基数最小性条件下推理的复杂性

Nadia Creignou, [1] Fr´ed´eric Olive, [1] JohannesSchmidt[2]1 艾克斯-马赛大学、法国国家科学研究中心、LIS，法国马赛[2] 延雪平大学，计算机科学与信息学系，工程学院，瑞典{nadia.creignou,frederic.olive}@lis-lab.fr, johannes.schmidt@ju.se

2023年3月6日

arXiv:2303.01571v1 [cs.CC] 2 Mar 2023

摘要

许多人工智能相关推理问题都建立在带有某种基数最小性条件的命题公式可满足性问题之上。对于系统地考察 Schaefer 框架（STOC 1978）中的所有命题逻辑片段时，可满足性问题（SAT）的复杂性已得到充分理解；但加入此类最小性条件后，情况便不再如此。我们研究 CardMinSat 问题：给定一个公式 ϕ 和一个原子x，判断 x 是否在 ϕ的某个基数最小模型中为真。我们在 Schaefer 框架下完整地分类了 CardMinSat 问题的计算复杂性，从而为更好地理解许多人工智能相关推理问题的可处理性边界铺平了道路。为此，我们使用了由 (Schnoor & Schnoor 2008) 和 (Lagerkvist 2014) 开发的高级代数工具。

引言

在许多人工智能相关推理问题中，都涉及某种最小性概念。通常，在信念变化（例如修订或更新）中，最小改变原则是基本原则之一。我们希望根据一些新信息修订或更新智能体的信念集。为此，我们只保留新信息的模型中与智能体原始信念集的模型距离最小的那些。在信念修正的语境下，模型之间的距离由被比较模型中赋值为真的原子的对称差来定义；例如，Dalal 算子 [7], 旨在使该集合的基数最小。在溯因中，我们要寻找一个解释（一组文字），它与给定理论相容，并且与该理论一起在逻辑上蕴含所有显现。人们自然会关注的不是所有解释，而只是其中最小的解释。可以考虑不同的最小性概念，尤其是关于集合包含或基数的最小性 [9]。

本文聚焦于基数最小性。采用这种最小性条件时，相关推理任务通常会产生 Θ_2^{p}-完全问题（类 Θ_2^{p}位于多项式层级的第二层：在多项式时间内，仅调用对NP预言机进行对数次数的查询）。例如，对于Dalal的修订算子 [8, 14]，模型检测和蕴含都是 Θ_2^{p}-完全的。对于带有

基数最小性条件的溯因，判定某个文字是否属于基数最小解释，在处理Horn 公式 [9]时是 Θ_2^{P}-完全的。

命题公式在人工智能推理问题中发挥着重要作用。由于大多数相关问题在完整的命题逻辑中都难以处理，因此一个自然而然的问题是：对所涉及公式施加句法限制，能否使问题变得易于处理？Schaefer 框架为研究这一问题提供了理想的框架。它考虑广义合取范式中的公式，并允许系统地考察命题逻辑的所有片段。事实上，Schaefer 著名定理 [21] 表明，在 Horn、对偶 Horn、Krom 或仿射公式等某些句法限制下，SAT 问题变得易于处理；而在所有其他非平凡情形下，它仍然难以处理。此后，Schaefer 的方法被应用于众多问题，包括限定、溯因和论证问题 [18, 16, 5]。泛代数中的工具已被证明是开展此类研究的有力工具，尤其是在问题在引入存在量化变量和等式约束后仍保持稳定的情况下 [6]。遗憾的是，引入这些内容并不能保持基数。因此，本文转而采用围绕弱基[22, 13]概念构建的高级代数工具。

对于类 Θ_2^{P}，有一个典型的可满足性问题，可以帮助揭示许多涉及基数最小性条件的推理问题的复杂性：它就是 CardMinSat 问题。该问题询问：给定一个公式 ϕ 和一个原子 x， x 是否在 ϕ的某个基数最小模型中为真。它提供了一个标准的困难问题，可用于证明困难性结果，尤其是在知识表示和信念变化领域。例如，在 [3] 中，上文提到的溯因相关性问题被证明在 Horn-Krom 组合情形下是 Θ_2^{P}-完全的。 [3] 中使用的 Θ_2^{P}- 困难性归约，比此前在 [9] 中针对 Horn 情形给出的归约容易得多，因为它以关联更密切的问题 CardMinSat为起点，并将其限制为正 2-子句的合取。同样， [3] 证明，与 Dalal 算子相关的模型检测问题和蕴涵问题在 Horn-Krom 组合情形下是 Θ_2^{P}-完全的，其依据是从 CardMinSat 问题进行归约。采用基数最大性准则的信念库句法修正算子所对应的模型检测问题，也以这种方式在 Horn-Krom 组合情形下被证明是 Θ_2^{P}-完全的 [2]。

我们的主要贡献是在 Schaefer 框架下，对 CardMinSat问题进行了完整的复杂性分类，为更好地理解许多推理问题的复杂性铺平了道路。作为示例，我们证明，前文提到的溯因相关性问题即使限定为仿射公式（异或子句的合取），仍然是 Θ_2^{P}-完全的。

预备知识

命题逻辑。 我们假设读者熟悉命题逻辑。文字 是一个变量（或原子） x （正文字）或其否定 $\neg x$ （负文字）。子句 是文字的析取。对于任意整数 $k \geq 1$， k-子句是至多包含 k个文字的子句。异或子句 是将通常的连接词“或”替换为异或连接词（记作 $\oplus$）的子句。合取范式公式（分别为异或合取范式公式）是子句（分别为异或子句）的合取， k-合取范式公式是 k-子句的合取。为节省空间，我们有时使用简写 $x := \neg x$ 和 $xy := x \wedge y$。给定公式 ϕ，我们用var(ϕ)表示 ϕ中的变量。映射 σ: $\overline{\mathrm{var}}(\phi) \mapsto \{0, 1\}$

称为 ϕ中变量的赋值 。若赋值 σ 同时满足合取范式公式（或异或合取范式公式） ϕ 的所有子句（或异或子句），则称 σ 满足该公式。在这种情况下， σ 称为 ϕ的模型。若变量 $x \in$ var(ϕ)在 ϕ的所有模型中都被赋予相同的值，则称其为冻结 变量。赋值 σ的权重 或基数（记作 $|\sigma|$）是满足 $\sigma(x) = 1$的变量x 的数量。 ϕ 的基数最小 模型，是 ϕ 的所有模型中基数最小的模型。对于两个公式 ψ, ϕ ，如果 ψ 的每个模型也满足 ϕ，我们就写作 $\psi \models \phi$ 。若两个公式具有相同的变量集合和相同的模型集合，则它们等价，记作 $\psi \equiv \phi$。注意，任何异或子句都等价于二元域上的一个线性方程，其形式为 $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = a$，其中 $a \in \{0, 1\}$。

Schaefer 框架。元数为 $k \in \mathbb{N}$ 的布尔关系是一个关系 $R \subseteq \{0, 1\}^k$，约束 C 是形如 $C = R(x_1, \ldots, x_k)$ 的公式，其中 R 是一个 k 元布尔关系，而 $x_1, \ldots, x_k$ 是变量（不一定互不相同）。如果 $(\sigma(x_1) \ldots, \sigma(x_k)) \in R$，则赋值 σ 满足约束 C。约束语言 Γ 是由有限个布尔关系组成的集合，而 Γ 公式是使用来自 Γ 的关系构成的约束的合取。请注意，本文不考虑无限约束语言。最后，如果赋值 σ 同时满足 ϕ 中的所有约束，则称赋值 σ 满足 Γ 公式 ϕ 。在这种情况下， σ 也称为 ϕ 的模型。我们称 k 元关系 R 由公式 ϕ 定义，如果 ϕ 是一个含有 k 个互不相同变量 $x_1, \ldots, x_k$ 的公式，且 $\phi \equiv R(x_1, \ldots, x_k)$。

此外，我们称布尔关系 R 为：

- $Horn$ （分别为对偶 ***Horn***），如果它可以由合取范式公式 ϕ 定义，且每个子句中至多包含一个正文字（分别为负文字），
- $Krom$ ，如果它可以由 2-CNF 公式定义，
- 仿射 ，如果它可以由 XOR-CNF 公式定义，或者等价地，由一个公式 ϕ 定义，该公式是形如 $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n = a$ 的线性方程的合取，其中 $a \in \{0, 1\}$，
- 宽度 *2* 仿射 ，如果它可以由异或 2-CNF 公式定义，或者等价地，由一个公式ϕ 定义，该公式是每个至多涉及两个变量的线性方程的合取，即形如 $x_1 = a$ 或形如 $x_1 \oplus x_2 = a$ 的方程，其中 $a \in \{0, 1\}$。
- 1-有效 （分别为 0-有效），如果 $(1, \ldots, 1) \in R$（分别为 $(0, \ldots, 0) \in R$）。
- 补余的 当且仅当对于每个元组 $(t_1, \ldots, t_k) \in R$ 也有 $(1 - t_1, \ldots, 1 - t_k) \in R$。

此外，如果一个关系是 Horn、对偶 Horn、Krom 或仿射的，我们就称它为$Schaefer$ 关系。最后，对于关系的某个性质 $\mathcal{P}$ ，如果约束语言 Γ 中的所有关系 Γ 都具有该性质 $\mathcal{P}$，我们就称该约束语言 $\mathcal{P}$ 。

