arXiv:2303.01601v1 [econ.TH] 2 Mar 2023

时间不一致契约理论*

Camilo Hernández † Dylan Possamaï ‡

2023年3月6日

摘要

本文研究有限时域内的道德风险问题，其中包含连续支付和一次性支付，并涉及一位时序不一致的精明代理人和一位标准的效用最大化委托人。基于 Cvitanić, Possamaï, and Touzi [18] 提出的所谓动态规划方法，以及 Hernández 和 Possamaï [43], 近期公布的结果，我们提出了一种涵盖上述契约问题的方法。我们的主要贡献在于刻画委托人面临的道德风险问题。具体而言，我们证明，在对问题数据施加相对温和的技术条件时，委托人在较小的受限合同族上的期望效用上确界，等于其在所有可行合同上的上确界。然而，据我们所知，这一刻画导出了一类新颖的控制问题，其中涉及通过 Volterra 型控制来控制前向Volterra方程，以及无穷维随机目标约束。尽管这类问题本身具有挑战性，我们仍研究了代理人和委托人采用三种不同效用函数规范时的解，并根据最优合同的形式得出定性结论。一般情形仍有待未来研究。

关键词： 道德风险、时间不一致性、一致规划、复杂代理人、动态效用 s, 向后随机 Volterra 积分方程、随机目标。

本文关注的是委托人与具有时间不一致偏好的代理人之间的道德风险契约问题。委托—代理问题涉及双方之间的最优签约：委托人有意雇用代理人，并向其提供一份合同；若代理人接受合同，便可通过自己的行动影响某一随机过程，即最终结果。这类模型的一个关键特征是委托人在设计合同时可获得的信息量。文献中研究了三种经典情形：对称信息下的风险分担、隐蔽行动和隐蔽类型。本文只关注前两种情形。

在风险分担情形（也称第一最优情形）下，双方掌握相同的信息，必须就如何分担潜在风险达成一致。因此，委托人拥有全部议价能力，即 由她提供合同并决定代理人的行动——代理人必须遵从，否则将受到严厉惩罚。在隐蔽行动情形下，委托人无法充分了解代理人的行动：这些行动要么监控成本过高，要么根本无法观察。因此，与风险分担情形相比，委托人预期只能获得第二最优效用。由于代理人可以采取不符合委托人最佳利益的行动，这种情形也称为道德风险，而激励在其中起着至关重要的作用。事实上，委托人希望通过提供适当的合同来影响代理人的行动。

对于传统的（时间一致）代理人，这些模型的一个共同特点是，其求解最终归结为标准的随机控制理论。事实上，考虑到委托人的议价能力，第一最佳情形总是被表述为一个针对单个个体——委托人——的随机控制问题：委托人在参与约束下同时选择合同和行动。另一方面，在次优问题中，由于这是一个两阶段斯塔克尔伯格博弈，必须先针对任意给定的固定合同求解代理人的问题，然后才能研究委托人的问题。原则上，这会使问题的结构复杂得多。自连续时间模型问世以来，文献花了一段时间才提出一种一般方法，并得出次优问题也有相同结论。

*Camilo Hernández 感谢普林斯顿大学总统博士后奖学金、伦敦帝国理工学院查普曼奖学金以及哥伦比亚大学长江商学院奖学金的支持。

†美国普林斯顿大学运筹学、金融工程与风险工程系，camilohernandez@princeton.edu。
‡瑞士苏黎世联邦理工学院数学系，dylan.possamai@math.ethz.ch。

连续时间道德风险问题的研究源于 Holmström and Milgrom 的开创性论文[45]。在该模型中，委托人和代理人具有CARA效用函数，代理人的努力会影响产出过程（即受控扩散解）的漂移，但不影响波动率。由此得到的最优合同是总产出的线性函数。该模型 [45] 引起了广泛关注，因为看似更复杂的连续时间表述实际上更易于处理，能够得到严格论证，并为经济分析提供了有用的显式解。在当时文献占主导地位的大多数离散时间模型中，这些结果通常更难获得；综述参见 Laffont and Martimort [49]。继 [45], Schättler and Sung [71, 72] 之后，相关研究考察了所谓一阶方法的有效性，而 Sung [78, 79] 则将研究扩展到扩散控制和层级结构情形。最优合同的线性性质（这一特征也见于 [78], ）在 Müller [62, 63], 、Hellwig and Schmidt [40], 、Hellwig [39] 和 Sung [80, 81] 的研究中得到进一步探讨，分别涉及第一最佳问题、离散时间与连续时间模型之间的相互作用，以及稳健情形。值得注意的是，Williams [90] 和 Cvitanić, Wan, and Zhang [16] 利用所谓的随机最大值原理和正向–反向随机微分方程（简称 FBSDE）刻画了一般效用函数下的最优合同[1]。

然而，直到 Sannikov [68, 69] 提出的方法问世后，道德风险问题的研究才再次焕发生机，并最终发展为 Cvitanić, Possamaï, and Touzi [17, 18]所提出的系统性研究纲领。简而言之，该方法利用动态规划原理和反向随机微分方程（BSDEs）理论，将委托人问题重新表述为一个标准的最优随机控制问题，并引入一个额外的状态变量，即代理人的延续效用。这一方法已拓展至多个领域，包括随机期限契约（Lin, Ren, Touzi, and Yang）[55], 、从委托人视角考察模糊性特征（Mastrolia and Possamaï） [60] 以及 Hernán- dez Santibáñez and Mastrolia [44], 研究的委托人与有限个代理人签约（Élie and Possamaï） [25], 、多个委托人与同一代理人签约（ Mastrolia and Ren） [61], ，以及委托人与均值场代理人签约 [26],，还有最优电力需求响应合约中的应用（Aïd, Possamaï, and Touzi） [2], 或 Élie, Hubert, Mastrolia, and Possamaï [27]。这一方法所指明的研究路线十分清晰：（i）确定代理人价值过程的一般动态规划表示，（ii）用价值过程表示契约支付，（iii）在此类支付中优化委托人的目标。

总而言之，既有文献主要针对两个（或更多）标准效用最大化者之间的契约问题，而能够解释不符合经典理性假设的代理人行为的模型，正日益受到关注。事实上，从消费问题到金融，从犯罪到投票，再从慈善捐赠到劳动供给，许多应用领域都有明确证据表明存在这类态度；详细综述请参见 Rabin [67] 和 Dellavigna [19] 。这些情形的显著特点是，人类未必会像完全理性的决策者那样行事。实际上，在许多情况下，他们评估自身福祉的标准要比经典文献中所考虑的复杂得多。基于[18], 中提出的方法论，Hernández 和 Possamaï [43] 近期公布的研究结果揭示了将这一框架拓展至委托人与精明的时间不一致代理人之间的道德风险问题的可能性。这正是本文力求完成的任务。

一般而言，时间不一致性指的是不同日期消费的商品之间的边际替代率会随时间变化，参见 Strotz [77], Laibson [50], O'Donoghue 和 Rabin [64, 65]。例如，即时消费与某个较晚时点消费之间的边际替代率，与从更早的某个时点看这两个日期时的边际替代率不同。在许多应用中，这会导致"缺乏耐心的当下自我与有耐心的未来自我"之间产生冲突，参见 Brutscher [11]。从数学角度来看，这对应于这样一类随机控制问题：经典的动态规划原理，换言之，Bellman最优性原理，并不成立。

时间不一致性最早在[77] 中被提及，其中描述了三种不同类型的代理人：预先承诺型代理人不会修改最初决定的策略；天真型代理人会修改策略，但不考虑未来可能的修改；复杂代理人则会在考虑未来可能的修改后调整策略，并通过避免此类修改使其策略达到时间一致。对复杂代理人的全面研究始于 Ekeland 和 Pirvu [23], ，另见 Ekeland 和 Lazrak [21, 22], ；这后来成为 Björk、Khapko 和 Murgoci 所发展的一般马尔可夫理论的起点 [7]。然而，这些方法都无法处理典型的非马尔可夫问题，而这类问题必然会出现在涉及委托人与时间不一致代理人的契约问题中。Hernández 和 Possamaï [43] 提出了一种概率表述，能够

[1]关于一个一般框架，我们参考 Cvitanić 和 Zhang [15] 的专著；该书系统梳理了大量利用最大值原理的文献，涉及由布朗运动驱动的模型。

适用于一般的非马尔可夫结构，并为对 [22]中首次提出的均衡概念所作的一种细化提供了扩展动态规划原理（ DPP）。进而，扩展 DPP 引出了一个倒向随机微分方程（BSDE）系统，其与经典 HJB 方程类似。该系统具有根本性，因为其适定性是刻画价值函数和均衡的必要且充分条件，而均衡被确定为哈密顿量的最大化者。

将时间不一致特征纳入契约理论模型时，经济学文献中有大量涉及两个乃至三个时期的离散时间模型。这些文献的一个共同特点是采用准双曲贴现结构，以便在不同的机制设计问题中得出结论。然而，每个问题的求解方法仍局限于逐案分析。例如，Amador、Werning 和 Angeletos [4] 以及 Bond 和 Sigurdsson [8] 研究了消费与储蓄模型中承诺的可行性，而 Galperti [31] 则考察了向同时重视承诺与灵活性的人提供承诺装置的最优方式。Bisin、Lizzeri 和 Yariv [6] 考察了政策制定者如何回应存在自我控制问题的代理人的政治诉求；Halac 和 Yared [34] 研究了政府具有时间不一致偏好的财政政策模型；Lim 和 Yurukoglu [54] 则评估了时间不一致性对电力配送垄断监管的影响。Heidhues [38] 以及 Karaivanov 和 Martin [47] 分别将时间不一致偏好纳入信贷、抵押贷款和保险契约设计问题。Englmaier、Fahn 和 Schwarz [28], 、Gottlieb [32] 以及 Gottlieb 和 Zhang [33] 研究了企业与具有前瞻性、部分天真型以及天真型当下偏好消费者之间的签约问题。Yılmaz [91, 92] 分别考察了涉及一位前瞻性代理人和一位天真型代理人的重复道德风险问题。Ma [58] 研究了一个多期模型，其中合同可能面临重新谈判，且代理人的行动会产生长期影响。Balbus、Reffett 和 Wozny [5] 证明了采用广义贴现的动态模型中时间一致均衡的存在性。Kószegi [48]综述了契约理论中行为经济学研究的一些进展。

在连续时间情形下，动态模型有时更易处理，所得解也更具可解释性，但相关文献相当有限。Li 和 Qiu [52], 研究了预先承诺型代理人模型，其中非常数指数贴现因子是时间不一致性的来源；Djehiche 和 Helgesson [20], 则允许代理人采用均值—方差效用函数。Li、Mu 和 Yang [53], 、Liu、Mu 和 Yang [56], 、Liu、Huang、Liu 和 Mu [57]，以及 Wang、Huang、Liu 和 Zhang [88] 研究了双曲线折现情形下复杂代理人的情况。然而，这里的时间不一致性受到限制，只会在呈指数分布的离散随机时点显现。最后，Cetemen、Feng 和 Urgun [13] 研究了马尔可夫连续时间契约问题，以及由非指数折现引起的动态不一致性。作者的例子仅限于委托人具有时间不一致偏好、而代理人具有标准时间一致偏好的情形。总而言之，关于标准效用最大化委托人与复杂型时间不一致代理人之间的一般非马尔可夫连续时间契约问题，文献中仍缺乏全面分析。我们认为，这是因为问题的关键在于如何恰当地描述委托人的问题。对于经典的时间一致代理人和时间不一致的委托人，依照 [18], ，人们会预期委托人的问题可归结为一个带有额外状态变量的非马尔可夫时间不一致控制问题。正如 [43], 所研究的，这类问题由无穷多个倒向随机微分方程刻画，等价于所谓的 I 型扩展后向随机 Volterra 积分方程 [42]。因此，我们预期本文所研究的问题将为全面分析委托人和代理人双方均具有时间不一致性的问题打开大门。

我们的研究结果

我们在标准的效用最大化委托人和具有时间不一致偏好的代理人这一背景下构建问题。具体而言，代理人的报酬由一个所谓的后向随机 Volterra 积分方程的值给出。这种对代理人偏好的设定使我们能够同时涵盖经典的可分效用和不可分效用。与文献中的惯例一致，我们考虑问题的弱形式。状态过程 X 固定，而代理人的行动通过其在区间 $[0,T]$上的分布影响 X 的漂移。委托人选择一份合同，即一个过程和一个随机变量；它们适应于由状态过程路径 $X_{\cdot\wedge T}$ 生成的滤过，规定连续支付和终端支付，并满足代理人在时刻 $t=0$的参与约束。如上所述，我们的方法受到 [18] 的启发，也借鉴了 [43]从博弈论视角研究非马尔可夫时间不一致控制问题的近期成果。具体而言， [43] 为与任一均衡行动相关联的代理人价值过程建立了扩展动态规划原理。进而，这一结果被用于建立代理人的问题与一个无穷族倒向随机微分方程之间的直接联系。按照 [42], 的研究，这样一个方程组实际上等价于一个所谓的 I 型扩展后向随机 Volterra 积分方程。

此时，我们注意到经典时间一致情形与本文情形之间的第一个显著差异：代理人的问题通常与一个无穷方程族的解相关联，即后向随机 Volterra 积分方程，而非单个方程——倒向随机微分方程。尽管如此，代理人的偏好揭示了终端时刻 $t = T$ 后向随机 Volterra 积分方程的终端值与任一可容许合同所提供的终端支付之间的联系。这一关键洞见使我们能够将关注范围从可容许合同族缩小到一个经过精心设计的合同族；对于该合同族，代理人的价值过程具有一种动态规划表示，能够刻画代理人报酬的 Volterra 性质。借鉴时间一致情形的思路，这个受限合同族是根据代理人价值过程关于产出的一族一阶敏感度来定义的。对于这一合同族，我们证明，委托人将代理人的均衡行动识别为相应哈密顿量的最大化者。然而，与代理人的时间不一致偏好相呼应，由此产生的委托人问题通常远非标准的随机控制问题。

我们的主要贡献，即定理 3.9，在于刻画了委托人与复杂型时间不一致代理人所面临的道德风险问题。具体而言，该定理表明，在问题数据满足相对温和的技术条件时，委托人在受限合同族上的期望效用上确界，等于其在所有可行合同上的期望效用上确界。不过，据我们所知，这一刻画导出了一类新颖的控制问题。这类问题涉及通过 Volterra 型控制来控制前向 Volterra 方程，并包含随机目标约束。我们结果的一个新颖之处在于，该过程的动态方程同时涉及前向 Volterra 过程和 Volterra 控制的对角值，见定义 3.5。此外，随机目标约束源于代理人的时间不一致偏好，见（3.6）和注 3.7。

尽管这类问题本身充满挑战，我们仍针对代理人和委托人的效用函数采用三种不同规范，研究道德风险问题的解。例如，对于不可分的奖励泛函，如果代理人和委托人都具有指数效用，且代理人的报酬由其效用的贴现价值给出，那么问题就化为一个标准控制问题，见第 4.1 节和命题 4.3。在第 2 节中，我们给出的委托人与时间不一致代理人之间的风险分担（或第一最优）签约示例，也呈现了这一特征。第二个示例考虑具有可分报酬泛函的风险中性委托人和风险中性代理人。在这种情况下，我们的分析表明，可以降低问题的复杂性。具体而言，我们可以利用问题的结构，为委托人问题提出一种 试探形式，并给出一个具有验证定理精神的结果，见第 4.2 节和命题 4.10。最后一个示例回到第一种设定，但此时代理人的（指数）效用取决于折现收入。这一简单改动凸显了一般情形固有的困难；对于比定理 3.9 中受限合同族所规定的范围更小的一类合同，我们能够求解委托人问题，见第 4.3 节和命题 4.17。一般情形仍有待未来研究。

关于我们结果的定性意义，可以指出以下几点：

(i) 从方法论角度来看，与时间一致情形不同，道德风险问题的解通常无法归结为标准的随机控制问题。不过，效用最大化委托人与时序不一致的精明代理人之间的风险分担问题的解则可以，见第 2 节。只要允许代理人具有时间不一致偏好，第一最优问题与次优问题之间就会出现显著差异；

(ii) 我们分析得出的第二点启示与所谓线性合约的最优性有关。这类合同由一个固定部分和一项与状态过程终值成比例的条款构成，正如 [45]的开创性工作所示。这也是 Carroll [12] 在一个两阶段时序一致模型中得出的结论；在该模型中，委托人要求稳健性，即根据代理人可能采取的未知行动下可容许合同的最坏情形表现来评价这些合同。类似结果由 [80获得； 81] 以及 [60] 在连续时间情形下也得到了类似结果。此外，Abi Jaber 和 Villeneuve [1] 的结果表明，当产出由高斯 Volterra 过程（而非布朗运动）驱动时，最优合约仍然是线性的。我们研究了两个可被视为 [45], 的（时间不一致）变体的例子，分别称为折现效用，见第4.1节，以及折现收入效用，见第4.3节。在前一种情形中，由于时间不一致性来源简单，我们发现最优合约是线性的。在后一种情形中，我们发现除非不存在折现（如 [45]中所示），否则最优合约不再是线性的。我们想指出的是，对[45] 中模型的轻微偏离似乎会挑战线性合约被赋予的优点，这表明对于时间不一致代理人而言，它们通常将不再普遍是最优的；

(*iii*) 最后，我们评述最优合约的非马尔可夫性。众所周知，在 [45], 中的模型范围之外，时间一致性情形下的最优合约一般相对于状态过程而言是非马尔可夫的 X，见 [18]。实际上，对于具有可分离的时间不一致偏好的代理人，我们也发现了同样的结果，见命题4.10，参见第4.2节。因此，我们认为这是代理人时间不一致偏好的一种体现。

下面说明我们的一些结果，精确定义请参见第1 节。固定一个时间期限 $T>0$，并考虑一个具有风险中性偏好的复杂型时间不一致代理人。也就是说，如果代理人与委托人签订终端支付合同 ξ，代理人将寻求一个均衡策略 $\alpha^\star \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$，使得

$$\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\xi,\alpha)=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[f(T-t)\xi-\frac{1}{2}\int_t^T f(s-t)\alpha_s^2\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right],\ \text{and},\ X_t=x_0+\int_0^t\alpha_r\mathrm{d}r+B_t^\alpha,\ \mathbb{P}^\alpha\text{–a.s.}$$

委托人是风险中性的效用最大化者。也就是说，在所有满足代理人参与约束 $\mathrm{V}_0^{\mathrm{A}}(\xi,\ \alpha)\geq R_0$ 的、由 F_T^X-可测随机变量构成的可容许合同 $\xi\in\mathsf{C}$ 中，她最大化

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P}}=\sup_{\xi\in\mathcal{C}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\alpha^\star}}\left[X_T-\xi\right].$$

由于奖励中出现了一般贴现函数 f，代理人具有时间不一致性。下面我们总结并说明一些典型的贴现模型。在本节的所有说明中，我们取 $T=50$。

$f(t)$	IDR
$f_{\mathrm{e}}(t):=\mathrm{e}^{-\gamma t}$	γ
$f_{\mathrm{h}}(t):=(1+\alpha t)^{-\frac{\gamma}{\alpha}}$	$\frac{\gamma}{1+\alpha t}$
$f_{\mathrm{q}}(t):=(1-\beta)\mathrm{e}^{-t(\lambda+\gamma)}+\beta\mathrm{e}^{-t\gamma}$	$\gamma+\frac{\lambda(1-\beta)}{(1-\beta)+\beta\mathrm{e}^{t\lambda}}$

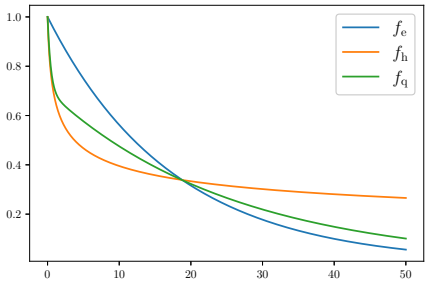


图1：$(\gamma,\ \alpha,\ \lambda,\ \beta)\in(0,\ \infty)^3\times[0,1]$。右侧图中，$\gamma_{\mathrm{e}}=0.0576$，$\alpha=4$，$\gamma_{\mathrm{h}}=1$，$\beta=0.7$，$\lambda=2.197$，$\gamma_{\mathrm{q}}=0.0387$。

经典经济学中最广泛使用的贴现模型是指数贴现函数 f_{e}。该模型体现了实证证据：未来效用的价值低于当前效用，但瞬时贴现率（IDR）由 $-f\prime(t)/f(t)$ 给出，且随时间保持恒定。为了能够解释消费者既有短期内即时满足的偏好，又有长期内耐心行事的偏好，Ainslie [3]提出了双曲线贴现模型。双曲线贴现会产生所谓的自我控制问题，例如，其在短期内的下降速度快于长期内，具体取决于 α的取值，而 γ 则起到基准贴现率的作用。这种定性特征在所谓的拟双曲线贴现模型中更加明显，该模型由 f_{q} 提出。该模型呈现出双曲线模型的短期不耐心，但在长期时间范围内，其瞬时贴现率与指数模型相似。对于这种贴现，β 衡量代理人赋予未来时期的价值，而 λ 衡量代理人对当前时期的额外估值。同样，γ 是基准贴现率。我们可以从左侧表格中的IDR列以及右侧三种模型的图示中看到这些现象。

我们回顾一下：当代理人寻求最大化其奖励时，只有在他使用指数模型对未来效用／奖励进行贴现的情况下，所面临的问题才是时间一致的。因此，在上述表述中取 f_{h} 或 f_{q}，会导致真正的时间不一致问题；在这类问题中，精明策略会对代理人在最优合约下采取的均衡行动产生实质影响。此外，容易看出：

- $f_{\mathrm{h}}(t)\longrightarrow f_{\mathrm{e}}(t)$，当 $\alpha\longrightarrow 0$ 时，
- $f_{\mathrm{q}}(t)\longrightarrow f_{\mathrm{e}}(t)$，当 $\beta\longrightarrow 1$ 或 $\lambda\longrightarrow 0$ 时。

对于任何足够规则的折现模型，包括刚才讨论的模型，我们在命题4.10 中发现，相应的最优合约为

$$\xi^\star=C(R_0)+\int_0^T\frac{z^\star(t)}{f(T-t)}\mathrm{d}X_t,$$

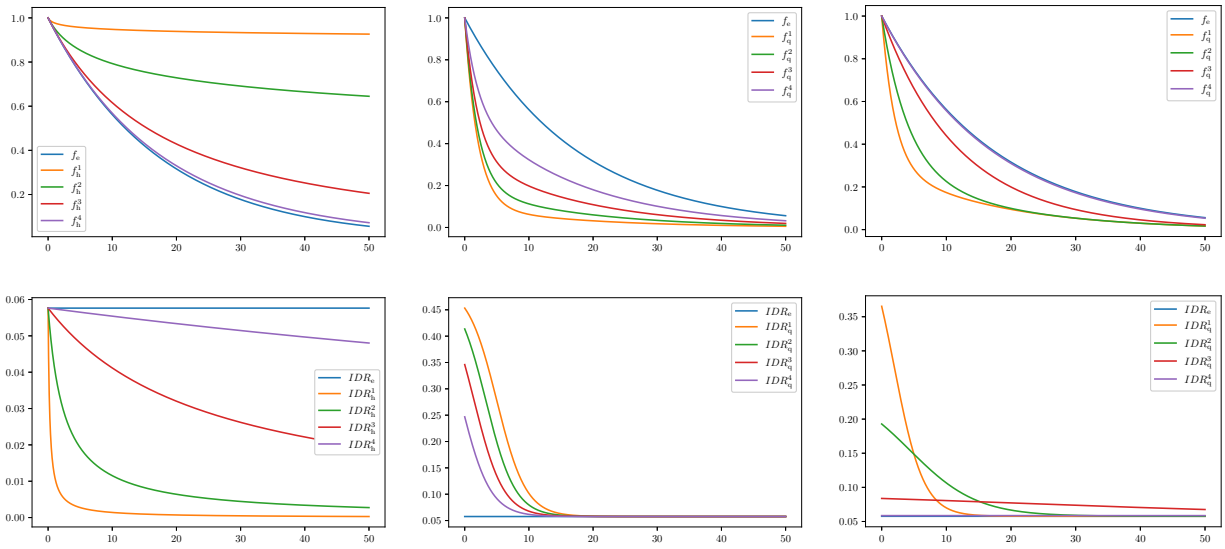
其中， $C(R_0)$ 是一个取决于代理人保留效用的常数。然而，第二项反映了上述（iii）中提到的终端支付的非马尔可夫性，并且与非指数折现结构有着内在联系。反之，每当 $f = f_{\mathrm{e}}$ 项 $z^{\star}(t)\ f(T-t)$ 变为常数时，就会得到众所周知的、关于产出过程终值呈线性的最优合约。

现在我们转而关注最优合约下代理人的均衡行动。下方图 2 对此进行了说明。三列分别研究上述模型在 f_{h}、 f_{q} 和 f_{q} 下的情形，其中 α、 β 和 λ 取不同值。鉴于上文提到的与指数折现的联系，所有列均以蓝色呈现 $f_{\mathrm{e}}(t)$，作为真正的时间一致基准模型进行比较。第一行展示折现函数的取值，并以图示方式验证其极限。第二行展示相应的瞬时折现率（IDR），最后一行则展示均衡行动。首先需要指出的是，指数折现下均衡行动的形状符合直觉：它是凸且递增的，其形状与指数折现项成反比，这反映出在最优策略下，折现后的最优努力应保持不变。

我们先来看双曲线折现代理人的情形。可以看到，随着 α 增大，复杂代理人在均衡努力路径上会在初始阶段加大努力程度。此外，均衡努力随时间变化的速率（凸性／凹性）在 α 较小时为正，在其较大时为负，例如 例如 α_4 和 α_2 分别对应这两种情况。这意味着，随着时间不一致性加剧，精明策略会促使代理人在博弈初始阶段付出更多努力。这体现了精明策略如何帮助克服拖延。

现在来看中间列和右列中的准双曲线代理人。随着 β 降低，代理人对未来时期赋予的权重减少，相较于未来满足更看重当下。换言之，时间不一致性加剧，复杂代理人决定将一部分努力推迟到未来时期。在这种情况下，尽管采取了精明策略，代理人仍无法克服拖延。最后，随着 λ 降低，代理人对当前时期的权重减小；由于其在该时期的时间不一致性更为严重，因此这种不一致性有所减弱。然而，我们仍然发现，尽管初始努力降低，且对于 λ递减的这些取值（即 λ_1 和 λ_2），拖延占据主导，但当代理人对当前的估值显著降低至 λ_3 和 λ_4 时，其努力反而增加，克服了拖延，并达到时间一致的努力水平。我们认为，通过考察相应的IDR图，可以调和准双曲贴现下均衡努力的不同表现。固定 t 时，IDR关于 β单调递减；而对于某些 t 的取值，当 λ降低时，IDR会发生振荡。

关于这些行为的全面研究留待未来开展。具体而言，研究将我们的结果推广至 Harris 和 Laibson 中所谓的即时满足模型会很有意思[37], 该模型实现了 f_{ig} 由 $f_{\mathrm{q}} \longrightarrow f_{\mathrm{ig}}$给出， $\lambda \longrightarrow \infty$而这些内容超出了本文的讨论范围。



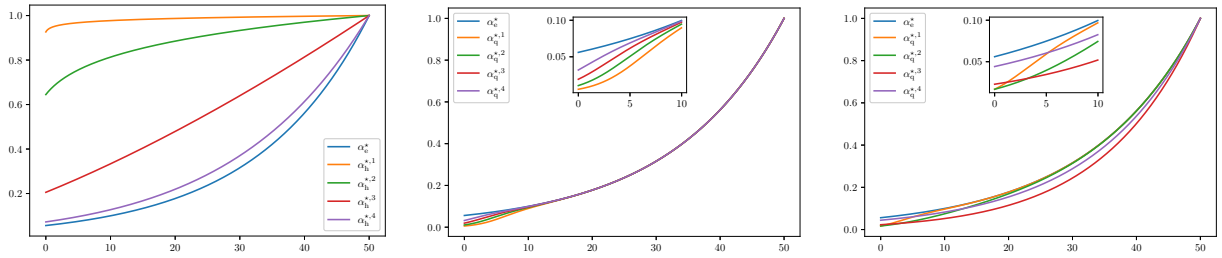


图1：第一行：贴现模型。第二行：IDR。第三行：最优合约下代理人的均衡行动。 $\gamma_{\mathrm{e}} = \gamma_{\mathrm{h}} = \gamma_{\mathrm{q}} = 0.0575$。左：$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = (4, 0.4, 0.04, 0.004)$。中：$\lambda = 0.439$，$(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4) = (0.1, 0.19, 0.343, 0.569)$。右：$\beta = 0.3$，$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (0.439, 0.1927, 0.0371, 0.0013)$。

本文其余部分安排如下。第1 节阐述问题的构建，第2节在三种不同的偏好规范下，给出了第一最佳问题的解。这些例子的共同特点是，问题归结为求解一个标准的随机控制问题。第3节介绍我们针对次优问题的一般方法，并给出定理3.9的证明。第4 节专门分析了代理人在不同时间不一致偏好规范下的三个例子。最后，我们设有附录一节，汇集了关于具有后向随机Volterra积分方程奖励的时间不一致控制问题的一些新结果及其他技术性结果。

记号： $\mathbb{R}_+$ 表示非负实数集合。设 $(E, \mathsf{k}\cdot\mathsf{k}_E)$ 为任意有限维赋范空间。给定一个正整数 p 和一个非负整数 q，$\mathsf{C}^q(E, \mathbb{R}^p)$ 表示从 E 到 $\mathbb{R}^p$ 的函数空间，其中的函数至少 q 次连续可微。在 $q = 0$ 为连续函数的情况下，我们省略对 q 的依赖，记作 $\mathsf{C}([0,T], \mathbb{R}^p)$。用 I_n 表示 $\mathbb{R}^{n\times n}$ 上的单位矩阵。$\mathbb{S}_n^+(\mathbb{R})$ 表示 $n\times n$ 对称半正定矩阵的集合。$\mathrm{Tr}[M]$ 表示矩阵 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 的迹。

