$\overline{\mu}'=\mu'_t\left(\mathbf{1}-\hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{\mathbf{x}}\right)+\mu'\hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{\mathbf{x}},\qquad \mu'_t=\mu'\frac{1-\left(v/c_0\right)^2}{1-\left(v/v_{\mathrm{d}}\right)^2}, \tag{5c}$$

$$\overline{\xi}'=-\overline{\zeta}'=\frac{1-\left(c_0/v_{\mathrm{d}}\right)^2}{1-\left(v/v_{\mathrm{d}}\right)^2}\frac{c\mathbf{v}}{c_0^2}\times\mathbf{1}, \tag{5d}$$

并且 是相关介电材料在实验室参考系中的速度。在前述公式中， 表示 和 ，其中右侧的函数定义如式（1）所示。因此，在新坐标中，材料参数与时间无关。对于有限的，-因子大于 1，因此，由于 Lorentz-斐兹杰拉德长度收缩，实验室参考系中沿运动方向的所有长度均短于共动参考系（“静止”参考系）中的长度[30]。因此，对于有限的，实验室参考系中时空晶体的几何是共动参考系中几何的收缩版本。

由式（5）可知，共动参考系中的本构关系具有双各向异性耦合的特征，由张量描述。正如下一小节将进一步讨论的那样，这一特性与运动的各向同性介电材料的响应相悖。事实上，运动介电材料在其静止参考系（共动参考系）中的响应不含磁电耦合，而在任何其他惯性参考系中则呈现双各向异性响应。

B. 运动介电晶体

将时空晶体的响应与相应运动光子晶体的响应进行比较很有意义。为此，考虑某个惯性参考系中静止的、与时间无关的介电光子晶体。在此参考系（带撇坐标）中，介电光子晶体由标准本构关系表征：

$$\mathbf{D}'(\mathbf{r}',t')=\varepsilon_0\varepsilon'(x',y',z')\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t),\qquad \mathbf{B}'(\mathbf{r}',t')=\varepsilon_0\mu'(x',y',z')\mathbf{H}'(\mathbf{r}',t). \tag{6}$$

另一方面，在一个相对于静止参考系以速度 运动的（实验室）惯性参考系中，变换后的场之间的关系为 [23]（这里我们使用标准洛伦兹变换，其中 ）：

$$\begin{pmatrix}\mathbf{D}\\ \mathbf{B}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varepsilon_0\bar{\varepsilon} & \frac{1}{c}\bar{\xi}\\ \frac{1}{c}\bar{\zeta} & \mu_0\bar{\mu}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\ \mathbf{H}\end{pmatrix} \tag{7a}$$

其中，相关张量现由下式给出：

$$\bar{\varepsilon}=\varepsilon_t\left(\mathbf{1}-\hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{\mathbf{x}}\right)+\varepsilon\,\hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{\mathbf{x}}\,,\qquad \varepsilon_t=\varepsilon\,\frac{1-\left(v/c\right)^2}{1-\left(v/v_{\mathrm{d}}\right)^2}\,, \tag{7b}$$

$$\bar{\mu}=\mu_t\left(\mathbf{1}-\hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{\mathbf{x}}\right)+\mu\,\hat{\mathbf{x}}\otimes\hat{\mathbf{x}}\,,\qquad \mu_t=\mu\,\frac{1-\left(v/c\right)^2}{1-\left(v/v_{\mathrm{d}}\right)^2}\,, \tag{7c}$$

$$\bar{\xi}=-\bar{\zeta}=-\frac{1-\left(c/v_{\mathrm{d}}\right)^2}{1-\left(v/v_{\mathrm{d}}\right)^2}\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{1}\,. \tag{7d}$$

其中 。参数 与以下参数相关联 和 ，因此实验室参考系中 的响应随时间变化，并且还具有一种“行进-波”结构。比较公式（1）和（7）以及公式（5）和（6），运动介电晶体与时空调制介电晶体之间的差异便显而易见：在这两个问题中，共动参考系（本构关系均与时间无关）和实验室参考系（本构关系随时间变化）中的响应恰好互换。具体而言，运动光子晶体在实验室参考系中呈双各向异性，而相应的时空晶体在实验室参考系中则具有纯粹的各向同性响应。显然，从电磁角度看，这两类晶体通常截然不同。

C. 等折射率晶体与闵可夫斯基各向同性材料

现在来考虑一种等折射晶体，其中 与空间无关。换言之，晶体中所有材料里的光速都相同。这类晶体曾在参考文献 [31] 中从不同角度进行过讨论。具体而言，作者分析了此类晶体中光波在以下两者之间的转变附近所具有的特殊色散特性

亚光速与超光速状态。此外，文献中还曾在不同语境下讨论过时间无关的等折射率系统 [32-34]。

首先考虑理想情形，此时材料中的光速相同，等于真空光速。需要注意的是，在现实材料中，由于光与物质相互作用会使波传播相较于真空情形减慢。目前我们暂且不考虑这一限制；下文将放宽这一要求。