我们定义一元关系 $\mathsf{T} = \{1\}$、$\mathsf{F} = \{0\}$以及六元关系$R_{3^{\neq}}^{1/3} = \{100011, 010101, 001110\}$。我们用$\mathsf{OR}^k$ 表示 k元 OR，用 NAND^k 表示 k元 NAND，用XOR^k 表示 k元 XOR。关系 EVEN^k 包含所有 k元组中 1 的个数为偶数的元组。关系 $\mathsf{EVEN}_{k^{\neq}}^k$ 表示由 $\mathsf{EVEN}^k(x_1, \ldots, x_k) \wedge (x_1 \neq x_{k+1}) \wedge \cdots \wedge (x_k \neq x_{2k})$ 定义的 $2k$元关系。

在下面的定义中，我们将介绍约束语言的不同闭包概念。

定义 1. *1.* 集合 $\langle\Gamma\rangle$ 是包含 Γ、等式约束 $=$，并且在原始正的一阶定义下封闭的最小关系集合，

也就是说，如果 ϕ 是一个 $\Gamma \cup \{=\}$-公式，且 $R(x_1, \ldots, x_n) \equiv \exists y_1 \ldots \exists y_l \phi(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_l)$，那么 $R \in \langle\Gamma\rangle$。换句话说，$\langle\Gamma\rangle$ 是可表示为带有存在量化变量的 $\Gamma \cup \{=\}$-公式的关系集合。

2. 集合 $\langle\Gamma\rangle_{\not\equiv}$ 是可表示为 $\Gamma \cup \{=\}$-公式的关系集合（不允许存在量化变量）。

3. 集合 $\langle\Gamma\rangle_{\not\equiv,\, \neq}$ 是可表示为 Γ-公式的关系集合（既不允许使用等式关系，也不允许使用存在量化变量）。

例 1. 令 $\Gamma = \{R\}$, $R(x_1, x_2) = (x_1 \to x_2)$，以及 $S(x_1, x_2) = (x_1 = x_2)$。我们可以通过 $S(x, y) \equiv R(x, y) \wedge R(y, x)$ 将 S 表示为 Γ-公式。因此，$S \in \langle\Gamma\rangle_{\not\equiv,\, \neq}$。

集合 $\langle\Gamma\rangle$ 称为以 Γ [1] 为基的关系克隆 或余克隆。注意，对于余克隆 C 和约束语言 Γ，陈述 $\Gamma \subseteq \mathbf{C}$、$\langle\Gamma\rangle \subseteq \mathbf{C}$、$\langle\Gamma\rangle_{\not\equiv} \subseteq \mathbf{C}$ 以及$\langle\Gamma\rangle_{\not\equiv,\, \neq} \subseteq$C 等价。本文中，我们遵循 Schaefer 术语 [21]，对不同类型的布尔关系及其对应的余克隆进行称呼。表1列出了所有具有最小弱基的有限生成余克隆的完整清单，见 Lagerkvist[13]。关于子句类型的描述和更简洁的基（非最小弱基），分别请参阅[16]和 [1],。

余克隆结构的图形表示见图1。该图通常称为 Post 格 [20]。各余克隆旁标注了一些重要性质或名称。通俗地说，每个顶点对应一个余克隆，而边则表示这一格结构中的包含关系。

复杂性类。本文中的所有复杂性结果均针对多项式层级（PH） [19]中的类。PH 的构成基石是判定问题类 P 和 NP，分别表示可在确定性和非确定性多项式时间内求解的判定问题。类Δ_2^{P} 是指能够通过确定性图灵机在多项式时间内、借助 NP 类的预言机判定的判定问题类。我们可以限制预言机调用的次数。若对于输入 x，其中 $|x| = n$，最多允许调用 NP 预言机 $O(\log n)$ 次，则得到类 $\mathrm{P}^{\mathrm{NP}[O(\log n)]}$，该类也称为 Θ_2^{P}。从 [12, 10] 可以得到大量 Θ_2^{P}-完全问题。本文采用多项式多对一归约，记作 $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}}$。

CardMinSat

我们旨在研究 SAT 的以下自然变体，并分析其复杂性。

CardMinSat
实例：一个命题公式 ϕ 和一个原子 x。问题：x 在 ϕ 的基数最小模型中是否为真?

这个问题是 Θ_2^{P} 类中的原型问题之一，参见 [23, 3]。研究公式的句法限制是否能使问题变得更容易，并对 CardMinSat 进行更细致的复杂性研究，是有意义的。下文也将其记为 Cms。为此，我们拟在 Schaefer 框架下研究这个问题。因此，我们考虑以下问题，其中 Γ是一种约束语言，即由有限个布尔关系组成的集合。

CMS(Γ)实例：</style}一个 -公式 和一个原子。问题： x 是否在 ϕ 的一个基数最小模型中为真?

类似地，我们用 SAT(Γ)表示针对 Γ公式的布尔可满足性问题。我们的目标是根据 Γ，对 CMS(Γ)进行完整的复杂性分类。关于这个问题，文献已在 Krom 片段中给出结论。

定理 1. [3] 设 Γ 是一个 *Krom* 约束语言。如果 Γ 是宽度为2 的仿射语言或 *Horn* 语言，那么 CMS(Γ) 可在多项式时间内判定。否则，它是 Θ_2^{p}-完全的。

我们将这一结果加以推广，并对命题逻辑的所有片段给出完整的复杂度分类。

定理 2. 设 Γ 是一个约束语言。如果 Γ 是宽度为2 的仿射语言、*Horn* 语言或 *0*-有效语言，那么 CMS(Γ) 可在多项式时间内判定。否则，它是 Θ_2^{p}-完全的。

请注意，对于 0-有效公式， CMS(Γ)是平凡的（答案总是“否”）。Krom 片段中 CMS 的复杂度分类是借助部分冻结余克隆得到的。尽管这些部分冻结余克隆在 Krom 片段中已有详尽描述 [17], ，但在整个命题逻辑范围内，它们仅得到部分了解。因此，为了获得完整分类，我们采用另一套工具。具体而言，我们将使用受限的闭包概念，并以 [22]中引入的弱基概念为基础。下一节将对此进行说明。

技术工具

证明方法

上文介绍的布尔关系集合上的闭包算子与可满足性问题的复杂性结果有关。事实上，假设 $\Gamma_1 \subseteq \langle\Gamma_2\rangle$。那么，一个 Γ_1-公式可以转换为一个与可满足性等价的 Γ_2-公式，从而表明 SAT(Γ_1) 可以在多项式时间内归约为 SAT(Γ_2) [11]。因此， SAT(Γ) 的复杂性仅取决于余克隆 $\langle\Gamma\rangle$。相应地，要对可满足性问题进行完整的复杂度分类，只需研究这些余克隆。

遗憾的是，由于我们在这里关注的是基数最小模型，因此不能先验地只研究余克隆。事实上，将一个 Γ_1-公式转换为一个可满足性等价的 Γ_2-公式时可能引入的存在变量和等式约束会带来问题，因为它们可能改变模型集合以及每个模型的基数。因此，我们将采用一种限制更严格的闭包概念，即前面引入的闭包算子 $\langle\cdot\rangle_{\nexists,\,\neq}$。该算子不涉及存在量词和等式约束。在 $\langle\Gamma\rangle_{\nexists,\,\neq}$ 中，表达关系的唯一操作是合取 Γ-约束（例如参见例 1）。因此，在归约中用某个关系$R \in \langle\Gamma\rangle_{\nexists,\,\neq}$ 的表示性 Γ-公式替换它时， R 恰好得到表示*exactly*：不会引入新变量，也不允许使用任何并非基于 Γ 构造的约束（尤其是不允许等式约束）。因此，任何基于闭包算子 $\langle\cdot\rangle_{\nexists,\,\neq}$ 的归约都会精确保留模型集合，进而也保留所有基数最小模型。因此，我们得到以下性质。

命题 3. 设 Γ是一个约束语言， R 是一个关系。若 $R \in \langle\Gamma\rangle_{\not\exists,\neq}$ 则有 $\mathrm{CMS}(R) \leq_m^P \mathrm{CMS}(\Gamma)$。

我们完整分类的证明将系统地探索余克隆格，但只能通过受限算子 $\langle\cdot\rangle_{\not\exists,\neq}$ 得到归约，而不能通过表达能力更强、可生成余克隆的算子 $\langle\cdot\rangle$。在此背景下，弱基的概念十分重要 [22]。余克隆 C 的弱基 B 具有以下性质：(1) $\langle B\rangle = \mathsf{C}$；(2) 对任意 Γ，只要 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{C}$，就有 $B \in \langle\Gamma\rangle_{\not\exists}$。Schnoor 和 Schnoor 已证明，每个余克隆都存在弱基 [22]。对于有限生成余克隆 C，甚至存在单关系弱基。若这样的弱基 B 还具有不可约冗余性质（即其矩阵表示不含冗余列），则甚至有 $B \in \langle\Gamma\rangle_{\not\exists,\neq}$ 对任意满足 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{C}$ 的 Γ。Lagerkvist （2014 年）已确定所有有限生成余克隆的极小弱基 [13]。若关系 R 满足以下条件，则称其为极小关系：(1) R 具有不可约冗余性质；(2) R 不含虚假坐标；(3) 不存在 $R' \subsetneq R$ 使得 $\langle R\rangle = \langle R'\rangle$。若某个坐标 i 的取值不会影响元组是否属于该关系，则称该坐标为虚假坐标，即 $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_k) \in R$ 当且仅当 $(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_k) \in R$。表 1 完整列出了所有具有极小弱基的有限生成余克隆。

我们将通过以下方式使用极小弱基来获得完整分类。为了证明生成某个余克隆 C 的所有约束语言都具有困难性结果，我们选取 C 的一个极小弱基 B，并证明 $\mathrm{CMS}(B)$ 是困难的。于是，根据命题 3 （因为 B 是一个极小弱基，所以它是不可约冗余的，因此我们有 $B \in \langle\Gamma\rangle_{\not\exists,\neq}$），可推出对于任意满足 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{C}$ 的 Γ， $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ 都是困难的。我们在下面的命题中陈述这一点。