设 $(E, \mathsf{k}\cdot\mathsf{k}_E)$ 为任意有限维赋范空间。对于一个 σ-代数 F，$\mathsf{P}_{\mathrm{meas}}(E, \mathsf{F})$ 表示 F-可测的 E-值函数空间。$\mathsf{P}^2_{\mathrm{meas}}(E, \mathsf{F})\big)$ 表示由满足以下条件的 $U = (U_t^s)^{(s,t)\in\mathbb{R}^2_+}$ 组成的空间：$(\mathbb{R}^2_+ \times \Omega, \mathsf{B}(\mathbb{R}^2_+) \otimes \mathsf{F}) \longrightarrow (\mathsf{B}(E)\ E)$：$s \longmapsto U^s$ 可测。对于 (Ω, F) 上的滤过 $\mathbb{F} := (\mathsf{F}_t)_{t\geq 0}$，$\mathsf{P}^{\mathrm{pred}}(E, \mathbb{F})$（分别为 $\mathsf{P}^{\mathrm{prog}}(E, \mathbb{F})$、$\mathsf{P}^{\mathrm{opt}}(E, \mathbb{F})$、$\mathsf{P}_{\mathrm{meas}}(E, \mathbb{F})$）表示 E 值的 $\mathbb{F}$-可预测过程（分别为 $\mathbb{F}$-渐进可测过程、$\mathbb{F}$-选过程、$\mathbb{F}$-适应且可测过程）构成的集合。

1 问题陈述

我们固定两个正整数 n 和 d，分别表示代理人所控制过程的维数，以及驱动该受控过程的布朗运动的维数。我们固定时间期限 $T > 0$，并考虑典范空间 $\Omega := \mathsf{C}([0,T], \mathbb{R}^n)$，其典范过程为 X，其一般元素记作 x。我们用 x 和 $\mathbf{x}$ 表示 $\mathbb{R}$ 值变量。

我们令 F 为 Ω 上的博雷尔 σ-代数（采用一致收敛拓扑），并用 $\mathbb{F}^X := (\mathsf{F}_t^X)_{t\in[0,T]}$ 表示 X 的自然滤过。我们令 A 为有限维欧几里得空间的一个紧子空间（通常，A 是某个正整数 k 对应的 $\mathbb{R}^k$ 的子集），控制将在其中取值。

1.1 受控状态方程

我们固定一个有界的博雷尔可测映射 $\sigma\colon\ [0,T]\times\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times d}$，以及一个初始条件 $x_0 \in \mathbb{R}^n$，并假设存在唯一解，记为 $\mathbb{P}$，使得对于该解，以下鞅问题成立：X 是一个 $(\mathbb{F}^X, \mathbb{P})$–局部鞅，且 $X_0 = x_0$ 以概率 1 成立，并且 $\mathrm{d}\langle X\rangle_t = \sigma_t(X_{\cdot\wedge t})\sigma_t^\top(X_{\cdot\wedge t})\mathrm{d}t$。必要时扩充原概率空间（参见 Stroock 和 Varadhan [76, 定理 4.5。2]），我们可以找到一个取值于 $\mathbb{R}^d$ 的布朗运动 B，使得

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma_s(X_{\cdot\wedge r})\mathrm{d}B_r,\ t \in [0,T].$$

现在令 $\mathbb{F} := (\mathsf{F}_t)_{t\in[0,T]}$ 为 $\mathbb{P}$–增广，我们假设其为右连续。我们回顾一下，鞅问题解的唯一性意味着，对于 $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$-鞅，可预测鞅表示性质成立；这些鞅可以表示为关于 X 的随机积分（参见 Jacod 和 Shiryaev [46, 定理 III.4.29]）。我们还指出，$\mathbb{F}$ 的右连续性保证 $(\mathbb{F}, \mathbb{P})$ 满足

布卢门撒尔零一律，因此所有 F_0–可测随机变量都是确定性的。需要指出的是，这些假设是现有连续时间委托—代理问题文献中的标准假设。

于是，我们可以引入漂移泛函 $b\colon [0,T]\times\Omega\times A\longrightarrow\mathbb{R}^d$，并假设它关于其所有自变量均为博雷尔可测。回顾一下，对于任意 A 值的、 $\mathbb{F}$-可预测过程 α ，只要

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\int_0^T b_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\cdot \mathrm{d}B_r-\frac{1}{2}\int_0^T \big\|b_s\big(X_{\cdot\wedge s},\alpha_r\big)\big\|^2\mathrm{d}r\right)\right]<\infty, \tag{1.1}$$

我们便可以在 $(\Omega,\ \mathsf{F}_T)$ 上定义概率测度 $\mathbb{P}^\alpha$ ，其相对于 $\mathbb{P}$ 的密度为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}^\alpha}{\mathrm{d}\mathbb{P}}:=\exp\left(\int_0^T b_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\cdot \mathrm{d}B_r-\frac{1}{2}\int_0^T \big\|b_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\big\|^2\mathrm{d}r\right).$$

此外，根据吉尔萨诺夫定理，过程 $B^\alpha:=B-\int_{\cdot\,0} b_r(X_{\cdot\wedge r},\ \alpha_r)\mathrm{d}r$ 是一个 $\mathbb{R}^d$ 值的 $(\mathbb{F},\ \mathbb{P}^\alpha)$-布朗运动，并且有

$$X_t=x_0+\int_0^t\sigma_r(X_{\cdot\wedge r})b_r(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r)\mathrm{d}r+\int_0^t\sigma_r(X_{\cdot\wedge r})\mathrm{d}B_r^\alpha,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

需要强调的是，我们采用的是问题所谓的弱形式。这意味着状态过程 X 是固定的；与典型的强形式不同，布朗运动和概率测度并不固定。事实上，选择 α 就对应于选择概率测度 $\mathbb{P}^\alpha$ ，因而会影响过程 X 的分布。

1.2 代理人的问题

我们旨在涵盖代理人时间不一致效用函数的各种规范。为了说明我们的表述方式，我们先非正式地讨论契约理论中赋予代理人的奖励泛函通常具有的性质。合同 $\mathcal{C}$ 由一个三元组 (π,ξ) 构成，其中 π 属于 $\mathbb{F}$-可预测过程的集合，而 ξ 是一个 $\mathcal{F}_T$-可测随机变量。直观而言，合同包含一系列连续支付流 $\pi:=(\pi_t)^{t\in[0,T)}$，以及终端补偿 ξ。可容许合同 Ξ 类将在第1.3 节中引入，届时会施加一些可积性条件。

给定合同 C，时间不一致代理人在问题开始时通过选择行动 α 所获得的价值通常具有如下形式

$$\mathrm{V}_0^{\mathrm{A}}(\mathcal{C},\alpha):=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(0,\xi,C_{0,T}^\alpha)\right],\ \text{with } C_{t,T}^\alpha:=\int_t^T c_r(t,X_{\cdot\wedge r},\pi_r,\alpha_r)\mathrm{d}r,$$

其中 $\mathsf{U}_{\mathrm{A}}\colon [0,T]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},(t,\mathsf{x},\mathsf{c})\longmapsto\mathsf{U}_{\mathrm{A}}(t,\mathsf{x},\mathsf{c})$ 表示代理人效用函数，$C_{t,T}^\alpha$表示累积净成本泛函。我们强调，U_{A} 和 c 对 t 的一般依赖性反映了时间不一致性的来源。在经典文献中，效用通常分为两类，即

(i) 可分效用函数，即 也就是说$\mathsf{U}_{\mathrm{A}}(t,\ \mathsf{x},\ \mathsf{c})=\mathsf{U}_{\mathrm{A}}(t,\ \mathsf{x})-\mathsf{c}$,

(ii) 不可分离效用函数，即 也就是说$\mathsf{U}_{\mathrm{A}}(t,\ \mathsf{x},\ \mathsf{c})=\mathsf{U}_{\mathrm{A}}(t,\ \mathsf{x}-\mathsf{c})$。

例如，在可分情形下，代理人的价值具有熟悉的形式

$$\mathrm{V}_0^{\mathrm{A}}(\xi,\alpha)=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(0,\xi)-\int_0^T c_r(0,X_{\cdot\wedge r},\pi_r,\alpha_r)\mathrm{d}r\right],$$

根据布卢门撒尔零一律，该式满足 $\mathsf{V}_0^{\mathrm{A}}(\xi,\ \alpha)=Y^{0,\ \alpha}_{\cdot\ 0}$，对于 $Y^{0,\ \alpha}_{\cdot\ 0}$，$(Y^{0,\ \alpha}_{\cdot},\ Z^{0,\ \alpha}_{\cdot})$ 的解所对应的倒向随机微分方程中第一个分量的初始值

$$Y_t^{0,\alpha}=\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(0,\xi)+\int_t^T\big(\sigma_r(X_{\cdot\wedge r})b_r(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r)Z_r^{0,\alpha}-c_r(0,X_{\cdot\wedge r},\pi_r,\alpha_r)\big)\mathrm{d}r-\int_t^T Z_r^{0,\alpha}\cdot\mathrm{d}X_r,\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

此外，在代理人以常数因子 ρ 进行指数贴现的（时间一致）情形下，即$\mathsf{U}_{\mathrm{A}}(t,\mathsf{x})=\mathsf{e}^{-\rho(T-t)}\mathsf{U}_{\mathrm{A}}(\mathsf{x})$，且 $c_t(s,x,p,a)=\mathsf{e}^{-\rho(t-s)}c_t(x,p,a)$，则有

$$Y_t^{0,\alpha}=\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(\xi)+\int_t^T\big(\sigma_r(X_{\cdot\wedge r})b_r(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r)Z_r^{0,\alpha}-c_r(X_{\cdot\wedge r},\pi_r,\alpha_r)-\rho Y_r^{0,\alpha}\big)\mathrm{d}r-\int_t^T Z_r^{0,\alpha}\cdot\mathrm{d}X_r,\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

前述表示对应于一种称为递归效用的效用形式，具体而言，是标准加性效用，参见 Epstein 和 Zin [29]。值得指出的是，类似的论证也适用于非可分指数效用的情形；更多递归效用的例子可参见 El Karoui、Peng 和 Quenez [24]。直观而言，递归效用可视为经典可分或不可分效用的一种扩展，其中瞬时效用取决于瞬时行动 α_t 以及未来效用，即 $Y^{0,\alpha}_{\cdot,t}$。沿着这些思路，我们可以考虑如下形式的奖励泛函：$\mathrm{V}^{\mathrm{A}}_0(\xi,\alpha) = Y^{0,\alpha}_{\cdot,0}$ 其中，数对 (Y^α, Z^α) 满足 BSVIE

$$Y^{t,\alpha}_t = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}(t,\xi) + \int_t^T h_r\big(t, X_{\cdot\wedge r}, Y^{t,\alpha}_r, Z^{t,\alpha}_r, \pi_r, \alpha_r\big)\mathrm{d}r - \int_t^T Z^{t,\alpha}_r \cdot \mathrm{d}X_r,\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ t\in[0,T]. \tag{1.2}$$

令 U_{A} 和 h 都依赖于 t，就可以采用一般的贴现结构，并将时间不一致性纳入代理人的偏好。此外，前面的讨论表明，这一表述也涵盖了时间不一致的递归效用。

注 1.1. 在马尔可夫框架下，奖励泛函由 (1.2) 给出的时间不一致代理人，已由 Wei、Yong 和 Yu [89], Wang andYong [83] 以及 Hamaguchi [35]进行研究。在这些研究中，受控状态过程的动态方程采用强形式给出；遵循博弈论方法，他们针对各自的设定，考虑了对 [23] 中均衡概念的细化。在本文中，我们使用 后向随机 Volterra 积分方程 对代理人的奖励进行建模，并扩展 [43]提出的非马尔可夫框架。

现在让我们恰当地介绍这一 表述。我们定义可容许行动集，并回顾 A 是紧致的； as

$$\mathcal{A} := \{\alpha \in \mathcal{P}_{\mathrm{pred}}(A,\mathbb{F}) : (1.1)\ \text{holds}\},$$

并假设给定联合可测映射 $h\colon [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times A \longrightarrow \mathbb{R}$，$h.(\cdot\ y,\ z,\ p,\ a) \in \mathbb{P}^{\mathrm{prog}}(\mathbb{R},\ \mathbb{F})$，对任意 $(y,\ z,\ p,\ a) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times A$ 均成立，以及 $\mathrm{U}_{\mathrm{A}}\colon [0,T]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，且满足以下一组假设。

假设 1.2。 (i) 对于每个 $s \in [0,T],\ \mathrm{x} \longmapsto \mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\ \mathrm{x})$ 都是可逆的，即 存在一个映射 $\mathrm{U}^{(-1)}{}_{\mathrm{A}}\colon [0,T]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，使得 $\mathrm{U}^{(-1)}{}_{\mathrm{A}}(s,\ \mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\ \mathrm{x})) = \mathrm{x}$；

(ii) $(s,y,z) \longmapsto h_t(s,x,y,z,p,a)$（分别是 $s \longmapsto U^{\mathrm{A}}(s,x)$）连续可微。$\nabla h.(s,\cdot\ u,v,y,z,p,a) \in \mathbb{P}^{\mathrm{prog}}(\mathbb{R},\mathbb{F})$ 对所有 $s\in[0,T]$ 均成立，其中 $\nabla h\colon [0,T]^2\times\Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)^2\times\mathbb{R}\times A \longrightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$\nabla h_t(s,x,u,v,y,z,p,a) := \partial_s h_t(s,x,y,z,p,a) + \partial_y h_t(s,x,y,z,p,a)u + \sum_{i=1}^n \partial_{z_i} h_t(s,x,y,z,p,a)v_i;$$

(iii) 对于 $\varphi\in\{h,\partial_s h\}$，$(y,z,a) \longmapsto \varphi_t(s,x,y,z,p,a)$ 是一致 *Lipschitz* 连续的，即 存在某个 $C>0$，使得 $\forall(s,t,x,p,y,\tilde{y},z,\tilde{z},a,\tilde{a})$，

$$|\varphi_t(s,x,y,z,p,a) - \varphi_t(s,x,\tilde{y},\tilde{z},p,\tilde{a})| \le C\big(|y-\tilde{y}| + |\sigma_t(x)^\top(z-\tilde{z})| + |a-\tilde{a}|\big).$$

注 1.3. 我们来评论一下前述假设。第一个条件保证我们可以将效用单位与终端合同支付对应起来。事实上，效用 $\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\xi)$ 足以通过 $\mathrm{U}^{(-1)}{}_{\mathrm{A}}$ 确定支付ξ。第二个假设则保证了规定代理人报酬的数据关于不一致性来源这一变量具有足够的正则性。

我们假设代理人有一个保留效用 $R_0\in\mathbb{R}$，低于该效用时他会拒绝接受合同。代理人于 $t=0$ 时受聘，委托人提供的合同 $\mathcal{C}$ 假设只能获取有关状态过程 X 的信息，并且为代理人提供连续支付流以及在终端时刻 T 支付补偿。因此，我们将 $\mathfrak{C}_0$（可积性空间的定义见第 3.1 节）定义为以下合同的集合 $\mathcal{C} = (\pi,\xi) \in \Pi\times\Xi$，其对应的族为

- Ξ 属于 $\mathbb{R}$-取值于，且关于 $\mathbb{F}_T$ 可测的 ξ，使得 $\big((\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\xi))^{s\in[0,T]},\ (\partial_s\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\xi))_{s\in[0,T]}\big) \in \mathbb{L}^{2,\ 2}\times\mathbb{L}^{2,}{}_2$,
- 取值于 $\mathbb{R}$，且 $\mathbb{F}$-可预测的 π，使得 $\big((h.(s,\cdot\,0,0,\pi.,0))^{s\in[0,T]},\ (\partial_s h.(s,\cdot\,0,0,\pi.,0))_{s\in[0,T]}\big) \in \mathbb{L}^{2,2}$ $\times\,\mathbb{L}^{2,2.}$

若受聘，代理人会选择一个努力策略 $\alpha\in\mathrm{A}$，并且在任意时刻 $t\in[0,T]$，他从时刻 t 起通过 α 获得的价值为

$$\mathrm{V}^{\mathrm{A}}_t(\mathcal{C},\alpha) := Y^{t,\alpha}_t,$$

其中，这一对（Y^{α}， Z^{α}）满足后向随机Volterra积分方程（1.2）。我们回顾一下，V^{A}（$\mathcal{C}$ α）在文献中通常称为延续效用。我们始终将V^{A}（$\mathcal{C}$ α）解释为一个从 $[0,T]\times\mathcal{C}$（$[0,T]$， $\mathbb{R}^n$）到 $\mathbb{R}$的映射。

在给定奖励的情况下，代理人的问题具有时间不一致性。因此，我们假设代理人是所谓的复杂型时间不一致代理人：他意识到自己的不一致性，能够预见到这一点，从而使自己的策略具有时间一致性。因此，代理人的问题可以解释为一场人内博弈，在这场博弈中，他试图平衡自己的所有偏好，并寻求子博弈完美纳什均衡。我们回顾一下 [43]，中引入的均衡策略定义；1.6中的备注提供了进一步说明。令 $\{\alpha^{\star},\alpha\}\subseteq\mathcal{A}$,$t\in[0,T]$以及 $\ell\in(0,T-t]$，定义 $\nu\otimes_{t+\ell}\nu^{\star}:=\nu\mathbf{1}_{[t,t+\ell)}+\nu^{\star}\mathbf{1}_{[t+\ell,T]}$。

De定义 1.4。 令 $\alpha^{\star}\in\mathcal{A}$。若对于任意 $\varepsilon>0$, $\ell_{\varepsilon}>0$，都有……，则称 $\alpha^{\star}$ 为均衡，其中

$$\ell_{\varepsilon}:=\inf\left\{\ell>0:\exists\alpha\in\mathcal{A},\ \mathbb{P}\left[\left\{x\in\Omega:\exists t\in[0,T],\ \mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\mathcal{C},\alpha^{\star})<\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\mathcal{C},\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^{\star})-\varepsilon\ell\right\}\right]>0\right\}.$$

给定合同 $\mathcal{C}$，我们称$\mathcal{E}(\mathcal{C})$ 为与$\mathcal{C}$相关的所有均衡的集合。

因此，代理人的目标是：给定委托人所保证的合同$\mathcal{C}$ ，选择一项符合其精明偏好的努力，即 求出 $\alpha^{\star}\in\mathcal{E}(\mathcal{C})$。与经典的时间一致效用最大化者不同，对于时序不一致的精明代理人，可能存在多个均衡，且其奖励可能各不相同，例如参见 [51]。本文将仅关注诱导出唯一均衡的合同集合。关于这一点的补充说明，见下文的注。

定义 1.5. $\mathfrak{C}_o$ 表示导致唯一均衡的合同$\mathcal{C}\in\mathfrak{C}_0$ 族，即 $\mathcal{E}(\mathcal{C})=\{\alpha^{\star}\}$。

总而言之，对于 $\mathcal{C}\in\mathfrak{C}_o$ ，我们现在可以定义

$$\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\mathcal{C}):=\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\mathcal{C},\alpha^{\star}),\ \alpha^{\star}\in\mathcal{E}(\mathcal{C}).$$

注 1.6. (i) 在非马尔可夫框架中，[43] 所设计的策略以 [7] 中的方法为基础，用于研究由非马尔可夫泛函的条件期望给出的奖励。该方法通过解耦代理人奖励中的不一致性来源，并要求在分析中引入术语 $\partial_s\mathrm{U}_{\mathrm{A}}$ 和 ∇h ，详见 附录 B 。定义 $\Pi\times\Xi$ 中的可积性条件保证 后向随机Volterra积分方程 (1.2) 定义良好。我们还提到，定理B.3 将 [43] 中针对由 (1.2) 给出的奖励以及如 定义1.4所述均衡行动的情形下得到的扩展动态规划原理加以推广。

(ii) 前面对均衡的定义可以视为通过[23]，下极限$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$对经典定义的重新表述。事实上，由定义 1.4 可知，给定$(\varepsilon,\ \ell)\in(0,\ \infty)\times(0,\ \ell_{\varepsilon})$，$\exists\Omega\subseteq\Omega$，$\mathbb{P}[\Omega]=1$，使得

$$\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\mathcal{C},\alpha^{\star})(x)-\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\mathcal{C},\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^{\star})(x)\geq-\varepsilon\ell,\ \forall(t,x,\alpha)\in[0,T]\times\widetilde{\Omega}\times\mathcal{A}.$$

(iii) 最后，我们还将进一步说明，为何需要将注意力集中于能够导出唯一均衡的合同上。这一限制的必要性源于代理人层面的博弈论表述所涉及的契约理论模型。事实上，无论是在有限个相互竞争的交互代理人寻求纳什均衡的情形下（参见Élie and Possamaï [25]，），还是在连续统玩家寻求均场均衡的情形下（参见Élie,Mastrolia, and Possamaï [26]，），通常都可能存在多个均衡。在这种情况下，帕累托占优均衡的存在并无任何保证；所谓帕累托占优均衡，是指所有代理人在偏离当前均衡时所获得的奖励都不会变差的均衡。在契约理论的语境下，这意味着，对于两个分别为不同玩家提供不同价值的均衡，代理人问题层面没有明确的规则来决定应当选择哪一个均衡。由于将这一决策交由委托人负责在实践中意义不大，因此，一种规避方法便是将注意力集中于能够导出唯一均衡的合同上，正如我们在本文中所做的那样。

正如我们将在 第3.1 节中分析的那样，我们指出，这一假设与一类相当新颖的 后向随机 Volterra 积分方程 的适定性密切相关。在本文的 *Lipschitz*情形下，我们给出了问题数据满足何种条件时，对于任意 $\mathcal{C}\in\mathfrak{C}_o$ 都有适定性，见 假设 3.2 和 注 3.3。因此，在我们的背景下，这一假设并不算严格。

1.3 委托人问题

现在我们来介绍委托人问题。因此，令 $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}_o$ 为可容许合同的集合，定义如下：

$$\mathfrak{C} := \{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_o : \mathrm{V}_0^{\mathrm{A}}(\mathcal{C}) \geq R_0\}.$$

因此，任何合同$\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ 都是可实施的，也就是说，对于代理人的问题，存在一个均衡策略，即 $\alpha^\star \in \mathrm{E}(\mathcal{C})$。

委托人具有效用泛函 $\mathrm{U_P} : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，以及 $u^{\mathrm{P}} : [0,T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times A \longrightarrow \mathbb{R}$，并求解以下问题

$$\mathrm{V}^{\mathrm{P}} := \sup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\alpha^\star}} \left[\mathrm{U_P}\big(X_{\cdot \wedge T}, \xi\big) + \int_0^T u_r^{\mathrm{p}}(X_{\cdot \wedge r}, \pi_r, \alpha_r^\star) \mathrm{d}r \right].$$

注 1.7. 我们指出，我们假设委托人是标准的效用最大化者。这是因为在我们看来，问题的关键在于：当与时序不一致的精明代理人签约时，如何恰当地描述委托人的问题。对于时间一致代理人，[18] 将这一问题描述为带有一个额外状态变量的标准随机控制问题。因此，对于经典的时间一致代理人和时间不一致的委托人，依照 [18]，人们预期委托人的问题可归结为一个带有额外状态变量的非马尔可夫时间不一致控制问题。正如 [43]，所研究的，这类问题的特征是存在无限族的倒向随机微分方程，与偏微分方程系统相类似；在 [7]的马尔可夫情形下亦是如此。

2 第一最优问题

在第一最优问题（亦即风险分担问题）中，委托人同时为代理人选择努力水平和合同，只需满足参与约束。为了恰当地刻画几个例子中的解，我们将聚焦于代理人奖励泛函的一个特定类别。我们再次说明，我们的目标是研究上一节引入的次优问题。因此，尽管本节的结果本身颇具意义，但主要是作为我们在第 3 节所进行一般分析的参照。此外，下面的规范包含在第 1 节提出的一般框架中，见注 2.1；同时，它也足够丰富，能够涵盖可分效用和不可分效用的例子。需要指出的是，在接下来的两个例子中，我们考虑的合同仅由终端支付构成，即$\mathcal{C} = \xi$。

假设代理人具有给定的递增凹效用函数 $\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，以及定义在 $[0,T]$ 上、取值于 $(0, +\infty)$ 的博雷尔可测折扣函数 g 和 f，其中 $g(0) = f(0) = 1$；这些函数假定为连续可微，其导数分别为 g' 和 f'。最后，我们有定义在 $[0,T] \times \Omega \times A$ 上、取值于 $\mathbb{R}_+$ 的博雷尔可测泛函 k 和 c。

接下来，我们将代理人的延续效用定义为

$$\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\xi, \alpha) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha} \left[\mathcal{K}_{t,T}^{t,\alpha} f(T-t) \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(g(T-t)\xi) - \int_t^T \mathcal{K}_{t,r}^{t,\alpha} f(r-t) c_r(X_{\cdot \wedge r}, \alpha_r) \mathrm{d}r \middle| \mathcal{F}_t \right], \ (t, \alpha) \in [0,T] \times \mathcal{A}, \tag{2.1}$$

其中

$$\mathcal{K}_{t,T}^{s,\alpha} := \exp\left(\int_t^T g(r-s) k_r(X_{\cdot \wedge r}, \alpha_r) \mathrm{d}r \right), \ (s,t,\alpha) \in [0,T]^2 \times \mathcal{A}.$$

关于委托人，我们假设她有自己的效用函数 $\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，并假设该函数凹且严格递增，因此

$$\mathrm{V}^{\mathrm{P}} = \sup_{(\alpha,\xi) \in \mathcal{A} \times \mathfrak{C}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha} \big[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o\big(\Gamma(X_T) - \xi\big) \big],$$

其中，$\Gamma : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 表示一种机制，委托人通过该机制收集状态过程 X 中 n 个不同坐标的取值。

注 *2.1. (i)* 如上所述，前述类型的奖励可由后向随机 *Volterra* 积分方程 *(1.2)* 的表述涵盖，并满足假设 *1.2*。它对应于如下选择：$U_{\mathrm{A}}(s,x) = f(T-s)U_{\mathrm{A}}^o(g(T-s)x)$ $\partial_s U_{\mathrm{A}}(s,x) = -f'(T-s)U_{\mathrm{A}}^o(g(T-s)x) - f(T-s)g'(T-s)\partial_x U_{\mathrm{A}}^o(g(T-s)x)$，且

$$h_t(s,x,y,z,a) = \sigma_t(x)b_t(x,a) \cdot z - f(t-s)c_t(x,a) + g(t-s)k_t(x,a)y,$$

$$\nabla h_t(s,x,u,v,y,z,a) = \sigma_t(x)b_t(x,a)\cdot v + f'(t-s)c_t(x,a) - g'(t-s)k_t(x,a)y + g(t-s)k_t(x,a)u.$$

关于委托人，我们的规范对应于 $\mathrm{U_P}(x,\mathrm{x}) = \mathrm{U_P^o}(\Gamma(x_T)-\mathrm{x})$。需要指出的是，为便于求解以下示例，我们假设 $\mathrm{U_P}$ 仅取决于 x_T 的终值。这使我们能够采用 X 的动态方程，其形式如 第1.1 节所示。我们强调，对于 第3 节中提出的次优问题的一般分析而言，这一假设并非必要。

现在，我们将刻画同时具有可分和不可分离效用函数的时间不一致代理人的第一最佳问题的解。根据这一结果，我们强调，在第一最佳问题中，委托人的问题归结为求解一个标准的随机控制问题。

2.1 不可分离效用

我们回顾一下，CARA效用函数通常称为指数效用，是不可分离效用的典型例子。接下来，我们考虑（2.1），并选择 $c=0$,

$$\mathrm{U_P^o}(\mathrm{x}) = -\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_\mathrm{P}\mathrm{x}}}{\gamma_\mathrm{P}},\ \mathrm{U_A^o}(\mathrm{x}) := -\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_\mathrm{A}\mathrm{x}}}{\gamma_\mathrm{A}},\ \mathrm{x}\in\mathbb{R},\ \gamma_\mathrm{A}>0,\ \gamma_\mathrm{P}>0,$$

$k_t(x,\ a) = \gamma_\mathrm{A}k_t^o(x,\ a)$，并假设对于任意 $(t,\ x)\in[0,T]\times\Omega,\ a\longmapsto k_t^o(x,\ a)$ 是凸的。于是我们有 th at

$$\mathrm{V_t^A}(\xi,\alpha) := \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\Big[f(T-t)\mathrm{U_A^o}\big(g(T-t)\xi - K_{t,T}^{t,\alpha}\big)\Big|\mathcal{F}_t\Big],\ \text{where } K_{t,T}^{s,\alpha} := \int_t^T g(r-s)k_r^o(X,\alpha_r)\mathrm{d}r. \tag{2.2}$$

值 因此，委托人的问题可通过以下约束优化问题得到

$$\mathrm{V_{FB}^P} := \sup_{(\alpha,\xi)\in\mathcal{A}\times\mathfrak{C}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\big[\mathrm{U_P^o}(\Gamma(X_T)-\xi)\big],\ \text{s.t. } \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[f(T)\mathrm{U_A}\left(g(T)\xi - \int_0^T g(r)k_r^o\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right)\right]\geq R_0.$$

