arXiv:2303.01604v1 [math.AG] 2 Mar 2023

阿代尔曲线上 χ-体积的连续延拓与双有理不变性

by

WENBIN LUO

摘要。——通过给出关于最小斜率的估计，我们证明了半丰沛且半正的阿代尔线丛的希尔伯特–塞缪尔公式。我们还证明了算术 χ-体积的双有理不变性，以及其在半丰沛锥上的连续延拓。

目录

引言.1 1. 预备知识.4 2. 平凡赋值域上的算术.7 3. 算术 χ-体积与阿代尔线丛.14 4. χ-体积的连续延拓.21 参考文献.24

引言

背景。— 阿拉克洛夫几何是一种研究 $\mathcal{O}_K$ 上簇的理论，其中 K 是一个数域。由于 Spec$\mathcal{O}_K$ 的闭点只能产生 K 的非阿基米德位，阿拉克洛夫几何的核心思想是通过添加阿基米德位来“紧化” Spec$\mathcal{O}_K$，相应的“纤维”不过是一般纤维的解析化。为了将这一理论推广到函数域情形乃至更一般的情形，Chen 和 Moriwaki 建立了阿代尔曲线上的阿拉克洛夫几何理论

本研究得到 JSPS KAKENHI Grant Number JP20J20125 的资助。

曲线[4]。这里，阿代尔曲线是一个域，配备了一组由测度空间参数化的绝对值。利用阿代尔理论，可以很容易地为任意整体域构造这样的结构。此外，我们可以为 $\mathbb{Q}$ 上的有限生成域定义阿代尔曲线；Moriwaki 在 [11] 中引入了相应的高度函数。

因此，阿代尔曲线上的理论为研究这些域上的算术提供了一种统一的方法。第一步是建立数的几何理论。受射影正则曲线上向量丛半稳定性研究的启发，算术斜率理论在 [4], 中被提出，并在 [2]中建立了数域上的相关理论。

本文主要讨论所谓的 χ-体积，它是阿代尔曲线上算术希尔伯特-塞缪尔函数的首项系数，包括其双有理不变性，以及在半丰沛锥上的连续延拓。在数域的情形下， χ-体积已在 [12, 7, 13]中得到研究。我们在先前的论文[9, 10] 中给出了函数域上 χ-体积的一些性质。

阿代尔曲线上的阿拉克洛夫几何。— 设 $(K, (\Omega, \mathcal{A}, \nu), \phi)$ 是一条正常阿代尔曲线，其中 ϕ 是从 Ω 到 K上所有绝对值的集合 M_K 的映射。阿代尔曲线的正常性等价于它满足乘积公式（见 1.1）。对于每个 $\omega \in \Omega$，我们用 K_ω 表示 K 关于相应绝对值的完备化。设 E 是 K 上的一个维数为 n的向量空间。设 $\xi = \{\|\cdot\|_\omega\}$ 是一个范数族，其中每个 $\|\cdot\|_\omega$ 都是$E_{K_\omega} := E \otimes_K K_\omega$上的一个范数。若 ξ 满足某些支配性和可测性条件[4, 4.1.4]，则称对 $\overline{E} = (E, \xi)$ 为一个阿代尔向量丛。若 $E \neq 0$，则将其阿拉克洛夫次数 定义为

$$\widehat{\deg}(\overline{E}) := -\int_\omega \ln \|s\|_{\omega,\det} \nu(d\omega)$$

其中 $s \in \det E \setminus \{0\}$ ，且每个$\|\cdot\|_{\omega,\ \det}$ 都是 $\|\cdot\|_\omega$的行列式。

设 X 是一个维数为 d的 K-射影概形。对于每个 $\omega \in \Omega$，我们将 $X_\omega := X \times_{\operatorname{Spec} K} \operatorname{Spec} K_\omega$ 相对于 $|\cdot|_\omega$ 的 Berkovich 意义下的解析化记作 X_ω^{an}。考虑一对 $\overline{L} = (L, \{\varphi_\omega\}_{\omega\in\Omega})$，其中 L 是 X 上的线丛，且每个 φ_ω 都是 L 在 X_ω^{an}上的解析化的度量。若度量族有界且可测[4, 6, 则1], 我们称 $\overline{L}$ 为阿代尔线丛。

我们假设 X 是几何约化的。记$\|\cdot\|_{\varphi_\omega}$ 为 $H^0(X, L) \otimes K_\omega$上的上确界范数，记 ξ_φ为范数族 $\{\|\cdot\|_{\varphi_\omega}\}$。现在假设 σ-代数 $\mathcal{A}$是离散的，或者域 K 存在一个可数子域，它关于每个 $\omega \in \Omega$ 的 K_ω 在 $|\cdot|_\omega$ 下稠密。那么$\pi_*(\overline{L}) := (H^0(X, L), \xi_\varphi)$ 是一个阿代尔向量丛 [4, 定理 6.2.18]。因此

我们可以定义 χ-体积函数如下:

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\deg}(\pi_*(n\overline{L}))}{n^{d+1}/(d+1)!}.$$

当渐近最小斜率 $\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}) = \liminf_{n\to+\infty} \widehat{\mu}_{\min}(\pi_*(n\overline{L}))$ n 有限时，定义中的上极限可以替换为极限。最小斜率的定义请参见 1.2。

平凡赋值域上的最小斜率与算术。 — 一个$\mathbb{R}$-滤过 $\mathcal{F}^t$ 的向量空间 E 在平凡绝对值下给出一个超度量范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$。特别地，超度量赋范空间 $(E, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ 的最小斜率可以表示为范数的上确界。这使我们能够估计平凡赋值域上超度量赋范线性系所对应的最小斜率。总之，我们证明，对于满足 L_1 的阿代尔线丛 $\overline{L}_1 = (L_1, \phi_1) \cdots, \overline{L}_r = (L_r, \phi_r)$，若 $L_1, \ldots, L_r$ 是半丰沛的，则存在常数 S, T，使得

$$\widehat{\mu}_{\min}(\pi_*(a_1\overline{L}_1 + \cdots + a_r\overline{L}_r)) \geq S(a_1 + \cdots + a_r) + T$$

对于 a_1、.....、$a_r \in \mathbb{N}$。

基于这一结果，我们证明了半丰沛且半正的阿代尔线丛的算术希尔伯特–塞缪尔公式:

定理A （参见定理 3.7）。 — 设 $\overline{L}$ 是半丰沛且半正的阿代尔线丛。则有

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) = \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}$$

此外，我们证明，若 $\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(f^*\overline{L}) \in \mathbb{R}$，则 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\cdot\overline{L})$ 在双有理态射 $f : X' \to X$ 下不变，且无需使用 Stein 分解（见定理 3.10）。

$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\cdot)$ 的连续延拓。 — 进一步假设 X 在几何上是不可约且正规的。根据连续度量与格林函数之间的对应关系，我们可以将 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\cdot)$ 的定义推广到 $\mathbb{R}$-Cartier 阿代尔除子（见第 4 节）。我们证明，$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D})$ $\widehat{\mathrm{vol}}(D)$ 是射影曲线或射影环面簇的丰沛锥上的凹函数。以下是我们关于 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\cdot)$ 连续性所得的一些结果。

定理B (参见定理4.5)。 — 设 $\overline{D}_1 = (D, g) \ldots, \overline{D}_r = (D_r, g_r)$ 是上的 ***adelic*** $\mathbb{Q}$-***Cartier*** 除子，且满足 X 是半丰沛的。那么体积$\chi(\cdot)$ 可以

连续延拓为多面锥上的一个函数

$$\{a_1\overline{D}_1 + \cdots + a_r\overline{D}_r \mid (a_1, \cdots, a_r) \in \mathbb{R}^r_{\geq 0}\}.$$

论文结构。——我们首先介绍阿代尔曲线理论的预备知识，包括阿代尔向量丛的阿拉克洛夫次数和 Harder-Narasimhan 滤过。在第 2 节中，我们利用平凡赋值域上的超度量范数研究滤过向量空间和线性系。这些结果可用于给出 χ-体积的描述。我们分别在第 3 节和第 4 节处理阿代尔线丛和阿代尔 Cartier 除子的情形。