命题 4。 设C 为一个余克隆，且 B 是C的一个极小弱基。那么，对于任意满足 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{C}$ 的 Γ，都有 $\mathrm{CMS}(B) \leq_m^P \mathrm{CMS}(\Gamma)$ 。

首先，我们需要一些特定关系的困难性结果，这正是下一节的目标。

特定困难性结果

这里我们给出一些关于特定关系的困难性结果，它们将在下一节中用于获得关于余克隆的困难性结果。定理 1 对 Krom 片段所得的分类蕴含了以下结果。

引理 5。 CMS（OR^2）是 Θ_2^{P}-困难的。

下一个结果也将成为我们分类证明的基石。

引理 6。 CMS（XOR^3）是 Θ_2^{P}-困难的。

证明概要。 回顾一下，$\mathsf{XOR}^3(x, y, z) \equiv (x \oplus y \oplus z)$，以及$\mathsf{XOR}^4(x, y, z, u) \equiv (x \oplus y \oplus z \oplus u)$。这里我们还将使用三元关系$\mathsf{NAE}^3 = \{0,1\}^3 \setminus \{000, 111\}$ 和问题$\mathrm{CMS}^*(\Gamma)$，其定义如下：

$\mathrm{CMS}^*(\Gamma)$实例： A Γ-公式 ϕ，原子 x，整数 k。问题： x 在 ϕ 的基数最小模型中是否为真值，且此基数$\leq k$?

证明由以下一系列归约构成。

1. $\textsc{Cms}(\text{或}^2) \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \textsc{Cms}(\text{非全同}^3)$ 2. $\textsc{Cms}(\text{非全同}^3) \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \textsc{Cms}^*(\text{异或}^3)$ 3. $\textsc{Cms}^*(\text{异或}^3) \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \textsc{Cms}(\text{异或}^4)$ 4. $\textsc{Cms}(\text{异或}^4) \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \textsc{Cms}(\text{异或}^3, \text{异或}^2)$ 5. $\textsc{Cms}(\text{异或}^3, \text{异或}^2) \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \textsc{Cms}(\text{异或}^3)$

因此，结论由引理 5 得出。现在我们给出这些归约。

1. $\textsc{Cms}(\text{或}^2) \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \textsc{Cms}(\text{非全同}^3)$。

对于每个约束 $\mathsf{OR}^2(x, y)$，我们关联约束 $\mathsf{NAE}^3(x, y, f)$，其中 f 是一个新变量。注意，$\mathsf{OR}^2(x, y) \equiv \mathsf{NAE}^3(x, y, 0)$。因此，我们的思路是用 f 替代 0，作为一个全局变量（即所有约束都使用同一个变量），并迫使它在所有基数最小模型中取值为 0。这可以通过赋予它足够大的权重 N 来实现。为此，我们添加约束 $\mathsf{NAE}^3(f, f, t)$，它表达了 $f \neq t$，以及 N 个约束 $\mathsf{NAE}^3(f_j, f_j, t)$，其中 f_j（对于 $j = 1$、.....、N）是新变量。这确保了如果 $f = 1$，那么 f_1、.....、$f_N = 1$。还要注意，由于 NAE^3 是一个补关系，构造出的 NAE^3-公式可满足，当且仅当它有一个满足 $f = 0$ 的模型。取 $N > n$，其中 n 是原公式中的变量数，可确保在任何基数最小模型中 $f = 0$。

2. $\textsc{Cms}(\mathsf{NAE}^3) \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \textsc{Cms}^*(\mathsf{XOR}^3)$。

给定一个 NAE^3-公式 $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} \mathsf{NAE}^3(x_i,\ y_i,\ z_i)$ 和一个原子 $x \in \mathsf{var}(\phi)$，我们要构造一个 XOR_3-公式 ϕ'、一个原子 x' 和一个整数 k，使得：

$$\begin{pmatrix} x \text{ belongs to a} \\ \text{minimal model of } \phi \end{pmatrix} \text{ iff } \begin{pmatrix} x' \text{ belongs to a minimal model} \\ \text{of } \phi' \text{ that has cardinality} \leq k. \end{pmatrix} \tag{1}$$

为了构造三元组 $(\phi',\ x',\ k)$，我们令 $x' = x$，并选择 ϕ' 作为 XOR^3-公式：

$$\phi' = \mathsf{XOR}^3(t, t, t) \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{m} \left\{ \begin{array}{l} \mathsf{XOR}^3(x_i, y_i, \alpha_i) \wedge \bigwedge_{j=2}^{N} \mathsf{XOR}^3(\alpha_i, \alpha_i^j, t) \quad \wedge \\ \mathsf{XOR}^3(x_i, z_i, \beta_i) \wedge \bigwedge_{j=2}^{N} \mathsf{XOR}^3(\beta_i, \beta_i^j, t) \quad \wedge \\ \mathsf{XOR}^3(y_i, z_i, \gamma_i) \wedge \bigwedge_{j=2}^{N} \mathsf{XOR}^3(\gamma_i, \gamma_i^j, t) \end{array} \right\}.$$

这里，不属于 $\mathsf{var}(\phi)$ 的原子——即 t 以及形如 α_i、β_i、γ_i、α_i^j、β_i^j 和 γ_i^j 的变量——都是新变量。对于整数 N，我们取 $\mathsf{var}(\phi)$ 的基数。这将确保 ϕ 的任意模型的基数都严格小于 N。（注意，这样的模型至少会将一个变量映射为 0。）最后，出于将在证明后文中说明的原因，我们令 $k = (m + 1)N$。

注意，τ 的任何模型都将 t 映射 ϕ' 为 1，这意味着

1. $\tau(\alpha_i^j) = \tau(\alpha_i)$,
2. $\tau(\beta_i^j) = \tau(\beta_i)$ and
3. $\tau(\gamma_i^j) = \tau(\gamma_i)$

对所有 i, j均成立。因此，对于每个 i ，变量 α_i^j 都用于提高 α_i的权重：在赋值中将 α_i 映射为 1，会自动使该赋值的基数增加 N（ β_i 和 γ_i的情况也类似）。

此外，注意到，对 var(ϕ) 上的任意赋值 σ ，通过仔细选择新变量的取值，都可以唯一地扩展为 ϕ' 的一个模型。我们将此扩展记为 σ^+。在 σ 满足 ϕ 的特殊情况下，我们得到:

$$\left|\sigma^+\right| = |\sigma| + mN. \tag{2}$$

反过来，若 τ 是 ϕ' 的一个模型，则对任意 i， τ 中 $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ 的总权重在 $\tau \models \mathsf{NAE}^3(x_i, y_i, z_i)$ 成立时为 1，否则为 3。将 τ 在 var(ϕ) 上的限制记为 τ^-，可写作 $|\tau| = |\tau^-| + (m+2k)N$，其中 k 是满足 $\tau^- \not\models \mathsf{NAE}^3(x_i, y_i, z_i)$ 的 i 的数量。因此，对任意满足 ϕ' 的赋值 τ ，:

$$\tau^- \models \phi \text{ iff } |\tau| = \left|\tau^-\right| + mN. \tag{3}$$

由于 $|\tau|$ 具有 $|\tau^-| + (m+2k)N$ 的形式，并且由于 $|\tau^-| < N$，这可以改写为:

$$\tau^- \models \phi \text{ iff } |\tau| < (m+1)N. \tag{4}$$

现在我们可以证明，取 $k = (m+1)N$ 时，等价式 (1) 成立。

$\boxed{\Rightarrow}$设 σ 是包含 x的 ϕ 的一个极小模型。那么 x 也属于 σ^+ ，而后者是 ϕ'的一个模型。此外， σ^+ 是 ϕ'的模型中基数最小的。为导出矛盾，假设存在一个 ϕ' 的模型 τ 满足 $|\tau| < |\sigma^+|$。由于 $\sigma \models \phi$，等式 (2) 保证 $|\sigma^+| = |\sigma| + mN < (m+1)N$。因此， $|\tau| < (m+1)N$，于是由 (4) 可得： $\tau^- \models \phi$。继而由 (3) 可推出 $|\tau| = |\tau^-| + mN$，而不等式 $|\tau| < |\sigma^+|$意味着 $|\tau^-| + mN < |\sigma| + mN$，即 $|\tau^-| < |\sigma|$。最后， τ^-是 ϕ的一个模型，且其基数严格小于 $|\sigma|$: 矛盾。

$\boxed{\Leftarrow}$设 τ 是一个极小模型，其中包含 x，并满足 $|\tau| < (m+1)N$。根据 (4)， x 也属于 τ^-，而 τ^- 是 ϕ 的一个模型。此外，在 ϕ 的所有模型中， τ^- 的基数最小。否则，就存在一个 ϕ 的模型 σ ，使得 $|\sigma| < |\tau^-|$。但一方面，根据 (4)，我们有 $|\tau^-| = |\tau| - mN$; 另一方面，根据 (2)，我们有 $|\sigma| = |\sigma^+| - mN$。因此，不等式 $|\sigma| < |\tau^-|$ 得出 $|\sigma^+| < |\tau|$。由于 $\sigma^+ \models \phi'$，最终我们得到一个 ϕ' 的模型，其基数严格小于 $|\tau|$: 矛盾。 □

3. $\textsc{Cms}^*(\mathsf{XOR}^3) \leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}} \textsc{Cms}(\mathsf{XOR}^4)$。