注意，$\mathrm{U_A^o}$ 和 $\mathrm{U_P^o}$（分别为 $a\longmapsto k_t^o(x,\ a)$）的凹性（分别为凸性），以及 (A，C) 是凸集这一事实，意味着 $\mathrm{V_{FB}^P}$ 是一个凹优化问题。与该问题相关联的拉格朗日函数为，其中 $\rho\in\mathbb{R}_+$表示参与约束的乘子，

$$\mathfrak{L}(\alpha,\xi,\rho) := \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\mathrm{U_P^o}(\Gamma(X_T)-\xi) + \rho f(T)\mathrm{U_A^o}\left(g(T)\xi - \int_0^T g(r)k_r^o\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right)\right] - \rho R_0,\ (\alpha,\xi,\rho)\in\mathcal{A}\times\mathfrak{C}\times\mathbb{R}_+.$$

为方便读者起见，我们回顾一下，对偶问题 $\mathrm{V^{P,\ d}_{\ FB}}$ 是一个无约束控制问题，通常是 $\mathrm{V_{Fb}^P}$ 的上界，其定义为

$$\mathrm{V_{FB}^P} = \sup_{(\alpha,\xi)\in\mathcal{A}\times\mathfrak{C}}\inf_{\rho\in\mathbb{R}_+}\mathfrak{L}(\alpha,\xi,\rho) \leq \inf_{\rho\in\mathbb{R}_+}\sup_{(\alpha,\xi)\in\mathcal{A}\times\mathfrak{C}}\mathfrak{L}(\alpha,\xi,\rho) =: \mathrm{V_{FB}^{P,d}}, \tag{2.3}$$

其中我们采用了 $\sup\emptyset = -\infty$ 的约定。由于对于凸问题而言，对偶间隙为零是常见情形，即 $\mathrm{V_{FB}^P} = \mathrm{V^{P,\ d}_{\ FB}}$，因此下一项结果可用于计算 $\mathrm{V_{FB}^P}$ 的值。下面给出所使用的记号

$$\bar\gamma := \frac{\gamma_\mathrm{A}\gamma_\mathrm{P}g(T)}{\gamma_\mathrm{A}g(T)+\gamma_\mathrm{P}},\ C_y := -\frac{1}{\gamma_\mathrm{P}}\exp\left(\frac{\gamma_\mathrm{P}}{g(T)}\mathrm{U_A^o}^{(-1)}(y)\right).$$

命题 2.2。设

$$\mathrm{V_{cont}} := \sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[-\frac{1}{\bar\gamma}\exp\left(-\bar\gamma\Gamma(X_T) + \int_0^T\frac{\bar\gamma g(r)k_r^o}{g(T)}\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right)\right],\ \rho^\star := \frac{1}{g(T)f(T)}\left(\frac{\bar\gamma f(T)}{\gamma_\mathrm{A}R_0}\mathrm{V_{cont}}\right)^{1+\frac{\gamma_\mathrm{P}}{\gamma_\mathrm{A}g(T)}}.$$

假设 $\mathrm{V_{cont}}<\infty$，并且对于任意 $(\alpha,\rho)\in\mathcal{A}\times\mathbb{R}_+$, $\xi^\star(\rho,\alpha)\in\mathfrak{C}$，其中

$$\xi^\star(\rho,\alpha) := \frac{1}{g(T)\gamma_\mathrm{A}+\gamma_\mathrm{P}}\Big(\gamma_\mathrm{P}\Gamma(X_T) + \gamma_\mathrm{A}K_{0,T}^{0,\alpha} + \log\big(\rho^\star g(T)f(T)\big)\Big).$$

Then

$$\mathrm{V_{FB}^P} = C_{\frac{R_0}{f(T)}}\mathrm{V_{cont}^{\frac{\gamma_\mathrm{P}}{\bar\gamma}}}.$$

此外，如果 $\alpha^\star$ 是$\mathrm{V_{cont}}$的最优控制，则最优合约为 $\xi^\star(\rho^\star,\alpha^\star)$。

2.2 可分效用

我们考虑 $k=0$和 $g=1$在 (2.1) 中的情形，并假设 $a\longmapsto c(t,x,a)$对任意 $(t,x)\in[0,T]\times\Omega$均为凸函数。代理人从时间 $t\in[0,T]$ 起的报酬为

$$\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\xi,\alpha)=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[f(T-t)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\xi)-\int_t^T f(s-t)c_s\big(X_{\cdot\wedge s},\alpha_s\big)\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right],\ (t,\alpha,\xi)\in[0,T]\times\mathcal{A}\times\mathfrak{C}. \tag{2.4}$$

委托人价值 因此可通过以下约束优化问题求得

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P}}:=\sup_{(\alpha,\xi)\in\mathcal{A}\times\mathfrak{C}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o(\Gamma(X_T)-\xi)\right],\ \text{s.t. }\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[f(T)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\xi)-\int_0^T f(r)c_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right]\geq R_0.$$

与该问题相关的拉格朗日函数为

$$\mathfrak{L}(\alpha,\xi,\rho):=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o(\Gamma(X_T)-\xi)+\rho f(T)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\xi)-\rho\int_0^T f(r)c_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right]-\rho R_0,\ (\alpha,\xi,\rho)\in\mathcal{A}\times\mathfrak{C}\times\mathbb{R}_+.$$

命题 2.3. (i) 假设 $\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o$ 和 $\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o$ 满足条件，使得映射 $\xi^\star(\mathrm{x},\rho)$ 作为以下问题的解给出

$$-\partial_{\mathrm{x}}\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o(\Gamma(\mathrm{x})-\xi^\star(\mathrm{x},\rho))+\rho f(T)\partial_{\mathrm{x}}\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\xi^\star(\mathrm{x},\rho))=0,\ (\mathrm{x},\rho)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+,$$

是良定义的，且对于任意 $\rho\in\mathbb{R}_+$， $\xi^\star(X_T,\rho)\in\mathfrak{C}$。令

$$\mathrm{V}_{\mathrm{cont}}(\rho):=\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o\big(\Gamma(X_T)-\xi^\star(X_T,\rho)\big)+\rho f(T)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o\big(\xi^\star(X_T,\rho)\big)-\rho\int_0^T f(r)c_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right],\ \rho\in\mathbb{R}_+.$$

Then

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P,d}}=\inf_{\rho\in\mathbb{R}_+}\Big\{-\rho R_0+\mathrm{V}_{\mathrm{cont}}(\rho)\Big\}.$$

此外，假设有序对 $\big(\alpha^\star(\rho^\star)\ \xi^\star(X_T,\rho^\star)\big)$ 是原问题的可行解，其中 $\alpha^\star(\rho)$ (分别表示$\mathrm{V}_{\mathrm{cont}}(\rho)$ (和上述问题)中的最大化者，我们假设它们存在。那么，对偶间隙为零，即

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P}}=\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P,d}},$$

最优合同为 $\xi^\star(X_T,\rho^\star)$。

(ii) 如果 $\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o(\mathrm{x})=\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\mathrm{x})=\mathrm{x}$，对于 $\alpha\in$A 令

$$\hat{\mathfrak{C}}(\alpha)=\left\{\xi\in\mathfrak{C}:\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}[\xi^\star]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\int_0^T\frac{f(r)}{f(T)}c_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right]+\frac{R_0}{f(T)}\right\}.$$

那么，委托人的问题可由标准控制问题的解给出

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P}}=-\frac{R_0}{f(T)}+\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\Gamma(X_T)-\int_0^T f(r)c_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right].$$

此外，对于该问题的一个最优控制 $\alpha^\star\in\mathcal{A}$， $\hat{}\ \mathfrak{C}(\alpha^\star)$ 包含委托人的所有最优合同，例如 确定性合同

$$\xi^\star:=\frac{R_0}{f(T)}+f(T)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\alpha^\star}}\left[\int_0^T f(r)c_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r^\star\big)\mathrm{d}r\right].$$

注 2.4。 我们指出，关于效用函数的假设 命题2.3 相当合理。事实上，例如在以下任一情形下，该假设都能立即得到满足

(i) $\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o(\mathrm{x})=\mathrm{x}$ 且$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\mathrm{x})$ 严格递增；

(ii) 对 $\varphi\in\{\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o,\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o\}$而言， $x\longmapsto\varphi(\mathrm{x})$ 是凹函数、严格递增，并满足以下条件

$$\lim_{\mathrm{x}\to-\infty}\partial_{\mathrm{x}}\varphi(\mathrm{x})=\infty,\ \lim_{\mathrm{x}\to\infty}\partial_{\mathrm{x}}\varphi(\mathrm{x})=0.$$

3 次优问题：一般情形

在本节中，我们重新关注委托人面临的次优问题

$$\mathrm{V}^{\mathrm{P}} = \sup_{\mathcal{C}\in\mathfrak{C}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\alpha^\star}}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}\big(X_{\cdot\wedge T},\xi\big) + \int_0^T u_r^{\mathrm{p}}(X_{\cdot\wedge r},\pi_r,\alpha_r^\star)\mathrm{d}r\right].$$

我们将利用 I 型后向随机 Volterra 积分方程的理论。因此，我们首先引入适当的可积性空间。

3.1 可积性空间与哈密顿量

遵循 [42, 第2节。2], 为了进行分析，我们引入以下空间

- L^2 的 $\xi \in \mathrm{P}_{\text{可测}}(\mathbb{R},\ \mathrm{F})$，使得 $\|\xi\|_{\mathcal{L}^2} := \mathbb{E}\big[|\xi|^2\big] < \infty$;
- $\mathbb{S}^2$ 右连续且有左极限的 $Y \in \mathrm{P}_{\text{渐进可测}}(\mathbb{R},\ \mathbb{F})$，使得 $\|Y\|_{\mathbb{S}^2} := \mathbb{E}\Big[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t|^2\Big] < \infty$;
- $\mathbb{L}^2$ $Y \in \mathrm{P}_{\mathrm{opt}}(\mathbb{R},\mathbb{F})$ 的，且 $\|Y\|_{\mathbb{L}^2} := \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^T |Y_r|^2\mathrm{d}r\Big)\Big] < \infty$;
- $\mathbb{H}^2$ $Z \in \mathrm{P}_{\mathrm{pred}}(\mathbb{R}^n,\mathbb{F})$ 的，使得 $\|Z\|_{\mathbb{H}^2} := \mathbb{E}\Big[\int_0^T |\sigma_r\sigma_r^\top Z_r|^2\mathrm{d}r\Big] < \infty$;

为了理解本文所研究的系统类别，我们引入一些额外的空间。

- 给定一个 E 值过程的巴拿赫空间 $(\mathbb{I},\|\cdot\|_{\mathbb{I}})$，我们定义空间 $(\mathbb{I}^2,\|\cdot\|_{\mathbb{I}^2})$，它由满足 $([0,T],\mathrm{B}([0,T])) \longrightarrow (\mathbb{I}^2,\|\cdot\|_{\mathbb{I}^2})$：$s \longmapsto U^s$ 连续且 $\|U\|_{\mathbb{I}^2} := \sup_{s\in[0,T]} \|U^s\|_{\mathbb{I}} < \infty$ 的 $U \in \mathrm{P}^2{}_{\mathrm{meas}}(E,\mathrm{F})$ 构成。

例如，$\mathbb{S}^{2,\ 2}$ 表示满足以下条件的 $Y \in \mathrm{P}^2_{\mathrm{meas}}(\mathbb{R},\ \mathrm{F})$ 空间：$([0,T],\ \mathrm{B}([0,T])) \longrightarrow (\mathbb{S}^2(\mathbb{R}),\ \|\cdot\|_{\mathbb{S}^2})$：$s \longmapsto Y^s$ 连续，且 $\|Y\|_{\mathbb{S}^{2,\ 2}} := \sup_{s\in[0,T]} \|Y^s\|_{\mathbb{S}^2} < \infty$.

- $\overline{\mathbb{H}}^{2,\ 2}$ 表示 $(Z_\tau)_{\tau\in[0,T]^2} \in \mathrm{P}^2{}_{\text{可测}}(\mathbb{R}^n,\ \mathrm{F})$ 中满足以下条件的函数：$([0,T],\ \mathrm{B}([0,T])) \longrightarrow (\mathbb{H}^2,\ \|\cdot\|_{\mathbb{H}^2})$：$s \longmapsto Z^s$ 连续可微，导数为 ∂Z，且 $\|Z\|^2_{\overline{\mathbb{H}}^{2,\ 2}} := \|Z\|^2_{\mathbb{H}^{2,\ 2}} + \|\mathrm{Z}\|^2_{\mathbb{H}^2} < \infty$，其中 $\mathrm{Z} := (Z_t^t)_{t\in[0,T]} \in \mathbb{H}^2$ 定义为

$$Z_t^t := Z_t^0 + \int_0^t \partial Z_t^r \mathrm{d}r.$$

最后，我们引入空间 $\mathfrak{H} := \mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2 \times \mathbb{S}^{2,\ 2} \times \overline{\mathbb{H}}^{2,\ 2} \times \mathbb{S}^{2,\ 2} \times \mathbb{H}^{2,\ 2}$。

注释 3.1. 第二组空间是经典空间的适当扩展，其范数专为分析我们将要研究的系统而设计。文献中关于后向随机 Volterra 积分方程的研究已考虑过其中一些空间，例如例如 [42] 和 [83]。特别值得关注的是空间 $\overline{\mathbb{H}}^{2,\ 2}$，它使我们能够将$(Z_t^t)^{t\in[0,T]}$ 定义为 $\mathbb{H}^2$ 的一个合适候选元素，见 [35]。

3.2 均衡的刻画与后向随机微分方程系统

基于 [43], 中的结果（其中仅考虑了具有可分效用的代理人这一情形），我们希望对与任意 $\mathrm{C} \in \mathfrak{C}$ 相关的均衡进行刻画。为此，我们必须引入哈密顿泛函 $H\colon [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$，其定义如下:

$$H_t(x,\mathrm{y},\mathrm{z},p) := \sup_{a\in A} h_t(t,x,\mathrm{y},\mathrm{z},p,a),\ (t,x,\mathrm{y},\mathrm{z},p) \in [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}.$$

我们对 H 的基本假设如下。

假设 3.2。 (i) 映射 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ni (y,z) \longmapsto H_t(x,y,z)$ 是一致 *Lipschitz* 连续的，即 存在$C>0$，使得对于任意 $(t,x,\mathrm{y}\ \tilde{}\mathrm{y}\ p,\mathrm{z}\ \tilde{}\mathrm{z}) \in [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^n)^2$

$$\big|H_t(x,\mathrm{y},\mathrm{z},p) - H_t(x,\tilde{\mathrm{y}},\tilde{\mathrm{z}},p)\big| \le C\big(|\mathrm{y}-\tilde{\mathrm{y}}| + |\sigma_t(x)^\top(\mathrm{z}-\tilde{\mathrm{z}})|\big);$$

(ii) 存在唯一的博雷尔可测映射 $a^\star\colon [0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow A$，使得

$$H_t(x,\mathrm{y},\mathrm{z},p) = h_t\big(t,x,\mathrm{y},\mathrm{z},p,a^\star(t,x,\mathrm{y},\mathrm{z},p)\big),\ \forall (t,x,p,\mathrm{y},\mathrm{z})\in[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^n.$$

(iii) 映射 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\ni(\mathrm{y},\ \mathrm{z})\longmapsto a^\star(t,x,\mathrm{y},\ \mathrm{z})$ 是一致 *Lipschitz* 连续的，即 存在 $C>0$，使得对于任意 $(t,x,p,\ \mathrm{y}\ \tilde{}\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}\ \tilde{}\ \mathrm{z})\in[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^n)^2$。

$$\big|a^\star(t,x,\mathrm{y},\mathrm{z},p)-a^\star(t,x,\tilde{\mathrm{y}},\tilde{\mathrm{z}},p)\big|\le C\big(|\mathrm{y}-\tilde{\mathrm{y}}|+|\sigma_t(x)^\top(\mathrm{z}-\tilde{\mathrm{z}})|\big);$$

为简化记号，我们引入 $h_r^\star(s,x,y,z,\mathbf{y},\mathbf{z}\ p)\colon=h_r\big(s,x,y,z,p,a^\star(r,x,\mathbf{y},\mathbf{z}\ p)\big)$, $\nabla h_r^\star(s,x,u,v,y,z,\mathbf{y},\mathbf{z}\ p)\colon=\nabla h_r\big(s,x,u,v,y,z,p,a^\star(r,x,\mathbf{y},\mathbf{z}\ p)\big)$，以及 $b_t^\star\big(x,\mathbf{y},\mathbf{z}\ p\big):=b_t\big(x,a^\star(t,x,\mathbf{y},\mathbf{z}\ p)\big)$。

注释 *3.3*。我们来评论一下前述假设。即使在本文的非马尔可夫设置下，复杂代理人所面临的问题也与方程组有关，而不仅仅是一个方程，参见[43]。这引发了许多问题，其中之一是可能存在具有不同价值的均衡的多重性。假设 *3.2.(i)*、*3.2.(iii)*保证，对于给定的 $\mathcal{C}\in\mathfrak{C}$，任意均衡 $\alpha^\star\in E(\mathcal{C})$都对应于哈密顿量的一个最大化者。最终，假设 *3.2.(ii)*保证哈密顿量只有一个最大化者。我们提到，在假设 *1.2.(iii)*下，由 *Schäl* [70, 定理 3]可保证 $a^\star$ 的存在。这与我们专注于导向唯一均衡的合同这一点相一致，正如我们在第 *1.2* 节中所述。

在这组假设下，我们能够证明，参见附录 B，对于任意 $\mathcal{C}\in\mathfrak{C}$

$$\mathcal{E}(\mathcal{C})=\big\{(a^\star(t,X_{\cdot\wedge t},Y_t(\mathcal{C}),Z_t(\mathcal{C}),\pi_t))_{t\in[0,T]}\big\},$$

其中，过程 $\big(Y(\mathcal{C})\ Z(\mathcal{C})\big)$ 来自以下无限族倒向随机微分方程的解，该方程对任意$s\in[0,T]$ 均满足： $\mathbb{P}$–a.s.

$$\begin{aligned}
Y_t(\mathcal{C}) &= \mathrm{U_A}(T,\xi)+\int_t^T\Big(H_r\big(Y_r(\mathcal{C}),Z_r(\mathcal{C}),\pi_r\big)-\partial Y_r^r(\mathcal{C})\Big)\mathrm{d}r-\int_t^T Z_r(\mathcal{C})\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\\
Y_t^s(\mathcal{C}) &= \mathrm{U_A}(s,\xi)+\int_t^T h_r^\star\big(s,Y_r^s(\mathcal{C}),Z_r^s(\mathcal{C}),Y_r(\mathcal{C}),Z_r(\mathcal{C}),\pi_r\big)\mathrm{d}r-\int_t^T Z_r^s(\mathcal{C})\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\\
\partial Y_t^s(\mathcal{C}) &= \partial_s\mathrm{U_A}(s,\xi)+\int_t^T\nabla h_r^\star\big(s,\partial Y_r^s(\mathcal{C}),\partial Z_r^s(\mathcal{C}),Y_r^s(\mathcal{C}),Z_r^s(\mathcal{C}),Y_r(\mathcal{C}),Z_r(\mathcal{C}),\pi_r\big)\mathrm{d}r-\int_t^T\partial Z_r^s(\mathcal{C})\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T].
\end{aligned}\tag{3.1}$$

此外，我们有

$$\mathrm{V_t^A}\big(\mathcal{C},a^\star(\cdot,X_\cdot,Y_\cdot(\mathcal{C}),Z_\cdot(\mathcal{C}),\pi_\cdot)\big)=Y_t(\mathcal{C})=Y_t^t(\mathcal{C}),\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ Z_t(\mathcal{C})=Z_t^t(\mathcal{C}),\ \mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}\text{–a.e.}\tag{3.2}$$

鉴于假设 1.2 保证 $\mathrm{x}\longmapsto\mathrm{U_A}(s,\mathrm{x})$ 对每个 $s\in[0,T]$均可逆，我们还可以得到

$$\mathrm{U_A^{(-1)}}\big(s,Y_T^s(\mathcal{C})\big)=\xi=\mathrm{U_A^{(-1)}}\big(u,Y_T^u(\mathcal{C})\big),\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ (s,u)\in[0,T]^2.\tag{3.3}$$

注 3.4。(i) 我们回顾一下，对角过程 $(Z_t^t)_{t\in[0,T]}$ 对 $\overline{\mathbb{H}}^2$中的元素2有良好定义，见 第 3.1节。

(ii) 过去，人们已经发现时间不一致控制问题与一类更广泛的后向随机 Volterra 积分方程之间的联系。据我们所知，最早提及这一联系的是Wang andYong [87]的结语。随后， [43] 与Wang andYong [83]分别对此联系进行了严格论证。在我们的框架中，根据 (3.2)，这样的方程体现为均衡下代理人的奖励所满足的方程。因此，$\big(Y_t^s(\mathcal{C})\ Z_t^s(\mathcal{C})\big)_{(s,t)\in[0,T]^2}$ 满足一个所谓的扩展型 *I*后向随机 Volterra 积分方程，对任意 $s\in[0,T]$ 均满足

$$Y_t^s(\mathcal{C})=\mathrm{U_A}(s,\xi)+\int_t^T h_r^\star\big(s,X,Y_r^s(\mathcal{C}),Z_r^s(\mathcal{C}),Y_r^r(\mathcal{C}),Z_r^r(\mathcal{C}),\pi_r\big)\mathrm{d}r-\int_t^T Z_r^s(\mathcal{C})\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}\tag{3.4}$$

我们强调，该后向随机Volterra积分方程涉及对角过程 $\big(Y_t^t(\mathcal{C})\ Z_t^t(\mathcal{C})\big)_{(s,t)\in[0,T]^2}$，并且根据 [42,定理4.4] ，(3.1) 的解与(3.4)的解一一对应。

3.3 受限合同族

鉴于我们先前的观察，即（3.3），接下来我们将引入一族受限终端支付，记作 $\overline{\Xi}$，并用 $\overline{\mathfrak{C}}$ 表示与之对应的合同类。对于该族中的任意合同，我们都可以求解代理人面临的相关时间不一致控制问题。此外，我们将证明，委托人可选的任何可容许合同都可以表示为 $\overline{\mathfrak{C}}$中的一个合同。因此，若委托人将所提供的合同限制在该族之内并进行优化，其最优期望效用不会降低。

为了定义受限合同族，我们接下来引入过程 $Y^{y_0,\ Z,\ \pi}$，对于适当的过程 Z，它将表示代理人的价值。这是一个初步步骤，基于如下观察，见（3.3）：代理人在终端时刻 T 的价值与合同所提供的支付相同。为简化记号，令 $\mathcal{I}:=\{y_0\in\mathcal{C}_1([0,T],\mathbb{R}):\ y_0^0\geq R_0\}$。

定义 3.5。 令 $\pi\in\Pi$。我们用 $\mathcal{H}^{2,2}$ 表示满足 $\|Y^{y_0,\ Z,\ \pi}\|_{\mathbb{S}^{2,\ 2}}<\infty$ 的过程 $Z\in\overline{\mathbb{H}}^{2,\ 2}$ 的集合，其中对于 $y_0\in\mathcal{I}$，$Y^{y_0,\ Z,\ \pi}:=(Y^{s,\ y_0,\ Z,\ \pi})_{s\in[0,T]}$ 对每个 $s\in[0,T]$ 都满足，

$$Y_t^{s,y_0,Z,\pi}=y_0^s-\int_0^t h_r^\star\big(s,X,Y_r^{s,y_0,Z,\pi},Z_r^s,Y_r^{r,y_0,Z,\pi},Z_r^r,\pi_r\big)\mathrm{d}r+\int_0^t Z_r^s\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}\tag{3.5}$$

$$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(-1)}\big(s,Y_T^{s,y_0,Z,\pi}\big)=\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(-1)}\big(u,Y_T^{u,y_0,Z,\pi}\big),\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ (s,u)\in[0,T]^2.\tag{3.6}$$

据此，自然可以考虑合同类 $\overline{\mathfrak{C}}:=\Pi\times\overline{\Xi}$，其中 $\overline{\Xi}$ 表示如下形式的终端支付集合

$$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(-1)}\big(T,Y_T^{T,y_0,Z,\pi}\big),\ (y_0,Z,\pi)\in\mathcal{I}\times\mathcal{H}^{2,2}\times\Pi.$$

与时间一致情形中的论证相比，我们论证的主要新意在于，(3.6) 对 $Z\in\mathcal{H}^{2,2}$中的元素施加了约束。

注 3.6。 (i) 我们强调，$\mathcal{H}^{2,2}$ 与 $\pi\in\Pi$ 的选择无关，并且构造 $\mathcal{H}^{2,2}\neq\emptyset$ 本质上与 (3.4) 解的存在性相关。关于 I 型后向随机 Volterra 积分方程 的结果，参见 [42] 和 [86]。

(ii) 过程 $Y^{y_0,Z,\pi}$ 表示一个所谓的前向 *Volterra* 积分方程 (前向随机 Volterra 积分方程，简称)的解。然而，这并非经典意义上的 前向随机 Volterra 积分方程，因为除了 $Y^{s,y_0,Z,\pi}$之外，生成元中还出现了对角过程 $\big(Y^{t,t\ \ y_0\ \ \pi}\big)_{t\in[0,T],Z}$。为完整起见，附录C 给出了一个适当的适定性结果。

(iii) 如本节开头所述，我们选择研究代理人的价值表示，而非合同本身的价值。这决定了$\overline{\Xi}$ 定义中终端支付的形式，并提供了一种相当一般且全面的方法。例如，我们也可以直接表示 ξ 的价值，其中代理人具有时间不一致指数效用。这样便会得到一个版本的(3.1)，其生成元关于 Z 具有二次增长，其分析也比 *Lipschitz* 情形更为精细。例如，参见Wang、Sun 和 Yong [84]，Fan、Wan 和 Yong [30]，Hernández [41] 关于二次型后向随机 Volterra 积分方程的研究。我们回顾一下，在时间一致性情形下采用这种方法，至少需要假设合同具有足够高阶的指数矩。鉴于我们的增长假设假设1.2，我们的方法避免了这一要求。不过，对于本质上具有二次特征的问题，不能指望避开这类限制。

备注*3.7*。我们想强调约束*(3.6)*的性质。事实上，对于任意满足*(3.6)*的 $\xi\in\overline{\Xi}$，都有 $\bar{\xi}=U^{(-1)}A\big(s,Y^{s,\ y_0\ \ \pi}_{T},Z,\ ,\ \mathbb{P}$*–a.s.*，$s\in[0,T]$。也就是说，若令 $\mathfrak{S}$ 表示连续可微函数 γ 的族：$[0,T]\longmapsto\mathbb{R}$，其中映射 $s\longmapsto U^{(-1)}A\big(s,\gamma(s)\big)$ 为常数，则*(3.6)*等价于随机目标约束

$$Y_T^{s,y_0,Z,\pi}\in\mathfrak{S},\ \mathbb{P}\text{–a.s.}\tag{3.7}$$

此外，我们强调，这一约束是由时间不一致性导致的。事实上，回到时间一致的，即指数折现情形第1.2节所述的情形，不难看出$\mathrm{e}^{-\rho s}Y^{s,\ \alpha}_{,t}=\mathrm{e}^{-\rho u}Y^{u,\ \alpha}_{,t}$，$\mathbb{P}$–a.s.，对于任意$(u,s,t)\in[0,T]^3$。因此，(3.6) 以及随机目标约束(3.7) 在时间一致的指数折现情形下都会自动满足。

鉴于我们前面的讨论，作为初步步骤，我们必须验证 (3.5) 唯一定义了 $Y^{y_0,\ Z,\ \pi}$。从形式上看，下面的辅助引理表明，关于这一对 $(\pi,\ Z)$ 的可积性条件足以保证这一点。

引理 *3.8*。设假设 *1.2* 和假设 *3.2* 成立。给定 $(\pi, y_0, Z) \in \Pi \times I \times H^{2,2}$，存在唯一的过程 $(Y^{y_0,Z,\pi}, \partial Y^{y_0,Z,\pi}) \in \mathbb{S}^2, {}^2 \times \mathbb{S}^{2,2}$，使得 $Y^{y_0,Z,\pi}$ 满足 *(3.5)*，且 $\partial Y^{y_0,Z,\pi}$ 满足

$$\partial Y_t^{s,y_0,Z,\pi} = \partial y_0^s - \int_0^t \nabla h_r^\star\big(s, X, \partial Y_r^{s,y_0,Z,\pi}, \partial Z_r^s, Y_r^{s,y_0,Z,\pi}, Z_r^s, Y_r^{r,y_0,Z,\pi}, Z_r^r, \pi_r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t \partial Z_r^s \cdot \mathrm{d}X_r. \tag{3.8}$$

证明。我们先对 $Y^{y_0,\,Z,\,\pi}$ 证明这一结论。注意，$(\pi,\ Z) \in \Pi \times \mathcal{H}^{2,2}$，假设 1.2.$(ii)$和假设 3.2.$(iii)$意味着

$$\sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |h_r^\star\big(s, X, 0, Z_r^s, 0, Z_r^r, \pi_r\big)|\mathrm{d}r\right)^2\right] < \infty.$$

该结论由命题C.5得出。陈述的第二部分是命题 C.6 以及 $\pi \in \Pi$ 的可积性的推论。 □

现在我们可以陈述主要结果了。简而言之，该结果保证委托人在提供 Ξ 所给形式的合同时，不失一般性。

定理 3.9。 (i) 我们有 $\overline{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}$。此外，对于任意合同 $\mathcal{C} = (\pi, \xi) \in \overline{\mathfrak{C}}$，其中 ξ 与 $(y_0, Z) \in \mathcal{I} \times \mathcal{H}^{2,2}$，相关联，我们有

$$\mathcal{E}(\mathcal{C}) = \big\{a^\star\big(t, X_{\cdot\wedge t}, Y_t^{t,y_0,Z,\pi}, Z_t^t, \pi_t\big)_{t\in[0,T]}\big\},\ \mathrm{V}_0^{\mathrm{A}}(\mathcal{C}) = y_0^0.$$