1. 预备知识

1.1. 阿代尔曲线。——

定义 1.1。——设 K 是一个域， M_K 是其所有赋值点。阿代尔曲线是一个三元组 $(K, (\Omega\ \mathcal{A}, \nu)\ \phi)$，其中 $(\Omega\ \mathcal{A}, \nu)$ 是一个测度空间，由空间 Ω、 σ-代数 $\mathcal{A}$ 和测度 ν 组成，而 ϕ 是一个函数 $(\omega \in \Omega) \mapsto |\cdot|_\omega \in M_K$，满足

$$\omega \mapsto \ln|\alpha|_\omega$$

对 K中的任意非零元素 α，都是 ν-可积的。此外，若对于任意 $\alpha \in K^\times$，都有 $\int_\Omega \ln|\alpha|_\omega \nu(d\omega) = 0$，则称该阿代尔曲线是适当的。对于每个 $\omega \in \Omega$，我们将 K 关于 $|\cdot|_\omega$的完备化域记为 K_ω。我们记$\Omega_\infty := \{\omega \in \Omega \mid |\cdot|_\omega$ 是阿基米德的$\}$.

一些典型例子包括数域、射影曲线和极化簇。详细构造请参见 [4, 第 3 节。2] 从现在起，除非另有说明，我们假设阿代尔曲线是适当的。此外，出于技术原因，我们假设（$(K, (\Omega\ \mathcal{A}, \nu)\ \phi)$ 满足以下两个条件之一：

(i) 存在一个可数子域 $K' \subset K$，它在每个 K_ω中都稠密。(ii) σ-代数 $\mathcal{A}$ 是离散的。(iii) 对于每个 $\omega \in \Omega_\infty$， $|\cdot|_\omega = |\cdot|$ 在 $\mathbb{Q}$上，其中 $|\cdot|$ 是通常绝对值

.

值得一提的是，条件 (iii) 保证了 $\nu(\Omega_\infty) < +\infty$，这是由于 [4, 命题 3.1.2]。

1.2. 阿代尔向量丛。— 设 E 是 K 上维数为 n 的向量空间。设 $\xi = \{\|\cdot\|_\omega\}$ 是一个范数族，其中每个 $\|\cdot\|_\omega$ 都是 $E_{K_\omega} := E \otimes_K K_\omega$ 上的范数。我们可以轻松地定义 ξ 在子空间 F 上的限制 ξ_F、由满同态 $E \twoheadrightarrow G$ 诱导的商范数族 $\xi_{E\twoheadrightarrow G}$、$E^\vee$ 上的对偶范数族 $\xi^\vee$、外幂范数族和张量积范数族。详情请参阅 [4, 截面 1.1 和 4.1] 。

定义 1.2 （阿代尔向量丛）。——若范数族 ξ 是上有界的,

$$\forall s \in E^*, \int_\Omega \ln\|s\|_\omega \nu(d\omega) < +\infty.$$

此外，若 ξ 的对偶范数 $\xi^\vee$ 在 $E^\vee$ 上也上有界，则称 ξ 是受控的。若对任意 $s \in E^*$，函数 $s \mapsto \|s\|_\omega$是 $\mathcal{A}$-可测的，则称 ξ 是可测的。若 ξ 既受控又可测，则称二元组$\overline{E} = (E, \xi)$为一个阿代尔向量丛。注意，限制到子空间、取商、外幂及张量积后，阿代尔向量丛的性质仍然保持[4, 命题 4.1.32，注 4.1.34]。值得注意的是，阿代尔向量丛 $\overline{E}_1$ 和 $\overline{E}_1$ 的 ϵ,π-张量积$\overline{E}_1 \otimes_{\epsilon,\ \pi} \overline{E}_2$ 的定义方式是：张量积上的范数在阿基米德位和非阿基米德位处分别采用不同的定义。详情请参见 [4, 1.1.11 和 4.1.1.5]

定义 1.3 （阿拉克洛夫度与斜率）. — 设 $\overline{E} = (E, \xi)$ 为一个阿代尔向量丛。若 $E \neq 0$，则定义其阿拉克洛夫次数 为

$$\deg(\overline{E}) := -\int_\omega \ln\|s\|_{\det\xi,\omega} \nu(d\omega)$$

其中 $s \in \det E \setminus \{0\}$，而 $\det\xi$ 是 $\det E$（最高外幂）上的行列式范数族。注意，由于阿代尔曲线 S 是完备的，此定义与 s 的选取无关。若 $E = 0$, 则按约定定义 $\deg(\overline{E}) = 0$。此外，我们将正度 定义为

$$\deg_+(\overline{E}) := \sup_{F\subset E} \deg(F, \xi_F),$$

即其所有算术曲线上的向量子丛的阿拉克洛夫次数的上确界。若$E \neq 0$，其斜率 $\hat{\mu}(\overline{E})$定义为商 $\deg(\overline{E})/\dim_K(E)$。

最大斜率和最小斜率定义为

$$\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}) := \begin{cases} \sup\limits_{0\neq F\subset E} \widehat{\mu}(F,\xi_F), & \text{if } E\neq 0 \\ -\infty, & \text{if } E=0 \end{cases}$$

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) := \begin{cases} \inf\limits_{E\twoheadrightarrow G\neq 0} \widehat{\mu}(G,\xi_{E\twoheadrightarrow G}), & \text{if } E\neq 0 \\ +\infty, & \text{if } E=0 \end{cases}$$

命题 1.4. — 设 $\overline{E}=(E,\{\|\cdot\|_\omega\})$ 是一个阿代尔向量丛。我们给出以下性质：

(a) 设 $f\colon \Omega\to\mathbb{R}$ 是一个 ν-可积函数。那么 $E(f):=(E,\{\|\cdot\|_\omega \overline{\exp(-f(\omega))}\})$也是一个阿代尔向量丛，且

$$\begin{cases} \widehat{\deg}(\overline{E(f)}) = \widehat{\deg}(\overline{E}) + (\dim_K E)\int_\Omega f\nu(d\omega), \\ \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E(f)}) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) + \int_\Omega f\nu(d\omega). \end{cases}$$

(b) 若 $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})\geq 0$，则 $\widehat{\deg}(E)=\widehat{\deg}_+(\overline{E})$。

证明。 — (a) 这由定义直接得出。(b) 假设存在一个子空间 $F\subset E$ 使得 $\widehat{\deg}(F)>\widehat{\deg}(\overline{E})$，则 $\widehat{\mu}(\overline{E/F})<0$ 由 [4,命题 4.3 得出。12], 因此产生矛盾。 □

定义 1.5。 — 我们称阿代尔向量丛 $\overline{E}=(E,\xi=\{\|\cdot\|_\omega\})$ 为超度量 的，若对每个满足 $|\cdot|_\omega$ 为非阿基米德的 $\omega\in\Omega$， $\|\cdot\|_\omega$ 都是超度量的，也就是说，

$$\|s+t\|_\omega\leq\max\{\|s\|_\omega,\|t\|_\omega\}.$$

在本文余下部分，为简便起见，我们所说的阿代尔向量丛均指超度量阿代尔向量丛。

命题 1.6。 —设 (E,ξ) 是一个阿代尔向量丛，其中 维数$_K E=r>0$。考虑 E 的一个向量子空间旗标：

$$0=E_0\subset E_1\subset\cdots\subset E_n=E.$$

我们用 ξ_i 表示 x 在 E_i 上的限制范数族，用 η_i 表示 ξ_i 在 E_i/E_{i-1} 上的商范数族。以下不等式成立：

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \widehat{\deg}(E_i/E_{i-1},\eta_i) &\leqslant \widehat{\deg}(E,\xi) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \widehat{\deg}(E_i/E_{i-1},\eta_i) + \frac{\nu(\Omega_\infty)}{2} r\ln r. \end{aligned}$$