利用和梯准洛伦兹变换（）以及方程（1）、（5）、（6）和（7），很容易得出，对于时空晶体问题和运动光子晶体问题，共动参考系中的本构关系均为以下形式：和。此外，当本构关系在洛伦兹变换下保持不变时，即它们与参考系无关。在任意惯性参考系中，例如实验室参考系，它们的形式为：，。请注意，在实验室参考系中，由于材料界面在运动，本构关系随时间变化。

$$\mathbf{D}'\left(\mathbf{r}',t'\right)=\varepsilon_0\varepsilon'\left(x',y',z'\right)\mathbf{E}'\left(\mathbf{r}',t\right)\qquad \mathbf{B}'\left(\mathbf{r}',t'\right)=\varepsilon_0\mu'\left(x',y',z'\right)\mathbf{H}'\left(\mathbf{r}',t\right)$$

注意到标准洛伦兹变换保持电磁真空的本构关系不变，便能更好地理解上述结果；也就是说，真空是洛伦兹变换的一个“不动点”。此前已有研究指出，[35]不动点还包括一类更广泛的介质，即所有折射率与真空相同的各向同性“材料”。这类材料称为闵可夫斯基各向同性介质。

上述讨论表明，由闵可夫斯基各向同性介质（）构成的任意晶体，可由与观察者无关的本构关系描述。此外，这也证明，假想的由闵可夫斯基

各向同性介质的电磁响应与相应时空调制晶体的响应完全等效。因此，闵可夫斯基各向同性时空晶体可以在任意频率下完美模拟某些物质体的物理运动。这是本文的第一个关键结果。

如前所述，要实现具有 的闵可夫斯基时空晶体确实颇具挑战。不过，可以放宽这一限制，使其变为 其中现在是某个任意速度（如有需要，可远小于真空光速）。尽管这种具有 的时空晶体的响应与运动介质的响应并不严格等同，但实际上这两种数学结构相当相似。事实上，显而易见，具有 的等折射率时空晶体有效地模拟了一个虚构的“宇宙”，其中光速为 ，而非 。

c_0

事实上，根据式（5），由给定速度 表征的“不动点”是广义洛伦兹变换的。换言之，广义洛伦兹变换使我们能够切换到一组坐标，在这组坐标中，时空晶体的本构关系保持完全不变（即仍如式（1）所示，由标量介电常数和标量磁导率描述），但不随时间变化。因此，通用等折射率时空晶体的电动力学，完全由标准时不变光子晶体的电动力学通过广义洛伦兹变换决定。这是本文的第二个关键结果。

D. 色散图、广义多普勒变换与速度叠加

根据上一小节，等折射率时空晶体的电动力学可以在共动参考系中方便地研究，在该参考系中，其本构关系

材料是各向同性且不随时间变化的。请注意，即使对于三维晶体，这一结果也成立。

显然，共动参考系坐标中的电磁模式是布洛赫波，其时空变化形式为：。布洛赫波的色散关系可通过标准数值方法求得。应用逆广义洛伦兹变换，即可得到原始（未加撇）参考系中的模式。未加撇参考系中的场具有如下结构其中 是在三个空间坐标上周期变化的函数。实验室参考系中的色散关系可通过（广义）多普勒变换轻松确定[30]：

$$k_x = \gamma\left(k'_x + v\frac{\omega'}{c_0^2}\right), \qquad k_y = k'_y, \qquad k_z = k'_z. \tag{8a}$$

$$\omega = \gamma\left(\omega' + k'_x v\right). \tag{8b}$$

探讨共动参考系和实验室参考系中的波速之间的关系很有意思。为简单起见，我们将讨论限定在长波长极限下沿 *x* 方向传播的布洛赫模（即沿平行于) 的方向）。显然，由于共动参考系中的系统是常规互易光子晶体，沿 +*x* 和 –*x* 方向传播的波速互为相反数：。波速由斜率 在长波长极限下的取值决定。

实验室参考系中的波速（）c可以直接使用相对论速度叠加的（广义）公式确定[30]：

$$v_w^{\pm} = \frac{v_w'^{\pm} + v}{1 + v_w'^{\pm} v/c_0^2}. \tag{9}$$

显然，在亚光速区域（且），因此合成运动始终会产生“正向”的菲涅耳拖曳效应，使得实验室参考系中的波沿合成运动所确定的方向传播得更快（+x方向）。值得强调的是，与先前研究中考虑的一般情况不同，[19, 20],此处的菲涅耳拖曳效应由相对论加法公式决定，这是因为等折射率时空晶体与运动晶体之间存在严格的类比关系。

E. 数值示例

为说明前几小节中的观点，下面给出两个数值示例。在第一个示例中，共动参考系中的时空晶体由一个等折射率蜂窝阵列构成，该阵列由半径为 [图1a] 的介质圆柱组成。为简单起见，我们考虑闵可夫斯基各向同性晶体的情形，因此背景区域为空气，圆柱的介电常数为 ，磁导率为 ，并满足（数值模拟中取 ）。R'最近邻之间的距离为 。

ε'_A μ'_A $' = \sqrt{\varepsilon' \mu'} = 1n$

$\varepsilon' = 5 \quad \mu' = 1/\varepsilon',$

a'

我们考虑具有横向电（TE）偏振（ ）并沿 xoy 平面传播的波，E'_z 因此 。 共动参考系中的能带结构可通过求解久期方程得到：

$y' = \quad (\quad), \quad z \quad z E E x$

$$-\partial_{x'}\left(\frac{1}{\mu'(x',y')}\partial_{x'}E'_{z'}\right)-\partial_{y'}\left(\frac{1}{\mu'(x',y')}\partial_{y'}E'_{z'}\right)=\left(\frac{\omega'}{c}\right)^2\varepsilon'(x',y')\ E'_{z'}, \tag{10}$$