(ii) 令 $\mathbb{P}^\star(Z,\pi)$: $= \mathbb{P}^{a^\star(\cdot\ X_\cdot,\ Y^{\cdot,y_0,}{}_{Z,\ \pi\ \cdot}, Z^{\ \cdot}\ \pi_\cdot)}$。委托人的问题可以表示为

$$\mathrm{V}^{\mathrm{P}} = \sup_{y_0\in\mathcal{I}} \underline{V}(y_0), \tag{3.9}$$

其中

$$\underline{V}(y_0) := \sup_{(Z,\pi)\in\mathcal{H}^{2,2}\times\Pi} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z,\pi)}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}\left(X_{\cdot\wedge T}, \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(-1)}\left(T, Y_T^{T,y_0,Z,\pi}\right)\right) - \int_0^T c_r^{\mathrm{P}}(X_{\cdot\wedge r}, \pi_r)\mathrm{d}r\right].$$

证明。我们首先论证 $\mathfrak{C} \subseteq \overline{\mathfrak{C}}$。令 $\mathsf{C} \in \mathfrak{C}$。根据假设 1.2、$\pi \in \Pi$这一事实以及注 3.4.$(ii)$，定理 B.5 保证对于 $\mathsf{C} \in \mathfrak{C}$，存在 $(Y(\mathsf{C})\ Z(\mathsf{C})) \in \mathbb{S}^{2,2} \times \overline{\mathbb{H}}^2$，它是方程 (3.4) 的解，并且存在过程$\partial Y(\mathsf{C}) \in \mathbb{S}^{2,2}$ 满足：映射 $([0,T], \mathrm{B}([0,T])) \longrightarrow (\mathbb{S}^2, \mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{\mathbb{S}^2})$：$s \longmapsto \partial Y^s(\mathsf{C})$ 是映射 $([0,T], \mathrm{B}([0,T])) \longrightarrow (\mathbb{S}^2, \mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{\mathbb{S}^2})$：$s \longmapsto Y^s(\mathsf{C})$ 的导数。我们还注意到，假设 1.2.(i) 保证 (3.6) 成立。此外，(3.2) 意味着 $Y_0(\mathsf{C}) = \mathrm{V}_0^{\mathrm{A}}\big(\mathsf{C}\ a^\star(\cdot\ X_\cdot, Y_\cdot(\mathsf{C})\ Z_\cdot(\mathsf{C})\ \pi_\cdot)\big) \geq R_0$，回忆 $\mathsf{C} \in \mathfrak{C}$。由此，取 $y_0(\mathsf{C}) = Y_0(\mathsf{C})$，可得 $(y_0(\mathsf{C})\ Z(\mathsf{C})) \in \mathrm{I} \times \mathrm{H}^{2,2}$。因此 $\mathsf{C} \in \overline{\mathfrak{C}}$。

为证明反向包含关系，设 $\bar{\mathsf{C}} = (\pi, \bar{\xi}) \in \Pi \times \Xi$。也就是说，$\bar{\xi} = \mathrm{U}^{(-1)}\mathrm{A}\,(T, Y^T{}_{,T}{}^{\ y_0\ \ \pi}{}_{,Z,})$，其中，根据引理 3.8，$Y^{y_0,Z,\pi}$ 表示由 $(y_0, Z, \pi) \in \mathrm{I} \times \mathrm{H}^{2,2} \times \Pi$所诱导的过程，使得 $\mathrm{k}Y^{y_0,Z,\pi}\mathrm{k}_{\mathbb{S}^{2,2}} < \infty$，且 (3.6) 成立。特别地

$$Y_T^{s,y_0,Z,\pi} = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}\big(s, \bar{\xi}\big),\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ s \in [0,T].$$

因此，对于任意 $s \in [0,T]$

$$Y_t^{s,y_0,Z,\pi} = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\bar{\xi}) + \int_t^T h_r^\star\big(s, X, Y_r^{s,y_0,Z,\pi}, Z_r^s, Y_r^{r,y_0,Z,\pi}, Z_r^r, \pi_r\big)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r^s \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.} \tag{3.10}$$

现在我们证明 $\xi \in \Xi$，见第1.2节。显然可见

$$\|\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(\cdot,\bar{\xi})\|^2_{\mathcal{L}^{2,2}} = \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\Big[\big|\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\bar{\xi})\big|^2\Big] = \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}\Big[\big|Y_T^{s,y_0,Z,\pi}\big|^2\Big] \leq \|Y^{y_0,Z,\pi}\|^2_{\mathbb{S}^{2,2}} < \infty.$$

现在，给定 $Y^{y_0,\,Z,\,\pi}$ 是（3.5）的解，且 ∂Z 根据 $Z \in \overline{\mathbb{H}}^{2\text{的定义},\ 2}$，引理3.8 保证存在 $\partial Y^{y_0,\ Z,\ \pi} \in \mathbb{S}^{2,\ 2}$，使得这一对$(\partial Y^Z,\ \partial Z)$ 满足（3.8）。此外，根据命题C.6，对于任意 $s \in [0,T]$

$$\partial Y_T^{s,Z,\pi} = \partial_s \mathrm{U}^{\mathrm{A}}(s,\bar{\xi}),\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

因此，$\mathrm{k}\partial_s\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(\cdot\ \bar{\xi})\mathrm{k}^2_{\mathcal{L}^{2,\ 2}} \leq \mathrm{k}\partial Y^{y_0,\ Z,\ \pi}\mathrm{k}^2_{\mathbb{S}^{2,\ 2}} < \infty$。这表明 $\bar{\xi} \in \Xi$。

我们来论证$\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_o$ 符合定义 1.5，也就是说，$\mathcal{C}$ 导出唯一均衡。根据假设 3.2，定理 B.5 和定理B.6，只需证明 $\mathcal{C}$ 导出（3.1）的一个解。回顾一下，根据 [42,

定理 4.4], （3.1）的解与（3.4）的解一一对应。现在只需注意到，（3.10）定义了一个解。因此

$$\mathcal{E}(\bar{\mathcal{C}}) = \{a^\star(t, X_{\cdot\wedge t}, Y_t^{t,y_0,Z,\pi}, Z_t^t, \pi_t)_{t\in[0,T]}\}.$$

总之，$\bar{\mathcal{C}} \in \mathfrak{C}$，注意，根据定理B.6，$\mathrm{V}_0^{\mathrm{A}}(\bar{\mathcal{C}}) = y_0^0$，因此 $y_0^0 \geq R_0$ 保证参与约束得到满足。

□

鉴于定理3.9，委托人的问题涉及通过 $(\pi, Z) \in \Pi \times \mathrm{H}^{2,2}$，控制过程 $(X, Y^{y_0,Z,\pi})$。X 的动态方程在弱形式下由下式给出

$$X_t = x_0 + \int_0^t \sigma_r(X_{\cdot\wedge r})\Big(b_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{r,y_0,Z,\pi}, Z_r^r, \pi_r)\mathrm{d}r + \mathrm{d}B_r^\star\Big),\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.} \tag{3.11}$$

其中 $B^\star := B - \int_0^{\cdot} b_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, Y^{r,r,y_0,\pi,Z,}, Z_r^r, \pi_r)\mathrm{d}r$ 是一个 $\mathbb{P}^\star(Z,\pi)$–布朗运动，而 $Y^{y_0,Z,\pi}$ 的动态方程为

$$Y_t^{s,y_0,Z,\pi} = y_0^s - \int_0^t h_r^\star(s, X, Y_r^{s,y_0,Z,\pi}, Z_r^s, Y_r^{r,y_0,Z,\pi}, Z_r^r, \pi_r)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^s \cdot \mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ s\in[0,T].$$

我们强调，除了状态过程 $Y^{y_0,Z,\pi}$ 和控制 Z之外，还必须满足约束（3.6）。然而，基于备注3.7中的讨论，我们可以看到，委托人的问题对应于一个带有 Volterra 控制的 FSVIE 随机目标控制问题。事实上，委托人

（i）控制前向Volterra过程 $(Y^{s,\ t,\ y_0,\ \pi,\ Z,})_{(s,t)\in[0,T]^2}$；

（ii）采用 Volterra 型控制 $(Z_t^s)_{(s,t)\in[0,T]^2}$，请回想 $(Z_t^t)_{t\in[0,T]}$ 和 $(Z_t^s)_{t\in[0,T]}$ 都会影响动态方程；

（iii）状态过程 $Y^{y_0,\ Z,\ \pi}$ 受到随机目标约束（3.7）。

据我们所知，关于受控 FSVIE 的文献始于 Chen 和 Yong [14]，作者通过随机最大值原理研究了 FSVIE 的控制问题。[2] 近年来，该问题研究中的一个重要里程碑是 Viens 和 Zhang [82] 的工作，他们通过动态规划方法得到了路径依赖 HJB 方程。然而，在所有这些研究中，控制都是一个无约束的随机过程。因此，该方法 [82] 无法应用，因为它未涵盖（ii）和（iii）上述情形。

关于随机目标控制问题的研究，开创性工作出自 Soner 和 Touzi [74, 75]，其中状态过程是受控 SDE。我们还要提及 Bouchard、Djehiche 和 Kharroubi [10], 近期将目标扩展到 Wasserstein 空间的工作，该工作表明，原有方法有可能扩展到无限维目标问题，例如委托人面临的问题，即上文的 (iii)。对我们的分析尤为重要的是 Bouchard、Élie 和 Imbert [9] 关于带随机目标约束的最优控制问题的研究。事实上，这项工作阐明了将方法扩展到 Volterra 情形所需的蓝图，从而能够获得刻画委托人问题的（无限维）HJB 型偏微分方程。读者或许已经注意到，总体而言，这似乎是一项颇具挑战的任务。因此，我们目前将注意力集中在较简单的情形上，在这些情形中，我们实际上可以将 $Y^{y_0,Z,\pi}$ 上的随机目标约束直接转化为对控制 Z 的、更易处理的约束。一般情形将留待未来研究，并在另一篇论文中探讨。

作为对下文各例中所采用方法的动机，我们回顾以下两点：第一，连续支付流$(\pi_t)_{t\in[0,T]}$ 作为漂移上的标准控制进入委托人的约化问题，在分析中不会带来重大挑战，因此下文各例将省略这一部分，并考虑仅包含终端支付的合同，即$\mathcal{C} = \xi$。第二，众所周知，对于采用指数折现的经典可分效用（见备注3.7），状态过程 $Y^{y_0,\ Z,\ \pi}$ 的 Volterra 性质变得多余。事实上，在这种情形下，只需描述 $(Y_t^t)_{t\in[0,T]}$ 即可刻画整个族。这促使我们在对代理人和委托人的效用函数采用特定规范的情况下，研究 $\mathrm{H}^{2,2}$，希望能够

(a) 降低集合 $\mathrm{H}^{2,2}$ 的复杂度；

(b) 利用其特定结构，为委托人的问题构造一种试探形式。

这正是我们在以下各节中所做的。

[2]此后，多项研究拓展了这一方法，可能并不完整的相关文献包括 Shi、Wang 和 Yong [73], Wang [85] 以及 Hamaguchi 和 Wang [36]。

4 次优问题：示例

4.1 具有折现效用奖励的代理人

作为一个初步示例，我们来考虑第 2.1 节中增加选择 $g = 1$ 后的情形，这意味着$K^{s,\ t\ \overset{\alpha}{T},}$ 不依赖于 $s \in [0,T]$。因此，我们有

$$\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\xi,\alpha) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\Big[f(T-t)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o\big(\xi - K_{t,T}^\alpha\big)\Big|\mathcal{F}_t\Big],\ K_{t,T}^\alpha := \int_t^T k_r^o(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r)\mathrm{d}r,\ (t,\alpha,\xi)\in[0,T]\times\mathcal{A}\times\mathfrak{C}. \tag{4.1}$$

在此规范下，(3.1) 大幅简化。事实上

$$h_t(s,x,y,z,a) = \sigma_t(x)b_t(x,a)\cdot z + \gamma_{\mathrm{A}}k_t^o(x,a)y,\ \nabla h_t(s,x,u,v,y,z,a) = \sigma_t(x)b_t(x,a)\cdot v + \gamma_{\mathrm{A}}k_t^o(x,a)u,$$

$$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(s,\mathrm{x}) = f(T-s)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\mathrm{x}),\ \partial_s\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(s,\mathrm{x}) = -f'(T-s)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\mathrm{x}).$$

注 4.1。 (i) 我们强调，代理人的奖励泛函中没有累积成本，即 $c = 0$，再加上选择 $g = 1$，使得第二族倒向随机微分方程 的驱动项与变量 s 无关，即$\nabla h = h$。此外，它与哈密顿量 H 中最大化的泛函一致。

(ii) 我们指出，在这一情形下，非指数折现因子，即 时间不一致偏好，并未给问题带来太多变化。尽管代理人的延续效用会按某个因子变化，但两个问题的最优/均衡控制—状态对是一致的。我们展示这一例子的目的，是说明第 节3.3 中介绍的方法与时间一致代理人情形下已知的结果相容。

下一个结果大幅简化了第 3.2 节中引入的无限维系统。这是由于代理人奖励的特殊形式（4.1）。

引理 4.2. (i) 设 $t\ \xi\in\mathfrak{C}$，且代理人的报酬由 (4.1) 给出。则，(3.1) 等价于以下倒向随机微分方程

$$Y_t(\xi) = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\xi) + \int_t^T\left(H_r\big(X_{\cdot\wedge r},Y_r(\xi),Z_r(\xi)\big) + \frac{f'(T-r)}{f(T-r)}Y_r(\xi)\right)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r(\xi)\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

(ii) 令 $Z\in\mathcal{H}^{2,2}$。则 $(Y^{t,\ y_0\ Z}_{\cdot,\ t\ ,})_{t\in[0,T]}$ 满足该倒向随机微分方程

$$Y_t^{t,y_0,Z} = Y_T^{T,y_0,Z} + \int_t^T\left(H_r\big(X_{\cdot\wedge r},Y_r^{r,y_0,Z},Z_r^r\big) + \frac{f'(T-r)}{f(T-r)}Y_r^{r,y_0,Z}\right)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r^r\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

(iii) $\mathcal{H}^{2,2} = \mathcal{H}^2$, 其中 $\mathcal{H}^2$ 表示满足以下条件的 $Z\in\mathbb{H}^2$ 族$\|Y^{y_0,Z}\|_{\mathbb{S}^2}<\infty$ 其中，对于任意 $y_0\in(R_0,\infty\quad)$,

$$Y_t^{y_0,Z} = y_0 - \int_0^t\left(H_r\big(X_{\cdot\wedge r},Y_r^{y_0,Z},Z_r\big) + \frac{f'(T-r)}{f(T-r)}Y_r^{y_0,Z}\right)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

(iv) $\overline{\mathfrak{C}} = \big\{\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\ (-1)}(Y^{y_0,\ \ Z}_{\cdot,\ T\ \ })\colon\ (y_0,Z)\in(R_0,\infty)\times\mathcal{H}^2\big\}$。此外，对任意 $\xi\in\overline{\mathfrak{C}}$

$$\mathcal{E}(\xi) = \big\{(a^\star(t,X_{\cdot\wedge t},Y_t^{y_0,Z},Z_t)_{t\in[0,T]}\big\},\ \mathrm{V}_0^{\mathrm{A}}(\xi) = y_0.$$

证明。 由 (3.1) 可立即得出， $\mathbb{P}$–几乎处处。

$$Y_t^s(\xi) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*(\xi)}\Big[f(T-s)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o\big(\xi - K_{t,T}^{a^\star}\big)\Big|\mathcal{F}_t\Big],\ \partial Y_t^s(\xi) = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*(\xi)}\Big[f'(T-s)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o\big(\xi - K_{t,T}^{a^\star}\big)\Big|\mathcal{F}_t\Big],\ \text{and } Y_t^t(\xi) = Y_t(\xi).$$

Thus

$$Y_t^s(\xi) = \frac{f(T-s)}{f(T-t)}Y_t(\xi),\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ s\in[0,T],\ \partial Y_t^t(\xi) = -\frac{f'(T-t)}{f(T-t)}Y_t^t(\xi) = -\frac{f'(T-t)}{f(T-t)}Y_t(\xi),\ \mathbb{P}\text{–a.s.},$$

并且，对于任意 $(s,u)\in[0,T]^2$

$$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(-1)}\big(s,Y_T^s(\xi)\big) = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\ (-1)}\left(\frac{Y_T^s(\xi)}{f(T-s)}\right) = \xi = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\ (-1)}\left(\frac{Y_T^u(\xi)}{f(T-u)}\right) = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(-1)}\big(u,Y_T^u(\xi)\big),\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

综上所述，这表明 (3.1) 化简为陈述中的方程。由此即可得出结论，因为我们可以沿着论证过程回溯，从陈述中的倒向随机微分方程的一个解出发，构造出 (3.1) 的一个解。

现在我们来论证(ii)。令 $Z \in \mathcal{H}^{2,2}$。那么，存在$(y_0^s)_{s\in[0,T]}$ 使得（3.6）成立，并且

$$Y_t^{s,y_0,Z} = y_0^s - \int_0^t h_r^\star\big(s, X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{s,y_0,Z}, Z_r^s, Y_r^{r,y_0,Z}, Z_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^s \cdot \mathrm{d}X_r.$$

注意到（3.6）意味着 $Y^{s,\,y_0\,Z}_{T} = f(T-s)Y^{T,\,y_0\,Z}_{T}$。由于$(x, y, z, a) = h_t(u, x, y, z, a), (s, u) \in [0,T]^2$，我们得到

$$Y_t^{s,y_0,Z} = f(T-s)Y_T^{T,y_0,Z} + \int_t^T h_r^\star\big(r, X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{s,y_0,Z}, Z_r^s, Y_r^{r,y_0,Z}, Z_r^r\big)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r^s \cdot \mathrm{d}X_r,$$

从而

$$Y_t^{s,y_0,Z} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[f(T-s)Y_T^{T,y_0,Z}\exp\left(\gamma_{\mathrm{A}}\int_t^T k_r^{o\star}(X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{r,y_0,Z}, Z_r^r)\mathrm{d}r\right)\middle|\mathcal{F}_t\right],\ \partial Y_t^{t,y_0,Z} = -\frac{f'(T-t)}{f(T-t)}Y_t^{t,y_0,Z}.$$

注意到$(Y^{t,\,y_0\,Z,\,})_{t\in[0,T]} \in \mathbb{S}^2$。由定理3.9，在（$\partial Y^{t,\,y_0\,Z}$ 代入 (3.1)）的第一个方程后，便可得到该结果。

我们只需论证（iii），因为（iv）的论证与定理 3.9 中相同。由（ii）可得 $\mathbf{H}^{2,\,2} \subseteq \mathbf{H}^2$。事实上，存在 y_0^0 使得

$$Y_t^{t,y_0,Z} = y_0^0 - \int_0^t \left(H_r\big(X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{r,y_0,Z}, Z_r^r\big) + \frac{f'(T-r)}{f(T-r)}Y_r^{r,y_0,Z}\right)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^r \cdot \mathrm{d}X_r.$$

反过来，令 $(y_0, Z) \in (R_0,\infty) \times \mathbf{H}^2$ 且 $Y^{y_0,Z} \in \mathbb{S}^2$ 如命题所述。那么，令 g

$$Y_t^{s,y_0,Z} := \frac{f(T-s)}{f(T-t)}Y_t^{y_0,Z} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[f(T-s)Y_T^{y_0,Z}\exp\left(\gamma_{\mathrm{A}}\int_t^T k_r^{o\star}(X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{y_0,Z}, Z_r)\mathrm{d}r\right)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$
$$\partial Y_t^{s,y_0,Z} := -\frac{f'(T-s)}{f(T-t)}Y_t^{y_0,Z},$$

根据鞅表示定理，由于 (B.1) 以及 $(Y^{y_0,Z}, Z)$ 的可积性，该定理成立，因此保证存在 $(\tilde{Z}, \partial\tilde{Z}) \in \overline{\mathbb{H}}^{2,2} \times \mathbb{H}^{2,2}$ 使得作为 $\mathbb{H}^2$ 的元素，

$$\tilde{Z}^s = \tilde{Z}^0 + \int_0^s \partial\tilde{Z}^r\mathrm{d}r, \text{ and } \tilde{Z}_t^t = Z_t, \mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}\text{–a.e.}$$

由此可得 $(\tilde{Z}^s)_{s\in[0,T]} \in \mathbf{H}^{2,2}$。 □

4.1.1 委托人的第二最佳解

下文中，我们将利用所谓的确定性等价，即合同与价值函数终值之间的关系 $\xi = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\,(-1)}\big(V_{\mathrm{AT}}(\xi,\alpha)\big)$。这样做有两方面的好处：它给出一个可直接代入委托人目标函数的表达式，同时将 $Y^{y_0,Z}$ 从表示合同的表达式的生成元中消去，代之以一个关于 Z 的二次项。为此，我们需要引入一些额外的记号。

令 $H\colon [0,T]\times\mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 由下式给出

$$\widehat{H}_t(x,\mathrm{z}) := \sup_{a\in A}\widehat{h}_t(x,\mathrm{z},a),\ (t,x,\mathrm{z}) \in [0,T]\times\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n,$$

其中 $h_t(x,\mathrm{z}\ a) := \sigma_t(x)b_t(x,a)\cdot\mathrm{z} - k_t^o(x,a)$。映射 $[0,T]\times\mathbf{C}([0,T],\mathbb{R}^n)\times\mathbb{R}^n \longmapsto \hat{a}^\star(t,x,z) \in A$ 定义如下，和之前一样，满足关系 $H_t(x,\mathrm{z}) = h_t(x,\mathrm{z},\hat{a}^\star(t,x,\mathrm{z}))$；$\lambda_t^\star(x,\mathrm{z})$、$k_t^{o\star}(x,\mathrm{z})$ 也作相应定义。

命题 4.3。 委托人的问题可表示为以下标准控制问题

$$\mathrm{V^P} = \sup_{y_0 \geq R_0} \underline{V}(y_0), \text{ with } \underline{V}(y_0) = \sup_{Z \in \mathcal{H}^2} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\Big[\mathrm{U_P}\Big(X_{\cdot\wedge T}, \widehat{Y}_T^{y_0,Z}\Big)\Big],$$

其中 $\mathbb{P}^\star(Z) := \mathbb{P}^{a^\star(\cdot, X_\cdot, \widehat{Y}^{y_0,Z}_\cdot, Z_\cdot)}$ 以及 $\widehat{Y}^{y_0,Z}_t$ 由以下终值给出

$$\widehat{Y}_t^{y_0,Z} := -\frac{1}{\gamma_\mathrm{A}} \ln\big(-\gamma_\mathrm{A} y_0\big) - \int_0^t \left(\widehat{H}_r(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r) - \frac{\gamma_\mathrm{A}}{2}|\sigma_r^\top(X_{\cdot\wedge r})\widehat{Z}_r|^2 - \frac{1}{\gamma_\mathrm{A}}\frac{f'(T-r)}{f(T-r)}\right)\mathrm{d}r + \int_0^t \widehat{Z}_r \cdot \mathrm{d}X_r,$$
$$\widehat{Z}_t := -\frac{1}{\gamma_\mathrm{A}} \frac{Z_t}{Y_t^{y_0,Z}}.$$

证明。 首先注意到，根据引理 4.2，我们可以将对 $\mathrm{H}^{2,2}$ 的优化替换为对 H^2的优化。令 $Z \in \mathrm{H}^2$。然后，对 $\mathrm{U}_\mathrm{A}^{(-1)}\big(Y^{y_0,Z}_t\big)$应用伊藤公式，由引理 4.2 即可得到该结果。 □

注 4.4。 (i) 让我们强调一下命题4.3背后的主要信息。当代理人的报酬由（4.1）给出时，委托人的次优问题可归结为一个标准控制问题。这是对定理3.9 中结果的大幅简化，也是代理人报酬具有特定形式的结果。

(ii) 在数据对路径 X 的依赖仅通过当前值体现的马尔可夫情形下，由 X 和 $\widehat{Y}^{y_0}$的受控动力学，z 可知，该问题归结为计算 $\underline{V}$。采用标准动态规划方法，我们得到该问题中的相关项对于（t、x、y）$\in [0,T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$由下式给出

$$\partial_t \underline{V}(t,\mathrm{x},\mathrm{y}) + \mathrm{H}\big(t,\mathrm{x},\mathrm{y},\partial\underline{V}(t,\mathrm{x},\mathrm{y}),\partial^2\underline{V}(t,\mathrm{x},\mathrm{y})\big) = 0,$$

其中

$$\mathrm{H}(t,\mathrm{x},\mathrm{y},p,M) := \sup_{z\in\mathbb{R}^n}\Big\{\lambda_t^\star(x,z)\cdot p_\mathrm{x} + \left(\frac{\gamma_\mathrm{A}}{2}|\sigma_r^\top(\mathrm{x})z|^2 - \widehat{H}_r(\mathrm{x},z) + \frac{1}{\gamma_\mathrm{A}}\frac{f'(T-t)}{f(T-t)}\right)p_\mathrm{y} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\big[\sigma\sigma_t^\top(\mathrm{x})(M_{\mathrm{xx}} + zz^\top M_{\mathrm{yy}} + 2z\cdot M_{\mathrm{xy}})\big]\Big\},$$

对于 $p := \begin{pmatrix} p_\mathrm{x} \\ p_\mathrm{y}\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$, $M := \begin{pmatrix} M_{\mathrm{xx}} & M_{\mathrm{xy}} \\ M_{\mathrm{xy}} & M_{\mathrm{yy}}\end{pmatrix} \in \mathbb{S}^+_{n+1}(\mathbb{R})$， $M_{\mathrm{xx}} \in \mathbb{S}^+_n(\mathbb{R})$，$M_{\mathrm{yy}} \in \mathbb{S}^+_1(\mathbb{R})$，以及 $M_{\mathrm{xy}} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$。

接下来 命题，其证明见附录 D，我们研究 $n = 1$ 的情形，以便 t

$$\underline{V}(y_0) = \sup_{Z\in\mathcal{H}^2} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\Big[\mathrm{U_P}\Big(X_T - \widehat{Y}_T^{y_0,Z}\Big)\Big].$$

这一结果等价于求解备注 4.4 中的 HJB 方程。

命题 4.5。 设委托人和代理人分别具有参数为 γ_P 和 γ_A的指数效用。令 $C_y := -\frac{1}{\gamma_\mathrm{P}}\mathrm{e}^{-\gamma_\mathrm{P}(x_0-y)}$， $\widehat{R}_0 := \mathrm{U}_\mathrm{A}^{o\,(-1)}(R_0)$，并假设

(i) 映射 σ、 $\lambda^\star$ 和 $k^{o\star}$ 不依赖于 x 变量；

(ii) 对于任意 $t\in[0,T]$，映射 $\mathbb{R}\ni z \overset{g}{\longmapsto} \lambda_t^\star(z) - k_t^{o\star}(z) - \frac{\gamma_\mathrm{A}}{2}|\sigma_t^\top z|^2 - \frac{\gamma_\mathrm{P}}{2}|\sigma_t^\top(1-z)|^2$ 存在唯一最大化点 $z^\star(t)$，使得 $[0,T]\ni t\longmapsto z^\star(t)$ 平方可积。

Then

$$\xi^\star := \mathrm{U}_\mathrm{A}^{(-1)}\left(\frac{R_0}{f(T)}\right) - \int_0^T\left(\widehat{H}_r(z_r^\star) - \frac{\gamma_\mathrm{A}}{2}|\sigma_r^\top z_r^\star|^2\right)\mathrm{d}r + \int_0^T z_r^\star \mathrm{d}X_r,$$

是委托人的次优问题的一个最优解，并且

$$\mathrm{V^P} = C_{\widehat{R}_0} f(T)^{\frac{\gamma_\mathrm{P}}{\gamma_\mathrm{A}}} \exp\left(-\gamma_\mathrm{P}\int_0^T g(z^\star(t))\mathrm{d}t\right).$$

注 4.6. 为结束本节，我们提出几点说明：

(i) 比较 命题 4.5 和 命题2.2 可知，正如预期，一般而言，第二最佳问题与第一最优问题的解并不相同；

(ii) 如果我们回到 的设定中[45], 即 $b_t(x,\ a) = a/\sigma,\ \sigma_t(x) = \sigma,\ k_t^o(x,\ a) = ka^2/2$，我们有 e

$$z^\star(t) = \frac{1+\sigma^2\gamma_{\mathrm{P}}k}{1+\sigma^2k(\gamma_{\mathrm{A}}+\gamma_{\mathrm{P}})},\ a^\star(t) = \frac{1+\sigma^2\gamma_{\mathrm{P}}k}{c\big(1+\sigma^2k(\gamma_{\mathrm{A}}+\gamma_{\mathrm{P}})\big)}.$$

这恢复了风险中性委托人的情形下的结果，即 $\gamma_{\mathrm{P}} = 0$，该结果见于 [45]。最优合约及相应的奖励相差一个因子，该因子取决于折现因子和代理人的风险厌恶参数；

(iii) 接续前面的评论，我们补充指出，最优合约采取马尔可夫规则的形式。此外，它是线性的。这与 [45] 的开创性研究以及 [12] 的结论一致，后者研究了这些政策的稳健性。不过，正如我们将在 第4.3节看到的，这似乎是本节所考虑的时间不一致性来源较为简单所导致的结果。

4.2 具有可分效用的代理人

我们考虑第 2.2 节中的情形，即

$$\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\xi,\alpha) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[f(T-t)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\xi) - \int_t^T f(s-t)c_s\big(X_{\cdot\wedge s},\alpha_s\big)\mathrm{d}s\middle|\mathcal{F}_t\right],\ (t,\alpha,\xi)\in[0,T]\times\mathcal{A}\times\mathfrak{C},$$

并且有 $\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\ \mathrm{x}) = f(T-s)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\mathrm{x}),\ \ \partial_s\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\ \mathrm{x}) = -f'(T-s)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\mathrm{x})$,

$$h_t(s,x,z,a) = \sigma_t(x)b_t(x,a)\cdot z - f(t-s)c_t(x,a),\ \nabla h_t(s,x,v,a) = \sigma_t(x)b_t(x,a)\cdot v + f'(t-s)c_t(x,a).$$