证明. — 参见 [4,命题 4.3.12]。 □

注 1.7. — 若域 K 是完美域，则由 [4, 5.6.2], 可知，存在一个常数 $C>0$，使得对于任意阿代尔向量丛 $\overline{E}_1$、$\cdots$、$\overline{E}_l$，均有

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_1\otimes_{\epsilon,\pi}\cdots\otimes_{\epsilon,\pi}\overline{E}_l)\geq\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_1)+\cdots+\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_l)-C\sum_{i=1}^{l}\ln(\dim_K(E_i))$$

该结论最初由 [2] 证明，并在 [4, 第 5]章中重新表述。我们称之为级最小斜率性质。本文中提及的所有常数 C 均指此意义下的常数。

定义 1.8. — 设 $\overline{E}=(E,\xi)$ 是一个维数为r的阿代尔向量丛。*Harder-Narasimhan* $\mathbb{R}$-滤过定义为

$$\mathcal{F}^t_{hn}(\overline{E})=\sum_{\substack{0\neq F\subset E\\ \widehat{\mu}_{\min}(F,\xi_F)\geq t}}F.$$

我们用 $\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})=\widehat{\mu}_r(\overline{E})\leq\widehat{\mu}_{n-1}(\overline{E})\leq\cdots\leq\widehat{\mu}_1(\overline{E})=\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E})$ 表示 $\mathbb{R}$-滤过的跳跃点。

命题 1.9. — 设 $\overline{E}$ 为一个阿代尔向量丛。那么

$$\sum\widehat{\mu}_i(\overline{E})\leq\deg(\overline{E})\leq\sum\widehat{\mu}_i(\overline{E})+\frac{1}{2}r\ln r,$$
$$\sum\max(\widehat{\mu}_i(\overline{E}),0)\leq\deg_+(\overline{E})\leq\sum\max(\widehat{\mu}_i(\overline{E}),0)+\frac{1}{2}r\ln r.$$

2. 平凡赋值域上的算术

本节中，设 K 为任意域，且$(|\cdot|_0)$为 K上的平凡绝对值。

2.1. $(K,|\cdot|_0)$. — 设 E 为 K上的有限维向量空间。回顾一下，E 上的 $\mathbb{R}$-滤过 $\mathcal{F}^tE$ 是一个映射

$$t\in\mathbb{R}\mapsto\mathcal{F}^tE\subset E$$

其中每个 $\mathcal{F}^tE$都是 E的子空间，且若 $t\geqslant t'$则 $\mathcal{F}^tE\subset\mathcal{F}^{t'}E$。任意 $\mathbb{R}$-滤过都对应于一个连续斜率序列，即

$$\mu_i=\sup\{t\mid\dim_K\mathcal{F}^tE\geqslant i\}$$

其中 $i=1$、2、$\cdots$、$\dim_K E$。

由 $\mathbb{R}$-过滤可构造出 $(K,|\cdot|_0)$ 上的超度量范数 $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$，其定义为

$$\|s\|_{\mathcal{F}} := \exp(-\lambda_{\mathcal{F}}(s))$$

其中 $\lambda_{\mathcal{F}}(s) := \sup\{t \mid s \in \mathcal{F}^t E\}$. 这实际上给出了超度量范数集合与 $\mathbb{R}$-滤过集合之间的一个双射。此外，数对 $\overline{E} := (E, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$ 可视为定义在 $(K,|\cdot|_0)$ 上的阿代尔向量丛。在这一特例中，其最小斜率可通过 $\widehat{\mu}_{\min}(E,\|\cdot\|_{\mathcal{F}}) = -\ln(\max\{\|x\|_{\mathcal{F}} \mid x \in E\})$ 计算。特别地，对于 E 的任意子空间 F，记 F 上限制的超度量范数为 $\|\cdot\|_F$，则

$$\widehat{\mu}_{\min}(F,\|\cdot\|_F) \geqslant \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$$

命题 2.1. — 设 $\overline{E} = (E,\|\cdot\|)$ 是定义在 $(K,|\cdot|_0)$ 上的超度量赋范向量空间。设

$$0 \to F \xrightarrow{f} E \to G \to 0$$

是定义在 K 上的向量空间之间的一个正合序列。则有

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}) = \min\{\widehat{\mu}_{\min}(F,\|\cdot\|_F), \widehat{\mu}_{\min}(G,\|\cdot\|_{E\twoheadrightarrow G})\}.$$

证明. — 若 $E = 0$，则该命题显然成立。因此我们假设 $E \neq 0$。若 $\widehat{\mu}_{\min}(F,\|\cdot\|_F) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$，则结论成立。因此我们假设 $\widehat{\mu}_{\min}(F,\|\cdot\|_F) > \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$。设 $x \in E$ 是一个满足 $\|x\| = \exp(-\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}))$ 的元素，即范数最大的元素。由于 $\widehat{\mu}_{\min}(F,\|\cdot\|_F) > \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$，$x$ 不属于 F 的像。因此 $\tilde{x} \neq 0 \in G$，有

$$\|\tilde{x}\|_{E\twoheadrightarrow G} = \inf_{y\in F}\|x + f(y)\| = \inf_{y\in F}\max\{\|x\|,\|f(y)\|\} = \|x\|$$

这意味着 $\widehat{\mu}_{\min}(G,\|\cdot\|_{E\twoheadrightarrow G}) = \widehat{\mu}_{\min}(\overline{E})$。 □

注记 2.2. — 上述命题也可以利用 [4,命题 4.3.32] 中的不等式得到。

定义 2.3. — 设 $\overline{E}_i = (E_i,\|\cdot\|_i)_{i=1}^n$ 是一族定义在 $(K,|\cdot|_0)$ 上的超度量赋范向量空间。我们在 $\bigoplus_{i=1}^n E_i$ 上定义范数 $\|\cdot\|$ 为

$$\|(a_1,\cdots,a_n)\| := \max_{i\in\{1,\ldots,n\}}\{\|a_i\|_i\}$$

对于 $(a_1,\cdots,a_n) \in \bigoplus_{i=1}^n E_i$，称其为范数的直和 $\{\|\cdot\|_i\}_{i=1}^n$，而超度量赋范向量空间 $(\bigoplus_{i=1}^n E_i,\|\cdot\|)$ 可记作

$$\overset{\perp}{\bigoplus_{i=1,\ldots,n}} \overline{E}_i.$$

注释 2.4。——显然，

$$\widehat{\mu}_{\min}\left(\bigoplus_{i=1,\dots,n}^{\perp}\overline{E}_i\right)=\min_{i\in\{1,\dots,n\}}\{\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_i)\}.$$

此外，$\bigoplus_{i=1\dots,,n}^{\perp}\overline{E}_i$ 的连续斜率正是$\overline{E}_i$的连续斜率合并后按序排列所得的序列。

定义 2.5. — 设 $\overline{E}=(E,\|\cdot\|_E)$ 和 $\overline{F}=(F,\|\cdot\|_F)$ 是关于 $(K,|\cdot|_0)$ 的超度量赋范向量空间。张量积 $\overline{E}\otimes\overline{F}$ 定义为在 $E\otimes F$ 上赋予如下超度量范数：

$$\|x\|_{E\otimes F}:=\min\left\{\max_i\left\{\|s_i\|_E\cdot\|t_i\|_F\right\}\middle|\ x=\sum_i s_i\otimes t_i\right\}$$

2.2. 滤过分次线性级数。—

定义 2.6. — 设 $E_\bullet=\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $K(X)$ 上关于 K 的一族向量子空间。若 $\oplus_{n\in\mathbb{N}}E_nY^n$ 是 $K(X)[Y]$ 的分次子-K-代数，我们称 $E_\bullet$ 为分次线性级数。若 $\oplus_{n\in\mathbb{N}}E_nY^n$ 是有限生成的 K-代数，则称 $E_\bullet$ 为有限型。若 $E_\bullet$ 包含于一个有限型分次线性级数中，则称 $E_\bullet$ 为亚有限型。