设 (ϕ， x， k) 是 $\textsc{Cms}^*(\mathsf{XOR}^3)$ 的一个实例，其中

$$\phi = \bigwedge_{i=1}^{p} \mathsf{XOR}^3(x_i, y_i, z_i).$$

我们考虑 k新变量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$并设定:

$$\phi' = \bigwedge_{i=1}^{p} \bigwedge_{j=1}^{k} \mathsf{XOR}^4(x_i, y_i, z_i, \alpha_j).$$

注意，在 ϕ' 的所有模型中，等式 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k$ 均成立。此外， ϕ' 有一个权重为 k 的模型，该模型将 α_j's 赋值为 1，并将所有其他变量赋值为 0。 ϕ 的每个模型σ 都可以通过将每个 α_j 映射为 0，扩展为 ϕ' 的一个模型。我们将 σ^+记作这一扩展。注意，在这种情况下， $|\sigma| = |\sigma^+|$。反之，对于 ϕ'的任意模型 τ，我们将其在 var(ϕ) 上的限制记作 τ^-。容易看出，如果对于所有 j's 都有 $\tau(\alpha_j) = 0$，那么$\tau^- \models \phi$，且在这种情况下， $|\tau| = |\tau^-|$。

现在证明函数 $(\phi, x, k) \mapsto (\phi', x)$ 是从 $\text{CMS}^*(\text{XOR}^3)$ 到 $\text{CMS}(\text{XOR}^4)$ 的归约。

假设 (ϕ, x, k) 是 $\text{CMS}^*(\text{XOR}^3)$ 的正实例，并称 σ 为 ϕ 的一个极小模型，其中包含 x，且满足 $|\sigma| \leq k$。那么 $\sigma^+ \models \phi'$，并且 $\sigma^+(x) = 1$。此外， σ^+是 ϕ' 的模型中极小的，因为对于任意 ϕ' 的模型 τ：如果对所有 j，都有 $\tau(\alpha_j) = 1$，那么 $|\tau| \geq k \geq |\sigma| = |\sigma^+|$。如果对所有 j，都有 $\tau(\alpha_j) = 0$，那么 τ^-是 ϕ 的一个模型；根据 σ 的最小性，它满足 $|\tau^-| \geq |\sigma|$。由于在这种情况下 $|\tau^-| = |\tau|$，我们得到 $|\tau| \geq |\sigma| = |\sigma^+|$。因此， σ^+ 是一个包含 x 的 ϕ' 极小模型，故 (ϕ', x) 是 $\text{CMS}(\text{XOR}^4)$ 的正实例。

反过来，假设 (ϕ', x) 是 $\text{CMS}(\text{XOR}^4)$ 的正实例，并令 τ 为包含 x的 ϕ' 的一个极小模型。那么 $|\tau| \leq k$，因为 τ是极小的，并且将每个 α_j 映射为 1、将所有其他变量映射为 0 的赋值是 ϕ' 的一个基数为 k的模型。由$\tau(x) = 1$可得，对于所有 j，都有 $\tau(\alpha_j) = 0$（否则 $|\tau|$将大于或等于 $k+1$）。因此， τ^-是包含 x的 ϕ的一个模型，使得 $|\tau^-| \leq k$。还需验证 τ^-是 ϕ的所有模型中极小的。任取 ϕ的一个模型 σ，则 σ^+ 是ϕ'的一个模型。根据 τ的最小性， $|\sigma^+| \geq |\tau|$，即 $|\sigma| \geq |\tau^-|$。因此， τ^-是包含 x和 $|\tau^-| \leq k$的 ϕ的一个极小模型，故 (ϕ, k, x) 是 $\text{CMS}^*(\text{XOR}^3)$ 的正实例。 □

4. $\text{CMS}(\text{XOR}^4) \leq_{\text{m}}^{\text{P}} \text{CMS}(\text{XOR}^3, \text{XOR}^2)$.

注意，$\text{XOR}^4(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv \exists y, z : \text{XOR}^3(x_1, x_2, y) \wedge \text{XOR}^3(x_3, x_4, z) \wedge \text{XOR}^2(y, z)$。两个新变量 y 和 z 取互补值，因此无论如何，它们合起来都会贡献权重 1。

5. $\text{CMS}(\text{XOR}^3, \text{XOR}^2) \leq_{\text{m}}^{\text{P}} \text{CMS}(\text{XOR}^3)$.

设 (ϕ, x) 是 $\text{CMS}(\text{XOR}^3, \text{XOR}^2)$ 的一个实例。若 ϕ不可满足，我们就将 (ϕ, x) 映射为 $\text{CMS}(\text{XOR}^3)$ 的一个平凡否实例，例如 $(\text{XOR}^3(x_1, x_2, x_3)\ x)$。

否则，我们将任意约束 $\text{XOR}^2(x, y)$ 替换为 $\text{XOR}^3(x, y, w)$，其中 w 是一个新变量，其权重影响 N 足够大，例如大于原公式中变量的数量。这样可以确保该公式的基数最小模型是将 ϕ 扩展上 $w = 0$ 后得到的模型。通过添加约束 $\text{XOR}^3(t, t, t) \wedge \bigwedge_{i=1}^{N} \text{XOR}^3(t, w, w_i)$，即可赋予变量 w 所需的权重影响，其中 t 和各个 w_i 都是新变量。 □

主定理的证明

我们在此证明定理 2。该分类可以通过 Post 格可视化，见图1。分类遵循余克隆之间的边界，并且如上一节所述，将通过对余克隆进行系统性探索来获得。

请注意，定理 1 是此前对 Krom 片段所作的分类，涉及格下部的余克隆，即满足以下条件的每个余克隆 C：

$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{ID}_2$。图1中 Post 格的颜色编码如下。“白色”余克隆对应的问题 C_{MS} 是平凡的；这些余克隆只包含 0-有效关系。对于这些余克隆，基数最小解是全 0 解，因此答案始终是“否”。“灰色”余克隆对应的问题 C_{MS} 可在多项式时间内判定；它们对应满足以下条件之一的余克隆 $\mathbf{C}$：$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{IE}_2$ 或 $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{ID}_1$。在第一种情况下，所有关系都是 Horn，因此存在唯一的基数最小模型，并且可以通过单元传播在多项式时间内找到。在第二种情况下，所有关系都是宽度 2 仿射，其可处理性结论由定理 1 得出。

最后，为了得到复杂度分类，我们还需要证明以下“黑色”余克隆的困难性，即 $\mathbf{II}_2$、$\mathbf{II}_1$、$\mathbf{IN}_2$、$\mathbf{IL}_2$、$\mathbf{IL}_3$、$\mathbf{IL}_1$、$\mathbf{IV}_2$、$\mathbf{IV}_1$，以及对于任意 $k \geq 2$，余克隆 $\mathbf{IS}^{\mathsf{k}}_{00}$、$\mathbf{IS}^{\mathsf{k}}_{01}$、$\mathbf{IS}^{\mathsf{k}}_{02}$、$\mathbf{IS}^{\mathsf{k}}_{0}$。定理 1 已处理“黑色”余克隆 $\mathbf{ID}_2$。

正如我们在上一节讨论的，对于每个剩余的余克隆 $\mathbf{C}$，给定其一个弱基 B，我们将证明 $\mathrm{C}_{\mathrm{MS}}(B)$ 是困难的。为此，我们将从一个已知困难问题进行归约，该问题要么是 $\mathrm{C}_{\mathrm{MS}}(\text{或}^2)$，要么是 $\mathrm{C}_{\mathrm{MS}}(\mathbf{XOR}^3)$。例如，给定 $\mathrm{C}_{\mathrm{MS}}(\text{或}^2)$ 的一个实例 $(\phi,\ x)$，其中 ϕ 是由 或^2-子句构成的合取，我们将构造一个B-公式 ϕ'，使得 x 属于 ϕ 的某个基数最小模型，当且仅当 x 属于 ϕ' 的某个基数最小模型。ϕ' 的构造通过将 ϕ 的每个子句局部替换为一个等价的 B-公式来实现。通常，这需要引入新的（存在量化）变量。其中一些附加变量将被冻结，这意味着它们在所有模型中的真值都相同，因此它们对任何模型权重的贡献都是固定的。为了确保未冻结的附加变量的权重不会影响基数最小模型，诀窍是对每个这样的变量 y，再添加一个变量 y'，并强制它们取互补值，即 $y \neq y'$。因此，在所有模型中，y 和 y' 的权重贡献之和始终为 1。有时，为此我们必须表示真值 0。若无法直接表示，做法是用变量 f 替代 0，然后引入大量 f 的副本，使得公式的任何基数最小模型都必须将 f 设为 0。

下文中提到余克隆的最小弱基时，指的是 Lagerkvist [13], 在表1中给出的弱基。在证明中，我们总会重述相应弱基的精确定义，并在适当时给出其矩阵表示。

以下命题给出了缺失的困难性结果。

命题7。设 Γ 为一个约束语言。那么 $\mathrm{C}_{\mathrm{MS}}(\Gamma)$ 是 Θ_2^{P}-困难的，当 $\langle\Gamma\rangle \in \{\mathbf{II}_2, \mathbf{II}_1, \mathbf{IN}_2, \mathbf{IL}_2, \mathbf{IL}_3, \mathbf{IL}_1, \mathbf{IV}_2, \mathbf{IV}_1, \mathbf{IS}^{\mathsf{k}}_{00}、\mathbf{IS}^{\mathsf{k}}_{01}、\mathbf{IS}^{\mathsf{k}}_{02}、\mathbf{IS}^{\mathsf{k}}_{0}\}$时，对任意 $k \geq 2$均成立。