映射 $H_t(x,\ \mathrm{z})$、$a^\star(t,\ x,\ \mathrm{z})$、$\lambda_t^\star(x,\ \mathrm{z})$、$c_t^\star(x,\ \mathrm{z})$，以及概率 $\mathbb{P}^\star(Z) = \mathbb{P}^{a^\star(\cdot,\ X_{\cdot},\ Z_{\cdot})}$ 相应地得到。

本节中，我们试图更深入地理解在先前对代理人偏好的规范下的族 $\mathrm{H}^{2,2}$。具体而言，我们希望了解族 $(Y^s,\ z,\ Z^s)_{s\in[0,T]}$ 中的元素如何相互关联。根据假设 1.2和假设 3.2，对于任意 $Z\in\mathrm{H}^{2,2}$，我们记 $M^{s,\ z}$为 $(\mathbb{F},\ \mathbb{P}^\star(Z))$-平方可积鞅

$$M_t^{s,Z} := \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\int_0^T \delta_r^\star\big(s,X_{\cdot\wedge r},Z_r^r\big)\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_t\right],\ t\in[0,T],$$

其中

$$\delta_r^\star(s,x,\mathrm{z}) := c_r^\star(x,\mathrm{z})\left(f(r-s) - \frac{f(T-s)}{f(T)}f(r)\right),\ (s,t,x,\mathrm{z})\in[0,T]^2\times\Omega\times\mathbb{R}^n.$$

我们还回顾一下，$\mathbb{P}^\star(Z)$ 是鞅问题的唯一解，其特征三元组为 $(\lambda^\star,\sigma\sigma^\top,0)$，其中 X。因此，表示性质对 $(\mathbb{F},\mathbb{P}^\star(Z))$-鞅成立（见 [46, 定理 III.4.29]），于是我们可以引入唯一的 $\mathbb{F}$-可预测过程 $\widetilde{Z}^{s,z}$，使得 $\sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(z)}\left[\int_0^T|\sigma_r\sigma_r^\top\widetilde{Z}^{s,\ Z}_r|^2\mathrm{d}r\right] < \infty$,[3]，并且根据 (3.11),

$$M_t^{s,Z} = M_0^{s,Z} + \int_0^t \widetilde{Z}_r^{s,Z}\cdot\big(\mathrm{d}X_r - \lambda_r^\star\big(X_{\cdot\wedge r},Z_r^r\big)\mathrm{d}r\big),\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

下一个引理在附录 D 中证明，给出了族 $(Y^{s,Z},Z^s)_{s\in[0,T]}$ 满足的关系，以及如何利用这些关系得到 $\mathrm{H}^{2,2}$ 和 Ξ 的另一种刻画。

引理 4.7。(i) 令 $Z\in\mathcal{H}^{2,2},$，对任意 $s\in[0,T]$

$$Y_t^{s,Z} = \frac{f(T-s)}{f(T)}Y_t^{0,Z} - \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\int_t^T \delta_r^\star(s,X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_t\right],\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

[3]可积性 $s\in[0,T]$ 对于固定的[43, 定理 3 5] 显然成立。上确界的结论可由 $\delta^\star$ 在 s上一致连续。

(ii) 令 $Z \in \mathcal{H}^{2,2}$, 对任意 $s \in [0,T]$

$$Z_t^s = \frac{f(T-s)}{f(T)} Z_t^0 - \widetilde{Z}_t^{s,Z},\ \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}\text{–a.e.}$$

(iii) $\mathcal{H}^{2,\ 2} = \mathcal{H}^{\bullet}$, 其中 $\mathcal{H}^{\bullet}$ 表示 $Z \in \overline{\mathbb{H}}^{2,\ 2}(\mathbb{R}^d)$ 的类别, 满足 $\|Y^{y_0,\ Z}\|_{\mathbb{S}^2} < \infty$, 其中对于 $y_0 \in (R_0, \infty)$

$$Y_t^{y_0,Z} := \frac{y_0}{f(T)} - \int_0^t f(T)^{-1} h_r^{\star}\big(0, X_{\cdot\wedge r}, Z_r^0, Z_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t f(T)^{-1} Z_r^0 \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

and

$$Z_t^s = \frac{f(T-s)}{f(T)} Z_t^0 - \widetilde{Z}_t^{s,Z},\ \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}\text{–a.e.} \tag{4.2}$$

(iv) $\overline{\Xi} = \big\{\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\ (-1)}(Y^{y_0,\ Z}_{\ T}) \colon (y_0,\ Z) \in (R_0,\ \infty) \times \mathrm{H}^{\bullet}\big\}$。对于任意 $\xi \in \overline{\mathfrak{C}}$,

$$\mathcal{E}(\xi) = \big\{(a^{\star}(t, X_{\cdot\wedge t}, Z_t^t)_{t\in[0,T]}\big\},\ \mathrm{V}_0^{\mathrm{A}}(\xi) = y_0.$$

备注4.8。 (i) 在指数折现情形下, 即 $f(t) \colon = \mathrm{e}^{-\rho t}$ 对于某个 $\rho > 0$, 我们有

$$f(r-s) - \frac{f(T-s)f(r-u)}{f(T-u)} = \mathrm{e}^{-\rho(r-s)} - \mathrm{e}^{-\rho(r-s)} = 0,\ (r,s,u) \in [0,T]^3.$$

因此, $\delta^{\star} = 0$ 并且引理 4.7 的结果可简化为

$$Y_t^{s,y_0,Z} = \frac{f(T-s)}{f(T)} Y_t^{0,y_0,Z},\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s. } Z_t^s = \frac{f(T-s)}{f(T)} Z_t^0,\ \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}\text{–a.e.},\ s \in [0,T].$$

因此, 这意味着在非指数折现情形下, 该项

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\star}(Z)}\left[\int_t^T \delta_r^{\star}(s, X_{\cdot\wedge r}, Z_r^r)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

恰好是时间不一致性所导致的修正。

(ii) 我们还要指出, 族 Z 的约束中, Z^0 的选择是任意的。事实上, 它可以替换为族 $Z \in \mathcal{H}^{2,2}$ 中的任意其他元素 Z^u 。

4.2.1 委托人的次优解

根据引理 4.7, 我们现已证明

命题 4.9。 委托人的问题可以表示为以下控制问题

$$\mathrm{V}^{\mathrm{P}} = \sup_{y_0 \geq R_0} \underline{V}(y_0),\ \text{where } \underline{V}(y_0) = \sup_{Z\in\mathcal{H}^{\bullet}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\star}(Z)}\Big[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}\Big(X_{\cdot\wedge T}, \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(-1)}(Y_T^{y_0,Z})\Big)\Big],$$

其中 $\mathbb{P}^{\star}(Z) = \mathbb{P}^{a^{\star}(\cdot,\ X_{\cdot},Z^{\ \cdot})}$ 且

$$Y_t^{y_0,Z} = \frac{y_0}{f(T)} - \int_0^t f(T)^{-1} h_r^{\star}\big(0, X_{\cdot\wedge r}, Z_r^0, Z_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t f(T)^{-1} Z_r^0 \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

我们指出, 与第 4.1 节中的例子不同, 命题4.9 将委托人的问题化简为一个非标准控制问题。事实上, 我们必须在 $\mathcal{H}^{\bullet}$ 上进行优化, 这是一个由无限维控制构成的族, 且须满足一种新型约束, 即 (4.2) 。尽管如此, 在对模型作出额外假设后, 我们仍可继续求解。

与第 4.1.1 节一样, 我们关注 $n = 1$ 的情形

$$\underline{V}(y_0) = \sup_{Z\in\mathcal{H}^{\bullet}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\star}(Z)}\Big[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^{o}\Big(X_T - \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\ (-1)}\big(Y_T^{y_0,Z}\big)\Big)\Big]. \tag{4.3}$$

命题 4.10。 设 $n=1$、委托人和代理人均为风险中性，即 $\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o}(\mathrm{x})=\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^{o}(\mathrm{x})=\mathrm{x}$，$\mathrm{x}\in\mathbb{R}$。

(i) 假设存在唯一的可测映射 $z^{\star}\colon[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^{n}\longrightarrow\mathbb{R}^{n}$ 满足

$$\mathrm{H}_{t}(x,v)=v\lambda_{t}^{\star}(x,z^{\star}(t,x,v))+\lambda_{t}^{\star}(x,z^{\star}(t,x,v))-\frac{f(r)}{f(T)}c^{\star}(x,z^{\star}(t,x,v)),\ \text{for any}\ (t,x)\in[0,T]\times\Omega,$$

其中，对任意 $(t,x,v)\in[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^{n}$

$$\mathrm{H}_{t}(x,v):=\sup_{z\in\mathbb{R}}\left\{v\lambda^{\star}(x,z)+\lambda_{t}^{\star}(x,z)-\frac{f(r)}{f(T)}c^{\star}(x,z)\right\},$$

此外，假设映射 $\mathbb{R}^{n}\ni v\longmapsto\mathrm{H}_{t}(x,v)\in\mathbb{R}$ 关于(t,x)一致利普希茨连续，且具有线性增长。于是，$\mathrm{V}^{\mathrm{P}}=x_{0}-\frac{R_{0}}{f}\frac{}{T}()+U_{0}$ 其中，数对(U,V) ~~表示~~BSDE的一个解

$$U_{t}=\int_{t}^{T}\mathrm{H}_{r}(X_{\cdot\wedge r},V_{r})\mathrm{d}r-\int_{t}^{T}V_{r}\cdot\mathrm{d}X_{r}.$$

此外，令

$$y_{0}^{\star}:=R_{0},\ \mathcal{Z}_{t}:=z^{\star}(t,X_{\cdot\wedge t},V_{t}),\ Z_{t}^{0,\star}:=\frac{f(T)}{f(T-t)}\mathcal{Z}_{t},\ \mathbb{P}^{\star}(\mathcal{Z}):=\mathbb{P}^{a^{\star}(\cdot,X_{\cdot},\mathcal{Z}_{\cdot})},$$

并假设 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\star}(\mathcal{Z})}\big[\int_{0}^{T}|\sigma_{r}\sigma_{r}^{\top}\mathcal{Z}_{r}|^{2}\mathrm{d}r\big]<\infty$。那么，存在 $Z^{\star}\in\overline{\mathbb{H}}^{2,2}$，使得$(y_{0}^{\star},Z^{\star})\in[R_{0},\infty)\times\mathcal{H}^{\bullet}$ 定义了次优问题的一个解，且最优合约为

$$\xi^{\star}:=\frac{R_{0}}{f(T)}-f(T)^{-1}\int_{0}^{T}h_{r}^{\star}\big(0,X_{\cdot\wedge r},Z_{r}^{0,\star},\mathcal{Z}_{r}\big)\mathrm{d}r+f(T)^{-1}\int_{0}^{T}Z_{r}^{0,\star}\cdot\mathrm{d}X_{r},\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

(ii) 假设映射 $\lambda^{\star}$ 和 $c^{\star}$ 不依赖于 x 变量，并且对于任意 $t\in[0,T]$，映射 $\mathbb{R}\ni z\overset{g}{\longmapsto}\lambda_{t}^{\star}(z)-f(t)/f(T)c_{t}^{\star}(z)$ 存在唯一最大化点 $z^{\star}(t)$，使得 $[0,T]\ni t\longmapsto z^{\star}(t)$ 是勒贝格可积的。

于是，次优问题的一个解 $(y_{0}^{\star},Z^{\star})\in[R_{0},\infty)\times\mathcal{H}^{\bullet}$ 为

$$y_{0}^{\star}=R_{0},\ Z_{t}^{s}:=\frac{f(T-s)}{f(T-t)}z^{\star}(t),\ \widetilde{Z}_{t}^{s}:=0,\ (s,t)\in[0,T]^{2},\ \text{and}\ \mathrm{V}^{\mathrm{P}}=x_{0}-\frac{R_{0}}{f(T)}+\int_{0}^{T}g_{t}\big(z^{\star}(t)\big)\mathrm{d}t.$$

此外，相应的最优合约为

$$\xi^{\star}:=\frac{R_{0}}{f(T)}-f(T)^{-1}\int_{0}^{T}\big(\lambda_{t}^{\star}(z^{\star}(t))-f(t)c_{t}^{\star}(z^{\star}(t))\big)\mathrm{d}t+\int_{0}^{T}\frac{z^{\star}(t)}{f(T-t)}\mathrm{d}X_{t}.$$

证明。 下面证明 (i)。由于代理人和委托人都是风险中性的，我们有

$$\underline{\mathrm{V}}(y_{0})=\sup_{Z\in\mathcal{H}^{\bullet}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\star}(Z)}\left[\int_{0}^{T}\left(\lambda_{t}^{\star}(X_{\cdot\wedge r},Z_{r}^{r})-\frac{f(r)}{f(T)}c_{r}^{\star}(X_{\cdot\wedge r},Z_{r}^{r})\right)\mathrm{d}r\right]$$

上界 $\mathrm{V}(y_{0})$ 可通过忽略（4.2）得到。在这种情形下，陈述中的映射 H 表示哈密顿量，根据控制理论中的经典论证，参见 El Karoui、Peng 和 Quenez [24], ，其值为 U_{0}其中 (U,V) 与陈述中相同。下面只需证明该上界可以达到。为此，我们必须验证 $Z^{\star}\in\mathcal{H}^{\bullet}$。

一方面，请注意，$\mathcal{Z}$ 的可积性与假设1.2 共同保证

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\star}(\mathcal{Z})}\big[|\xi^{\star}|^{2}\big]<\infty.$$

因此，根据 [86, 定理 3.5], ，存在唯一的解 $(Y^{\star},Z^{\star})\in\mathbb{S}^{2,2}\times\overline{\mathbb{H}}^{2,2}$，满足数据为 $(\xi^{\star},h^{\star})$ 的后向随机Volterra积分方程，其表达式为

$$Y_{t}^{s,\star}=f(T-s)\xi^{\star}+\int_{t}^{T}h_{r}^{\star}\big(s,X_{\cdot\wedge r},Z_{r}^{s,\star},Z_{r}^{r,\star}\big)\mathrm{d}r-\int_{t}^{T}Z_{r}^{s,\star}\cdot\mathrm{d}X_{r},\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ s\in[0,T].$$

另一方面，在对 Z 的可积性假设下，对于每个 $s \in [0,T]$

$$\widehat{Y}_t^s := \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(\mathcal{Z})}\left[f(T-s)\xi^\star - \int_t^T f(r-s)c^\star(X_{\cdot\wedge r}, \mathcal{Z}_r)\mathrm{d}r \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

定义一个 $\mathbb{P}^\star(\mathcal{Z})$-平方可积 $\widehat{}$鞅。因此，存在一个过程族 $(Z^s)_{s\in[0,T]}$，使得 t

$$\widehat{Y}_t^s = f(T-s)\xi^\star + \int_t^T h_r^\star\big(s, X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r^s, \mathcal{Z}_r\big)\mathrm{d}r - \int_t^T \widehat{Z}_r^s \cdot \mathrm{d}X_r \; t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ s\in[0,T].$$

此外，根据 (1.2)，我们有 $\widehat{Z} \in \overline{\mathbb{H}}^{2,\ 2}$。因此，根据解的唯一性

$$\big(Y^\star, Z^\star, (Z_t^{t,\star})_{t\in[0,T]}\big) = \big(\widehat{Y}, \widehat{Z}, \mathcal{Z}\big),\ \text{in } \mathbb{S}^{2,2} \times \overline{\mathbb{H}}^{2,2} \times \mathbb{H}^2$$

由此，仿照引理 4.7的论证，我们得到 $Z^\star$ 满足 (4.2)。

现在我们证明 (ii)。注意，我们可以为 V^{P} 找到一个上界。事实上，我们有

$$\mathrm{V}^{\mathrm{P}} = x_0 + \sup_{y_0\geq R_0}\sup_{Z\in\mathcal{H}^\bullet} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[-\frac{y_0}{f(T)} + \int_0^T \left(\lambda_t^\star(Z_t^t) - \frac{f(t)}{f(T)}c_t^\star(Z_t^t)\right)\mathrm{d}t\right] \leq x_0 - \frac{R_0}{f(T)} + \int_0^T g_t\big(z^\star(t)\big)\mathrm{d}t =: \mathrm{V}^{\mathrm{P},\star}.$$

现在我们证明，陈述中给出的这一对 $(y_0^\star,\ Z^\star)$ 是一个可行解，并且达到 $\mathrm{V}^{\mathrm{P},\ \star}$。为验证其可行性，注意，根据假设，$z^\star(\cdot)$ 是确定性的，$Z^\star$ 也是如此。因此，根据定义，显然有 $Z^\star \in \mathrm{H}^\bullet$。最后，根据定义，在 $(y_0^\star,\ Z^\star)$ 下，上界 $\mathrm{V}^{\mathrm{P},\ \star}$ 得以达到。 □

注 4.11。 (i) 现在，我们正式论证在前一个结果中，为求解 (4.3)而选择 $\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\mathrm{x}) = \mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o(\mathrm{x}) = \mathrm{x}$ 的理由。为简单起见，假设映射 σ, $\lambda^\star$ 和 $c^\star$ 均不依赖于 x 变量，因此状态变量的动态方程为

$$X_t = x_0 + \int_0^t \lambda^\star(Z_r)\mathrm{d}r + \int_0^t \sigma_r \cdot \mathrm{d}B_r^\star,\ Y_t^{y_0,Z} = \frac{y_0}{f(T)} - \int_0^t \frac{f(r)}{f(T)}c_r^\star(Z_r)\mathrm{d}r + \int_0^t \frac{\sigma_r}{f(T)}Z_r^0 \cdot \mathrm{d}B_r^\star.$$

此外，假设价值函数 $v(t,\mathrm{x},\mathrm{y})$ 足够正则，使得伊藤公式给出 $\mathbb{P}^\star(Z)$–几乎必然成立

$$\begin{aligned} &v(T, X_T, Y_T^{y_0,Z}) - v(t, X_t, Y_t^{y_0,Z}) + \int_t^T \Big(\sigma_r\partial_x v + \frac{\sigma_r}{f(T)}Z_r^0\partial_y v\Big)(r, X_r, Y_r^{y_0,Z})\mathrm{d}B_r^\star \\ &= \int_t^T \left(\partial_t v - \lambda_r^\star(Z_r^r)\partial_x v - \frac{f(t)}{f(T)}c_r^\star(Z_r^r)\partial_y v + \frac{\sigma_r^2}{2}\partial_{xx}v + \frac{\sigma_r^2}{f(T)}Z_r^0\partial_{xy}v + \frac{\sigma_r^2}{2f(T)^2}|Z_r^0|^2\partial_{yy}v\right)(r, X_r, Y_r^{y_0,Z})\mathrm{d}r. \end{aligned}$$

请注意最后一项中同时出现了 Z_t^t 和 Z_t^0。由此可以形式上看出，对于一般的$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o$和 $\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o$，仅有过程 $(Z_t^t)_{t\in[0,T]}$不足以求出 (4.3)的解。此外，回想一下，由于约束 (4.2)，我们不能独立地选取 Z_t^t和 Z_t^0。最后，在命题 4.10的假设下，直观上预期 $\partial_{xx}v = \partial_{xy}v = \partial_{yy}v = 0$，因此可以在对$(Z_t^t)_{t\in[0,T]}$进行优化之后，再作出选择 Z^0

备注 4.12。 我们以几点说明结束本节。

(i) 值得一提的是，即使在 命题2.3。(ii) 最优合约也既非线性，也非马尔可夫型。此外，从描述最优合约的表达式可以看出，这完全与贴现结构的存在有关，而贴现结构正是时间不一致性的根源。

(ii) 由命题2.3 可知，对于风险中性偏好，第一最优问题和次优问题中的委托人效用相同，而且第二最佳合同在此处也同样最优。这是时间一致的风险中性代理人的典型结果；值得进一步研究，对于更一般的$\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o$ 和$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o$规范，这一结论是否仍然成立。鉴于注4.11，这个问题进一步促使我们研究由定理3.9引入的非标准控制问题的一般类别。

4.3 代理人的折现收入效用

现在，我们考虑第2.1 节中的情形，并采用额外的选择 $f = 1$。于是有

$$\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\xi,\alpha) := \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\Big[\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o\Big(g(T-t)\xi - K_{t,T}^{t,\alpha}\Big)\Big|\mathcal{F}_t\Big],\ \text{where}\ \ K_{t,T}^{s,\alpha} := \int_t^T g(r-s)k_r^o(X,\alpha_r)\mathrm{d}r. \tag{4.4}$$

在（3.1）的背景下，这对应于

$$\begin{aligned} h_t(s,x,y,z,a) &= \sigma_t(x)b_t(x,a)\cdot z + \gamma_{\mathrm{A}} g(t-s)k_t^o(x,a)y,\\ \nabla h_t(s,x,u,v,y,a) &= \sigma_t(x)b_t(x,a)\cdot v - \gamma_{\mathrm{A}} g'(t-s)k_t^o(x,a)y + \gamma_{\mathrm{A}} g(t-s)k_t^o(x,a)u, \end{aligned}$$

$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\ \xi) = \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(g(T-s)\xi)$，以及 $\partial_s \mathrm{U}_{\mathrm{A}}(s,\ x) = -g'(T-s)\partial_x \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(g(T-s)\xi)\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(g(T-s)\xi)$.

注 *4.13*。 (i) 由 (4.4) 引入的问题即使在指数折现的情况下也是时间不一致的，即 $g(t) = e^{-\rho t},\ t \in [0,T]$，对于某个 $\rho > 0$。这是由于指数效用 U_{A}。事实上，反向随机微分方程表示使我们能够将代理人的奖励解释为一种递归效用，其中终值以速率 $e^{g(T-s)}$ 折现，而生成元则以速率 $g(t-s)$ 折现。已知，参见 *Marín-Solano* 和 *Navas* [59, 第 *4* 节。5]，即使在指数折现的情况下，只要终值和运行奖励的折现速率不同，问题就会变得时间不一致。我们还回顾一下，无折现的情形，即 $g(t) = 1$，对应于 *Holmström and Milgrom* [45] 的开创性工作。

(ii) 注意到， h 同时呈现了第 *4.1* 节和第*4.2*节中示例的两项特征，即第二项包含折现因子和 y 变量。[4] 我们强调，命题 *4.10* 的一个关键要素是， Y^s、$_{y_0}$、z 的动态方程由（y_0、Z）给出，且右端不含 Y^{y_0}、z。因此， h 中出现 y 迫使我们首先将变量转换为代理人问题的确定性等价，即如下文所记，从Z 转换为 $\widehat{Z}$ 。通过这种方式，我们消除了 Y^{y_0}、z 动态方程中的 y_0 ，代价是映射$\delta^\star$；我们利用该映射识别出一个辅助鞅，而该辅助鞅在新变量 Z中变为二次型。一方面，当试图在变量Z 和 $\widehat{Z}$的自然可积性之间建立对应关系时，这会产生一个微妙的问题，并最终使我们无法获得族 $H^{2,2}$的完整刻画。另一方面，该二次项并不对应于控制变量 Z的对角值。这使得第*4.2*节中的方法，即命题 *4.10*，无法运作，并迫使我们将范围限制在适合分析的恰当子类中。

正如我们在第4.1节分析之后所预期的那样，通过使用确定性等价来处理，定义 $\mathrm{H}^{2,2}$ 中的过程 $Y^{y_0,Z}$ 会更便于分析。为此，我们针对 $(t,s,x,\mathrm{z}\ z,v) \in [0,T]^2\times\Omega\times(\mathbb{R}^n)^3$，引入

$$\begin{aligned} \widehat{H}_t(x,\mathrm{z}) &:= \sup_{a\in A}\widehat{h}_t(t,x,z,a),\ \widehat{h}_t(s,x,z,a) := \sigma_t(x)b_t(x,a)\cdot z - g(t-s)k_t^o(x,a),\\ \nabla\widehat{h}_t(s,x,v,z,a) &:= \sigma_t(x)b_t(x,a))\cdot v + g'(t-s)k_r^o(x,a) - \gamma_{\mathrm{A}}\sigma_t^\top(x)z\cdot\sigma_t^\top(x)v. \end{aligned}$$

映射 $\hat{a}^\star(t,x,\mathrm{z})$、 $\lambda_t^\star(x,\mathrm{z})$、 $k_t^{o\star}(x,\mathrm{z})$、 $\widehat{h}_t^\star(s,x,z,\mathrm{z})$、 $\nabla\widehat{h}_t^\star(s,x,v,z,\mathrm{z})$，以及概率 $\mathbb{P}^\star(\mathrm{z})$，相应地定义如下。

此外，受第 节 4.2的启发，我们引入映射 $\delta^\star$，定义如下： $(s,t,x,\mathrm{z}\ z,\tilde{z}) \in [0,T]^2\times\Omega\times(\mathbb{R}^n)^3$，为

$$\delta_t^\star(s,x,\mathrm{z},z,\tilde{z}) := k_r^{o\star}(x,\mathrm{z})\Big(g(r-s) - \frac{g(T-s)}{g(T)}g(r)\Big) + \frac{\gamma_{\mathrm{A}}}{2}\Big(|\sigma_r^\top(x)z|^2 - \frac{g(T-s)}{g(T-u)}|\sigma_r^\top(x)\tilde{z}|^2\Big).$$

以下结果与引理 4.7类似，其证明推迟至附录 D。

引理 4.14. 令 $Z \in \mathcal{H}^{2,2}$。

(i) 存在过程族 $(\widehat{Y}^{s,y_0,Z}, \widehat{Z}^s)_{s\in[0,T]}$，使得对于每个 $s \in [0,T]$

$$\widehat{Y}_t^{s,y_0,Z} = -\frac{1}{\gamma_{\mathrm{A}}}\ln\big(-\gamma_{\mathrm{A}}y_0^s\big) - \int_0^t\Big(\widehat{h}_r^\star\big(s,X_{\cdot\wedge r},\widehat{Z}_r^s,\widehat{Z}_r^r\big) - \frac{\gamma_{\mathrm{A}}}{2}|\sigma_r^\top\widehat{Z}_r^s|^2\Big)\mathrm{d}r + \int_0^t\widehat{Z}_r^s\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

[4]事实上，(4 4) 涵盖了第 4 2 节中风险中性主体的特殊情形，回想一下 $1/\gamma_{\mathrm{A}} - \mathrm{U}_{\mathrm{A}}(\mathrm{x}) \longrightarrow \mathrm{x}$，只要 $\gamma_{\mathrm{A}} \to 0$。

(ii) 如果 $\widehat{Z} \in \mathbb{H}^{2,\,2}$ 那么对于每个 $s \in [0,T]$

$$\widehat{Y}_t^{s,y_0,Z} = \frac{g(T-s)}{g(T)}\widehat{Y}_t^{0,y_0,Z} - \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\int_t^T \delta_r^\star(s, X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r^r, \widehat{Z}_r^s, \widehat{Z}_r^0)\mathrm{d}r \middle| \mathcal{F}_t\right]$$

(iii) 此外，若由以下表达式给出的过程 $M^{s,Z}$

$$M_t^{s,Z} := \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\int_0^T \delta_r^\star(s, X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r^r, \widehat{Z}_r^s, \widehat{Z}_r^0)\mathrm{d}r \middle| \mathcal{F}_t\right],\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ (s,t) \in [0,T]^2.$$

是一个平方可积的$(\mathbb{F}, \mathbb{P}^\star(Z))$-鞅，则

$$\widehat{Z}_t^s = \frac{g(T-s)}{g(T)}\widehat{Z}_t^0 - \widehat{Z}_t^{s,Z}, \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}\text{–a.e.}$$

其中 $\widehat{Z}^{s,Z}$ 表示 $M^{s,Z}$ 的表示式中的项。

注记 4.15。 (i) 我们强调，与第4.1 节和4.2节所呈现的分析不同，前述结果并未给出集合$\mathcal{H}^{2,2}$的等价表示。这与上述(iii) 中对过程 $M^{s,Z}$所要求的平方可积性条件密切相关，也与$(z,\tilde{z}) \longmapsto \delta_t^\star(x, \mathrm{z}\ z, \tilde{z})$ 在$(t, s, x, \mathrm{z}) \in [0,T]^2 \times \Omega \times \mathbb{R}^m$ 固定时是二次函数这一事实密切相关。

(ii) 作为此处的合理性检查，我们来根据上一节的分析验证前述系统的一致性。下文省略对 X 的依赖，并假设 $\widehat{Z} \in \mathbb{H}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$。令

$$(\Delta^s g)(t) := g(t-s) - g(t),\ K_{t,\tau}^{Z,s} := \exp\left(\gamma_{\mathrm{A}}\int_t^\tau \left(k_r^\star(\widehat{Z}_r)(\Delta^s g)(r) - \gamma_{\mathrm{A}}|\sigma_r\widehat{Z}_r^0|^2 + \gamma_{\mathrm{A}}\widehat{Z}_r^{s,\top}\sigma_r \cdot \widehat{Z}_r^{0\top}\sigma_r\right)\mathrm{d}r\right),$$

对 $\widetilde{Y}_r^s := K_{t,r}^{Z,s}\mathrm{U}_{\mathrm{A}}(\widehat{Y}_{r}^{s,\,y_0\,Z} - \widehat{Y}_{r}^{0,,\,y_0\,Z,})$应用伊藤公式可得，对于任意 $s \in [0,T]$, $\mathbb{P}$–a.s.

$$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o\left(\widehat{Y}_t^{s,y_0,Z} - \widehat{Y}_t^{0,y_0,Z}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o\left(y_0^s - y_0^0 - \int_0^t \left((\Delta^s g)(r)k_r^\star(\widehat{Z}_r) - \gamma_{\mathrm{A}}|\sigma_r\widehat{Z}_r^0|^2 + \gamma_{\mathrm{A}}\widehat{Z}_r^{s,\top}\sigma_r \cdot \widehat{Z}_r^{0\top}\sigma_r\right)\mathrm{d}r\right)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

作为 $1/\gamma_{\mathrm{A}} - \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o(\ y) \xrightarrow{\gamma_{\mathrm{A}}\to 0} y$，我们看到，前一个方程导出了引理 4.7中的相应方程 .