我们为每个 E_n 赋予一个超度量范数 $\|\cdot\|_n$。集合 $\overline{E}_\bullet=\{(E_n,\|\cdot\|_n)\}$称为超度量赋范分次线性级数。记 $\delta:\mathbb{N}!\ \mathbb{R}$为将 n 映射到 $C\ln\dim_K(E_n)$ 的函数。若满足以下不等式，则称 $\overline{E}_\bullet$ 是 δ-超加性 的：

$$\prod_{i=1}^r\|s_i\|_{n_i}\leqslant\left\|\prod_{i=1}^r s_i\right\|_{n_1+n_2+\cdots+n_r}\prod_{i=1}^r\dim_K(E_{n_i})^C$$

该不等式对任意 $r\geqslant 2$, $i=1,\dots,r$, $n_i\geqslant 0$ 和 $s_i\in E_{n_i}$均成立。

定义 2.7。——我们将 Kodaira 维数为 d 的分次线性级数 $E_\bullet$ 的体积定义为

$$\mathrm{vol}(E_\bullet):=\limsup_{n\to+\infty}\frac{\dim_K(E_n)}{n^d/d!}.$$

如果 $\overline{E}_\bullet$ 是满足 δ-超加性的超度量赋范分次线性级数，则将其算术体积和算术 χ-体积定义为

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{E}_\bullet) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\sum \max(\widehat{\mu}_i(\overline{E}_n), 0)}{n^{d+1}/(d+1)!},$$
$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{E}_\bullet) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\sum \widehat{\mu}_i(\overline{E}_n)}{n^{d+1}/(d+1)!}.$$

其渐近最大斜率、下渐近最小斜率以及下渐近最小斜率分别定义为

$$\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{E}_\bullet) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\mu}_{\max}(\overline{E}_n)}{n},$$
$$\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{E}_\bullet) := \liminf_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_n)}{n},$$
$$\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{E}_\bullet) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_n)}{n}.$$

2.3. 算术 Okounkov 体。 — 设 $\overline{E}_\bullet = \{\overline{E}_n = (E_n, \|\cdot\|_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个满足 δ-超可加性的次有限型超度量赋范分次线性级数。设 $r_n = \text{维}_K(E_n)$。

命题 2.8。 — 对于任意 $n \in \mathbb{N}$ 和 $s \in E_n$，定义

$$\|s\|'_n := \liminf_{m\to\infty} \|s^m\|^{\frac{1}{m}}_{nm}$$

则以下四个性质成立：

(1) $\|s\|'_n = \text{极限}_{m\to\infty} \|s^m\|^{\frac{m}{m}}_{nm}$。(2) $\|\cdot\|'_n$ 是 E_n 上关于平凡赋值 K 的超度量范数。(3) $\|s\|'_n \|t\|'_m \geqslant \|st\|'_{n+m}$ 对任意 $s \in E_n$ 和 $t \in E_m$ 成立。(4) $\dfrac{\|s\|'_n}{\|s\|_n} \leqslant r_n^C$.

证明。—— (1) 设 $a_m := -\ln \|s^m\|_{nm}$。由 δ-超可加性，对于 $m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}_+$，我们有

$$a_{m_1+\cdots+m_l} \geqslant a_{m_1} + \cdots + a_{m_l} - \sum_{i=1}^{l} \delta(nm_i).$$

因此，由广义 Fekete 引理 [4,命题 6.3.15]，数列 $\left\{\dfrac{a_m}{m}\right\}$ 在 $\mathbb{R}$ 中收敛。

(2) 对任意 $s,t\in E_n$, $\|(s+t)^m\|_{nm}\leqslant \max_{i=0,\dots,m}\left\{\|s^it^{m-i}\|_{nm}\right\}$。再次利用$\delta$-超加性，我们可以推得

$$\|s^it^{m-i}\|_{nm}\leqslant \|s^i\|_{ni}\|t^{m-i}\|_{n(m-i)}\exp(\delta(ni)+\delta(n(m-i))).$$

设 $A=\max\{\|s\|'_n,\|t\|'_n\}$。则对于任意 $\epsilon>0$，存在一个整数 N，使得

$$\begin{cases}\|s^l\|_{nl}^{\frac{1}{l}}\exp(\dfrac{\delta(nl)}{l})\leqslant A+\epsilon\\ \|t^l\|_{nl}^{\frac{1}{l}}\exp(\dfrac{\delta(nl)}{l})\leqslant A+\epsilon\end{cases}$$

对每个 $l>N$ 均成立。

设 $B=\max_{i=0,\dots,N}\left\{\max(\|s^i\|_{ni},\|t^i\|_{ni})\exp(\delta(ni))\right\}$。当 $m>2N$ 时，i 或 $m-i$ 中必有一个大于 N，因此

$$\|(s+t)^m\|_{nm}^{\frac{1}{m}}\leqslant\max_{i=0,\dots,N}\{(A+\epsilon)^{\frac{m-i}{m}}B^{\frac{1}{m}}\}.$$

不等式右端的极限为 $A+\epsilon$，这意味着存在 $N'\in\mathbb{N}_+$，使得对于每个 $m>N'$，都有 $\|(s+t)^m\|_{nm}^{\frac{1}{m}}\leqslant A+2\epsilon$。因此$\|s+t\|'_n\leqslant A$。

（3）由于 δ-超可加性，我们有

$$\frac{-\ln\|(st)^l\|_{l(n+m)}}{l}\geqslant\frac{-\ln\|s^l\|_{nl}}{l}+\frac{-\ln\|t^l\|_{ml}}{l}-\frac{\delta(nl)}{l}-\frac{\delta(ml)}{l}$$

对每个 $l\in\mathbb{N}_+$。令 $l\to+\infty$，我们得到 (3)。

(4) 这是由极限估计直接得出的结果。 □

令 $v:K(X)\to\mathbb{Z}^d$ 为一个秩为 d、中心位于正则有理点 $p\in X$ 的赋值，其构造如 [3, 定理 1.1] 所示。这里 $\mathbb{Z}^d$ 配备字典序。记

$$\Delta(E_\bullet):=\text{convex hull of }\{n^{-1}v(s)|s\in E_n\}\subset\mathbb{R}^d,$$

$$\Delta^t(E_\bullet):=\{n^{-1}v(s)|s\in E_n\text{的凸包，}\ \|s\|'_n\leq\exp(-nt)\}\subset\mathbb{R}^d$$

对于 $t\in\mathbb{R}$。

定义 2.9。— 我们定义与 $\overline{E}_\bullet$ 相关联的凹变换 $G_{\overline{E}_\bullet}:\Delta(E_\bullet)\to\mathbb{R}$，如下:

$$G_{\overline{E}_\bullet}(x):=\sup\{t\in\mathbb{R}\mid x\in\Delta^t(E_\bullet)\}.$$

命题2.10. — (1) $G_{\overline{E}_\bullet}$ 是 $\Delta(E_\bullet)$上的上半连续凹函数。

$$(2)\ \sup_{x\in\Delta(E_\bullet)}G_{\overline{E}_\bullet}(x)=\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{E}_\bullet)\ \textit{and}\ \inf_{x\in\Delta(E_\bullet)}G_{\overline{E}_\bullet}(x)\geq\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{E}_\bullet)$$

(3) *If* $\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{E}_\bullet) > -\infty$ *and* $\mathrm{vol}(E_\bullet) > 0$, *then* $\left\{\dfrac{\sum \widehat{\mu}_i(\overline{E}_n)}{n^{d+1}/(d+1)!}\right\}_{n\in\mathbb{N}_+}$ *converges to* $\displaystyle\int_{\Delta(E_\bullet)} G_{\overline{E}_\bullet}(x)dx$. *In particular,* $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{E}_\bullet) = \displaystyle\int_{\Delta(E_\bullet)} G_{\overline{E}_\bullet}(x)dx$.