其中 是共动参考系中的空间坐标。布洛赫模通过平面波方法计算 [36]。

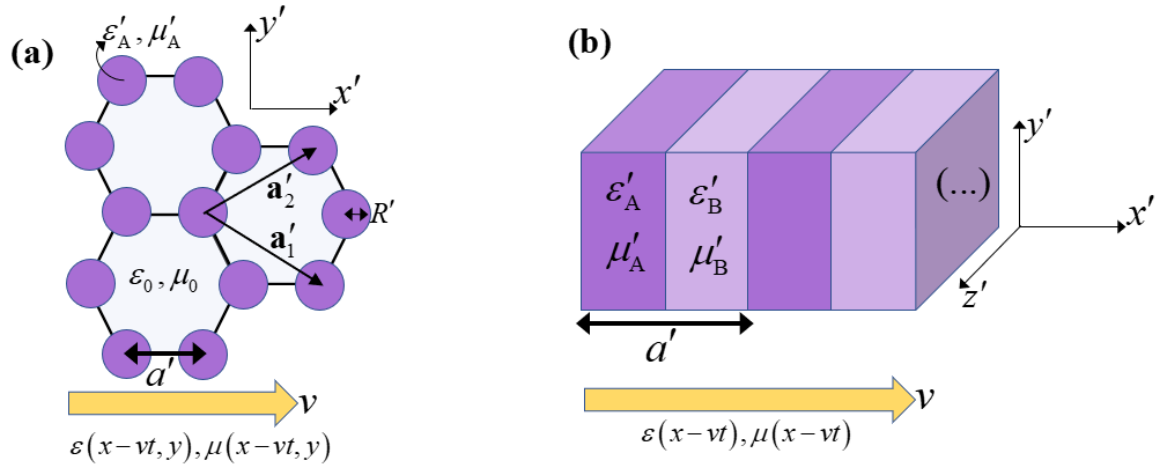

图1。具有行波调制的两个等折射率时空晶体的几何结构。调制速度为 。 箭头表示材料参数在实验室参考系中随时间的变化方式。 （a）由半径为 、介电常数和磁导率为 的介电散射体构成的蜂窝阵列的共动参考系几何结构，散射体嵌入空气中，其中 。 直接晶格原始矢量为和 ，其中 是最近邻之间的距离。 （b）由两个具有材料参数 和 ,的各向同性层形成的分层等折射率时空晶体，满足 。共动参考系中的晶格周期为 。

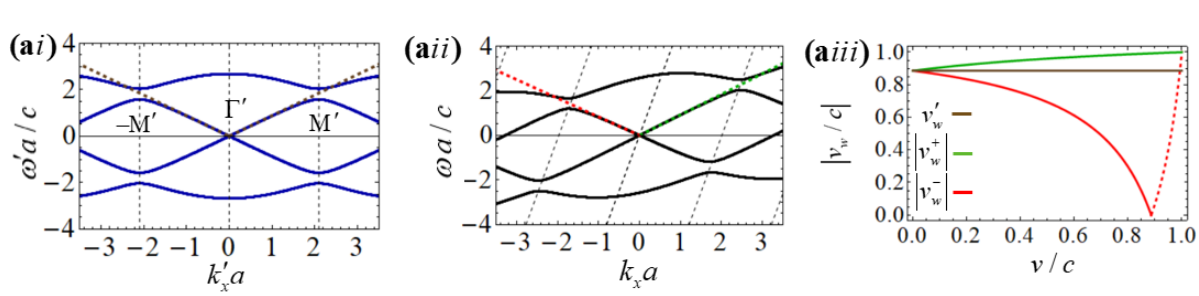

图2。（a）等折射率时空蜂窝晶体的精确色散图 [图1a] 对于调制速度 ，分别在（ai）共动参考系和（aii）实验室参考系中计算得到。（aiii）实验室参考系中的长波长极限波速 随调制速度 .水平线表示共动参考系中的波速 。在红色曲线的虚线部分， 为正，传播具有单向性。

数值计算得到的能带图如图2a所示i，参数为，调制速度为。需要注意的是，由于洛伦兹-菲茨杰拉德收缩，圆柱在实验室参考系坐标中的横截面呈椭圆形，而非圆形。此外，出于同样的原因，原始蜂窝晶格也略有收缩。为简单起见，我们仅关注-轴，以及布里渊区的线段 （对应图2ai中的竖直虚线）。这里， 是蜂窝阵列的标准高对称点。在长波长极限下，光子晶体色散关系可近似为图2ai中以黑色虚线绘出的两条直线，其斜率决定了沿 轴的-波速。如前所述，由于洛伦兹互易性，共动参考系中的两条斜率相同：。

实验室参考系中的能带图 [图2aii] 可借助相对论多普勒变换求得 [式（8）]。由于多普勒频移，实验室参考系中的能带结构相对于共动参考系发生了倾斜。合成运动产生了明显的谱不对称性，。特别是，存在合成菲涅耳拖曳，因此长波长极限下的波速遵循如下大小关系：。

图 2aiii 描绘了实验室参考系中的速度 随调制速度变化的情况。该图使用相对论速度叠加[公式（9）]得到。请注意，假设共动参考系中的晶体几何与调制速度无关。如图所示，随着调制速度增加，反向传播波的速度之间的不对称性变得更加明显。有趣的是，当时，反向传播波（）的速度恰好变为零。