以下引理分情况证明命题7。

引理8。设 $\langle\Gamma\rangle = \mathbf{II}_2$。那么 $\mathrm{C}_{\mathrm{MS}}(\Gamma)$ 是 Θ_2^{P}-困难的。

证明。设 $R_{\mathbf{II}_2}$ 为 $\mathbf{II}_2$ 的最小弱基，即 $R^{1/3}_{3\neq}(x_1, \ldots, x_6) \wedge \mathbf{F}(x_7) \wedge \mathbf{T}(x_8)$，其中 $R^{1/3}_{3\neq} = \{100011, 010101, 001110\}$。矩阵表示如下。

$$R_{\mathbf{II}_2} = \begin{pmatrix} 10001101 \\ 01010101 \\ 00111001 \end{pmatrix}$$

我们证明 $\mathrm{C}_{\mathrm{MS}}(\mathbf{OR}^2) \leq^{\mathrm{P}}_{\mathrm{m}} \mathrm{C}_{\mathrm{MS}}(R_{\mathbf{II}_2})$。然后，该结果由引理 5 和命题 4 得出。

设 $(\phi,\ x)$ 是 $\mathrm{CMS}(\mathsf{OR}^2)$ 的一个实例，其中 $\phi=\bigwedge_{i=1}^{p}(x_i^1\vee x_i^2)$。令 $\{a_i,b_i,c_i,d_i,a_i',b_i',c_i',d_i' \mid i=1\ldots p\}\cup\{t,f\}$ 为新变量。对于每个约束 $(x_i^1\vee x_i^2)$，我们构造约束$R_{\mathsf{II}_2}(a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i,\ x_i^1,\ x_i^2,\ f,\ t)$。注意，$\mathsf{OR}^2(x_i^1,\ x_i^2)\ \equiv$

$$\exists a_i,b_i,c_i,d_i,f,t\ R_{\mathsf{II}_2}(a_i,b_i,c_i,d_i,x_i^1,x_i^2,f,t).$$

存在变量被唯一确定。变量 f 和 t 是冻结的，而 a_i、b_i、c_i、d_i 的取值则不是。不过，引入额外的新变量 a_i'、b_i'、c_i'、d_i'，并强制它们取互补值，就能抵消这些变量取值的影响。对于 a_i 和 a_i'，可以通过约束$R_{\mathsf{II}_2}(a_i,a_i',f,a_i',a_i,t,f,t)$来实现。对于 b_i、b_i'、c_i、c_i' 以及 d_i、d_i'，也添加类似的约束。

考虑 ϕ' 所有这些约束的合取。注意，对新变量进行量化时，公式 ϕ 和ϕ' 是等价的。此外，ϕ 和ϕ' 的模型之间存在一一对应关系。ϕ 的每个模型 σ 都可以扩展为ϕ' 的一个模型 σ'，其权重为 $|\sigma'|=|\sigma|+4p+1$。因此，x 属于 ϕ 的一个基数最小模型，当且仅当 x 属于 ϕ'的一个基数最小模型，从而完成证明。

□

引理 9. 令 $\langle\Gamma\rangle=\mathsf{II}_1$。则 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ </style>是 Θ_2^{P}-困难的。

证明。令 R_{II_1} 为 $\mathbf{II}_1$，的最小弱基，即 $R_{\mathsf{II}_1}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1\vee x_2)\wedge(x_1x_2\leftrightarrow x_3)\wedge$ 真值。其矩阵表示如下。

$$R_{\mathsf{II}_1}=\begin{pmatrix}0101\\1001\\1111\end{pmatrix}$$

我们证明 CMS(或^2) $\leq_{\mathrm{m}}^{\mathrm{P}}$ $\mathrm{CMS}(R_{\mathsf{II}_1})$。由引理 5 和命题 4 可得结论。

令 (ϕ,x) 为 CMS(或^2) 的一个实例，其中 $\phi=\bigwedge_{i=1}^{p}(x_i^1\vee x_i^2)$。对于每个约束 $(x_i^1\vee x_i^2)$，我们构造约束 $R_{\mathsf{II}_1}(x_i^1,x_i^2,y_i,t)$。注意 $(x_i^1\vee x_i^2)\ \equiv\exists y_i\exists t R_{\mathsf{II}_1}(x_i^1,x_i^2,y_i,t)$。变量 t 冻结为 $\mathbf{1}$。变量 y_i 未被冻结，但我们可以通过添加约束 $R_{\mathsf{II}_1}(y_i,z_i,f,t)$ 来抵消其权重；一旦 f 被赋值为 $\mathbf{0}$，该约束就会强制 $z_i\equiv\neg y_i$。通过添加约束 $R_{\mathsf{II}_1}(f_j^1,f_j^2,f,t)$（其中 $j=1,\ldots,N$），我们迫使任何基数最小模型中的 f 被赋值为 $\mathbf{0}$。如果 $f=1$，这些约束会迫使所有 f_j^1,f_j^2 为 $\mathbf{1}$，也就是说，$1+2N$ 个变量。如果 $f=0$，则 f_j^1,f_j^2 中一个被迫取值为 $\mathbf{1}$，另一个被迫取值为 $\mathbf{0}$，也就是说，权重贡献仅为 N。

考虑 ϕ' 所有这些约束的合取。注意，在对新变量进行量化时，公式 ϕ 和ϕ' 等价。此外，ϕ 的模型与满足 $f=0$ 的 ϕ' 的模型一一对应。ϕ 的每个模型 σ 都可以扩展为 ϕ'的一个模型 σ'，其中 $\sigma'(f)=0$，其权重为 $|\sigma'|=|\sigma|+p+N+1$。

注意，ϕ 总是可满足的，因此根据上述观察，ϕ' 总是存在一个满足 $f=0$的模型。此外，满足 $f=1$ 的 ϕ' 的模型的基数至少为 $2N+2$；而满足 $f=0$的 ϕ'的模型的基数至多为 $n+p+N+1$，其中 n是 ϕ的变量数。现在，如果我们选择足够大的 N，例如 $N\geq p+n$，就能确保赋值 $f=1$ 绝不可能是基数最小模型。综上可知，ϕ 的基数最小模型包含 x，当且仅当 ϕ'的基数最小模型包含 x，由此完成证明。

□

引理 10。设 $\langle\Gamma\rangle=\mathsf{IN}_2$。则 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ 是 Θ_2^{P}-困难的。

证明。设 R_{IN_2} 是 IN_2，的最小弱基，即 $R_{\mathsf{IN}_2} = \mathbf{EVEN}^4_{4\neq}(x_1, \ldots, x_8) \wedge x_1x_4 \leftrightarrow x_2x_3$。矩阵表示如下。

$$R_{\mathsf{IN}_2} = \begin{pmatrix} 00001111 \\ 00110011 \\ 01010101 \\ 10101010 \\ 11001100 \\ 11110000 \end{pmatrix}$$

我们证明 $\textsc{Cms}(\text{或}^2) \leq^{\mathrm{P}}_{\mathrm{m}} \textsc{Cms}(R_{\mathsf{IN}_2})$。于是，结论由引理 5 和命题 4 得出。注意，$\text{或}^2(x^1_i, x^2_i) \equiv$

$$\exists a_i, b_i, c_i, d_i \; R_{\mathsf{IN}_2}(0, a_i, b_i, c_i, d_i, x^1_i, x^2_i, 1).$$

在这个余克隆中，我们可以表示 $f \neq t$，但不能表示 $f = 0$ 和 $t = 1$。我们的思路是用 f 和 t 代替 0 和 1 作为全局变量（也就是说，在所有约束中都相同），并强制它们在所有基数最小模型中取适当的值。这可以通过添加约束 $R_{\mathsf{IN}_2}(f, f, f, f, t, t, t, t)$ 来实现，该约束表示 $f \neq t$；再添加足够多的约束 $R_{\mathsf{IN}_2}(f_j, f_j, f_j, f_j, t, t, t, t)$，其中 f_j（对于 $j = 1$、.....、N）是新变量。

选择一个大于原公式中变量数量的 N，可以确保在任何基数最小模型中，f 被赋值为 0，而 t 被赋值为 1。利用这一技巧，我们可以仿照命题 8 证明中提出的归约，从而在保留基数最小模型的同时，将一个 或^2-公式转化为一个 R_{IN_2}-公式，进而给出从 $\textsc{Cms}(\text{或}^2)$ 到 $\textsc{Cms}(R_{\mathsf{IN}_2})$ 的归约。

□

引理11。设 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{IL}_2$。则 $\textsc{Cms}(\Gamma)$ 是 Θ^{P}_2-困难的。

证明。令 R_{IL_2} 为 IL_2，的最小弱基，即 $R_{\mathsf{IL}_2} = \mathbf{EVEN}^3_{3\neq}(x_1, \ldots\ldots, x_6) \wedge \mathbf{F}(x_7) \wedge \mathbf{T}(x_8)$。其矩阵表示如下。

$$R_{\mathsf{IL}_2} = \begin{pmatrix} 00011101 \\ 01110001 \\ 10101001 \\ 11000101 \end{pmatrix}$$

我们证明 $\textsc{Cms}(\mathsf{XOR}^3) \leq^{\mathrm{P}}_{\mathrm{m}} \textsc{Cms}(R_{\mathsf{IL}_2})$。于是结论由引理 6 和命题 4 得出。