(4) 若 $\widehat{\mu}^{\sup}{}_{\min}(\overline{E}_\bullet) \geq 0$ 且 $\mathrm{vol}(E_\bullet) > 0$，则 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{E}_\bullet) = \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{E}_\bullet)$。

(5) 设 $\overline{E}^{(i)}_\bullet = \{(E_n, \|\cdot\|^{(i)}_n)\}$，$i = 1, 2, 3$ 是子有限型的 δ-超加性超度量赋范线性系。假设

$$E^{(1)}_n \cdot E^{(2)}_m \subset E^{(3)}_{n+m}$$

and

$$\|st\|^{(3)}_n \leq \|s\|^{(1)}_n \|t\|^{(2)}_n \dim_K(E^{(1)}_n)^C \dim_K(E^{(2)}_n)^C$$

for any $s \in E^{(1)}_n, t \in E^{(2)}_n$. *Then for any* $x \in \Delta(E^{(1)}_\bullet), y \in \Delta(E^{(2)}_\bullet)$, *we have* $G_{\overline{E}^{(1)}_\bullet}(x) + G_{\overline{E}^{(2)}_\bullet}(y) \leq G_{\overline{E}^{(3)}_\bullet}(x+y)$.

证明。—关于 (1)(2)(3)(5) 的证明，请读者参阅 [4, 6.3.4] 。(4)由(3)和定义得出。 □

2.4. 斜率有界性。—

命题 2.11。— 设 $\overline{E}_\bullet = \{\overline{E}_n = (E_n, \|\cdot\|_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是定义在 $(K, |\cdot|_0)$ 上的超度量赋范分次线性级数，满足 δ-超加性。若 $E_\bullet = \{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是有限型的，则有

$$\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{E}_\bullet) > -\infty$$

证明。—我们固定一个生成元集合，并假设其度至多为 N。那么对任意 $n \in \mathbb{N}$，令

$$\Psi_n := \{(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r) \mid 1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_r \leqslant N, \sum_{i=1}^r \lambda_i = n, r = 1, \cdots, n\}.$$

那么映射

$$\bigoplus_{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)\in\Psi_n}^{\perp} (\otimes_{i=1}^r (E_{\lambda_i}, \|\cdot\|_{\lambda_i} \dim_K(E_n)^C) \longrightarrow \overline{E}_n$$

是满射，且算子范数不超过 1。因此我们有

$$\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_n) \geqslant \min_{(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r)\in\Psi_n} \{\sum_{i=1}^r (\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_{\lambda_i}) - \delta(\lambda_i))\}.$$

Then

$$\frac{\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_n)}{n} \geqslant \min\left\{\frac{\widehat{\mu}_{\min}(\overline{E}_l) - \delta(l)}{l}\right\}_{1\leqslant l\leqslant N}$$

对于每个 $n \in \mathbb{N}$。 □

2.5. 多重分次线性级数。 — 现在设 L_1、$\cdots$、L_r 是 X 上的线丛。对于任意 $a=(a_1、a_2、\ldots\ldots、a_r)\in\mathbb{N}^r$，定义

$$\begin{cases} a\cdot\mathbf{L}:=\sum_{i=1}^{r}a_iL_i,\\ a\cdot\varphi:=\sum_{i=1}^{r}a_i\varphi_i,\\ |a|:=a_1+a_2+\cdots+a_r. \end{cases}$$

我们可以在正则有理点 $p\in X$ 处为 L_1、$\cdots$、L_r 选取合适的局部基，从而将 $H^0(X,a\cdot\mathbf{L})$ 视为 $K(X)$ 中的子空间。我们在平凡赋值域上为每个 $H^0(X,a\cdot\mathbf{L})$ 配备一个超度量范数 $\|\cdot\|_{(a)}$，使得对任意 $a^{(1)}$、$\cdots a^{(r)}\in\mathbb{N}^r$，都有不等式

$$\|u_1\cdots u_l\|_{(a^{(1)}+\cdots+a^{(l)})}\leqslant\prod_{i=1}^{l}\|u_j\|_{(a^{(j)})}\dim_K(H^0(X,a^{(j)}\cdot\mathbf{L}))^C$$

其中 $u_j\in H^0(X,a^{(j)}\cdot\mathbf{L})$。

$$\|u\|_{(a)}\leqslant\prod_{i=1}^{l}\|u_j\|_{(a^{(j)})}\dim_K(H^0(X,a^{(j)}\cdot\mathbf{L}))^C$$

令 $E=\bigoplus_{i=1}^{r}L_i$，$\mathbb{P}(E):=\mathcal{P}\mathrm{roj}_X(\mathrm{Sym}(E))$ 为 X 上与 E 相关联的射影丛。令 $H=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1)$。于是

$$H^0(\mathbb{P}(E),mH)=\bigoplus_{a_1+\cdots+a_r=m}H^0(X,\sum_{j=1}^{r}a_iL_i)$$

令 $\|\cdot\|_m$ 为 $\{\|\cdot\|_{(a)}\mid a\in\mathbb{N}^r,|a|=m\}$ 的直和。

命题 2.12. — 赋范分次代数

$$\bigoplus_{m\geqslant0}(H^0(\mathbb{P}(E),mH),\|\cdot\|_m)$$

是强 δ-超加性的。

证明. — 设 $s_i=\sum u_a^{(i)}\in H^0(\mathbb{P}(E)\ m_iH)$，其中 $i=1,2,\ldots,l$，$m_i\in\mathbb{N}$，$\sum_{|a|=m_i}u_a^{(i)}\in H^0(X,a\cdot\mathbf{L})$。成立的是

$$\|s_i\|_{m_i}=\max_{|a|=m_i}\{\|u_a^{(i)}\|_{(a)}\}.$$

此外，

$$\begin{aligned}
\|s_1\cdots s_l\|_m &= \max_{|\alpha|=m}\left\{\left\|\sum_{\substack{a^{(1)}+\cdots+a^{(l)}=a\\ |a^{(i)}|=m_i}}\prod_{i=1}^{l}u^{(i)}_{a^{(i)}}\right\|_{(\alpha)}\right\}\\
&\leqslant \max_{\substack{|a^{(i)}|=m_i\\ i=1,\ldots,l}}\left\|\prod_{i=1}^{l}u^{(i)}_{a^{(i)}}\right\|_{(a^{(1)}+a^{(2)}+\cdots+a^{(l)})}\\
&\leqslant \max_{\substack{|a^{(i)}|=m_i\\ i=1,\ldots,l}}\prod_{i=1}^{l}\left\|u^{(i)}_{a^{(i)}}\right\|_{(a^{(i)})}\dim_K(H^0(X,a^{(i)}\cdot\mathbf{L}))^C\\
&\leqslant \prod_{i=1}^{l}\max_{|a|=m_i}\{\|u^{(i)}_a\|_{(a)}\dim_K(H^0(X,a\cdot\mathbf{L}))^C\}\\
&\leqslant \prod_{i=1}^{l}\|s_i\|_{m_i}\dim_K(H^0(\mathbb{P}(E),m_iH))^C.
\end{aligned}$$

□

推论 2.13. — 若 $L_1,\cdots,L_r$ 均为半丰沛的，则存在常数 $S_{\min},T_{\min}\in\mathbb{R}$，使得

$$\widehat{\mu}_{\min}(H^0(X,a\cdot\mathbf{L}),\|\cdot\|_{(a)})\geq S_{\min}|a|+T_{\min}.$$

证明。— 根据构造，由于 L_1、$\cdots$、L_r 是半丰沛的，H 也是半丰沛的。因此，我们利用命题 2.11 得出证明。 □

3. 算术 χ-体积与阿代尔线丛

在本节中，我们固定如下设定：

(i) K 是完美域。(ii) K 是可数的，或 σ-代数 $\mathcal{A}$ 是离散的。(iii) 对每个 $\omega\in\Omega_\infty$，$|\cdot|_\omega=|\cdot|$ 在 $\mathbb{Q}$上。(iv) 存在一个可测子集 $\Omega'\in\mathcal{A}$，使得 $\nu(\Omega')\notin\{0,+\infty\}$。(v) X ! Spec$K$ 是射影且约化的。