4.3.1 委托人的第二最佳解

需要指出的是，与第4.2节不同，上一节的分析并未对$\mathcal{H}^{2,2}$ 在奖励由式(2.4)给定时进行完整刻画。这主要是因为，为了应用$\sim_Z$所诱导的确定性等价所要求的变量可积性，必须采用4.2节提出的方法，参见引理4.14。不过，鉴于当前例子是对前两个例子的推广，我们将借鉴那些最优解的结构，提出一个族，使委托人问题中的优化能够在该族上进行。

我们将重点讨论以下情形： $n=1$ 并特别关注以下一类 $\widetilde{\mathcal{H}} \subseteq \mathcal{H}^{2,2}$ 过程： $Z \in \mathcal{H}^{2,2}$ 对于给定的对$(y_0,\ Z) \in \mathcal{I}_0 \times \mathcal{H}^{2,2}$, 以及 $Y^{y_0,\ Z}$由（3.5）给出，存在一对可预测过程$(\eta,\ \zeta)$使得

$$\widehat{Z}_t^s = \frac{1}{-\gamma_{\mathrm{A}}}\frac{Z_t^s}{Y_t^{y_0,s,Z}} = \eta_{s,t}\zeta_t,\ \eta_{t,t} = 1,\ t \in [0,T].$$

因此，由定理3.9和（4.2），我们有

$$\underline{\mathrm{V}}^{\mathrm{P}} := \sup_{y_0^0 \geq R_0}\sup_{Z \in \widetilde{\mathcal{H}}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o\left(X_T - \widehat{Y}_T^{0,y_0,Z}\right)\right] \leq \mathrm{V}^{\mathrm{P}}$$

注 4.16. (i) 我们指出，前述定义隐含地要求，对于任意 $t \in [0,T]$， 映射$s \longmapsto \eta_{s,t}$ 都可微。

~(*ii*) 此外，若 $k^{o\star}(x,z)$ 不依赖于 x，则不难验证 *that* $\mathcal{H}\neq\emptyset$。根据前述~引理，对于 $Z\in\mathcal{H}$

$$M_t^{s,Z}=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\int_0^T k_r^{o\star}(\zeta_r)\left(g(r-s)-\frac{g(T-s)}{g(T)}g(r)\right)+\frac{\gamma_{\mathrm{A}}}{2}\left|\sigma_r^\top\zeta_r\right|^2\left(|\eta_{s,r}|^2-\frac{g(T-s)}{g(T)}|\eta_{0,r}|^2\right|^2\right)\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

and

$$\widetilde{Z}_t^{s,Z}=\left(\frac{g(T-s)}{g(T)}\eta_{0,t}-\eta_{s,t}\right)\zeta_t,\,\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}\text{–a.e.}$$

~这意味着，$\mathcal{H}$ 尤其包含所有由确定性对 (ζ,η)诱导的过程 Z。事实上，对于这类过程，我们有 $M^{s,Z}$是确定性的，$\widetilde{Z}^{s,Z}=0$，因此，$\eta_{s,t}=g(T-s)/g(T-t)$~给出了 $\mathcal{H}$的一个非平凡元素。上述论证在指数折现的情形下同样成立；在这种情况下，我们回顾一下，代理人的问题仍然是时间不一致的。

The 以下结果刻画了 V^{P}的解。其证明见附录 D

命题 4.17。 设委托人和代理人分别具有参数为 γ_{P} 和 γ_{A}的指数效用。令 $C_y:=-\frac{1}{\gamma_{\mathrm{P}}}\mathrm{e}^{-\gamma_{\mathrm{P}}(x_0-y)}$，$\widehat{R}_0:=\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\,(-1)}(R_0)$，并假设：

(*i*) 映射 σ、$\lambda^\star$ 和 $k^{o\star}$ 不依赖于变量 x；

(*ii*) 对于任意 $(t,\eta)\in[0,T]\times\mathbb{R}$，由 $G\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义的映射为

$$G(z):=\lambda_t^\star(z)-\frac{g(t)}{g(T)}k_t^{o\star}(z)-\frac{\gamma_A}{2g(T)}\left|\frac{\eta_0\sigma_t}{\eta}\right|^2|z|^2-\frac{\gamma_{\mathrm{P}}}{2}\sigma_r^2\left(1-\frac{\eta_0}{\eta g(T)}z\right)^2,$$

存在唯一的最大化者 $z^\star(t,\eta)$，使得 $[0,T]\ni t\longmapsto z^\star(t,\eta)$ 平方可积。

Then

$$\underline{\mathrm{V}}^{\mathrm{P}}=\sup_{Z^\eta\in\tilde{\mathcal{H}}}C_{\hat{R}_0}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_{\mathrm{P}}\int_0^T G_r(z^\star(r,\eta_r))\mathrm{d}r\right)\right],\ \textit{where}\ Z_t^{s,\eta}:=\frac{\eta_s}{\eta_t}z^\star(t,\eta_t).$$

此外

(*i*) 令 $\underline{\mathrm{V}}^{\mathrm{P},o}$ 表示V^{P} 在具有确定性 η 的 ~$\mathcal{H}$ 子类上的限制。那么，最优确定性合约由以下族给出

$$Z_t^s:=\frac{g(T-s)}{g(T-t)}z^\star(t,g(T-t)),$$

and

$$\xi=\frac{\widehat{R}_0}{g(T)}-\frac{1}{g(T)}\int_0^t h_r^\star\left(0,\frac{g(T)}{g(T-t)}z^\star(t,g(T-t)),z^\star(r,g(T-r))\right)\mathrm{d}r+\int_0^t\frac{z^\star(t,g(T-t))}{g(T-t)}\mathrm{d}X_r;$$

(*ii*) 在 $(\gamma_{\mathrm{A}},\gamma_{\mathrm{P}})=(0,0)$,即 风险中性委托人与代理人的情形下，$\mathrm{V}^{\mathrm{P}}$的解，以及因此的 V_{P}，与 命题4.10 给出的值一致，且最优族 Z 是确定性的。

注 4.18. 我们以几点说明结束本节。

(*i*) 由 $\mathcal{H}^{2,2}$ 所诱导的一般受限合同类中，委托人问题的解无法通过上述分析获得。如 注4.13.(*ii*)所详述的，这是因为在尝试确定 $\mathcal{H}^{2,2}$，的适当简化形式时，会遇到微妙的可积性问题；而以确定性等价来处理时，生成元又具有二次形式。我们认为，这反映了定理 3.9中引入的非标准控制问题类别的复杂性。

(*ii*) 如果，如注释4.6中那样，我们回到 [45],，即 $b_t(x,a)=a/\sigma$, $\sigma_t(x)=\sigma$, $k_t(x,a)=ka^2/2$的设定，则有

$$Z_t^s=\frac{g(T)g(T-s)(g(T-t)+\gamma_{\mathrm{P}}\sigma^2k)}{g(t)g^2(T-t)+\sigma^2kg(T)(\gamma_{\mathrm{A}}g(T)+\gamma_{\mathrm{P}})}.$$

我们强调：(a) 与 [45]，任何类型的贴现结构(包括指数折现)相比，前述表达式以及因此的最优行动既非线性的，也非马尔可夫型的。这证实了我们在注释4.13 中的评论。(i)，即使在指数折现的情形下，代理人的问题仍然是时间不一致的；(b) 在不贴现的情形下，即 $g=1$，当我们回到注释4.6的模型时，前述表达式与由 [45]给出的线性合同结果一致。这表明，~即便可能并非最佳，类 $\mathcal{H}$ 中的最优合约至少能够捕捉到当该问题再次变为时间一致时的最优合约。

附录

A 节2 的证明

命题 2.2 的证明。令 $(\rho,\alpha)\in\mathbb{R}_+\times\mathcal{A}$ 为固定值，并优化映射 $\mathcal{C}\ni\xi\longmapsto\mathfrak{L}(\alpha,\xi,\rho)\in\mathbb{R}$。该问题的一个上界可通过逐项优化 x-by-x得到。因此，对于任意 $(\alpha,\rho)\in\mathcal{A}$ 固定值，我们定义候选项 $\times\,\mathbb{R}_+$

$$\xi^\star(\rho,\alpha)=\frac{1}{g(T)\gamma_{\mathrm{A}}+\gamma_{\mathrm{P}}}\Big(\gamma_{\mathrm{P}}\Gamma(X_T)+\gamma_{\mathrm{A}}K_{0,T}^{0,\alpha}+\log\big(\rho g(T)f(T)\big)\Big).$$

要证明由 $\xi^\star(\rho,\alpha)$ 导出的上界能够达到，只需注意到根据假设，$\xi^\star(\rho,\alpha)\in\mathrm{C}$。将其代入 $\mathfrak{L}(\rho,\alpha,\xi)$，得到

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P,d}}=\inf_{\rho\in\mathbb{R}_+}\left\{-\rho R_0-\frac{1}{\bar\gamma}(\rho g(T)f(T))^{\frac{\bar\gamma}{g(T)\gamma_{\mathrm{A}}}}\sup_{\alpha\in\mathcal{A}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\exp\left(-\bar\gamma\Gamma(X_T)+\frac{\bar\gamma}{g(T)}K_{0,T}^{0,\alpha}\right)\right]\right\}.$$

若 $\mathrm{V}_{\mathrm{cont}}<\infty$，由于上述函数关于 ρ 是严格凸函数，一阶条件给出命题中的 $\rho^\star$。

我们只需证明 $\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P}}=\mathrm{V}^{\mathrm{P,d}}{}_{\mathrm{FB}}$，即 不存在对偶间隙。为此，只需验证 $(\xi^\star(\rho^\star,\alpha^\star)\ \alpha^\star)$ 是原始可行的，即 满足参与约束。事实上

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\alpha^\star}}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^o\left(g(T)\xi-\int_0^T g(r)k_r^o\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r^\star\big)\mathrm{d}r\right)\right]\\
&=\frac{-1}{\gamma_{\mathrm{A}}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\alpha^\star}}\left[\exp\left(-\bar\gamma\Gamma(X_T)-\frac{\gamma_{\mathrm{A}}}{\gamma_{\mathrm{P}}}\bar\gamma K_{0,T}^{0,\alpha^\star}-\frac{\bar\gamma}{\gamma_{\mathrm{P}}}\log\left(\frac{\bar\gamma f(T)}{\gamma_{\mathrm{A}}R_0}V_{\mathrm{cont}}\right)^{1+\frac{\gamma_{\mathrm{P}}}{\gamma_{\mathrm{A}}g(T)}}-\gamma_{\mathrm{A}}K_{0,T}^{0,\alpha^\star}\right)\right]\\
&=\frac{-1}{\gamma_{\mathrm{A}}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{\alpha^\star}}\left[\exp\left(-\bar\gamma\Gamma(X_T)-\frac{\gamma_{\mathrm{A}}}{\gamma_{\mathrm{P}}}\bar\gamma K_{0,T}^{0,\alpha^\star}-\gamma_{\mathrm{A}}K_{0,T}^{0,\alpha^\star}\right)\right]\left(\frac{\bar\gamma}{\gamma_{\mathrm{A}}}V_{\mathrm{cont}}\right)^{-1}\frac{R_0}{f(T)}=\frac{R_0}{f(T)}.
\end{aligned}$$

□

证明 命题 2.3。我们论证（i）。固定（ρ，α）$\in\mathbb{R}_+\times\mathrm{A}$，并优化映射 $\mathfrak{C}\ni\xi\longmapsto\mathfrak{L}$（$\alpha$，$\xi$，$\rho$）$\in\mathbb{R}$。通过优化 x-对-x，可以得到该问题的一个上界。这定义了映射 $\xi^\star(\mathrm{x}\ \rho)$。如前所述，$\xi^\star$（$\rho$，$\alpha$）$\in\mathfrak{C}$这一事实保证该上界确实可以达到。代入 $\mathfrak{L}$（ρ，α，ξ）后，我们得到 $\mathrm{V}_{\mathrm{cont}}$（$\rho$）以及 $\mathrm{V}^{\mathrm{P},\ \mathrm{d}}{}_{\mathrm{FB}}$所对应的等式。现在，为了得到不存在对偶间隙，我们必须验证存在一个对偶问题的解，该解是原问题可行的。这正是命题陈述中的附加假设。

我们不考虑（ii）。在这种情况下，我们可以直接求解 $\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P}}$。鉴于 $\mathrm{U_P(x)}=\mathrm{U_A(x)}=\mathrm{x}$，

$$\mathrm{V}_{\mathrm{FB}}^{\mathrm{P}}=\sup_{(\alpha,\xi)\in\mathcal{A}\times\mathfrak{C}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\big[\Gamma(X_T)-\xi\big],\ \text{s.t.}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[f(T)\xi-\int_0^T f(r)c_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right]\geq R_0.$$

请注意，对于固定的 $\alpha\in\mathrm{A}$，委托人的奖励关于 $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}[\xi]$ 呈线性且严格递减，因此她对期望相同的合同无差异。因此，她在期望相同的可行合同中进行优化。现在，对于固定的 $\alpha\in\mathrm{A}$，任何可行合同都满足

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}[\xi^\star]\geq\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\int_0^T\frac{f(r)}{f(T)}c_r\big(X_{\cdot\wedge r},\alpha_r\big)\mathrm{d}r\right]+\frac{R_0}{f(T)}.$$

因此，我们先前的说明意味着，对于给定的 α_T，委托人对 $\hat{\mathfrak{C}}(\alpha)$ 中的合同无差异。注意，$\hat{\mathfrak{C}}(\alpha) \neq \emptyset$。事实上，取确定性契约 $\xi^\star(\alpha) := {}^{R_0}_{f\,T()} + f(T)^{-1}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\alpha}\left[\int_0 f(r)c_r\big(X_{\cdot\wedge r},\ \alpha_r\big)\mathrm{d}r\right]$。

将其代回委托人效用，便得到陈述中的 $\mathrm{V}^{\mathrm{P}}_{\mathrm{FB}}$ 表达式。 □

B BSVIE 型奖励的非时点一致性

首先需要指出，在奖励由（1.2）给出的情形下， [43], 所设计的方法基于 [7], 马尔可夫框架中的方法，其核心是引入过程族$(Y^s, Z^s)_{s\in[0,T]}$，它是后向随机 Volterra 积分方程（简称后向随机 Volterra 积分方程）的解），并满足

$$Y_t^{s,\alpha} = \eta(s,\xi) + \int_t^T h_r\big(s, X, Y_r^{s,\alpha}, Z_r^{s,\alpha}, \pi_r, \alpha_r\big)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r^{s,\alpha}\cdot \mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ s\in[0,T]. \tag{B.1}$$

本节中，我们固定 $\mathsf{C} = (\xi,\pi) \in \mathfrak{C}$ 和 $\alpha^\star \in \mathsf{E} := \mathsf{E}(\mathsf{C})$。因此，我们将 $\alpha\in\mathsf{A}$ 下代理人的报酬表示为 $\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\alpha) := \mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\alpha,\mathsf{C}) = Y^{t,\ \alpha}_{\cdot,t}$。我们将 $\alpha^\star$ 下相应的价值函数记为 $\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}$。

为了建立一个扩 展的动态规划原理，我们需要以下最小的一组假设 s.

假设 B.1。 (i) $(s,y,z)\longmapsto h_t(s,x,y,z,p,a)$ (分别地， $s\longmapsto\eta(s,x)$) 是连续可微的。此外，由 $\nabla h\colon [0,T]^2\times\Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)^2\times\mathbb{R}\times A\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义的映射

$$\nabla h_t(s,x,u,v,y,z,p,a) := \partial_s h_t(s,x,y,z,p,a) + \partial_y h_t(s,x,y,z,p,a)u + \sum_{i=1}^n \partial_{z_i} h_t(s,x,y,z,p,a)v_i,$$

满足 $\nabla h_\cdot(s,\cdot\ u,v,y,z,p,a)\in\mathcal{P}^{\mathrm{prog}}(\mathbb{R},\mathbb{F})$; 对所有 $s\in[0,T]$;

(ii) 对于 $\varphi\in\{h,\partial_s h\}$，$(y,z,a)\longmapsto\varphi_t(s,x,y,z,a)$ 是一致 *Lipschitz* 连续的，即 存在某个 $C>0$，使得 $\forall(s,t,x,y,\tilde{y},z,\tilde{z},a,\tilde{a})$，

$$|\varphi_t(s,x,y,z,a) - \varphi_t(s,x,\tilde{y},\tilde{z},\tilde{a})| \le C\big(|y-\tilde{y}| + |\sigma_t(x)^\top(z-\tilde{z})| + |a-\tilde{a}|\big).$$

(iii) 令 $\big(\tilde{h}_\cdot(s)\ \nabla\tilde{h}_\cdot(s)\big) := \big(h_\cdot(s,\cdot\,0,0,\pi_\cdot,0)\ \nabla h_\cdot(s,\cdot\,0,0,0,0,\pi_\cdot,0)\big)$，则二元组 $\big(\tilde{h},\nabla\tilde{h}\big) := \big(\tilde{h}(s)\ \nabla\tilde{h}(s)\big)_{s\in[0,T]}$属于 $\mathbb{L}^{1,2,2}(\mathbb{R})\times\mathbb{L}^{1,2,2}(\mathbb{R})$。

在假设 B.1, [42, 引理 6.1] 下，保证对于任意 $\alpha\in\mathsf{A}$，存在 $(\partial Y^\alpha,\ \partial Z^\alpha)\in\mathbb{S}^2\times\mathbb{H}^{2,\ 2}$，使得对每个 $s\in[0,T]$

$$\partial Y_t^{s,\alpha} = \partial_s\eta(s,\xi) + \int_t^T \nabla h_r(s,X,\partial Y_r^{s,\alpha},\partial Z_r^{s,\alpha},Y_r^{s,\alpha}Z_r^{s,\alpha},\pi_r,\alpha_r)\mathrm{d}r - \int_t^T \partial Z_r^{s,\alpha}\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\quad \tag{B.2}$$

这最终意味着映射 $([0,T],\mathsf{B}([0,T]))\longrightarrow(\mathbb{H}^2,\mathsf{k}\cdot\mathsf{k}_{\mathbb{H}^2})\colon\ s\longmapsto Z^{s,\alpha}$具有绝对连续性。由此，过程 $(Z^{t,\ \alpha}_{\cdot,t})_{t\in[0,T]}$ 定义良好。此外，参见 [42, 引理 6.2], , 对任意 $\alpha\in\mathsf{A}$

$$Y_t^{t,\alpha} = \eta(T,\xi) + \int_t^T \Big(h_r(r,X,Y_r^{r,\alpha},Z_r^{r,\alpha},\pi_r,\alpha_r) - \partial Y_r^{r,\alpha}\Big)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r^{r,\alpha}\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.} \tag{B.3}$$

我们先陈述以下辅助结果。

引理 B.2. 设 假设 B.1 成立。对于任意 $\{\gamma,\gamma'\}\subseteq\mathcal{T}_{0,T}$, $\gamma\le\gamma'$ 和 $\alpha\in\mathcal{A}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_\gamma^{\gamma,\alpha} - Y_{\gamma'}^{\gamma',\alpha} + \int_\gamma^{\gamma'}\partial Y_r^{r,\alpha}\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_\gamma\right],\ \text{depends only on the value of } \alpha \text{ on } [\gamma,\gamma'].$$

证明。 对于生成元不依赖于 $(y,\ z)$ 的倒向随机微分方程，这一性质显然成立。事实上，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_\gamma^{\gamma,\alpha} - Y_{\gamma'}^{\gamma',\alpha} + \int_\gamma^{\gamma'}\partial Y_r^{r,\alpha}\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_\gamma\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_\gamma^{\gamma'} h_r(r,X_{\cdot\wedge r},\alpha_r)\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_\gamma\right].$$

为了将这一结果推广到倒向随机微分方程（B.1）–（B.2），我们考虑 Picard迭代过程

$$Y_t^{s,\alpha,n+1} = \eta(s,\xi) + \int_t^T h_r\big(s, X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{s,\alpha,n}, Z_r^{s,\alpha,n}, \pi_r, \alpha_r\big)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r^{s,\alpha,n+1}\cdot \mathrm{d}X_r,$$
$$\partial Y_t^{s,\alpha,n+1} = \partial_s\eta(s,\xi) + \int_t^T \nabla h_r(s, X_{\cdot\wedge r}, \partial Y_r^{s,\alpha,n}, \partial Z_r^{s,\alpha,n}, Y_r^{s,\alpha,n}, Z_r^{s,\alpha,n}, \pi_r, \alpha_r)\mathrm{d}r - \int_t^T \partial Z_r^{s,\alpha,n+1}\cdot \mathrm{d}X_r,$$

并注意到，与（B.3）中一样

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_\gamma^{\gamma,\alpha,n+1} - Y_{\gamma'}^{\gamma',\alpha,n+1} + \int_\gamma^{\gamma'} \partial Y_r^{r,\alpha,n+1}\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_\gamma\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_\gamma^{\gamma'} h_r(r, X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{r,\alpha,n}, Z_r^{r,\alpha,n}, \pi_r, \alpha_r)\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_\gamma\right]. \tag{B.4}$$

那么，由于 $Y^{\alpha,0} = Z^{\alpha,0} = \partial Y^{\alpha,0} = \partial Z^{\alpha,0} = 0$，我们可知（B.4）蕴含了初始步骤中的结论。显然，再次由（B.4）可知，这一性质在每次迭代中都得以保持，因此在极限下也成立。 □

在下文中，给定 $(\sigma,\tau)\in \mathrm{T}_{t,T}\times\mathrm{T}_{t,t+\ell}$，其中 $\sigma\le\tau$，我们用 $\Pi^\ell := (\tau_i^\ell)_{i=1,\dots,n_\ell} \subseteq \mathrm{T}_{t,T}$ 表示$[\sigma,\tau]$的一个一般划分，其网格小于 ℓ，即对于 $n_\ell := \lceil(\tau-\sigma)/\ell\rceil$, $\sigma =: \tau_0^\ell \le\cdots\le \tau_{n^\ell}^\ell := \tau, \forall \ell$，且 $\sup_{1\le i\le n_\ell}|\tau_i^\ell - \tau_{i-1}^\ell| \le \ell$。我们还令 $\Delta\tau_i^\ell := \tau_i^\ell - \tau_{i-1}^\ell$。前述定义逐点成立。

定理 B.3（动态规划原理）。设假设 B.1 成立。设 $\alpha^\star\in \mathrm{E(C)}$ 和 $\{\sigma,\ \tau\}\subset \mathrm{T}_{t,\ T}$，其中 $\sigma\le\tau$。则，$\mathbb{P}$–几乎处处。

$$\mathrm{V}_\sigma^{\mathrm{A}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha\in\mathcal{A}}^{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathrm{V}_\tau^{\mathrm{A}} + \int_\sigma^\tau \left(h_r\big(r, X, Y_r^{r,\alpha}, Z_r^{r,\alpha}, \pi_r, \alpha_r\big) - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\right)\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_\sigma\right],$$

其中对每个 $s\in[0,T]$，$\partial Y^{s,\ \alpha^\star}$ 表示方程 (B.2) 在 $\alpha^\star$下的解。此外，$\alpha^\star$ 取到 本质上确界$^{\mathbb{P}}$。

证明。我们先证明不等式 $\ge$。分三步进行。设 $\varepsilon>0$、$0<\ell<\ell_\varepsilon$ 和 Π^ℓ 是 $[\sigma,\tau]$的一个划分。**步骤 1：** 根据均衡的定义，对于任意 $\alpha\in\mathrm{A}$，我们有

$$\mathrm{V}_\sigma^{\mathrm{A}} \ge \mathrm{V}_\sigma^{\mathrm{A}}(\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star) - \varepsilon\ell \ge \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_\sigma^{\sigma,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} - Y_{\tau_1}^{\tau_1,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} + Y_{\tau_1}^{\tau_1,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star}\middle|\mathcal{F}_\sigma\right] - \varepsilon\ell.$$

回顾一下，对于任意 $\rho\in\mathrm{T}_{0,\ T}$, $Y^{\rho,\ }_{\rho\ \ \alpha\otimes_\rho\alpha^\star} = Y^{\rho,\ }_{\rho\ \ \alpha^\star}$。鉴于 $\alpha\in\mathrm{A}$ 的任意性，我们得到

$$\mathrm{V}_\sigma^{\mathrm{A}} \ge \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha\in\mathcal{A}}^{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_\sigma^{\sigma,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} - Y_{\tau_1}^{\tau_1,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} + \mathrm{V}_{\tau_1}^{\mathrm{A}}\middle|\mathcal{F}_\sigma\right] - \varepsilon\ell,\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

步骤 2： 注意到，根据**步骤 1**

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_\sigma^{\mathrm{A}} &\ge \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha\in\mathcal{A}}^{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_\sigma^{\sigma,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} - Y_{\tau_1}^{\tau_1,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} + \mathrm{V}_{\tau_1}^{\mathrm{A}}\middle|\mathcal{F}_\sigma\right] - \varepsilon\ell \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha\in\mathcal{A}}^{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_\sigma^{\sigma,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} - Y_{\tau_1}^{\tau_1,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} + \operatorname*{ess\,sup}_{\tilde\alpha\in\mathcal{A}}^{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_{\tau_1}^{\tau_1,\tilde\alpha\otimes_{\tau_2}\alpha^\star} - Y_{\tau_2}^{\tau_2,\tilde\alpha\otimes_{\tau_2}\alpha^\star} + Y_{\tau_2}^{\tau_2,\tilde\alpha\otimes_{\tau_2}\alpha^\star}\middle|\mathcal{F}_{\tau_1}\right]\middle|\mathcal{F}_\sigma\right] - 2\varepsilon\ell \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha\in\mathcal{A}}^{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathrm{V}_{\tau_2}^{\mathrm{A}} + Y_\sigma^{\sigma,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} - Y_{\tau_1}^{\tau_1,\alpha\otimes_{\tau_1}\alpha^\star} + Y_{\tau_1}^{\tau_1,\alpha\otimes_{\tau_2}\alpha^\star} - Y_{\tau_2}^{\tau_2,\alpha\otimes_{\tau_2}\alpha^\star}\middle|\mathcal{F}_\sigma\right] - 2\varepsilon\ell,
\end{aligned}$$

其中，第二个等式根据 [66, 引理 3。5] 由于 [66, 假设 1。1] 在假设 1.2下成立。重复上述论证可得 $\mathbb{P}$–几乎处处。

$$\mathrm{V}_\sigma^{\mathrm{A}} \ge \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha\in\mathcal{A}}^{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathrm{V}_\tau^{\mathrm{A}} + \sum_{i=0}^{n_\ell-1} Y_{\tau_i}^{\tau_i,\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star} - Y_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1},\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star}\middle|\mathcal{F}_\sigma\right] - n_\ell\varepsilon\ell.$$

现在，我们利用以下事实：对于任意 $i\in\{0,\dots,n_\ell-1\}$ 以及 $\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star$，引理 B.2 可推出

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[Y_{\tau_i}^{\tau_i,\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star} - Y_{\tau_{i+1}}^{\tau_{i+1},\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star} + \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star}\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_\sigma\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} h_r(r, X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{r,\alpha}, Z_r^{r,\alpha}, \pi_r, \alpha_r)\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_\sigma\right].$$

代入前一个表达式后，我们得到 $\mathbb{P}$–几乎处处。

$$\mathrm{V}_\sigma^{\mathrm{A}} \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha\in\mathcal{A}}{}^{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{V}_\tau^{\mathrm{A}} + \int_\sigma^\tau h_r(r, X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{r,\alpha}, Z_r^{r,\alpha}, \pi_r, \alpha_r)\mathrm{d}r - \sum_{i=0}^{n_\ell-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star}\mathrm{d}r - n_\ell\varepsilon\ell\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big]. \tag{B.5}$$

步骤3： 令 $i\in\{0,\ \ldots\ldots,\ n_\ell-1\}$。根据假设1.2，由（B.1）和（B.2）定义的倒向随机微分方程组的稳定性，参见 [42, 命题 6。4], 可知存在一个常数 $C>0$ 使得

$$\Big\|\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star} - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\mathrm{d}r\Big\|_{\mathcal{L}^2} \leq \ell\Big\|\partial Y^{\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star} - \partial Y^{\alpha^\star}\Big\|_{\mathbb{S}^{2,2}} \leq \ell C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}}|\alpha_r-\alpha_r^\star|\mathrm{d}r\Big)^2\Big],$$

这将导出

$$\Big\|\sum_{i=0}^{n_\ell-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star} - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\mathrm{d}r\Big\|_{\mathcal{L}^2} \leq \ell C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_{\sigma}^{\tau}|\alpha_r-\alpha_r^\star|\mathrm{d}r\Big)^2\Big] \xrightarrow{\ell\to 0} 0.$$

通过选择适当的划分 Π^ℓ 并应用控制收敛定理，我们得到

$$I(n_\ell) := \sum_{i=0}^{n_\ell-1}\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{\tau_{i+1}}\alpha^\star}\mathrm{d}r \xrightarrow{\ell_\varepsilon\to 0} \int_\sigma^\tau \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\mathrm{d}r,\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

回到（B.5），我们得到

$$\mathrm{V}_\sigma^{\mathrm{A}} = \operatorname*{ess\,sup}_{\alpha\in\mathcal{A}}{}^{\mathbb{P}}\ \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{V}_\tau^{\mathrm{A}} + \int_\sigma^\tau \Big(h_r\big(r, X, Y_r^{r,\alpha}, Z_r^{r,\alpha}, \pi_r, \alpha_r\big) - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\Big)\mathrm{d}r\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