令 (ϕ, x) 为 $\textsc{Cms}(\mathsf{XOR}^3)$ 的一个实例，其中 $\phi = \bigwedge_{i=1}^{p}(x^1_i \oplus x^2_i \oplus x^3_i)$。令 $\{u_i, v_i, w_i, u'_i, v'_i, w'_i \mid i = 1 \ldots p\} \cup \{t, f\}$ 为新变量。对于每个约束 $(x^1_i \oplus x^2_i \oplus x^3_i)$，我们构造约束 $R_{\mathsf{IL}_2}(u_i, v_i, w_i, x^1_i, x^2_i, x^3_i, f, t)$。注意，$\mathsf{XOR}^3(x^1_i, x^2_i, x^3_i) \equiv$

$$\exists f, t, u_i, v_i, w_i \; R_{\mathsf{IL}_2}(u_i, v_i, w_i, x^1_i, x^2_i, x^3_i, f, t).$$

变量 f, t 是冻结的，其余存在变量均可唯一确定，并且可以通过添加三个额外变量 u'_i, v'_i, w'_i 以及约束$R_{\mathsf{IL}_2}(u_i, v_i, w_i, u'_i, v'_i, w'_i, f, t)$ 来中和。

考虑 ϕ' 所有这些约束的合取。注意，在对新变量进行量化时，公式 ϕ 和ϕ' 等价。此外，ϕ 和ϕ' 的模型一一对应。ϕ 的每个模型 σ 都可以扩展为ϕ' 的一个模型 σ'，其权重为 $|\sigma'| = |\sigma| + 3p + 1$。因此，$x$ 属于 ϕ 的某个基数最小模型，当且仅当 x 属于 ϕ'的某个基数最小模型，从而完成证明。

□

引理 12。 设 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{IL}_3$。那么 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ 是 Θ_2^{P}-困难的。

证明。 令 R_{IL_3} 为 IL_3，的最小弱基，即 $R_{\mathsf{IL}_3} = \mathsf{EVEN}^4_{4\neq}(x_1、\ .....、\ x_8)$。矩阵表示如下。

$$R_{\mathsf{IL}_3} = \begin{pmatrix} 00001111 \\ 11000011 \\ 10100101 \\ 10010110 \\ 01101001 \\ 01011010 \\ 00111100 \\ 11110000 \end{pmatrix}$$

我们证明 $\mathrm{CMS}(\mathsf{XOR}^3) \leq^{\mathrm{P}}_{\mathrm{m}} \mathrm{CMS}(R_{\mathsf{IL}_3})$。因此，结论可由引理 6 和命题 4 得出。

余克隆 IL_3 中的所有关系都是补余的。特别地，经过对变量（列）进行某种置换后，R_{IL_3} 是 R_{IL_2}的补封闭。因此，我们采用与 IL_2，相同的归约思路，接着按照 IN_2情形中的做法进行：将 0 和 1 分别替换为 f和 t，表示 $f \neq t \equiv R_{\mathsf{IL}_3}(f,\ f,\ f,\ f,\ t,\ t,\ t,\ t)$，并为 f赋予较大的权重，从而迫使任何基数最小模型都包含 $f = 0$ 和 $t = 1$。

□

引理 13。 设 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{IL}_1$。那么 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ 是 Θ_2^{P}-困难的。

证明。 令 R_{IL_1} 为 IL_1，的最小弱基，即 $R_{\mathsf{IL}_1}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) = \mathsf{XOR}^3(x_1,\ x_2,\ x_3) \wedge \mathsf{T}(x_4)$。其矩阵表示如下。

$$R_{\mathsf{IL}_1} = \begin{pmatrix} 1001 \\ 0101 \\ 0011 \\ 1111 \end{pmatrix}$$

容易验证，$\mathsf{XOR}^3(x_1,\ x_2,\ x_3) \equiv \exists\ t\ R_{\mathsf{IL}_1}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$。注意，在 $R_{\mathsf{IL}_1}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$ 中，t 的值被冻结为 1。因此，通过引入一个新变量t 并对每个子句进行局部替换，我们可以构造从 $\mathrm{CMS}(\mathsf{XOR}^3)$ 到$\mathrm{CMS}(R_{\mathsf{IL}_1})$ 的归约。由引理 6 和命题 4 可得结论。□

引理 14。 令 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{IV}_2$。则 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ 是 Θ_2^{P}-困难的。

证明。 令 R_{IV_2} 为 IV_2，的最小弱基，即 $R_{\mathsf{IV}_2}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (x_1 \leftrightarrow x_2 x_3) \curlyvee \overline{\mathsf{F}}(\overline{x_4}) \wedge \mathsf{T}(x_5)$。其矩阵表示如下。

$$R_{\mathsf{IV}_2} = \begin{pmatrix} 00001 \\ 10101 \\ 11001 \\ 11101 \end{pmatrix}$$

容易验证 $\mathsf{OR}^2(x,\ y) \equiv \exists\ t,\ f\ R_{\mathsf{IV}_2}(t,\ x,\ y,\ f,\ t)$。注意，在 $R_{\mathsf{IV}_2}(t,\ x,\ y,\ f,\ t)$ 中，t 和 f 的取值是冻结的：它们在所有模型中分别取值为 1 和 0。因此，我们可以将 $\mathrm{CMS}(\mathsf{OR}^2)$ 归约到 $\mathrm{CMS}(R_{\mathsf{IV}_2})$。于是，结论由引理 5 和命题 4 得出。

□

引理 15。 设 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{IV}_1$。那么 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ 是 Θ_2^{P}-困难的。

证明。设 R_{IV_1} 为 IV1，的最小弱基，也就是说， $R_{\mathsf{IV}_1}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = (x_1 \leftrightarrows \overline{x_2}\,\overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \rightarrow x_4) \wedge$ 真值(x_5)。矩阵表示如下。

$$R_{\mathsf{IV}_1} = \begin{pmatrix} 00001 \\ 10101 \\ 11001 \\ 11101 \\ 11111 \end{pmatrix}$$

我们证明 CMS(或2) $\leq \mathrm{CMS}(R_{\mathsf{IV}_1})$。注意，或2$(x、\ y) \equiv \exists\ f、\ t\ R_{\mathsf{IV}_1}(t、\ x、\ y、\ f、\ t)$。注意， t 的值冻结为 1，但 f 的值并未冻结。然而，任何满足 $f = 1$ 的模型在将 f 翻转为 0 后仍将是一个模型。因此，在基数最小模型中，这个额外变量总会被赋值为 0。于是，通过引入两个新变量 f 和 t ，并对每个子句进行局部替换，我们可以构造一个从 CMS(或2) 到 $\mathrm{CMS}(R_{\mathsf{IV}_1})$ 的归约。由引理 5 和命题 4 可得结论。

□

L引理 16. 设 $\langle\Gamma\rangle = 是^{\mathsf{k}}_{00}$，其中 $k \geq 2$ 为某个整数。那么 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ 是 Θ^{P}_2-困难的。

证明。设 $R_{\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{00}}$ 是 $\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{00}$ 的最小弱基，即 $R_{\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{00}}(x_1、\ .....、\ x_k、\ x_{k+1}、\ x_{k+2}、\ x_{k+3}) =$ $(x_1 \vee \ldots \vee x_k) \wedge (x_{k+1} \rightarrow x_1 \cdots x_k) \wedge$假值$(x_{k+2}) \wedge$真值$(x_{k+3})$。

我们证明 CMS(或2) $\leq \mathrm{CMS}(R_{\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{00}})$。于是，由引理 5 和$_P$命题 4 可得结论。设 $(\phi = \bigwedge(x^1_i \vee x^2_i)\ x)$ 是 CMS(或2) 的一个实例。令 f和 t为$_{i=1P}$新变量。考虑公式 $\phi' = \bigwedge R_{\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{00}}(x^1_i,\ x^2_i,\ .....,\ x^2_i,\ f,\ f,\ t)$。注意，$_{i=1}$变量 f 和 t 在 ϕ'中被冻结。因此， x 属于 ϕ 的一个基数最小模型，当且仅当 x 属于 ϕ'的一个基数最小模型。

□

L引理 17。设 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{01}$，其中 $k \geq 2$为某个整数。则 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ 是 Θ^{P}_2-困难的。

证明。令 $R_{\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{01}}$ 为 $\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{01}$ 的最小弱基，即，

$R_{\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{01}}(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}) = (x_1 \vee \ldots \vee x_k) \wedge (x_{k+1} \rightarrow x_1 \cdots x_k) \wedge \mathsf{T}(x_{k+2})$. 我们证明 $\mathrm{CMS}(\mathsf{OR}^2) \leq \mathrm{CMS}(R_{\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{01}})$。由引理 5 和命题 4 即可得到结果。$_P$设 $(\phi = \bigwedge(x^1_i \vee x^2_i)\ x)$ 是 $\mathrm{CMS}(\mathsf{OR}^2)$ 的一个实例。令 f 和 t 为新变量。$_{i=1P}$ 考虑公式 $\phi' = \bigwedge R_{\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{01}}(x^1_i, x^2_i, \ldots, x^2_i, f, t)$。这一次， t 被冻结了，但 f 没有被冻结。$_{i=1}$ 尽管如此，如果存在一个满足 $f = 1$的模型，那么将 f翻转为 0 后，它仍然是一个模型。因此，这个归约保留了基数最小模型。因此， x 属于 ϕ 的一个基数最小模型，当且仅当 x 属于 ϕ'的一个基数最小模型。

□

完全相同地，但更容易地，我们得到如下结论。

引理 18. 设 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{02}$ 或 $\langle\Gamma\rangle = \mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{0}$ 。则 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$ 是 Θ^{P}_2-困难的。

证明。 我们采用与 $\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{01}$ 和 $\mathsf{IS}^{\mathsf{k}}_{00}$ 完全相同的归约，弱基的唯一差异在于不存在子句（ $x_{k+1} \rightarrow x_1 \cdots x_k$） ，因此将省略该子句。 □