此外，对于 两个波的速度符号 变得相同。因此，速度 标志着通常的双向传播区域（ 符号相反）与单向传播区域（均为正号）之间的转变，这与参考文献 [31]的发现一致。随着调制速度接近超光速阈值（ ），两者 趋近于 +c。

v_w^+ v_w^- v_w^+ v_w^-

$v \to c$ $v_w^{\pm}$

作为第二个示例，我们考虑一种一维光子晶体，它由周期为 在共动参考系中 [图1b]的等折射率介电层周期性堆叠而成。材料参数取为 和 ，使得折射率为 。共动参考系和实验室参考系中的能带图分别如图3ai和图3aii所示，对应的调制速度为和 。与前一个示例类似，由于合成运动，实验室参考系中的频谱对称性（ ）被打破。

a'

$\varepsilon' = 2$ $\mu' = 1/2,$ $\varepsilon' = 1/4$ $\mu' = 4,$

A B 1n

n′ = ′ =

= 0 1.

= 0 35.

() ( ) x x]

讨论闵可夫斯基时空晶体 [18, 20, 21] 的均匀化和长波长极限响应是有意义的。众所周知，对于层状结构，共动参考系中的有效响应可通过对材料参数进行简单的空间平均来求得。对于厚度相同的层，有效介电常数和磁导率为：

$$\varepsilon'_{\mathrm{ef,L}} = \frac{\varepsilon'_{\mathrm{A}} + \varepsilon'_{\mathrm{B}}}{2}, \qquad \mu'_{\mathrm{ef,L}} = \frac{\mu'_{\mathrm{A}} + \mu'_{\mathrm{B}}}{2}. \tag{11}$$

有效参数描述了晶体对沿运动方向传播的横波的响应。重要的是，尽管两种材料层具有相同的折射率（），有效介质的折射率通常不同：。这意味着有效介质并非洛伦兹变换的“不动点”，这与材料 A 和 B 不同。事实上，有效

A B 1n

n′ = ′ =

ef,L ef,L

$\sqrt{\varepsilon' \mu'} \neq 1$

利用代换，可以借助方程（7）轻松求得实验室参考系中的材料参数。对于偏振于*yoz*平面的波，其有效响应由下式确定：

$$\varepsilon_{\mathrm{ef}} = \varepsilon'_{\mathrm{ef,L}} \frac{1-(v/c_0)^2}{1-(v/v_{\mathrm{d,ef}})^2}, \qquad \mu_{\mathrm{ef}} = \mu'_{\mathrm{ef,L}} \frac{1-(v/c_0)^2}{1-(v/v_{\mathrm{d,ef}})^2}, \qquad \xi_{\mathrm{ef}} = \frac{1-(c_0/v_{\mathrm{d,ef}})^2}{1-(v/v_{\mathrm{d,ef}})^2} \frac{cv}{c_0^2}, \quad (12)$$

其中 参数 决定了有效磁电张量在实验室参考系中的形式。在前面的讨论中，隐含假设 ，但是上述公式对任意取值的 都成立。

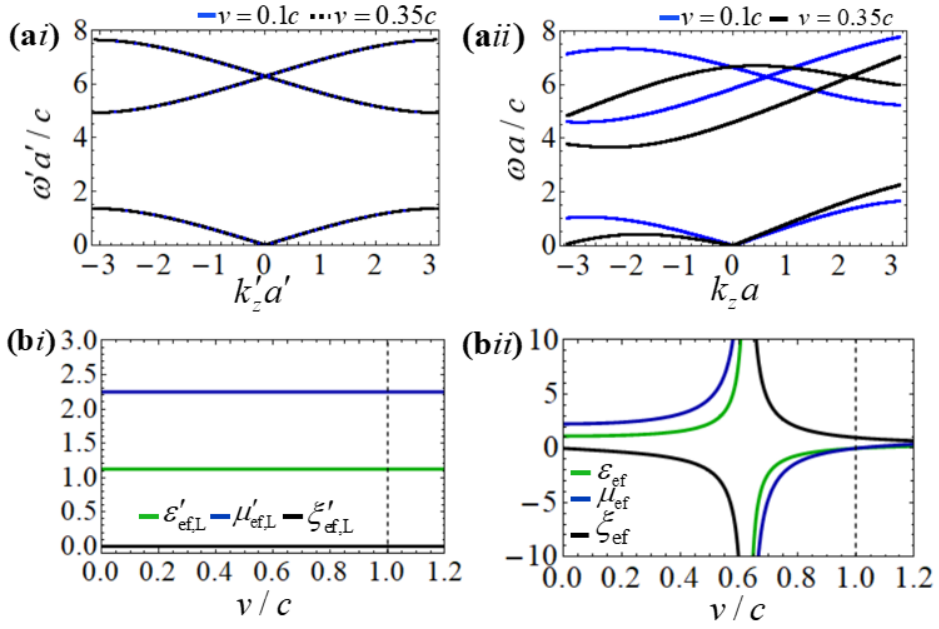

图3. **(a)** 由两个介电层构成的等折射率时空晶体的精确色散图 [图1b]，参数为 和，对于 调制速度 和 。**(a*i*)** 共动参考系色散图。**(a*ii*)** 实验室参考系色散图。**(b)** 有效参数随调制速度的变化。**(b*i*)** 在共动参考系中。**(b*ii*)** 在实验室参考系中。注意，共动参考系中的响应是各向同性的（）。竖直虚线标示亚光速与超光速状态之间的转变。