最后，我们证明等式由 $\alpha^\star\in\mathcal{E}$取到。事实上，注意到（B.3）意味着

$$\mathrm{V}_\sigma^{\mathrm{A}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\mathrm{V}_\tau^{\mathrm{A}} + \int_\sigma^\tau \Big(h_r\big(r, X, Y_r^{r,\alpha^\star}, Z_r^{r,\alpha^\star}, \pi_r, \alpha_r^\star\big) - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\Big)\mathrm{d}r\Big|\mathcal{F}_\sigma\Big],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

□

回顾一下，与 h 相关的哈密顿量为

$$H_t(x,y,z,p) = \sup_{a\in A} h_t(t,x,y,z,p,a),\ (t,x,y,z,p)\in[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}.$$

我们对 H 的基本假设如下。

假设 ***B.4.*** *(i)* 对任意 $(t,x)\in[0,T]\times\Omega$，映射 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\ni(y,z)\longmapsto H_t(x,y,z,p)$ 是一致 *Lipschitz* 连续的，即存在 $C>0$，使得对任意 $(t,x,p,y\ \tilde{}y,z\ \tilde{}z)\in[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^n)^2$

$$\big|H_t(x,\mathrm{y},\mathrm{z},p) - H_t(x,\tilde{\mathrm{y}},\tilde{\mathrm{z}},p)\big| \leq C\big(|\mathrm{y}-\tilde{\mathrm{y}}| + |\sigma_t(x)^\top(\mathrm{z}-\tilde{\mathrm{z}})|\big);$$

(ii) 存在唯一的博雷尔可测映射 $a^\star\colon[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow A$，使得

$$H_t(x,\mathrm{y},\mathrm{z},p) = h_t\big(t,x,\mathrm{y},\mathrm{z},p,a^\star(t,x,\mathrm{y},\mathrm{z},p)\big),\ \forall(t,x,\mathrm{y},\mathrm{z})\in[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n.$$

(iii) 对任意 $(t,x)\in[0,T]\times\Omega$，映射 $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\ni(\mathrm{y},\ \mathrm{z})\longmapsto a^\star(t,x,\mathrm{y},\mathrm{z}\ p)$ 是一致 *Lipschitz* 连续的，即存在 $C>0$，使得对任意 $(t,x,p,\mathrm{y}\ \tilde{}\mathrm{y},\mathrm{z}\ \tilde{}\mathrm{z})\in[0,T]\times\Omega\times\mathbb{R}^3\times(\mathbb{R}^n)^2$。

$$\big|a^\star(t,x,\mathrm{y},\mathrm{z},p) - a^\star(t,x,\tilde{\mathrm{y}},\tilde{\mathrm{z}},p)\big| \leq C\big(|\mathrm{y}-\tilde{\mathrm{y}}| + |\sigma_t(x)^\top(\mathrm{z}-\tilde{\mathrm{z}})|\big);$$

(iv) $(\tilde{H},\ \tilde{a}^\star)\in\mathbb{L}^2(\mathbb{R})\times\mathbb{L}^2(\mathbb{R})$，其中 $(\tilde{H}_\cdot,\ \tilde{a}_\cdot^\star) := (H_\cdot(\cdot\,0,\ 0,\ \pi_\cdot)\ a_\cdot^\star(\cdot\,0,\ 0,\ \pi_\cdot))$。

据此，我们引入如下针对任意 $s \in [0,T]$ 定义的系统：

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \eta(T,\xi) + \int_t^T \big(H_r(X, Y_r, Z_r, \pi_r) - \partial Y_r^r\big)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.} \\
Y_t^s &= \eta(s,\xi) + \int_t^T h_r^\star\big(s, X, Y_r^s, Z_r^s, Y_r, Z_r, \pi_r\big)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r^s \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.} \\
\partial Y_t^s &= \partial_s \eta(s,\xi) + \int_t^T \nabla h_r^\star(s, X, \partial Y_r^s, \partial Z_r^s, Y_r^s Z_r^s, Y_r, Z_r, \pi_r)\mathrm{d}r - \int_t^T \partial Z_r^s \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}
\end{aligned}
\tag{H}
$$

我们称$(\mathcal{Y},\mathcal{Z}\ Y, Z, \partial Y, \partial Z) \in \mathfrak{H}$是该系统的一个解，只要满足 (H)。根据定理 B.3，给定 $\alpha^\star \in \mathcal{E}$，将沿均衡的值与一个生成元部分由以下内容给出的倒向随机微分方程联系起来是合理的： H。下一个结果即为此目的。

定理 B.5 (必要性)。设假设 B.1 和B.4 成立，且 $\alpha^\star \in \mathcal{E}$。那么，可以构造出(H)的一个解。

证明。给定 $\alpha^\star \in \mathsf{E}$，假设 B.1 保证过程 $(Y^{\alpha^\star}, Z^{\alpha^\star})$ 和 $(\partial Y^{\alpha^\star}, \partial Z^{\alpha^\star})$ 分别作为 (B.1) 和 (B.2) 的解是良好定义的。此外，过程 $\big((Y^{t,}{}_{,t}{}^{\alpha^\star})_{t\in[0,T]}, (Z^{t,}{}_{,t}{}^{\alpha^\star})_{t\in[0,T]}\big)$ 作为 $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$ 的元素也是良好定义的，见 [42, 引理 6.2]。给定 $(\partial Y^{t,}{}_{,t}{}^{\alpha^\star})_{t\in[0,T]} \in \mathbb{S}^2$，对于任意 $\alpha \in \mathsf{A}$，我们可以定义过程 $(\mathsf{Y}^\alpha, \mathsf{Z}^\alpha) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$ 作为解

$$
\mathcal{Y}_t^\alpha = \eta(T,\xi) + \int_t^T \Big(h_r(r, X, \mathcal{Y}_r^\alpha, \mathcal{Z}_r^\alpha, \pi_r, \alpha_r) - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\Big)\mathrm{d}r - \int_t^T \mathcal{Z}_r^\alpha \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}
$$

现在注意到，在假设 B.1 下，倒向随机微分方程的经典比较结果成立，参见例如 [93,定理 4.4。1]。由定理 B.3 可知，数对 $\big((Y^{t,}{}_{,t}{}^{\alpha^\star})_{t\in[0,T]}, (Z^{t,}{}_{,t}{}^{\alpha^\star})_{t\in[0,T]}\big)$ 是该倒向随机微分方程的解

$$
Y_t = \eta(T,\xi) + \int_t^T \big(H_r(X, Y_r, Z_r, \pi_r) - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\big)\mathrm{d}r - \int_t^T Z_r \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}
$$

此外，定理 B.3 陈述的第二部分意味着 $\alpha^\star = a^\star(\cdot\ X, Y., Z., \pi.), \mathrm{d}t \otimes \mathrm{d}\mathbb{P}$–几乎处处成立。因此，$(Y^{\alpha^\star}, Z^{\alpha^\star})$ 和 $(\partial Y^{\alpha^\star}, \partial Z^{\alpha^\star})$ 分别定义了方程组 (H) 中第二个和第三个方程的解。

□

我们以一个关于均衡的验证定理结束本节。

定理 *B.6*（验证）。设假设 *B.1* 和 *B.4* 成立。设 $(Y, Z\ Y, Z, \partial Y, \partial Z) \in \mathfrak{H}$ 是 *(H)* 的一个解，且 $\alpha^\star := a^\star(\cdot\ X, Y., Z., \pi.)$。那么， $\alpha^\star \in \mathcal{E}$ 并且

$$
\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}} = \mathcal{Y}_t,\ \mathbb{P}\text{–a.s.}
$$

证明。 我们验证均衡的定义。令 $\varepsilon > 0$，$(t,\ \ell) \in [0,T] \times (0,\ \ell_\varepsilon)$ 其中 ℓ_ε 待定。令$(\mathcal{Y}^{\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star},\ \mathcal{Z}^{\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}) \in \mathbb{S}^2 \times \mathbb{H}^2$为该解；根据假设 B.1，它存在。对 (B.1) 取行动$\alpha \otimes_{t+\ell} \alpha^\star$，也就是说， $\mathbb{P}$–几乎处处。

$$
\mathcal{Y}_t^{s,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star} = \eta(s,\xi) + \int_t^T h_r\big(s, X, \mathcal{Y}_r^{s,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}, \mathcal{Z}_r^{s,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}, \pi_r, (\alpha \otimes_{t+\ell} \alpha^\star)_r\big)\mathrm{d}r - \int_t^T \mathcal{Z}_r^{s,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star} \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T].
$$

于是可得

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Y}_t^{t,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star} = \eta(T,\xi) &+ \int_t^T \Big(h_r(r, X, \mathcal{Y}_r^{\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}, \mathcal{Z}_r^{\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}, \pi_r, (\alpha \otimes_{t+\ell} \alpha^\star)_r) - \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}\Big)\mathrm{d}r \\
&- \int_t^T \mathcal{Z}_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star} \cdot \mathrm{d}X_r.
\end{aligned}
$$

Now

$$
\mathcal{Y}_t - \mathcal{Y}_t^{t,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star} = \int_t^T \Big(H_r(X, Y_r, Z_r, \pi_r) - h_r(r, X_{\cdot\wedge r}, \mathcal{Y}_r^{\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}, \mathcal{Z}_r^{\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}, \pi_r, (\alpha \otimes_{t+\ell} \alpha^\star)_r)\Big)\mathrm{d}r
$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_t^T \partial Y_r^{r,\alpha^\star} - \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}\mathrm{d}r - \int_t^T \big(Z_r - \mathcal{Z}_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}\big)\cdot \mathrm{d}X_r \\
&\geq \int_{t+\ell}^T \Big(H_r(X,Y_r,Z_r,\pi_r) - \partial Y_r^{r,\alpha^\star} - h_r(r,X_{\cdot\wedge r},\mathcal{Y}_r^{\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star},\mathcal{Z}_r^{\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star},\pi_r,\alpha_r^\star) + \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}\Big)\mathrm{d}r \\
&\quad - \int_t^{t+\ell} \partial Y_r^{r,\alpha^\star} - \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}\mathrm{d}r - \int_t^T \big(Z_r - \mathcal{Z}_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}\big)\cdot \mathrm{d}X_r \\
&= \int_t^{t+\ell} \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star} - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\mathrm{d}r - \int_t^T \big(Z_r - \mathcal{Z}_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}\big)\cdot \mathrm{d}X_r,
\end{aligned}
$$

其中，不等式由 H 和 $\alpha^\star$ 以及假设 B.4 的定义得出。第二个等式源于第一项在 $[t+\ell,T]$ 上相消这一事实，参见引理 B.2。取期望后可得

$$
\mathrm{V}_t^{\mathrm{A}} - \mathrm{V}_t^{\mathrm{A}}(\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star) = \mathbb{E}\Big[\mathcal{Y}_t - \mathcal{Y}_t^{t,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star}\Big|\mathcal{F}_t\Big] \geq \mathbb{E}\Big[\int_t^{t+\ell} \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star} - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\mathrm{d}r\Big|\mathcal{F}_t\Big].
$$

根据[42, 命题 6，4] 我们得到

$$
\Big\|\int_t^{t+\ell} \partial Y_r^{r,\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star} - \partial Y_r^{r,\alpha^\star}\mathrm{d}r\Big\|_{\mathcal{L}^2} \leq \ell\Big\|\partial Y^{\alpha\otimes_{t+\ell}\alpha^\star} - \partial Y^{\alpha^\star}\Big\|_{\mathbb{S}^{2,2}} \leq \ell C\mathbb{E}\Big[\Big(\int_t^{t+\ell}|\alpha_r - \alpha_r^\star|\mathrm{d}r\Big)^2\Big].
$$

由于动作集有界，我们可以选择 ℓ_ε，使得上述最后一项小于 $\ell\varepsilon$。由此，我们得出 $\alpha^\star\in\mathrm{E}$。该陈述的第二部分由以下事实可知：$\mathrm{Y}_t = Y^{t,\ t}{}^{,\alpha^\star}$，$\mathbb{P}$–几乎必然。 □

C 前向随机 Volterra 积分方程

给定一个联合可测映射 h、一个过程 Z 以及一个族 $(Y_0^s)_{s\in[0,T]}\in\mathrm{I}$，使得对于任意 $(y,\ u)\in\mathbb{R}^2\times(\mathbb{R}^n)^2$

$$
h:[0,T]^2\times\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R},\ h_\cdot(\cdot,y,u)\in\mathcal{P}_{\mathrm{prog}}(\mathbb{R},\mathbb{F}).
$$

为简化记号，我们省略 h 对 $((\pi_t)^{t\in[0,T]}$、$(Z_t^s)_{(s,t)\in[0,T]}$、$(Z_t^t)^{t\in[0,T]})$ 的依赖，因为在第 3.3 节的分析中，这些过程是给定的。此外，我们采用以下假设。

假设 C.1. $(i)\,(s,y)\longmapsto h_t(s,x,y,u)$ (分别地，$s\longmapsto Y_0^s(x)$) 关于(t,x,u) (分别关于 x)连续可微。此外，由下式定义的映射 $\nabla h\colon[0,T]^2\times\Omega\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n)^2\longrightarrow\mathbb{R}$

$$
\nabla h_t(s,x,\mathrm{u},y,u) := \partial_s h_t(s,x,y,u) + \partial_y h_t(s,x,y,u)\mathrm{u},\ \nabla h_\cdot(s,\cdot,\mathrm{u},y,u)\in\mathcal{P}_{\mathrm{prog}}(\mathbb{R},\mathbb{F});
$$

(ii) 对于 $\varphi\in\{h,\partial_s h\}$，$(y,u)\longmapsto\partial_s\varphi_t(s,x,y,u)$ 是一致 *Lipschitz* 连续的，即存在某个 $C>0$ 使得 $\forall(s,t,x,y,\tilde{y},u,\tilde{u})$，

$$
|\varphi_t(s,x,y,u) - \varphi_t(s,x,\tilde{y},\tilde{u})| \leq C\big(|y-\tilde{y}| + |u-\tilde{u}|\big).
$$

(iii) $(Y_0,\partial_s Y_0)\in\big(\mathcal{I}\big)^2$，$Z\in\overline{\mathbb{H}}^{2,2}$，$(\tilde{h}_\cdot(s),\nabla\tilde{h}_\cdot(s)) := (h_\cdot(s,\cdot,\mathbf{0}),\partial_s h_\cdot(s,\cdot,\mathbf{0}))\in\big(\mathbb{L}^{2,2}\big)^2$，*for* $\mathbf{0} := (y,u)|_{(0,0)}$.

我们关注于建立前向随机 Volterra 积分方程的适定性

$$
Y_t^s = Y_0^s + \int_0^t h_r\big(s,X,Y_r^s,Y_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^s\cdot\mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ s\in[0,T]. \tag{C.1}
$$

为简化符号，在前一个方程中我们用 Y 代替 Y^Z。

定义 C.2. 若 Y 满足方程 FSVIE (C.1) 且 Y 满足方程 (C.1) 和 $Y\in\mathbb{S}^{2,}{}_2$，则称 Y 是该方程的一个解。

注 C.3。 我们指出，鉴于 Y^s 对每个 $s\in[0,T]$ 都具有逐路径连续性，过程 $(Y_t^t)^{t\in[0,T]}$在 $[0,T]\times\Omega$ 上是良定义的，并且 $\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}$–几乎处处成立。

我们首先给出方程（C.1）的解的先验估计。这些估计可由 [93] 中的论证推得。

引理 C.4. 设 Y 是方程 (C.1)的一个解，则存在常数 $C>0$ 使得

$$\|Y\|^2_{\mathbb{S}^{2,2}} \le C\big(\|Y_0\|^2_{\mathcal{L}^{2,2}} + \|\tilde{h}\|^2_{\mathbb{L}^{1,2,2}} + \|Z\|^2_{\mathbb{H}^{2,2}}\big).$$

此外，对于 Y^i 满足 (C.1) 且数据为 (Y^i_0, h^i, Z^i) 的解，若满足 (C.1) 对 $i\in\{1,2\}$ 成立，则存在 $C>0$ 使得

$$\|Y^1 - Y^2\|^2_{\mathbb{S}^{2,2}} \le C\big(\|Y^1_0 - Y^2_0\|^2_{\mathcal{L}^{2,2}} + \|\tilde{h}^1 - \tilde{h}^2\|^2_{\mathbb{L}^{1,2,2}} + \|Z^1 - Z^2\|^2_{\mathbb{H}^{2,2}}\big)$$

证明。 注意到映射 $s\longmapsto \mathrm{k}\Delta Y^s\mathrm{k}_{\mathbb{S}^2}$ 的连续性意味着

$$\mathbb{E}\bigg[\int_0^T \mathrm{e}^{-cr}|\Delta Y^r_r|^2\mathrm{d}r\bigg] \le \int_0^T \mathbb{E}\bigg[\sup_{u\in[0,T]} \mathrm{e}^{-cu}|\Delta Y^r_u|^2\bigg]\mathrm{d}r \le T\|\Delta Y\|^2_{\mathbb{S}^{2,2}}. \tag{C.2}$$

由此，按照 [93, 定理 3.2.2 和定理 3.2.4] 的思路即可得到这两个结论的证明。 □

现在我们可以证明（C.1）的适定性。

命题 C.5。 设 假设C.1 成立。方程 (C.1)有唯一解。

证明。 唯一性由此得出 来自引理 C.4。我们采用皮卡迭代论证。令 $Y^{s,0\cdot} = Y^s_0, s\in[0,T]$ an d

$$Y^{s,n+1}_t = Y^s_0 + \int_0^t h_r\big(s, X, Y^{s,n}_r, Y^{r,n}_r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t Z^s_r\cdot \mathrm{d}X_r,\ t\in[0,T]$$

我们注意到，对于 $n\ge 0$， $Y^n\in\mathbb{S}^2$,2。事实上，该结论对 Y^0 成立，且过程 $(Y^{t,}{}_t{}^0)_{t\in[0,T]}\in\mathbb{L}^1$,2 定义良好。根据假设 C.1，结合 $Z\in\mathbb{H}^2$,2 和 $(Y^{t,}{}_t{}^n)_{t\in[0,T]}\in\mathbb{L}^1$,2（见 (C.2)），归纳可得，对每个 $s\in[0,T]$，都有 $Y^{s,}{}^{n+1}\in\mathbb{S}^2$。 $s\longmapsto \mathrm{k}Y^{s,}{}^n\mathrm{k}_{\mathbb{S}^2}$ 的连续性，以及假设 C.1 和引理 C.4，保证了 $Y^{n+1}\in\mathbb{S}^2$,2。此外，对任意 $s\in[0,T]$，逐路径连续性 $Y^{s,}{}^{n+1}$ 保证 $(Y^{t,}{}_t{}^{n+1})_{t\in[0,T]}$ 在 $\mathrm{d}t\otimes\mathrm{d}\mathbb{P}$–几乎处处意义下定义良好。

令 $\Delta Y^n := Y^n - Y^{n-1}$。那么，对于任意 $s\in[0,T]$

$$\Delta Y^{s,n+1}_t = \int_0^t \big(h_r(s,X,Y^{s,n}_r,Y^{r,n}_r) - h_r(s,X_{\cdot\wedge r},Y^{s,n-1}_r,Y^{r,n-1}_r)\big)\mathrm{d}r.$$

不等式 $2ab\le\varepsilon^{-1}a^2+\varepsilon b^2$ 对于任意 $\varepsilon>0$ 均成立，由此可得，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $C(\varepsilon)>0$，使得

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-ct}|\Delta Y^{s,n+1}_t|^2 &= \int_0^t \mathrm{e}^{-cr}\big(2|\Delta Y^{s,n+1}_r|(h_r(s,X,Y^{s,n}_r,Y^{r,n}_r) - h_r(s,X,Y^{s,n-1}_r,Y^{r,n-1}_r)) - c|\Delta Y^{s,n+1}_r|\big)\mathrm{d}r\\ &\le \int_0^t \mathrm{e}^{-cr}\big(|\Delta Y^{s,n+1}_r|^2(C(\varepsilon)-c) + \varepsilon|\Delta Y^{s,n}_r|^2 + \varepsilon|\Delta Y^{r,n}_r|^2\big)\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

于是我们得到，对于 $c>C(\varepsilon)$

$$\mathbb{E}\bigg[\sup_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{-ct}|\Delta Y^{s,n+1}_t|^2\bigg] \le \varepsilon\mathbb{E}\bigg[\int_0^T \mathrm{e}^{-cr}\big(|\Delta Y^{s,n}_r|^2 + |\Delta Y^{r,n}_r|^2\big)\mathrm{d}r\bigg]. \tag{C.3}$$

现在，由于 $\Delta Y^{s\,n}\in\mathbb{S}^{2\,2}$ 2 3 $\tilde{\varepsilon}=\frac{1}{8T}$ $c>C\ \tilde{\varepsilon}$ $\Delta Y^{n+1}{}_{\mathbb{S}^{2\,2,c}}^{\,2}\le$,, 我们可以将 (C.) 代回 (C.)，从而 4^{-1} $\Delta Y^n{}_{\mathbb{S}^{2\,2,c}}^{\,2}$ $n\ge1$ $\Delta Y^n{}_{\mathbb{S}^{2\,2,c}}^{\,2}\le C4^{-n}$ $m>n$ 得到对于 , ( ), 有k k k k。归纳可得，对于所有 , k k。因此，对于 ,

$$\|Y^m - Y^n\|_{\mathbb{S}^{2,2,c}} \le \sum_{k=n+1}^m \|\Delta Y^k\|_{\mathbb{S}^{2,2,c}} \le \sum_{k=n+1}^m \frac{C}{2^k} \le \frac{C}{2^n}.$$

因此，存在 $Y\in\mathbb{S}^2$,2，使得 $Y^n \xrightarrow{n\longrightarrow 0} Y$。 □

现在我们建立一个关于（C.1）可微性的结果。回顾一下，对于 $Z\in\overline{\mathbb{H}}^2$,2，根据定义（见第 3.1 节），存在一个过程 ∂Z，它可被解释为映射 $([0,T],\mathrm{B}([0,T])) \longrightarrow(\mathbb{H}^2,2,\mathrm{k}\cdot\mathrm{k}_{\mathbb{H}^2})$: $s\longmapsto Z^s$ 的导数。

命题 C.6。 设 假设 C.1 成立，且 $Y \in \mathbb{S}^2$ 是 (C.1) 的解。存在唯一的过程 $\partial Y \in \mathbb{S}^{2,2}$，满足

$$\partial Y_t^s = \partial_s Y_0^s + \int_0^t \nabla h_r\big(s, X, \partial Y_r^s, Y_r^s, Y_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t \partial Z_r^s \cdot \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.},\ s \in [0,T]. \tag{C.4}$$

此外

$$\int_0^s \partial Y^u \mathrm{d}u = Y^s - Y^0,\ in\ \mathbb{S}^2(\mathbb{R})$$

证明。 注意，给定一对 $(Y,\ Z) \in \mathbb{S}^{2,\ 2} \times \overline{\mathbb{H}}^{2,\ 2}$，假设 C.1 保证存在 $C > 0$ 使得

$$\sup_{s\in[0,T]} \left(\int_0^T \big|\nabla \tilde{h}_r(s, X, 0, Y_r^s, Y_r^r)\big|\mathrm{d}r \right)^2 \le C\Big(\|\partial_s \tilde{h}\|^2_{\mathbb{L}^{1,2,2}} + \|Y\|^2_{\mathbb{S}^{2,2}} \Big) < \infty.$$

现在注意，假设 C.1.(ii) 保证 $\mathrm{u} \longmapsto \nabla h_t(s,\ x,\ \mathrm{u}\ y,\ u)$ 关于 $(s,\ t,\ x,\ y,\ u)$ 一致满足 Lipschitz 条件。因此，命题 C.5 保证存在唯一的解 $\partial Y \in \mathbb{S}^{2,\ 2}$。陈述的第二部分可参照 [42, 引理 6。1]，结合引理 C.4 中的稳定性结果以及事实 $Z \in \overline{\mathbb{H}}^{2,\ 2}$进行论证。 □

D 第 4 节的证明

D.1 命题 4.5 的证明

我们首先注意到， $\mathbb{P}$–几乎必然。

$$\begin{aligned} X_T - \widehat{Y}_T^{y_0,Z} = x_0 - \widehat{Y}_0 &+ \int_0^T \left(\lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r)(1-\widehat{Z}_r) + \widehat{H}_r(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r) - \frac{\gamma_\mathrm{A}}{2}|\sigma_r^\top(X_{\cdot\wedge r})\widehat{Z}_r|^2 - \frac{1}{\gamma_\mathrm{A}}\frac{f'(T-r)}{f(T-r)} \right)\mathrm{d}r \\ &+ \int_0^T \sigma_r^\top(X_{\cdot\wedge r})(1-\widehat{Z}_r)\mathrm{d}B_r^{a^\star(\hat{Z})}, \end{aligned}$$

因此

$$\mathrm{U}_\mathrm{P}(X_T - \widehat{Y}_T^{y_0,Z}) = C_{\widehat{Y}_0} M_T \exp\left(-\gamma_\mathrm{P} \int_0^T G_r(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r)\mathrm{d}r \right),\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

其中

$$G_t(x,z) := \lambda_r^\star(x,z) - k_r^{o\star}(x,z) - \frac{\gamma_A}{2}|\sigma_r^\top(x)z|^2 - \frac{\gamma_\mathrm{P}}{2}|\sigma_r^\top(x)(1-z)|^2 - \frac{1}{\gamma_\mathrm{A}}\frac{f'(T-r)}{f(T-r)},$$

且 M 表示上鞅

$$M_t := \exp\left(-\gamma_\mathrm{P} \int_0^t \sigma_r^\top(X_{\cdot\wedge r})(1-\widehat{Z}_r)\cdot \mathrm{d}B_r^{a^\star(\hat{Z})} - \frac{\gamma_\mathrm{P}^2}{2}\int_0^t |\sigma_r^\top(X_{\cdot\wedge r})(1-\widehat{Z}_r)|^2\mathrm{d}r \right),\ t \in [0,T].$$

事实上， M 是一个有下界的局部鞅，且 $M_0 = 1$。因此，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\big[\mathrm{U}_\mathrm{P}\big(X_T - \widehat{Y}_T^{y_0,Z}\big)\big] \le C_{\widehat{Y}_0}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_\mathrm{P}\int_0^T G_r(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r)\mathrm{d}r \right)\right].$$

现在，在命题陈述中的假设（i）和（ii）下，显然

$$\mathrm{V}_\mathrm{P} \le C_{\widehat{R}_0} f(T)^{\frac{\gamma_\mathrm{P}}{\gamma_\mathrm{A}}} \exp\left(-\gamma_\mathrm{P}\int_0^T g(z^\star(t))\mathrm{d}t \right) =: \mathrm{V}^{\mathrm{P},\star},$$

其中上界为

$$\sup_z \left\{ \lambda_r^\star(z) - k_r^{o\star}(z) - \frac{\gamma_A}{2}|\sigma_r^\top z|^2 - \frac{\gamma_\mathrm{P}}{2}|\sigma_r^\top(1-z)|^2 \right\}.$$

现在我们来证明该上界可以达到。事实上，令

$$Z_t^\star := -\gamma_\mathrm{A}\mathrm{U}_\mathrm{A}^o(\widehat{Y}_t^{\hat{R}_0,z^\star})z^\star(t),\ \widehat{Y}_t^{\hat{R}_0,z^\star} := \widehat{R}_0 - \int_0^t \left(\widehat{H}_r(z_r^\star) - \frac{\gamma_\mathrm{A}}{2}|\sigma_r^\top z_r^\star|^2 - \frac{1}{\gamma_\mathrm{A}}\frac{f'(T-r)}{f(T-r)} \right)\mathrm{d}r + \int_0^t z_r^\star \mathrm{d}X_r,\ t \in [0,T],$$

容易验证，关于 $z^\star$ 的可积性假设保证了 $Z^\star \in \mathrm{H}^2$。我们得出结论，$\xi^\star \in \Xi$ 最优，因为它达到了 $\mathrm{V}^{\mathrm{P},\ \star}$，其中 $\xi^\star$ 表示由 $\widehat{R}_0$ 和 $Z^\star$ 导出的合同。这就完成了证明。

D.2 引理 4.7的证明

我们证明（i）。设 $Z\in\mathbf{H}^{2,2}$。回顾

$$Y_t^{s,y_0,Z}=y_0^s-\int_0^t\big(\lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)Z_r^s-f(r-s)c_r^\star(X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\big)\mathrm{d}r+\int_0^t Z_r^s\cdot\mathrm{d}X_r,$$

并且，根据（3.6），我们有

$$\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\,(-1)}\left(\frac{Y_T^{s,y_0,Z}}{f(T-s)}\right)=\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\,(-1)}\left(\frac{Y_T^{u,y_0,Z}}{f(T-u)}\right),\ (s,u)\in[0,T].$$

因此，对于任意 $s\in[0,T]$

$$\begin{aligned}0&=\frac{Y_0^{s,y_0,Z}}{f(T-s)}-\frac{Y_0^{0,y_0,Z}}{f(T)}-\int_0^T\lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\left(\frac{Z_r^s}{f(T-s)}-\frac{Z_r^0}{f(T)}\right)-c_r^\star\big(X_{\cdot\wedge r},Z_r^r\big)\left(\frac{f(r-s)}{f(T-s)}-\frac{f(r)}{f(T)}\right)\mathrm{d}r\\&\quad+\int_0^T\left(\frac{Z_r^s}{f(T-s)}-\frac{Z_r^0}{f(T)}\right)\cdot\mathrm{d}X_r\\&=\frac{Y_0^{s,y_0,Z}}{f(T-s)}-\frac{Y_0^{0,y_0,Z}}{f(T-u)}+\frac{1}{f(T-s)}\int_0^T\delta_r^\star(s,X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r+\int_0^T\left(\frac{Z_r^s}{f(T-s)}-\frac{Z_r^0}{f(T)}\right)\cdot\big(\mathrm{d}X_r-\lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r\big)\\&=\frac{Y_t^{s,y_0,Z}}{f(T-s)}-\frac{Y_t^{0,y_0,Z}}{f(T)}+\frac{1}{f(T-s)}\int_t^T\delta_r^\star(s,X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r+\int_t^T\left(\frac{Z_r^s}{f(T-s)}-\frac{Z_r^0}{f(T)}\right)\cdot\big(\mathrm{d}X_r-\lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r\big).\end{aligned}$$