3.1. 阿代尔线丛。— 令 H 为一个非常 ample 线丛，其整体截面 $E := H^0(X, H)$配备了一个受控范数族$\xi = \{\|\cdot\|_\omega\}_{\omega\in\Omega}$，即 $\overline{E} = (E, \xi)$是一个阿代尔向量丛。对于每个赋值$\omega \in \Omega$，我们记 X_ω^{an}为 $X \times_{\mathrm{Spec}K} \mathrm{Spec}K_\omega$ 按照 Berkovich 的意义所作的解析化（见 [1]）。如 [4, 2.2.3], 中所述，范数 $\|\cdot\|_\omega$ 诱导出一个 ***Fubini–Study*** 度量 族 $\varphi_{FS,\,\overline{E},\,\omega} = \{|\cdot|_\omega(x)\}$，它在如下意义下是连续的：对于任意开子集 $U \subset X$ 以及一个截面 $s \in H^0(X, U)$，函数

$$x \in U_\omega^{an} \mapsto |s|_\omega(x)$$

关于 Berkovich 拓扑是连续的，其中 U_ω^{an} 是 $U \times_{\mathrm{Spec}K}\mathrm{Spec}K_\omega$ 的解析化。

对于任意线丛 L 以及两个连续度量族 $\varphi = \{\varphi_\omega\}$、$\varphi' = \{\varphi'_\omega\}$，我们定义距离函数

$$\mathrm{dist}(\varphi, \varphi') : (\omega \in \Omega) \mapsto \sup_{x\in X_\omega^{\mathrm{an}}} |1|_{\varphi_\omega - \varphi'_\omega}(x)$$

其中，$|1|_{\varphi_\omega-\varphi'_\omega}(x)$ 是 X 上的连续函数，因为 $\varphi_\omega - \varphi'_\omega$ 是 $\mathcal{O}_X$ 的连续度量。

我们称一个非常 ample 线丛与连续度量族的对 (H, φ) 为阿代尔非常 ***ample*** 线丛，如果 φ 可测（见 [4, 6.1.4]），并且整体截面 $E = H^0(X, H)$ 上存在一个受控范数族 ξ，使得距离函数 $\mathrm{dist}(\varphi, \varphi_{FS,\overline{E}})$ 是 ν-受控的。

由于非常 ample 线丛生成皮卡群 $\mathrm{Pic}(X)$，我们将由所有阿代尔非常 ample 线丛生成的阿贝尔群定义为$\widehat{\ }$算术皮卡群 $\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$。$\widehat{\mathrm{Pic}}(X)$ 中的元素称为阿代尔线丛。

定义 3.1。— 设 $\overline{L} = (L, \phi)$ 是一个阿代尔线丛。若 L 是丰沛、半丰沛、数值有效，或大的，则称 $\overline{L}$ 具有相应性质。若对每个 $\omega \in \Omega$，ϕ_ω 都是半正的，则称 $\overline{L}$ 为半正的。若一个阿代尔线丛 $\overline{L}$ 可写为 $\overline{L} = \overline{L}_1 - \overline{L}_2$，其中 $\overline{L}_1$ 和 $\overline{L}_2$ 是丰沛且半正的阿代尔$\widehat{\ }$线丛，则称该阿代尔线丛 $\overline{L}$ 为可积的。可积阿代尔线丛构成的群记作 $\widehat{\mathrm{Int}}(X)$。

以下内容请参见 [5, 4.4.4]：

$\widehat{\ }$**命题 3.2**。— 群 $\widehat{\mathrm{Int}}(X)$ 上存在一个交数配对：

$$(\overline{L}_0, \ldots, \overline{L}_d) \in \widehat{\mathrm{Int}}(X)^{d+1} \mapsto \widehat{c}_1(\overline{L}_0)\cdots\widehat{c}_1(\overline{L}_d)$$

它是一个多重线性对称形式。

3.2. 算术 χ-体积。——设 $\overline{L} = (L, \phi)$ 是一个阿代尔线丛。映射

$$\|\cdot\|_{\phi_\omega} : H^0(X, L) \otimes K_\omega \to \mathbb{R}$$

由 $s \mapsto \sup |s|_{\phi_\omega}(x)$ 给出，是 $H^0(X,L) \otimes K_\omega$ 上的一个范数。记 $\xi_\phi = \{\|\cdot\|_{\varphi_\omega}\}_{x \in X_\omega^{\mathrm{an}}}$ 为范数族。$\overline{L}$ 的算术推前定义为 $\pi_*(\overline{L}) = (H^0(X,L), \xi_\phi)$，根据 [4, 定理 6.2.18]，它是一个阿代尔向量丛。χ-体积函数 $\mathrm{vol}_\chi(\cdot)$ 和体积函数 $\mathrm{vol}(\cdot)$ 定义为

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\deg}(H^0(X,nL),\xi_{n\varphi})}{n^{d+1}/(d+1)!},$$

and

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) := \limsup_{n\to+\infty} \frac{\widehat{\deg}_+(H^0(X,nL),\xi_{n\varphi})}{n^{d+1}/(d+1)!}.$$

我们还定义以下渐近不变量：

$$\begin{cases} \widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{L}) := \limsup_{n\to+\infty} \dfrac{\widehat{\mu}_{\max}(\pi_*(n\overline{L}))}{n}, \\ \widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}) := \liminf_{n\to+\infty} \dfrac{\widehat{\mu}_{\min}(\pi_*(n\overline{L}))}{n}, \\ \widehat{\mu}^{\sup}_{\min}(\overline{L}) := \limsup_{n\to+\infty} \dfrac{\widehat{\mu}_{\min}(\pi_*(n\overline{L}))}{n}. \end{cases}$$

注 3.3. — 对每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $\|\cdot\|_n$ 为由 $\pi_*(n\overline{L})$ 的 Harder-Narasimhan 滤过诱导的超度量范数。则 $\{(H^0(X,nL), \|\cdot\|_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个 δ-超可加的超度量赋范分次线性级数。由命题 1.9 可知，上述定义实际上与定义 2.7 一致。值得注意的是，由于 [4, 命题 6.4.4]，$\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{L}) < +\infty$。此外，考虑阿代尔线丛 $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_r$ 以及 $a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{N}^r$。令 $\|\cdot\|_{(a)}$ 为与 $\pi_*(a_1\overline{L}_1 + \cdots + a_r\overline{L}_r)$ 的 Harder-Narasimhan 滤过相关联的超度量范数。则 $\{H^0(a\cdot L, \|\cdot\|_{(a)})\}_{a\in\mathbb{N}^r}$ 满足 2.5 中的条件。因此，推论 2.13 可重述如下：假设 L_1、$\cdots$、L_r 均为半丰沛的，则存在常数 S、T 使得

$$\widehat{\mu}_{\min}(\pi_*(a_1\overline{L}_1 + \cdots + a_r\overline{L}_r)) \geq S|a| + T.$$

命题 3.4。 ——设 $\overline{L}$ 为阿代尔线丛。

(i) 设 h 是Ω上的 ν-可积函数。那么

$$\begin{cases} \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}(h)) = \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) + (d+1)\mathrm{vol}(L)\displaystyle\int_\Omega h\nu(d\omega), \\ \widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}(h)) = \widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}) + \displaystyle\int_\Omega h\nu(d\omega). \end{cases}$$

(ii) 若 L 是大且 $\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}) \in \mathbb{R}$，则序列 $\left\{ \dfrac{\widehat{\deg}(\pi_*(n\overline{L}))}{n^{d+1}/(d+1)!} \right\}$ 收敛至 $\mathrm{vol}_\chi(\overline{L})$。

（iii）若 $\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}) > -\infty$，则

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(n\overline{L}) = n^{d+1}\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}).$$

证明。— (i) 这是由定义和命题 1.4 直接得出的。(ii) 这归功于注记 [4, 6.3.27]。(iii) 若 L不是大，则 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) = \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(n\overline{L}) = 0$。若 L 是大，则利用 (ii) 即可完成证明。 □