图3bi)和图3bii)展示了一维时空晶体在共动参考系和实验室参考系中的有效参数随调制速度变化的情况。同样，假设光子晶体在共动参考系中的几何不随v变化。如图3bii)所示，由于 ，实验室参考系中的有效参数取决于调制速度v。尤其是，磁电参数在 处发散并改变符号，这与公式（12）一致。有效介电常数和磁导率 表现出类似的行为，因此所有有效参数在亚光速范围内均出现共振。这种共振标志着双向传播与单向传播机制之间的转变，前文的第一个示例中已对此进行讨论。

$$\sqrt{\varepsilon' \mu^{ef,L,ef,L}} \neq 1 \qquad \xi_{ef}$$

$$= \quad < \quad {}^{d,ef}V\ V\ C$$

$$\varepsilon \quad \mu^{ef\ ef,}$$

需要强调的是，前面的讨论可以轻松推广到二维和三维等折射率时空晶体的均匀化。事实上，对于在共动参考系中建立的任何有效介质模型（例如，采用麦克斯韦-加内特公式等标准混合公式，或其他公式），都可以借助公式（12）轻松确定实验室参考系中的相应有效参数。

III. Galilean 变换与洛伦兹变换的比较

近期的研究采用 Galilean 坐标变换来研究时空晶体的响应，因此 和 ，例如，[20, 21]。Galilean 变换的关键性质是它保持麦克斯韦方程组的结构，因此在共动参考系坐标中有 ，，与实验室参考系中的麦克斯韦方程组类似，。共动参考系中的场由与时间无关的双各向异性本构关系联系起来[公式（5），其中]。

$$t' = -r\ r \qquad t\ t' =$$

$$E\ B \qquad {}_t\nabla' \times \quad ' = -\partial_t \quad ' \qquad H\ D \qquad {}_t\nabla' \times \quad ' = +\partial_t \quad '$$

$$B \qquad \nabla \times \quad = -\partial_t E \qquad D \qquad \nabla \times \quad = +\partial_t H$$

$$= \infty \qquad {}_0C$$

从计算角度来看，伽利略变换相当方便，因为它不会混合时间和空间坐标。特别是，问题的几何

由于不存在洛伦兹-斐兹杰拉德长度收缩，实验室参考系和共动参考系中的情况相同。此外，伽利略变换在超光速范围内尤为有用，因为此时洛伦兹变换失效，且 -因子变为纯虚数。显然，与伽利略变换相关的场 [由式 (3) 定义，其中] 并未被赋予直接的物理意义，而应简单地视为辅助场，用于求得实验室参考系中的物理场。 γ

0c
− ∞

更一般地，可以使用式 (2) 定义的任意一种洛伦兹变换来研究行波时空晶体的电动力学。虽然共动参考系中的场、本构关系、能带图等通常取决于所考虑的 ，但只要正确应用逆变换，实验室参考系中的相应量就与之无关。只有当。对于 的相对论洛伦兹变换，在等折射（闵可夫斯基）时空晶体的情况下尤其有用，因为它会导出简单且与观察者无关的各向同性本构关系；而伽利略变换则会产生双各向异性响应。

c_0 c_0

0c
c=

0
dC V=

通过伽利略变换进行的时空晶体均匀化（如文献 [20, 21], 所述）是否必然与通过相对论变换实现的均匀化一致，这一点并不那么显而易见。本节余下部分旨在说明，这两种变换确实会在实验室参考系中得出相同的有效参数。以下分析并不限于等折射材料。

均匀化方法遵循与第 II.E 节相同的步骤（更多详情请参见参考文献 [20,21] ）。首先，使用 Galilean 变换或洛伦兹变换切换到一个共动参考系，在该参考系中材料参数不随时间变化。对于层状晶体

共动参考系中的有效参数由共动参考系参数的空间平均确定 [20, 21]。最后，通过逆伽利略变换或逆洛伦兹变换确定实验室参考系中的响应。与第二节不同，下文中晶体的几何结构固定在实验室参考系中，而非洛伦兹共动参考系中。因此，材料层的厚度现在固定在实验室参考系中。

将上述过程应用于由厚度相同的介电材料板 A 和 B 构成的双层晶体[图1b], 可得, 经过洛伦兹变换（式 (5)，其中），共动参考系中的有效参数为:

$$\varepsilon'_{\mathrm{ef,L}}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{A}}}{1-n_{\mathrm{A}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}+\frac{\varepsilon_{\mathrm{B}}}{1-n_{\mathrm{B}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}\right),\quad \mu'_{\mathrm{ef,L}}=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{\mathrm{A}}}{1-n_{\mathrm{A}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}+\frac{\mu_{\mathrm{B}}}{1-n_{\mathrm{B}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}\right) \tag{13a}$$

$$\xi'_{\mathrm{ef,L}}=\frac{1}{2}\frac{v}{c}\left(\frac{n_{\mathrm{A}}^2-1}{1-n_{\mathrm{A}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}+\frac{n_{\mathrm{B}}^2-1}{1-n_{\mathrm{B}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}\right), \tag{13b}$$

其中 分别是洛伦兹共动参考系中的有效介电常数和磁导率， 是运动介质参数，满足, (i=A、 B) 分别是 A 层和 B 层的折射率。值得注意的是，式 (13) 中的有效参数不依赖于洛伦兹因子。当时, 上述公式简化为式 (11)，且响应在共动参考系中变为纯各向同性（）。