定理 2 的证明至此完成。下面我们用余克隆的术语重新表述定理 2。

定理 19。 设 Γ 为一个有限的约束语言。问题 $\mathrm{CMS}(\Gamma)$是

- Θ_2^{P}-完全，当且仅当 $\mathsf{C} \subseteq \langle\Gamma\rangle \subseteq \mathsf{I}_2$ 对于 $\mathsf{C} \in \{\mathsf{IS}_{2\,0}, \mathsf{IL}_3, \mathsf{IL}_1\}$,
- 若 $\mathsf{ID} \subseteq \langle\Gamma\rangle \subseteq \mathsf{ID}_1$ 或 $\mathsf{IR}_1 \subseteq \langle\Gamma\rangle \subseteq \mathsf{IE}_2$，则可在多项式时间内求解，
- 否则是平凡的（Γ为 *0*-有效）

应用示例

现在来考虑以下用于溯因的相关性问题。一个命题溯因问题 (PAP) $\mathcal{P}$由一个元组 $\langle V, H, M, T\rangle$构成，其中 V是有限的变量集合，$H \subseteq V$是假设集合， $M \subseteq V$是显现集合，而 T是一个一致的理论，其形式为命题公式。集合 $\mathcal{S} \subseteq H$ 是 $\mathcal{P}$的一个解 （也称为解释），当且仅当 $T \cup \mathcal{S}$一致且 $T \cup \mathcal{S} \models M$成立。通常，我们关注的并非给定 PAP $\mathcal{P}$ 的任意解，而只是极小解；极小性是根据集合包含关系或较小基数来定义的。

关于子集极小性，Creignou 和 Zanuttini [4] 已在 Schaefer 框架下完整分类了相关性问题。这里我们考虑以下判定问题。

Card-min-Relevance
实例： PAP $\mathcal{P} = \langle V, H, M, T\rangle$ 和假设 $h \in H$。问题： h 是否相关？也就是说，$\mathcal{P}$ 是否存在一个基数极小解 $\mathcal{S}$，使得 $h \in \mathcal{S}$?

众所周知， Card-min-Relevance 问题在一般情形下是 Θ_3^{p}-完全的，在 Horn 情形下是 Θ_2^{p}-完全的 [9]。之后，人们研究了 Krom 情形[3]。迄今为止，关于 Card-min-Relevance 问题所得到的复杂性结果都受到限制，这是因为对 CardMinSat复杂性的了解尚不完整。借助定理 2，我们进一步证明，在仿射情形下， Card-min-Relevance 的复杂性与 Horn 和 Krom 情形相同。

定理 20。 Card-min-Relevance 即使理论被限制为异或合取范式公式，仍是 Θ_2^{p}-完全的。

证明。 该问题属于此复杂度类，是因为可以在多项式时间内判定异或合取范式公式的可满足性。困难性证明通过从$\mathrm{CMS}(\mathsf{XOR}^3)$进行归约得到。

考虑任意一个 $\mathrm{CMS}(\mathsf{XOR}^3)$ 实例 (ϕ, x_i)。设 $\phi = \bigwedge_{i=1}^{p}(x_i^1 \oplus x_i^2 \oplus x_i^3)$ 作用于变量 $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$，并令 $G = \{g_1, \ldots, g_p\}$ 为一组新引入的两两不同的变量。我们将 PAP $\mathcal{P} = \langle V, H, M, T\rangle$ 定义如下:

$$\begin{aligned} V &= X \cup G \\ H &= X \\ M &= G \\ T &= \{(x_i^1 \oplus x_i^2 \oplus x_i^3 \oplus \bar{g}_i) \mid 1 \le i \le p\} \end{aligned}$$

容易验证，ϕ 的模型与 $\mathcal{P}$ 的解一致。因此，当且仅当 x_i 属于 $\mathcal{P}$ 的基数极小解时，x_i 才属于 ϕ 的基数最小模型。

请注意，更准确地说，该证明表明，Card-min-Relevance 对 XOR[4]-公式是困难的。

□

结论

本文对所有有限约束语言 Γ 下的问题 CardMinSat(Γ) 给出了完整的复杂度分类：如果 Γ 是宽度 2 仿射、 Horn 或 0- 有效的，那么 CardMinSat(Γ) 可在多项式时间内求解；否则它是 Θ_2^{P}-完全的。Schnoor 和 Schnoor [22], 提出的弱基方法，结合 Lagerkvist [13] 对余克隆的极小弱基所作的描述，证明是完成这项工作的有力工具。正如引言中所述，理解 CardMinSat 的复杂性对于研究人工智能中若干基于基数最小化的推理任务至关重要。正如我们上文所阐述并概述的那样，我们认为，确立 CardMinSat(Γ) 的完整复杂度图景是这一研究方向未来发展的基石：这将使我们能够精确分析相关性问题和信念修正算子等问题的计算复杂性。为了获得更全面的图景，我们还计划研究此类问题的参数化复杂性。例如， [15] 对溯因问题的参数化复杂性给出了丰富的图景。然而，该图景中缺少所谓的溯因相关性问题。如今，随着 CardMinSat 的完整复杂度分类已经确立，补全这一图景似乎已指日可待。

致谢

本研究得到了数学国际研究中心（CIRM）的支持，项目参考编号为 *Research in pairs* 1886。

参考文献

[1] E. B¨ohler、S. Reith、H. Schnoor 和 H. Vollmer。布尔余克隆的基。*Inf.Process. Lett.*，96(2):59–66，2005年。[2] N. Creignou、R. Ktari 和 O. Papini。基数型信念修正算子的模型检测复杂性。载于*In Proc. ECSQARU 2017*，第10369卷 *LNCS*，第387–397页。Springer，2017年。[3] N. Creignou、R. Pichler 和 S. Woltran。在 Krom 片段中，困难的 SAT 相关推理任务会变得更容易吗？*Log. Methods Comput. Sci.*，14(4)，2018年。[4] N. Creignou 和 B. Zanuttini。命题溯因复杂性的完整分类。*SIAM J. Comput.*，36(1):207–229，2006年。[5] Nadia Creignou、Uwe Egly 和 Johannes Schmidt。基于逻辑的论证的复杂度分类。*ACM Trans. Comput. Log.*，15(3):19:1–19:20，2014年。

[6] Nadia Creignou 和 Heribert Vollmer。布尔约束满足问题：Post 格何时有帮助？载于 Nadia Creignou、Phokion G. Kolaitis 和 Heribert Vollmer 编，约束复杂性——当前研究主题概述 *[Dagstuhl研讨会成果]*，《计算机科学讲义》第5250卷，第3–37页。Springer，2008年。[7] M. Dalal。知识库修正理论的研究。载于*AAAI*论文集，第475–479页。AAAI Press / MIT Press，1988年。[8] T. Eiter 和 G. Gottlob。命题知识库修正、更新与反事实的复杂性。人工智能，57(2-3):227–270，1992年。[9] T. Eiter 和 G. Gottlob。基于逻辑的溯因的复杂性。*J. ACM*，42(1):3–42，1995年。[10] W. I. Gasarch、M. W. Krentel 和 K. J. Rappoport。OptP 是 NP 完全问题的常态。数学系统理论，28(6):487–514，1995年。[11] P. G. Jeavons。组合问题的代数结构。*Theor. Comput.Sci.*，200:185–204，1998年。[12] M. W. Krentel。优化问题的复杂性。*J. Comput. Syst. Sci.*，36(3):490–509，1988年。[13] V. Lagerkvist。布尔余克隆的弱基。*Inf. Process. Lett.*，114(9):462–468，2014年。[14] P. Liberatore 和 M. Schaerf。信念修正与更新：模型检测的复杂性。*J. Comput. Syst. Sci.*，62(1):43–72，2001年。[15] Y. Mahmood、A. Meier 和 J. Schmidt。Schaefer 框架下溯因的参数化复杂性。*J. Log. Comput.*，31(1):266–296，2021年。[16] G. Nordh 和 B. Zanuttini。命题溯因何以易解。人工智能，172(10):1245–1284，2008年。[17] G. Nordh 和 B. Zanuttini。冻结布尔偏余克隆。载于*ISMVL*论文集，第120–125页，2009年。[18] Gustav Nordh。命题周延复杂性中的三分法。载于 Franz Baader 和 Andrei Voronkov 编，程序设计、人工智能与推理逻辑，第*11*届国际会议，*LPAR 2004*，乌拉圭蒙得维的亚，*2005*年*3*月*14*日至*18*日，论文集，第3452卷计算机科学讲义，第257–269页。Springer，2004年。[19] C. H. Papadimitriou。计算复杂性。Addison-Wesley，1994年。[20] E. L. Post。数理逻辑的二值迭代系统。数学研究年刊，5:1–122，1941年。[21] T. J. Schaefer。可满足性问题的复杂性。载于*STOC*论文集，第216–226页。ACM，1978年。

[22] H. Schnoor 和 I. Schnoor。部分多态与约束满足问题。载于 N. Creignou、Ph. G. Kolaitis 和 H. Vollmer 编，《约束的复杂性》，第 5250 卷，第 229–254 页。施普林格出版社，柏林海德堡，2008年。

[23] K. Wagner。关于限制对 NP预言机的访问。载于《ICALP 论文集》，LNCS 第 317 卷，第 682–696 页。Springer，1988年。