3.3. 算术希尔伯特–塞缪尔公式。— 在本小节中，我们将 [6, 定理 5.5.1] 中的结果推广到半丰沛且半正的阿代尔线丛。

引理 3.5。— 设 $\overline{L}$ 是一个阿代尔线丛，且 L 不是大。则 $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) = 0$。此外，我们有如下结论

(a) 若 $\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}) \in \mathbb{R}$，则 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) = \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) = 0$。

(b) 若 $\overline{L}$ 是数值有效且半正的，则 $\widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} \leq 0$。

$\widehat{\mathrm{vol}}$证明。——体积 $\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) = 0$ 是平凡的，这是因为

$$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}) \leq \limsup \frac{\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\pi_*(n\overline{L}))h^0(X, nL)}{n^{d+1}/(d+1)!} \leq (d+1)\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\overline{L})\mathrm{vol}(L).$$

(a) 由于渐近最小斜率有界，我们可以选取一个 ν-$\widehat{\ }$ $\overline{\ }$ $\widehat{\ }$可积函数 h，使得 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(L(h)) = \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{L}(h)) = 0.$。然后利用命题 3.4 (i) 即可得到所述结论。

(b) 这是由 [6, 定理 6.5.1] 直接得到的结果。 □

引理 3.6。——设 $\overline{L} = (L, \phi)$ 和 $\overline{M} = (M, \psi)$ 是满足以下条件的阿代尔线丛:

(1) $\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{M}) \in \mathbb{R}$。(2) 存在一个非零截面 $s \in H^0(X, L-M)$，使得 $\widehat{\ }$度$\xi_{\phi-\psi}(s) \geq 0$。

Then

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) \leq \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{M}) - (d+1)\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{M})(\mathrm{vol}(L) - \mathrm{vol}(M)).$$

证明。——对于任意 $m \in \mathbb{N}_+$，考虑单态

$$H^0(X, mL) \xrightarrow{\cdot s^m} H^0(X, mm).$$

我们将上述态射的像记为 $I(m)$，将其余核记为 $Q(m)$。我们将 $\pi_*(m\overline{M})$ 的子丛记为 $\overline{I}(m)$，将商丛记为 $\overline{Q}(m)$。由于对每个 $\omega \in \Omega$，态射 $H^0(X, mL) \otimes K_\omega$！ $I(m) \otimes K_\omega$的算子范数为$\leq \|s^m\|_{m(\phi-\psi)_\omega} = \|s\|^m_{(\phi-\psi)_\omega}$，我们看到

$$\widehat{\deg}(\pi_*(m\overline{L})) \leq \widehat{\deg}(\overline{I}(m)) - m\widehat{\deg}_{\xi_{\phi-\psi}}(s)h^0(X, mL) \leq \widehat{\deg}(\overline{I}(m)).$$

由于

$$\begin{aligned}\widehat{\deg}(\overline{I}(m)) &\leq \widehat{\deg}(\pi_*(m\overline{M})) - \widehat{\deg}(\overline{Q}(m)) \\ &\leq \widehat{\deg}(\pi_*(m\overline{M})) - \widehat{\mu}_{\min}(\pi_*(m\overline{M}))\dim_K Q(m),\end{aligned}$$

根据定义，我们有

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) \leq \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{M}) - (d+1)\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{M})(\mathrm{vol}(L) - \mathrm{vol}(M)).$$

□

定理 3.7. — 设 $\overline{L}$ 是一个半丰沛且半正的阿代尔线丛。它满足

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) = \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}$$

证明. — **步骤 1.** 我们首先证明 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) \leq \widehat{c}_1(\overline{L})^d$。设 $\overline{A} = (A, \psi)$ 是一个丰沛且半正的阿代尔线丛。我们可以假设存在一个非零截面 $s \in H^0(X, A)$，使得 $\widehat{\deg}^{\xi_\psi}(s) \geq 0$。事实上，我们可以假设 $H^0(X, A) \neq 0$，并任取一个非零 $s \in H^0(X, A)$。若 $\widehat{\deg}^{\xi_\psi}(s) < 0$，则取一个非负的 ν-可积函数 h，使得

$$\widehat{\deg}_{\xi_{\psi+h}}(s) = \widehat{\deg}_{\xi_\psi}(s) + \int_\Omega h\nu(\omega) \geq 0,$$

那么我们可以用 $\psi + h$ 替换 ψ。

对于任意 $n \in \mathbb{N}_+$，由引理 3.6，

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(n\overline{L}) &\leq \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(n\overline{L} + \overline{A}) - (d+1)\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(n\overline{L} + \overline{A})(\mathrm{vol}(nL + A) - \mathrm{vol}(nL)) \\ &= \widehat{c}_1(n\overline{L} + \overline{A})^{d+1} - (d+1)\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(n\overline{L} + \overline{A})(\mathrm{vol}(nL + A) - \mathrm{vol}(nL))\end{aligned}$$

其中等式源于关于丰沛且半正阿代尔线丛的希尔伯特-塞缪尔 [4, 定理 5.5.1]。然后根据 $\mathrm{vol}_\chi(\cdot)$ 的齐次性，我们得到

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) &= \frac{1}{n^{d+1}}\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(n\overline{L}) \\ &\leq \frac{1}{n^{d+1}}\widehat{c}_1(n\overline{L} + \overline{A})^{d+1} - (d+1)\frac{\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(n\overline{L} + \overline{A})(\mathrm{vol}(nL + A) - \mathrm{vol}(nL))}{n^{d+1}}.\end{aligned}$$

注意，$\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(n\overline{L} + \overline{A}) \geq O(n)$，且 $\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{vol}(nL + A) - \mathrm{vol}(nL)}{n^d} = 0$。令 $n \to +\infty$，即可得到该不等式。

步骤 2. 我们证明反向不等式 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) \geq \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1}$。首先假设 L 不是大类，此时由引理 3.5 和步骤 1 可得 $0 = \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) \leq \widehat{c}_1(\overline{L})^{d+1} \leq 0$。现在假设 L 是大类。那么对于 $r \gg 0$，

存在一个非零截面 $t \in H^0(X, rL - A)$。我们可以取一个 ν-可积函数 g，使得 $\widehat{\deg}^{\xi_{r\phi-\psi+g}}(t) \geq 0$. 令 $C_g := \int_\Omega h\nu(d\omega)$。

通过与步骤 1 中类似的论证，我们可以得到，对于任意固定的$n \in \mathbb{N}_+$,

$$\begin{aligned}
&\widehat{c}_1(n\overline{L} + \overline{A})^{d+1} = \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(n\overline{L} + \overline{A}) \\
&\leq \widehat{\mathrm{vol}}_\chi((n+r)\overline{L} + (\mathcal{O}_X, g)) \\
&\qquad - (d+1)(\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}((n+r)\overline{L}) + C_g)(\mathrm{vol}((n+r)L) - \mathrm{vol}(nL + A)) \\
&= (n+r)^{d+1}\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}) + (d+1)(n+r)^d \mathrm{vol}(L)C_g \\
&\qquad - (d+1)(\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}((n+r)\overline{L}) + C_g)(\mathrm{vol}((n+r)L) - \mathrm{vol}(nL + A)).
\end{aligned}$$

对上述式子取 $(n+r)^{d+1}$ 上的商，并令 $n \to +\infty$，即可得到反向不等式。

□

注 3.8。——我们可以看到，如果满足以下条件，同样的证明仍然成立：

1. $\overline{L}$ 是数值有效且半正的，并且 $\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}) \in \mathbb{R}$；2. 对某个丰沛且半正的阿代尔线丛$\overline{A}$，$\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(n\overline{L} + \overline{A}) \geq O(n)$。

3.4. 双有理不变性。——

定义 3.9. — 设 $f : X' \to X$ 是几何约化射影 K-簇之间的一个态射。设 $\overline{L} := (L, \phi)$ 是 X 上的一个阿代尔线丛。我们将 $\overline{L}$ 的拉回 $f^*\overline{L}$ 定义为 $(L, \{f^*\phi_\omega\}_{\omega\in\Omega})$。关于度量的拉回的定义，请读者参阅 [6,定义 2.2.4]