另一方面，使用伽利略变换（式（5），其中 ）可以得到相应的有效参数为:

$$\varepsilon'_{\mathrm{ef,G}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{\mathrm{A}}}{1-n_{\mathrm{A}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}+\frac{\varepsilon_{\mathrm{B}}}{1-n_{\mathrm{B}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}\right),\qquad \mu'_{\mathrm{ef,G}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\mu_{\mathrm{A}}}{1-n_{\mathrm{A}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}+\frac{\mu_{\mathrm{B}}}{1-n_{\mathrm{B}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}\right),\tag{14a}$$

$$\xi'_{\mathrm{ef,G}}=\frac{1}{2}\frac{v}{c}\left(\frac{n_{\mathrm{A}}^2}{1-n_{\mathrm{A}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}+\frac{n_{\mathrm{B}}^2}{1-n_{\mathrm{B}}^2\dfrac{v^2}{c^2}}\right).\tag{14b}$$

显然，两个共动参考系中的有效参数不同。值得注意的是，洛伦兹共动参考系中的有效介电常数和磁导率可以用伽利略共动参考系中的参数表示为和 。值得注意的是，在伽利略框架中，磁电耦合参数 对于等折射率晶体并不为零。

$$\varepsilon'=\left(1-\frac{}{2}\right)\varepsilon'_{\mathrm{ef,L}}$$

$$\mu'=\left(1-\frac{}{2}\right)\mu'_{\mathrm{ef,L}}$$

利用式（13）并结合 或利用式（14）并结合，可以通过式（3b）和（4b）计算实验室参考系中的有效参数。重要的是，实验室参考系中的有效参数实际上与无关，即无论采用 Lorentz 变换还是伽利略变换，它们都相互独立。可明确写为：

$$\varepsilon_{\mathrm{ef}}=\frac{\varepsilon_{\mathrm{A}}+\varepsilon_{\mathrm{B}}-\varepsilon_{\mathrm{A}}\varepsilon_{\mathrm{B}}\left(\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}\right)\dfrac{v^2}{c^2}}{2-\dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{\mathrm{A}}+\varepsilon_{\mathrm{B}}\right)\left(\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}\right)\dfrac{v^2}{c^2}},\quad \mu_{\mathrm{ef}}=\frac{\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}-\mu_{\mathrm{A}}\mu_{\mathrm{B}}\left(\varepsilon_{\mathrm{A}}+\varepsilon_{\mathrm{B}}\right)\dfrac{v^2}{c^2}}{2-\dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{\mathrm{A}}+\varepsilon_{\mathrm{B}}\right)\left(\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}\right)\dfrac{v^2}{c^2}},\tag{15a}$$

$$\xi_{\mathrm{ef}}=\frac{v}{2c}\frac{\left(\varepsilon_{\mathrm{A}}-\varepsilon_{\mathrm{B}}\right)\left(\mu_{\mathrm{A}}-\mu_{\mathrm{B}}\right)}{2-\dfrac{1}{2}\left(\varepsilon_{\mathrm{A}}+\varepsilon_{\mathrm{B}}\right)\left(\mu_{\mathrm{A}}+\mu_{\mathrm{B}}\right)\dfrac{v^2}{c^2}}.\tag{15b}$$

对于等折射率系统，，上述公式化简为公式（12）。

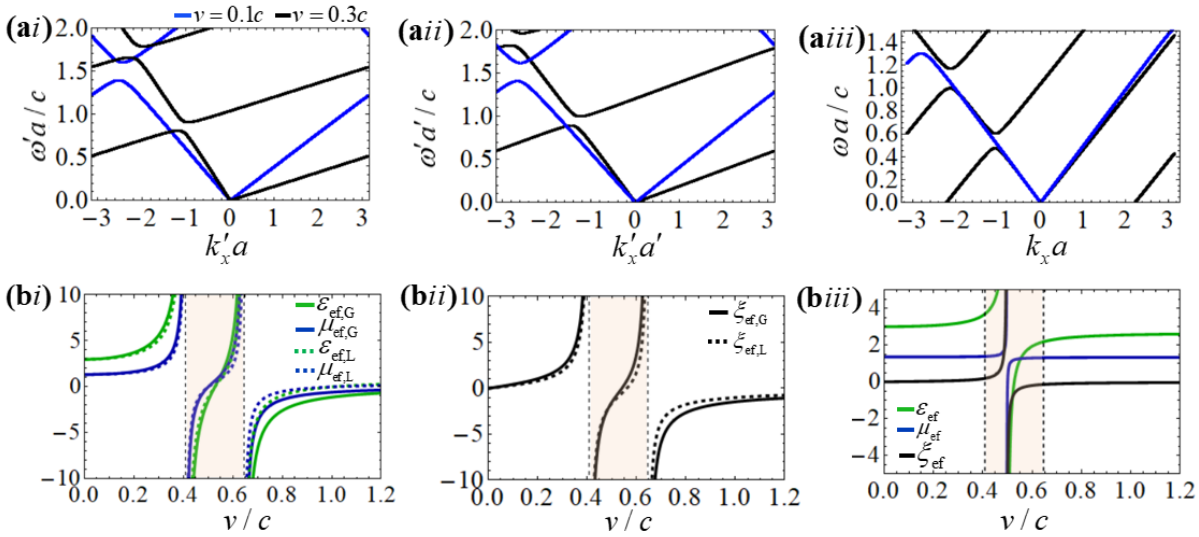

图4。（a）由参数为 和 的两个各向同性介电层构成的时空晶体 [图1b] 的色散图。色散图分别针对调制速度为 （蓝线）和 （黑线）时，在（ai）Galilean 共动参考系、（aii）Lorentz 共动参考系以及（aiii）实验室参考系中计算得到。（b）时空晶体的有效参数随调制速度的变化关系。（bi）Galilean 和 Lorentz 共动参考系中的介电常数与磁导率；（bii）Galilean 和 Lorentz 共动参考系中的磁电耦合参数；（biii）实验室参考系中的有效参数。图中的阴影区域表示超光速区域（ ），该区域分隔了亚光速与超光速状态。