余克隆	最小弱基	名称/指示
IBF	$(x_1 = x_2)$	-
IR_0	假值(x_1)	-
IR_1	真值(x_1)	-
IR_2	假值$(x_1) \wedge$ 真值(x_2)	-
IM	$(x_1 \to x_2)$	蕴含式且0-有效且1-有效
IM_0	$(x_1 \to x_2) \wedge$假值(x_3)	蕴含式且0-有效
IM_1	$(x_1 \to x_2) \wedge$ 真值(x_3)	蕴含式且 1-有效
IM_2	$(x_1 \to x_2) \wedge$ 假值$(x_3) \wedge$ 真值(x_4)	蕴含式
IS_0^k, $k \geq 2$	$\text{OR}^k(x_1, \ldots\ldots, x_k) \wedge$真值$(x_{k+1})$	宽度为 k 的正值
是$_{02}^k$, $k \geq 2$	或$^k(x_1, \ldots\ldots, x_k) \wedge$假值$(x_{k+1}) \wedge$真值$(x_{k+2})$	宽度为 k 的本质正
是$_{01}^k$, $k \geq 2$	或$^k(x_1, \ldots\ldots, x_k) \wedge (x_{k+1} \to x_1 \cdots x_k) \wedge$真值$(x_{k+2})$	-
是$_{00}^k$, $k \geq 2$	或$^k(x_1,\ldots, x_k) \wedge (x_{k+1} \to x_1 \cdots x_k) \wedge$假值$(x_{k+2}) \wedge$真值$(x_{k+3})$	宽度为 k的 IHS-B+
IS_1^k, $k \geq 2$	$\text{NAND}^k(x_1, \ldots\ldots, x_k) \wedge$假值$(x_{k+1})$	宽度为 k 的负值
IS_{12}^k, $k \geq 2$	$\text{NAND}^k(x_1, \ldots\ldots, x_k) \wedge$假值$(x_{k+1}) \wedge$真值$(x_{k+2})$	宽度为 k 的本质负
IS_{11}^k, $k \geq 2$	$\text{NAND}^k(x_1, \ldots\ldots, x_k) \wedge (x_1 \to x_{k+1}) \wedge \ldots \wedge (x_k \to x_{k+1}) \wedge$假值$(x_{k+2})$	-
IS_{10}^k, $k \geq 2$	$\text{NAND}^k(x_1, \ldots\ldots, x_k) \wedge (x_1 \to x_{k+1}) \wedge \ldots \wedge (x_k \to x_{k+1}) \wedge$假值$(x_{k+2}) \wedge$真值$(x_{k+3})$	宽度为 k 的 IHS-B-
ID	$(x_1 \neq x_2)$	严格2-仿射
ID_1	$(x_1 \neq x_2) \wedge$假值(x_3)真值(x_4)	2-仿射
ID_2	或$^2(x_1, x_2) \wedge (x_1 \neq x_3) \wedge (x_2 \neq x_4) \wedge$假值$(x_5) \wedge$真值$(x_6)$	Krom、二句法、2-CNF
IL	$\text{EVEN}^4(x_1, x_2, x_3, x_4)$	仿射且0-有效且1-有效
IL_0	$\text{EVEN}^3(x_1, x_2, x_3) \wedge$假值$(x_4)$	仿射且0-有效
IL_1	$\text{XOR}^3(x_1, x_2, x_3) \wedge$真值$(x_4)$	仿射且 1-有效
IL_2	$\text{EVEN}_{3\neq}^3(x_1, \ldots\ldots, x_6) \wedge$假值$(x_7) \wedge$真值$(x_8)$	仿射
IL_3	$\text{EVEN}_{4\neq}^4(x_1, \ldots\ldots, x_8)$	-
IV	$(\overline{x_1} \leftrightarrow \overline{x_2}\overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2} \vee \overline{x_3} \to \overline{x_4})$	对偶 Horn 且 1-有效和 0-有效
IV_0	$(\overline{x_1} \leftrightarrow \overline{x_2}\overline{x_3}) \wedge$ 假值(x_4)	定子句对偶 Horn
IV_1	$(\overline{x_1} \leftrightarrow \overline{x_2}\overline{x_3}) \wedge (\overline{x_2 \vee x_3} \to x_4) \wedge$ 真值(x_5)	对偶 Horn 和 1-有效
IV_2	$(\overline{x_1} \leftrightarrow \overline{x_2}\overline{x_3}) \wedge$ 假值$(x_4) \wedge$ 真值(x_5)	对偶 Horn
IE	$(x_1 \leftrightarrow x_2x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \to x_4)$	Horn 和 0-有效且1-有效
IE_0	$(x_1 \leftrightarrow x_2x_3) \wedge (x_2 \vee x_3 \to x_4) \wedge$假值$(x_5)$	Horn 和 0-有效
IE_1	$(x_1 \leftrightarrow x_2x_3) \wedge$真值$(x_4)$	确定霍恩
IE_2	$(x_1 \leftrightarrow x_2x_3) \wedge$假值$(x_4) \wedge$真值$(x_5)$	Horn
IN	$\text{EVEN}^4(x_1, x_2, x_3, x_4) \wedge x_1x_4 \leftrightarrow x_2x_3$	补余的且0-有效且1-有效
IN_2	$\text{EVEN}_{4\neq}^4(x_1、\ldots\ldots、x_8) \wedge x_1x_4 \leftrightarrow x_2x_3$	补余的
II	$(x_1 \leftrightarrow x_2x_3) \wedge (\overline{x_4} \leftrightarrow \overline{x_2}\overline{x_3})$	0-有效且1-有效
II_0	$(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1\overline{x_2} \leftrightarrow x_3) \wedge$ 假值(x_4)	0-有效
II_1	$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1x_2 \leftrightarrow x_3) \wedge$ 真值(x_4)	1-有效
II_2	$R_{3\neq}^{1/3}(x_1, \ldots\ldots, x_6) \wedge$假值$(x_7) \wedge$真值$(x_8)$	所有布尔关系

表1：Lagerkvist [13] 中所有具有最小弱基的有限生成余克隆。

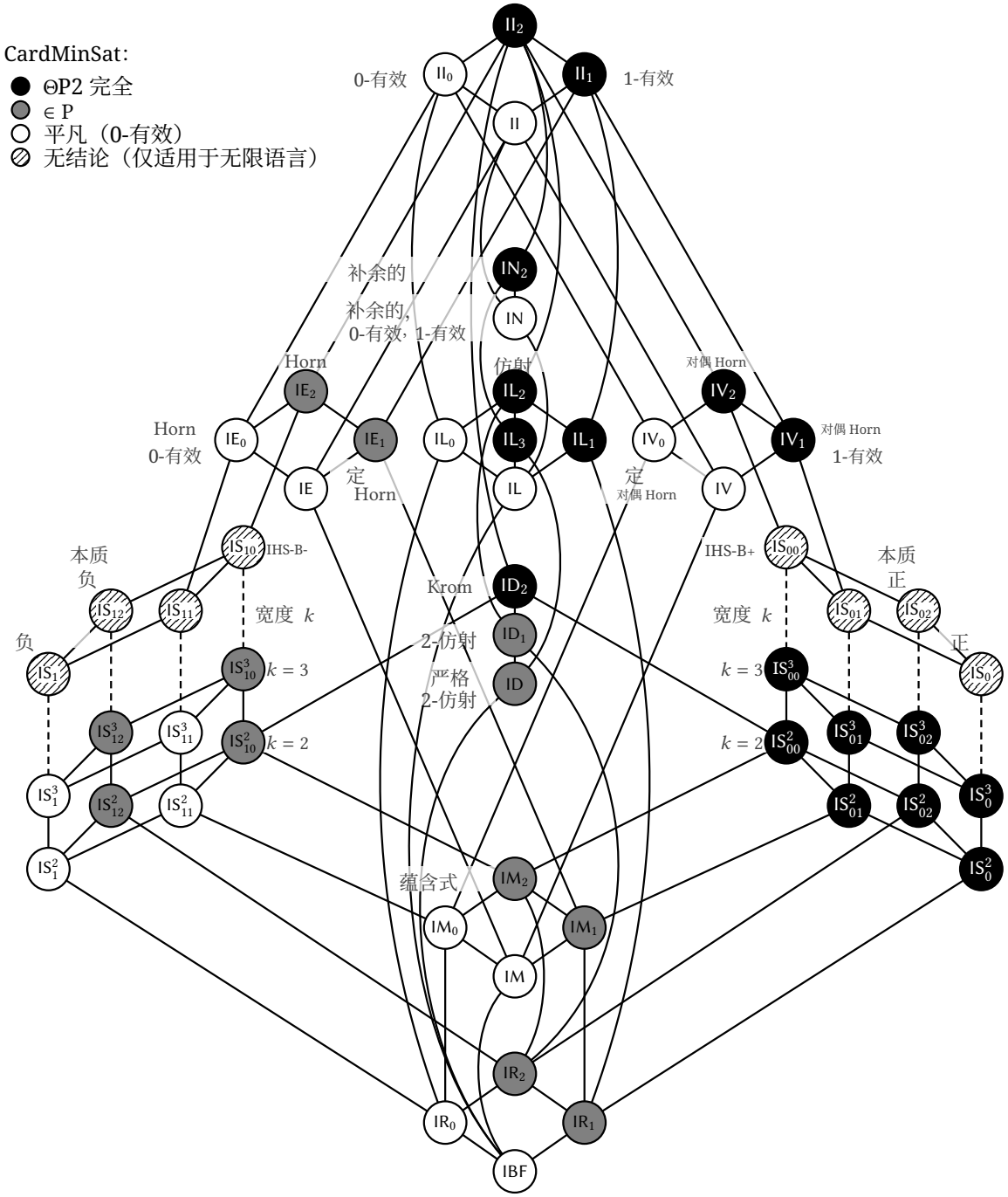

图1：在 Post 格上展示的 CardMinSat 复杂性概览。