结果　　随后，由于 Z^s 和 Z^0的可积性，取条件期望即可得到。

现在我们论证（ii）。固定 $s\in[0,T]$。注意到

$$\begin{aligned}N_t^{s,Z}:=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\int_t^T\delta_r^\star(s,X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_t\right]&=M_t^{s,Z}-\int_0^t\delta_r^\star(s,X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r\\&=M_0^{s,Z}+\int_0^t\widetilde{Z}_r^{s,Z}\cdot\big(\mathrm{d}X_r-\lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r\big)-\int_0^t\delta_r^\star(s,X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r.\end{aligned}\tag{D.1}$$

因此，根据（i），存在一个有限变差过程 A，使得

$$\begin{aligned}Y_t^{s,y_0,Z}&=\frac{f(T-s)}{f(T)}Y_t^{0,y_0,Z}-\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\int_t^T\delta_r^\star(s,X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r\middle|\mathcal{F}_t\right]\\&=A_t-\int_0^t\left(\frac{f(T-s)}{f(T)}Z_t^0-\widetilde{Z}_t^{s,Z}\right)\cdot\big(\mathrm{d}X_r-\lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r},Z_r^r)\mathrm{d}r\big),\ \mathbb{P}\text{–a.s.}\end{aligned}$$

结论随后由 $Y^{s,y_0,Z}$ 的伊藤分解的唯一性得出。

我们只需论证（iii），因为（iv）是直接结论。包含关系 $\mathbf{H}^{2,2}\subseteq\mathbf{H}^\bullet$ 由（ii）以及取$Y_t^Z:=Y_t^{0,y_0,Z}/f(T)$（$i$）可得。反之，给定 $Z\in\mathbf{H}^\bullet$，我们对任意 $s\in[0,T]$ 定义

$$Y_t^{0,y_0,Z}:=f(T)Y_t^{y_0,Z},\ Y_t^{s,y_0,Z}:=\frac{f(T-s)}{f(T)}Y_t^{0,y_0,Z}-N_t^{s,Z},\ t\in[0,T],\ \mathbb{P}\text{–a.s.}$$

注意到 $Y_0^{s,y_0,Z}$ 显然可微，且 $Y^{s,y_0,Z}$ 满足（3.6）。事实上，由于 $N_T^{s,Z}=0$，$s\in[0,T]$，我们有

$$\frac{Y_T^{s,y_0,Z}}{f(T-s)}=Y_T^{y_0,Z}=\frac{Y_T^{u,y_0,Z}}{f(T-u)},\ (s,u)\in[0,T]^2.$$

现在我们验证 $Y^{y_0,Z}\in\mathbb{S}^{2,2}$。首先注意到 $\|\widetilde{Z}\|_{\mathbb{H}^{2,2}}^2<\infty$。事实上

$$\|\widetilde{Z}^s\|_{\mathbb{H}^2}^2=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^t|\sigma_r\sigma_r^\top\widetilde{Z}_r^{s,Z}|^2\mathrm{d}r\right]=\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[M_t\int_0^t|\sigma_r\sigma_r^\top\widetilde{Z}_r^{s,Z}|^2\mathrm{d}r\right]\le\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\int_0^t|\sigma_r\sigma_r^\top\widetilde{Z}_r^{s,Z}|^2\mathrm{d}r\right]<\infty,$$

其中 M 表示由以下式子给出的上鞅

$$M_t := \exp\Big(- \int_0^t b_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, Z_r^r)\cdot \mathrm{d}B_r^\star - \frac{1}{2}\int_0^t |b_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, Z_r^r)|^2 \mathrm{d}r\Big),\ t\in[0,T].$$

由此，根据假设 1.2 可知

$$\|N^Z\|_{\mathbb{S}^{2,2}}^2 \le C\bigg(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T \big|\lambda_r^\star(X, Z_r^r)\big|^2 \mathrm{d}r\Big] + \sup_{s\in[0,T]}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\int_0^T \big|\delta_r^\star(s, X, Z_r^r)\big|^2 \mathrm{d}r\Big] + \|\widetilde{Z}\|_{\mathbb{H}^{2,2}}^2\bigg) < \infty.$$

我们还注意到，$s\longmapsto f(t-s)$ 的连续性意味着 $s\longmapsto \mathbf{k}N^s,\ z\mathbf{k}_{\mathbb{S}^2}$ 的连续性。此外，$\mathbf{k}Y^{0,\ y_0,\ z}\mathbf{k}_{\mathbb{S}^2}^2<\infty$ 根据定义保证了 $\mathbf{k}Y^{y_0,\ z}\mathbf{k}_{\mathbb{S}^{2,\ 2}}^2<\infty$。此外，根据定义

$$\begin{aligned}
Y_t^{s,y_0,Z} &= \frac{f(T-s)}{f(T)}\bigg(y_0 + \int_0^t c_r^\star(X_{\cdot\wedge r}Z_r^r)f(r)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^0\cdot\big(\mathrm{d}X_r - \lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, Z_r^r)\mathrm{d}r\big)\bigg)\\
&\quad - M_0^{s,Z} - \int_0^t \widetilde{Z}_r^{s,Z}\cdot\big(\mathrm{d}X_r - \lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, Z_r^r)\mathrm{d}r\big) + \int_0^t \delta_r^\star(s, X_{\cdot\wedge r}, Z_r^r)\mathrm{d}r\\
&= \frac{f(T-s)}{f(T)}y_0 - M_0^{s,Z} + \int_0^t c_r^\star(X_{\cdot\wedge r}Z_r^r)f(r-s)\mathrm{d}r + \int_0^t\bigg(\frac{f(T-s)}{f(T)}Z_r^0 - \widetilde{Z}_r^{s,Z}\bigg)\cdot\big(\mathrm{d}X_r - \lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, Z_r^r)\mathrm{d}r\big)\\
&= \frac{f(T-s)}{f(T)}y_0 - M_0^{s,Z} + \int_0^t c_r^\star(X_{\cdot\wedge r}Z_r^r)f(r-s)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^s\cdot\big(\mathrm{d}X_r - \lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, Z_r^r)\mathrm{d}r\big)\\
&= y_0^s - \int_0^t h_r^\star\big(s, X_{\cdot\wedge r}, Z_r^s, Z_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^s\cdot\mathrm{d}X_r,
\end{aligned}$$

其中第三个不等式源于事实 $Z\in\mathbf{H}^\bullet$。我们得出 $Z\in\mathbf{H}^{2,2}$。

D.3 引理 4.14 的证明

我们注意到，(ii) 和 (iii) 的论证方式与引理 4.7 中相同。现在我们论证 (i)。设 $(y_0,\ Z)\in\mathrm{I}\times\mathbf{H}^{2,2}$。注意到，给定 $Y^{s,\ y_0,\ z}$，鉴于 y_0^s 的正则性和生成元，可以定义 $\partial Y^{s,\ y_0,\ z}$，使得

$$\begin{aligned}
Y_t^{t,y_0,Z} &= y_0^0 - \int_0^t\Big(H_r\big(X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{r,y_0,Z}, Z_r^r\big) - \partial Y_r^{r,y_0,Z}\Big)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^r\cdot\mathrm{d}X_r,\\
Y_t^{s,y_0,Z} &= y_0^s - \int_0^t h_r^\star\big(s, X_{\cdot\wedge r}, Y_r^{s,y_0,Z}, Z_r^s, Y_r^{r,y_0,Z}, Z_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^s\cdot\mathrm{d}X_r,\\
\partial Y_t^{s,y_0,Z} &= \partial y_0^s - \int_0^t \nabla h_r^\star\big(s, X_{\cdot\wedge r}, \partial Y_r^{s,y_0,Z}, \partial Z_r^s, Y_r^{s,y_0,Z}, Y_r^{r,y_0,Z}, Z_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t \partial Z_r^s\cdot\mathrm{d}X_r.
\end{aligned}$$

令

$$\widehat{Z}_t := \frac{1}{-\gamma_{\mathrm{A}}}\frac{Z_t^t}{Y_t^{t,y_0,Z}},\ \text{and},\ \widehat{Z}_t^s := \frac{1}{-\gamma_{\mathrm{A}}}\frac{Z_t^s}{Y_t^{s,y_0,Z}},$$

我们得到

$$\begin{aligned}
Y_t^{t,y_0,Z} &= y_0^0 - \int_0^t\Big(-\gamma_{\mathrm{A}}Y_r^{r,y_0,Z}\widehat{H}_r\big(X_{\cdot\wedge r}, Z_r^r\big) - \partial Y_r^{r,y_0,Z}\Big)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^r\cdot\mathrm{d}X_r,\\
Y_t^{s,y_0,Z} &= y_0^s - \int_0^t -\gamma_{\mathrm{A}}Y_r^{s.y_0,Z}\widehat{h}_r^\star\big(s, X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r^s, \widehat{Z}_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t Z_r^s\cdot\mathrm{d}X_r,\\
\partial Y_t^{s,y_0,Z} &= \partial y_0^s - \int_0^t \nabla h_r^\star\big(s, X_{\cdot\wedge r}, \partial Y_r^{s,y_0,Z}, \partial Z_r^s, Y_r^{s,y_0,Z}, \widehat{Z}_r^r\big)\mathrm{d}r + \int_0^t \partial Z_r^s\cdot\mathrm{d}X_r.
\end{aligned}$$

接下来通过引入伊藤公式即可得出该结果

$$\widehat{Y}_t^{s,y_0,Z} := -\frac{1}{\gamma_{\mathrm{A}}}\ln(-\gamma_{\mathrm{A}}Y_t^{s,y_0,Z}),\ \partial\widehat{Y}_t^{s,y_0,Z} := \frac{1}{-\gamma_{\mathrm{A}}}\frac{\partial Y_t^{s,y_0,Z}}{Y_t^{s,y_0,Z}},\ \text{and}\ \partial\widehat{Z}_t^s := \frac{1}{-\gamma_{\mathrm{A}}}\bigg(\frac{\partial Z_t^s}{Y_t^{s,y_0,Z}} + \gamma_{\mathrm{A}}^2\partial\widehat{Y}_t^{s,y_0,Z}\widehat{Z}_t^s\bigg).$$

D.4 命题 4.17 的证明

注意，以下结论始终成立： $\mathbb{P}^\star(Z)$–几乎必然。

$$X_T - \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\,(-1)}(Y_T^{0,Z})/g(T) = x_0 - \frac{\mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{(-1)}(Y_0^0)}{g(T)} + \int_0^T \left(\lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r^r) - \frac{g(r)}{g(T)} k_r^{o\star}(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r^r) - \frac{\gamma_{\mathrm{A}}}{2g(T)} |\sigma_r^\top(X_{\cdot\wedge r})\widehat{Z}_r^0|^2 \right) \mathrm{d}r$$
$$+ \int_0^T \left(1 - \frac{\widehat{Z}_r^0}{g(T)}\right) \cdot \left(\mathrm{d}X_r - \lambda_r^\star(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r^r)\mathrm{d}r\right),$$

从而

$$\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o\Big(X_T - \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\,(-1)}(Y_T^{0,Z})/g(T)\Big) = C_{\hat{Y}_0^0} M_T \exp\left(-\gamma_{\mathrm{P}} \int_0^T G_r(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r, \widehat{Z}_r^0)\mathrm{d}r \right), \ \mathbb{P}\text{–a.s.},$$

其中

$$G_t(x,z,v) := \lambda_t^\star(x,z) - \frac{g(t)}{g(T)} k_t^{o\star}(x,z) - \frac{\gamma_A}{2g(T)} |\sigma_t^\top(x)v|^2 - \frac{\gamma_{\mathrm{P}}}{2} \left| \sigma_r^\top(x)\left(1 - \frac{v}{g(T)}\right)\right|^2,$$

且 M 表示该上鞅

$$M_t := \exp\left(-\gamma_{\mathrm{P}} \int_0^t \sigma_r^\top(X_{\cdot\wedge r})\left(1 - \frac{\widehat{Z}_r^0}{g(T)}\right) \cdot \mathrm{d}B_r^{a^\star(Z)} - \frac{\gamma_{\mathrm{P}}^2}{2} \int_0^t \left| \sigma_r^\top(X_{\cdot\wedge r})\left(1 - \frac{\widehat{Z}_r^0}{g(T)}\right)\right|^2 \mathrm{d}r \right), \ t \in [0,T].$$

因此

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o\left(X_T - \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\,(-1)}(Y_T^{0,Z})/g(T)\right)\right] \le C_{\hat{Y}_0^0} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_{\mathrm{P}} \int_0^T G_r(X_{\cdot\wedge r}, \widehat{Z}_r^r, \widehat{Z}_r^0)\mathrm{d}r \right)\right]. \tag{D.2}$$

~现在，在附加假设下，对于任意 $Z \in \mathbf{H}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^\star(Z)}\left[\mathrm{U}_{\mathrm{P}}^o\left(X_T - \mathrm{U}_{\mathrm{A}}^{o\,(-1)}(Y_T^{0,Z})/g(T)\right)\right] \le C_{\hat{R}_0} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\exp\left(-\gamma_{\mathrm{P}} \int_0^T G_r\left(\zeta_r, \eta_{0,r}\zeta_r\right)\mathrm{d}r \right)\right]$$

因此，当

$$z^\star(t,\eta) \in \arg\max_{z\in\mathbb{R}} \left\{ \lambda_t^\star(z) - \frac{g(t)}{g(T)} k_t^{o\star}(z) - \frac{\gamma_A}{2g(T)} |\sigma_t^\top z|^2 |\eta|^2 - \frac{\gamma_{\mathrm{P}}}{2} \left| \sigma_r^\top \left(1 - \frac{z}{g(T)}\eta\right)\right|^2 \right\},$$

~只要选择 η 使得 $Z^\eta \in \mathbf{H}$，就能达到上界。

下面证明命题的第二部分。由于现在我们只能选择确定性的 η 的可积性 $z^\star$ 以及 $[0,T] \ni t \longmapsto g(t)$ 的有界性 保证常值过程 $M^{s,z}$ 在引理 4.2中是有限的，因而平方可积。因此，由族所诱导的合同

$$Z_t^s := \frac{g(T-s)}{g(T-t)} z^\star(t, \eta_{0,t}^\star), \ \eta_{0,t}^\star = \frac{g(T)}{g(T-t)},$$

在 (D.2) 中达到上界，结论便得证。令 $(\gamma_{\mathrm{A}}, \gamma_{\mathrm{P}}) \longrightarrow (0,0)$，并注意到 (D.2) 中涉及 $\widehat{Z}^0$ 的项均为零，即得最后一个结论。因此，上界由 $G(z) = \lambda_t^\star(z) - g(t)k_t^{o\star}(z)/g(T)$ 的最大化者达到，也就是说，由 $Z_t^s = f(T-s)z^\star(t)/f(T-t)$ 给出的确定性契约达到上界。

参考文献

[1] E. Abi Jaber 和 S. Villeneuve. 带记忆和线性合同的高斯代理问题。*ArXiv* 预印本 *arXiv:2209.10878*，2022年。

[2] R. Aïd、D. Possamaï 和 N. Touzi. 具有响应性激励的最优电力需求响应合约。《运筹学数学》，47(3):2112–2137，2022年。

[3] G. Ainslie。 微观经济学：个人内部连续动机状态的战略互动。剑桥大学出版社，1992年。

[4] M. Amador、I. Werning 和 G.-M. Angeletos。承诺与灵活性。《计量经济学》，74(2)：365–396，2006年。[5] Ł. Balbus、K. Reffett 和 Ł. Wozny。具有递归收益和行为贴现的动态模型中的时间一致均衡。《经济理论杂志》，204：105493，2022年。[6] A. Bisin、A. Lizzeri 和 L. Yariv。针对时间不一致选民的政府政策。《美国经济评论》，105(6)：1711–1737，2015年。[7] T. Björk、M. Khapko 和 A. Murgoci。关于连续时间中的时间不一致随机控制。《金融与随机》，21(2)：331–360，2017年。[8] P. Bond 和 G. Sigurdsson。承诺合同。《经济研究评论》，85(1)：194–222，2017年7月。[9] B. Bouchard、R. Élie 和 C. Imbert。随机目标约束下的最优控制。《SIAM控制与优化杂志》，48(5)：3501–3531，2010年。[10] B. Bouchard、B. Djehiche 和 I. Kharroubi。将粒子淬火质量传输至目标。《优化理论与应用杂志》，186：345–374，2020年。[11] P.-B. Brutscher。支付重要吗？预付费电力计量的探索性研究。技术报告，剑桥大学，2011年。[12] G. Carroll。稳健性与线性合同。《美国经济评论》，105(2)：536–63，2015年。[13] D. Cetemen、F. Feng 和 C. Urgun。重新谈判与动态不一致：采用非指数折现的签约。《经济理论杂志》，208(105606)，2023年。[14] S. Chen 和 J. Yong。随机沃尔泰拉积分方程的线性二次最优控制问题。载于 S. Tang 和 J. Yong（编），《控制理论及相关主题——纪念李训经教授》，复旦大学，中国，2005年6月3日至5日，第44–66页，2007年。[15] J. Cvitanić 和 J. Zhang。连续时间模型中的契约理论。Springer，2012年。[16] J. Cvitanić、X. Wan 和 J. Zhang。连续时间模型中具有隐蔽行动和一次性支付的最优薪酬。《应用数学与优化》，59(1)：99–146，2009年。[17] J. Cvitanić、D. Possamaï 和 N. Touzi。动态风险管理中的道德风险。《管理科学》，63(10)：3328–3346，2017年。[18] J. Cvitanić、D. Possamaï 和 N. Touzi。解决委托—代理问题的动态规划方法。《金融与随机》，22(1)：1–37，2018年。[19] S. Dellavigna。心理学与经济学：来自实地的证据。《经济文献杂志》，47(2)：315–372，2009年。[20] B. Djehiche 和 P. Helgesson。具有时间不一致效用函数的委托—代理问题。技术报告，瑞典皇家理工学院和查尔姆斯理工大学，2015年。[21] I. Ekeland 和 A. Lazrak。认真对待非承诺：连续时间中的子博弈完美均衡。技术报告，不列颠哥伦比亚大学，2006年。[22] I. Ekeland 和 A. Lazrak。偏好时间不一致时的黄金法则。《数学与金融经济学》，4(1)：29–55，2010年。[23] I. Ekeland 和 T.A. Pirvu。无承诺的投资与消费。《数学与金融经济学》，2(1)：57–86，2008年。[24] N. El Karoui、S. Peng 和 M.-C. Quenez。金融中的反向随机微分方程。《数理金融》，7(1)：1–71，1997年。[25] R. Élie 和 D. Possamaï。具有相互竞争的交互代理人的签约理论。《SIAM控制与优化杂志》，57(2)：1157–1188，2019年。[26] R. Élie、T. Mastrolia 和 D. Possamaï。一个委托人与许多许多代理人的故事。《运筹学数学》，44(2)：440–467，2019 年。[27] R. Élie 、 E. Hubert、T. Mastrolia 和 D. Possamaï。最优能源需求响应管理中的均值场道德风险。《数理金融》，31(1)：399–473，2021年。

[28] F. Englmaier、M. Fahn 和 M.A. Schwarz。《代理人存在现时偏好时的长期雇佣关系》。技术报告，慕尼黑大学、林茨约翰·开普勒大学和因斯布鲁克大学，2020年。[29] L.G. Epstein 和 S.E. Zin。《替代、风险厌恶以及消费与资产收益的时间行为：一个理论框架》。《计量经济学》，57(4):937–969，1989年。[30] S.J. Fan、T. Wan 和 J. Yong。《多维超线性后向随机Volterra积分方程》。ArXiv 预印本 arXiv:2211.04078，2022年。[31] S. Galperti。《承诺、灵活性与时间不一致性的最优筛选》。《计量经济学》，83(4):1425–1465，2015年。[32] D. Gottlieb。《针对时间不一致消费者的竞争》。《公共经济理论杂志》，10(4):673–684，2008年。[33] D. Gottlieb 和 X. Zhang。《与时间不一致代理人的长期签约》。《计量经济学》，89(2):793–824，2021年。[34] M. Halac 和 P. Yared。《持续性冲击下的财政规则与自由裁量》。《计量经济学》，82(5):1557–1614，2014年。[35] Y. Hamaguchi。《扩展后向随机Volterra积分方程及其在时间不一致随机递归控制问题中的应用》。《数学控制与相关领域》，11(2):433–478，2021年。[36] Y. Hamaguchi 和 T. Wang。《线性二次随机Volterra控制II：最优策略与Riccati–Volterra方程》。ArXiv 预印本 arXiv:2204.10239，2022年。[37] H. Harris 和 D. Laibson。《即时满足》。《经济学季刊》，128(1)，2013年。[38] P. Heidhues。《在信贷市场中利用人们对自我控制的天真认知》。《美国经济评论》，100(5): 2279–2303，2010年。[39] M.F. Hellwig。《边界解在Holmström–Milgrom类型委托—代理问题中的作用》。《经济理论杂志》，136(1):446–475，2007年。[40] M.F. Hellwig 和 K.M. Schmidt。《Holmström–Milgrom布朗运动模型中跨期激励提供的离散时间逼近》。《计量经济学》，70(6):2225–2264，2002年。[41] C. Hernández。《关于二次多维I型BSVIE、BSDE的无限族及其应用》。ArXiv 预印本 arXiv:2111.11131，2021年。[42] C. Hernández 和 D. Possamaï。《I型后向随机Volterra积分方程适定性的统一方法》。《概率电子期刊》，26(89):1–35，2021年。[43] C. Hernández 和 D. Possamaï。《我、自己与我：成熟型代理人非马尔可夫时间不一致随机控制的一般理论》。《应用概率年刊》，即将刊出，2022年。[44] N. Hernández Santibáñez 和 T. Mastrolia。《VUCA世界中的契约理论》。《SIAM控制与优化杂志》，57(4):3072–3100，2019年。[45] B. Holmström 和 P. Milgrom。《跨期激励提供中的聚合与线性》。《计量经济学》，55(2):303–328，1987年。[46] J. Jacod 和 A.N. Shiryaev。《随机过程的极限定理》，《数学科学基础丛书》第288卷。施普林格出版社柏林海德堡，2003年。[47] A.K. Karaivanov 和 F.M. Martin。《马尔可夫完美风险分担、道德风险与有限承诺》。《经济动态学与控制杂志》，94:1–23，2018年。[48] B. Kószegi。《行为契约理论》。《经济文献杂志》，52(4):1075–1118，2014年。[49] J.-J. Laffont 和 D. Martimort。《激励理论：委托—代理模型》。普林斯顿大学出版社，2002年。[50] D. Laibson。《金蛋与双曲线折现》。《经济学季刊》，112(2):443–477，1997年。[51] D. Landriault、B. Li、D. Li 和 V.R. Young。《随机期限均值—方差投资问题的均衡策略》。《SIAM金融数学杂志》，9(3):1046–1073，2018年。[52] C. Li 和 Z. Qiu。《一个可解的时间不一致委托—代理问题》。《自然与社会中的离散动力学》，2018 (8512608):1–15，2018年。[53] H. Li、C. Mu 和 J. Yang。《具有时间不一致偏好的最优契约理论》。《经济建模》，52: 519–530，2016年。

[54] C.S.H. Lim 和 A. Yurukoglu。《动态自然垄断监管：时间不一致性、道德风险与政治环境》。《政治经济学杂志》，126(1):263–312，2018年。[55] Y. Lin、Z. Ren、N. Touzi 和 J. Yang。《随机期限委托—代理问题》。《SIAM控制与优化杂志》，60(1):355–384，2022年。[56] B. Liu、C. Mu 和 J. Yang。《时间不一致偏好下的动态代理与投资理论》。《金融研究快报》，20:88–95，2017年。[57] W. Liu、W. Huang、B. Liu 和 C. Mu。《具有时间不一致偏好的最优抵押贷款合同》。《欧洲金融杂志》，25(18):1834–1855，2019年。[58] C.-t.A. Ma。《动态道德风险中的逆向选择》。《经济学季刊》，106(1):255–275，1991年。[59] J. Marín-Solano 和 J. Navas。《时间不一致投资者的消费与投资组合规则》。《欧洲运筹学杂志》，201(3):860–872，2010年。[60] T. Mastrolia 和 D. Possamaï。《模糊性下的道德风险》。《优化理论与应用杂志》，179 (2):452–500，2018年。[61] T. Mastrolia 和 Z. Ren。《无沟通共同代理的委托—代理问题》。《SIAM金融数学杂志》，9(2):775–799，2018年。[62] H.M. Müller。《指数效用连续时间委托—代理问题中的最优分配规则》。《经济理论杂志》，79(2):276–280，1998年。[63] H.M. Müller。《动态委托—代理问题中的渐近效率》。《经济理论杂志》，91 301，2000 2 292( ): –。[64] T. O’Donoghue 和 M. Rabin。《现在做还是以后做》。《美国经济评论》，89(1):103–124，1999年。[65] T. O’Donoghue 和 M. Rabin。《拖延者的激励》。《经济学季刊》，114 816，1999 3 769( ): –。[66] D. Possamaï、X. Tan 和 C. Zhou。《一类非线性核的随机控制及其应用》。《概率年刊》，46(1):551–603，2018年。[67] M. Rabin。《心理学与经济学》。《经济文献杂志》，36(1):11–46，1998年。[68] Y. Sannikov。《委托—代理问题的连续时间版本》。《经济研究评论》，75 984，2008 3 957( ): –。[69] Y. Sannikov。《合同：动态委托—代理关系理论与连续时间方法》。载于 D. Acemoglu、M. Arellano 和 E. Dekel 编，《经济学与计量经济学进展：计量经济学会第十届世界大会》，第1卷，经济理论，第49号《计量经济学会专著》，第89–124页。剑桥大学出版社，2013年。[70] M. Schäl。《优化问题的选择定理》。《数学档案》，25(1):219–224，1974年。[71] H. Schättler 和 J. Sung。《指数效用连续时间委托—代理问题的一阶方法》。《经济理论杂志》，61(2):331–371，1993年。[72] H. Schättler 和 J. Sung。《指数效用离散时间与连续时间委托—代理问题中的最优分配规则》。《经济动态学与控制杂志》，21(2):551–574，1997年。[73] Y. Shi、T. Wang 和 J. Yong。《前向—后向随机Volterra积分方程的最优控制问题》。《数学控制与相关领域》，5(3):613–649，2015年。[74] H.M. Soner 和 N. Touzi。《随机目标问题、动态规划与黏性解》。《SIAM控制与优化杂志》，41(2):404–424，2002年。[75] H.M. Soner 和 N. Touzi。《二阶随机目标问题的动态规划方程》。《SIAM控制与优化杂志》，48(4):2344–2365，2009年。[76] D.W. Stroock 和 S.R.S. Varadhan。《多维扩散过程》，《数学科学基础丛书》第233卷。施普林格出版社柏林海德堡，1997年。[77] R.H. Strotz。《动态效用最大化中的短视与不一致性》。《经济研究评论》，23(3): 165–180，1955年。

[78] J. Sung. 连续时间委托—代理问题中项目选择与可控扩散率下的线性性。《兰德经济学杂志》，26(4):720–743，1995年。[79] J. Sung. 企业保险与管理激励。《经济理论杂志》，74(2):297–332，1997年。[80] J. Sung. 逆向选择与道德风险下的最优合同：一种连续时间方法。《金融研究评论》，18(3):1021–1073，2005年。[81] J. Sung. 均值—波动率联合模糊不确定性下的最优签约。《经济理论》，74:593–642，2022年。[82] F. Viens and J. Zhang. 分数布朗运动及相关路径依赖偏微分方程的鞅方法。《应用概率年刊》，29(6):3489–3540，2019年。[83] H. Wang and J. Yong. 时间不一致随机最优控制问题与后向随机 Volterra 积分方程。《*ESAIM*：控制、优化与变分法》，27(22):1–40，2021年。[84] H. Wang, J. Sun, and J. Yong. 递归效用过程、动态风险度量与二次后向随机沃尔泰拉积分方程。《应用数学与优化》，即将发表，2019年。[85] T. Wang. 随机沃尔泰拉积分方程的线性二次控制问题。《控制、优化与变分法》，24:1849–1879，2018年。[86] T. Wang. 后向随机沃尔泰拉积分微分方程及其在最优控制问题中的应用。《*SIAM*控制与优化杂志》，60(4):393–2419，2022年。[87] T. Wang and J. Yong. 后向随机 Volterra 积分方程——适应解的表示。《随机过程及其应用》，129(12):4926–4964，2019年。[88] Y. Wang, W. Huang, B. Liu, and X. Zhang. 时间不一致偏好下委托—代理问题中的最优努力。《北美经济与金融杂志》，52(100909)，2020年。[89] Q. Wei, J. Yong, and Z. Yu. 时间不一致递归随机最优控制问题。《*SIAM*控制与优化杂志》，55(6):4156–4201，2017年。[90] N. Williams. 一个可解的连续时间动态委托—代理模型。《经济理论杂志》，159（B辑）：989–1015，2015年。[91] M. Yılmaz. 与时间不一致代理人的重复道德风险。《经济行为与组织杂志》，95：70–89，2013年。[92] M. Yılmaz. 与天真的时间不一致代理人签约：是利用还是不利用？《数学社会科学》，77:46–51，2015年。[93] J. Zhang.《后向随机微分方程——从线性理论到完全非线性理论》，第86卷，收录于《概率论与随机建模》。施普林格出版社纽约分社，2017年。