为说明上述讨论，我们在图4a中展示了实验室参考系以及 Galilean 和 Lorentz 共动参考系中的双层时空晶体色散图，其调制速度为 和 。色散图使用附录中的形式体系计算得出。如图所示，洛伦兹和 Galilean 共动参考系中的色散图并不重合。然而，对图应用反向多普勒频移后，结果便保持一致，因此实验室参考系中的色散关系与变换无关，正如预期。

图4b表示使用方程（13）和（14）计算得到的同一时空晶体的有效参数随调制速度变化的情况。对于较大的调制速度，Galilean和Lorentz共动参考系中的参数存在明显差异（见图4bi和图4bii）。在这两个共动参考系中，有效参数在光速过渡处发散和。相比之下，在实验室参考系中，有效参数在超光速区域（ ）内发散。

A/v c B/v c

n= n=

A B //c n v c n<

IV. 结论

总之，我们提出了闵可夫斯基等折射率时空晶体的概念，将其视为由与观察者无关的本构关系描述的时变系统。研究表明，理想的闵可夫斯基晶体在 条件下，对于任意工作频率，都能精确复现运动介电光子晶体的响应。具体而言，闵可夫斯基晶体的能带图可通过标准数值方法和相对论多普勒变换计算。此外，合成菲涅耳拖曳可用相对论加法公式进行严格表征。更一般地，研究表明，较为实用的等折射率时空晶体在条件下，其数学结构与闵可夫斯基晶体颇为相似。因此，这类系统基本上可以用相同的数学工具进行分析和研究。我们将该理论应用于一维和二维等折射率晶体，表明它能大幅简化对这类系统物理响应的分析与理解。此外，我们还讨论了在分析行波时空晶体时采用相对论和非相对论坐标变换的影响。研究指出，相对论变换和非相对论变换对实验室参考系中的能带图和有效响应给出的结果完全相同。我们认为，等折射率时空晶体为在宽广的频率范围内模拟物理运动提供了理想平台。

d 0v c

c= <

致谢：本工作部分受到IET通过A F Harvey工程研究奖、Simons基金会，以及科学技术基金会和电信研究所通过项目UID/EEA/50008/2020的资助。

Appe附录：Lorentz 和 Galilean 共动参考系中的能带结构

在本附录中，我们简要说明如何在 Galilean 和 Lorentz 共动参考系中计算一般分层时空晶体的能带结构。我们考虑沿-方向传播的横向电磁波。根据参考文献 [21]，的麦克斯韦方程组在 Galilean 或 Lorentz 共动参考系中可改写为4×4矩阵形式：

x'

$$\frac{d}{dx'}\begin{pmatrix}\mathbf{E}'_{\perp}\\ \mathbf{H}'_{\perp}\end{pmatrix}=-i\omega'\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{M}'_{\perp}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{E}'_{\perp}\\ \mathbf{H}'_{\perp}\end{pmatrix} \tag{A1}$$

with

$$\boldsymbol{\sigma}=\begin{pmatrix}\mathbf{0}_{2\times2} & \mathbf{J}\\ -\mathbf{J} & \mathbf{0}_{2\times2}\end{pmatrix},\qquad \text{and}\qquad \mathbf{J}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}. \tag{A2}$$

其中， 和 分别是相关共动参考系中的横向场。共动参考系中的带撇材料矩阵 定义为 [21]

$\mathbf{M}'_{\perp}$

$$\mathbf{M}'_{\perp}=\left[\frac{1}{c_0^2}v\boldsymbol{\sigma}+\mathbf{M}_{\perp}\right]\cdot\left[\mathbf{1}_{4\times4}+v\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{M}_{\perp}\right]^{-1}, \tag{A3a}$$

其中， 或分别对应 Lorentz 情形和 Galilean 情形。在上述表达式中，是实验室参考系中的横向材料矩阵，其定义基于介电常数和磁导率[21]：

$$\mathbf{M}_{\perp}=\begin{pmatrix}\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{1}_{2\times2} & \mathbf{0}_{2\times2}\\ \mathbf{0}_{2\times2} & \mu_0\mu\mathbf{1}_{2\times2}\end{pmatrix}. \tag{A3b}$$

根据参考文献 [21]，，对于由厚度相同的 *A* 层和 *B* 两相晶体（厚度为晶格常数的一半，），共动参考系中的色散关系 由下式确定

/ 相对于

$$\det\left(\exp\left(-i\frac{\omega' a'}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{M}'_{\perp,\mathrm{B}}\right)\cdot\exp\left(-i\frac{\omega' a'}{2}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{M}'_{\perp,\mathrm{A}}\right)-e^{ik'_x a'}\mathbf{1}_{4\times4}\right)=0, \tag{A4}$$

其中 是第 i=A、B 和 表示矩阵指数。请注意，共动参考系中的晶格常数与实验室参考系中的晶格常数之间的关系为 。 实验室参考系中的色散关系 可通过多普勒变换 (8) 求得。

a a′ = γ 相对于

参考文献

[1] E. Galiffi, R. Tirole, S. Yin, H. Li, S. Vezzoli, P. A. Huidrobo, M. G. Silveirinha, R. Sapienza, A. Alù and J. B. Pendry, 《时变介质光子学》, Adv. Photon. 4, 014002 (2022).[2] J. N. Winn, S. Fa n, J. D. Joannopoulos, and E. P. Ippen, 《光子晶体中的带间跃迁》, Phys. Rev. B 59, 1551 (1999).[3] F. Biancalana, A. Amann, A. V. Uskov, and E. P. O'Reilly, 《时空介电结构中的光传播动力学》, Phys. Rev. E 75, 046607 (2007).[4] Z. Yu and S. Fan, 《通过间接带间光子跃迁实现完全光隔离》, Nat. Photon. 3, 91 (2009).[5] H. Lira, Z. Yu, S. Fan, and M. Lipson, 《硅芯片上由带间光子跃迁诱导的电驱动非互易性》, Phys. Rev. Lett. 109, 033901 (2012).[6] D. L. Sounas and A. Alù, 《基于时间调制的非互
Chamanara, M. Skorobogatiy, M. G. Silveirinha and C. Caloz, 《匀速时空晶体》, Adv. Photon.

MirRoosa, S. Fan, and S. A 非互易性》, Phys. Rev. Lett. 125, 195432 (2020).[10] X. Wang, A. Diaz-Rubio, H. Li, S. A. Tretyakov, and A. Alù, 《多功能时空超表面的理论与设计》, Phys. Rev. Applied 13, 044040 (2020).[11] D. Torrent, O. Pon[illegible] 易热材料》, Phys. Re[illegible]
rent, 《时间 中的强空间色散》, Phys. Rev. B, 102, 214202, (2020).[13] E. Lustig, Y. Sharabi, and M. Segev, 《光子时间晶体的拓扑方面》C
14] V. Pacheco-Peña, N. Engheta, 《时间瞄准》, Light: Science & Applications 9, 1-12, (2020).

[15] V. Pacheco-Peña, N. Engheta, 《时空各向同性到各向异性超原子》, 《新物理学杂志》, 23, 095006, (2021). 16] E. Cassedy and A. Oliner, 《时空周期介质中的色散关系：第一部分——稳定相互作用》, 《IEEE学报》, 51, 1342 (1963). 17] E. Cassedy, 《时空周期介质中的色散关系：第二部分——不稳定相互作用》, 《IEEE学报》, 55, 1154 (1967). 18] H. T. To, 《动态层合材料的均匀化》, 《数学分析与应用杂志》354, 518, (2009).[19] P. A. Huidobro, E. Galiffi, S. Guenneau, R. V. Craster and J. B. Pendry, 《时空调制超材料中的菲涅耳拖曳》, 《美国国家科学院院刊》116, 24943 (2019). 20] P. Huidobro, M. G. Silveirinha, E. Galiffi and J. B. P. Pendry, 《时空超材料均匀化理 veirinha, 《时空晶 (2022).[23] J. A. Kong, 《电磁波理论》（纽约：Wiley-Interscienc 1999.[24] A. N. Serdyukov, I. V. Semchenko, S. A. Tretyakov and A. H. Sihvola, 《双各向异性材料电磁学：理论与应用》。阿姆斯特丹，荷兰：Gordon and Breach科学出版社，2001.[25] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretvakov and A. J. Viitanen, 《手性与双各向同性介质中的电磁波》。马萨诸塞州波士顿：Artech House，1994.[26] and C. R. Paiva, 《具有自发非互易响应的光子晶体非对称能带图》, 《物理评论A》91, 063821 (2015).[27] F. R. Prudêncio and M. G. Silveirinha, 《利用自发磁电效应实现圆偏振光的光隔离》, 《物理评论A》93, 043846 (2016).[28] S. Lannebère, M. G. Silveirinha, 《H 模型和 模型的光子学类比》, 《纳米光子学》 (2019).[29] F. R. Prudêncio, M. G. Silveirinha, 《光子Haldane模型拓扑相的第一性原理计算》, 《对称性》, 13, 2229, (2021).[30] J. D. Jackson, 《经典电动力学》。纽约，Wiley，1999.[31] J. B. Pendry, P. A. Huidobro, M. G. Silveirinha, E. Galiffi, 《穿越光线》, 《纳米光子学》, 11, 161, (2022).[32] P. L. Uslenghi and R. E. Zich, 《等折射体旋转体的辐射与散射》, 《IEEE天线与传播汇刊》, 46, 1606, (1998).[33] J. S. Tyo, 《一类与自由空间等折射的人工材料》, 《IEEE天线与传播汇刊》, 51, 1093, (2003).[34] F.R. Prudêncio, S. A. Matos, 刊》, 62, C. R. Paiva and S. A. Matos, 《闵可夫斯基各向同性介质与完美电磁导体》, 《IEEE天线与传播汇刊》 Sakoda, 《光子晶体的光学性质》。Springer：柏林，德国，2001.