下面，我们给出一个证明，说明 $\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\cdot)$ 是双有理不变量，且不使用 Stein 分解。

定理 3.10. — 设 $f : X' \to X$ 是几何约化射影 K-簇之间的一个双有理态射。设 $\overline{L}$是一个阿代尔线丛，使得$\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(f^*\overline{L}) > -\infty$。那么

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(f^*\overline{L}) = \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}).$$

证明. — 对任意 $\omega \in \Omega$，我们将 f_ω 记为基变换 $f \times_{\mathrm{Spec}K_\omega} \mathrm{Spec}K)$。令 $s \in H^0(X, mL) \otimes K_\omega$，对于任意 $y \in (X')^{\mathrm{an}}_\omega$和 $x = f^{\mathrm{an}}_\omega(y)$，根据定义有 $|f^*(s)|_{f^*(m\phi_\omega)}(y) = |s|_{m\phi_\omega}(x) \otimes_{\epsilon,\pi} \widehat{\kappa}(y) = |s|_{m\phi_\omega}(x)$，其中第二个等式由 [4, 命题 1.3.1] 得出。

因此我们可以看出， $\xi_{m\phi}$ 与由$\xi_{f^*(m\phi)}$和 $H^0(X,mL)$！$H^0(X',f^*(mL))$ 所诱导的范数族一致。令

$$Q(m,L) := H^0(X',f^*(mL))/H^0(X,mL).$$

我们将 $Q(m\overline{L})$ 记作阿代尔向量丛 $(Q(mL)^{\xi_{f^*(m\phi)},\ \text{商}})$，它是 $\pi'^*(f^*(m\overline{L}))$ 在 $\pi_*(m\overline{L})$ 上的商。因此，由命题 1.6 可得

$$\begin{aligned} 0 \leq \widehat{\deg}(\pi'_*(f^*(m\overline{L}))) - (\widehat{\deg}(\pi_*(m\overline{L})) + \widehat{\deg}(Q(m\overline{L}))) \\ \leq \frac{\nu(\Omega_\infty)}{2} h^0(X',f^*(mL))\ln(h^0(X',f^*(mL)). \end{aligned}$$

因此，只需证明 $\widehat{\deg}(Q(m\overline{L})) = o(m^{d+1})$。

步骤 1. 我们先假设 $\overline{L}$ 是丰沛且半正的，那么 $f^*(m\overline{L})$ 是$\widehat{\ }$半丰沛且半正的。由定理 3.7 可得 $\deg(Q(m\overline{L})) = o(m^{d+1})$。

步骤 2. 现在考虑一般情形。设 $\overline{A} = (A,\psi)$ 是一个阿代尔丰沛且半正的线丛，使得存在一个非零截面$s \in H^0(A-L)$，它在 $f_*(\mathcal{O}_{X'}/\mathcal{O}_X)$ 的每个关联点处均不消失。考虑以下交换图：

$$\begin{array}{ccc} H^0(X',f^*(mL)) & \xrightarrow{f^*(s^m)} & H^0(X',f^*(mA)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Q(mL) & \xrightarrow{\quad r_m \quad} & Q(mA). \end{array}$$

对于每个 $\omega \in \Omega$，我们可以看到，单态 $(r_m)_{K_\omega}$ 的算子范数为 $\leq \|f^*(s^m)\|_{f^*(m(\psi-\phi))_\omega} = \|s^m\|_{m(\psi-\phi)_\omega} = \|s\|^m_{(\psi-\phi)_\omega}$. 因此

$$\begin{aligned} &\widehat{\mu}_{\min}(Q(m\overline{L}))\dim_K Q(mL) \leq \\ &\quad \widehat{\deg}(Q(m\overline{L})) \leq -m\widehat{\deg}_{\xi_{\psi-\phi}}(s)(\dim_K(Q(mL))) + \widehat{\deg}(Q(m\overline{A})) \\ &\qquad - \widehat{\mu}_{\min}(Q(m\overline{A}))\,(\dim_K(Q(mA)) - \dim_K(Q(mL))) \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{cases} \liminf\limits_{m\to+\infty} \dfrac{\widehat{\mu}_{\min}(Q(m\overline{A}))}{m} \geq \liminf\limits_{m\to+\infty} \dfrac{\widehat{\mu}_{\min}(\pi'_*(f^*(m\overline{A})))}{m} = \widehat{\mu}^{\text{asy}}_{\min}(f^*(\overline{A})) > -\infty, \\ \liminf\limits_{m\to+\infty} \dfrac{\widehat{\mu}_{\min}(Q(m\overline{L}))}{m} \geq \liminf\limits_{m\to+\infty} \dfrac{\widehat{\mu}_{\min}(\pi'_*(f^*(m\overline{L})))}{m} = \widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(f^*(\overline{L})) > -\infty, \\ \dim_K Q(mA), \dim_K Q(mL) \sim o(m^d). \end{cases}$$

我们得到 $Q(m\overline{L}) \sim o(m^{d+1})$，这意味着 $\widehat{\text{vol}}_\chi(f^*\overline{L}) = \widehat{\text{vol}}_\chi(\overline{L})$。

□

3.5. χ-体积的凹性。——设 $\overline{L}$ 是一个大阿代尔线丛。设 $\Delta(L)$ 为与线性系 $\{H^0(X,nL)\}_{n\in\mathbb{N}}$相关的 Okoukov 体，其定义见 2.3。设 $G_{\overline{L}}:\ \Delta(L)\ !\ \mathbb{R}$ 为由与 $\pi_*(n\overline{L})$ 的 Harder-Narasimhan 滤过相关的超度量赋范线性系给出的凹变换。那么可以看出，若 $\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L})\ \geq -\infty$，则

$$\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L})=\int_{\Delta(L)}G_{\overline{L}}(x)dx$$

由命题 2.10 得出。设 $\overline{L}_1$ 和 $\overline{L}_2$ 是大阿代尔线丛。则$\Delta(L_1)+\Delta(L_2)\subset\Delta(L_1+L_2)$ 并且

$$G_{\overline{L}_1+\overline{L}_2}(x+y)\geq G_{\overline{L}_1}(x)+G_{\overline{L}_2}(y) \tag{1}$$

对于任意 $x\in\Delta(L_1)$ 和 $y\in\Delta(L_2)$，由命题 2.10(5) 得出。因此我们有如下凹性定理:

命题 3.11. — 设 $\overline{L}_1$ 和 $\overline{L}_2$ 是大阿代尔线丛，使得

(1) $\Delta(L_1)+\Delta(L_2)\ =\Delta(L_1+L_2)$,(2)

$\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}_1)\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}_2)\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\overline{L}_1+\overline{L}_2)\ \in\mathbb{R}$

Then

$$\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}_1+\overline{L}_2)}{\mathrm{vol}(L_1+L_2)}\geq\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}_1)}{\mathrm{vol}(L_1)}+\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{L}_2)}{\mathrm{vol}(L_2)}$$

证明。 — 这是 (1) 的直接结果。 □

4. χ-体积的连续延拓

我们沿用第 3 节中的假设。进一步假设 X 是几何整且正规的。对于 X 上的 Cartier 除子 D，我们将 D_ω-*Green* 函数 g_ω 定义为集合中的一个元素

$$C^0_{gen}(X^{\mathrm{an}}_\omega):=\{f\text{ is a continuous function on }U\mid\emptyset\neq U\underset{open}{\subset}X^{\mathrm{an}}_\omega\}/\sim$$

其中，$f\sim g$ 如果它们在某个V^{an}_ω上相同，该 $V\subset X$ 是某个非空开子集，满足对于 U上 D的任意局部方程 f_D，$\ln|f_D|+g_\omega$在 U^{an}_ω上连续。容易看出，每个 D_ω-Green 函数都会在相应的线丛上诱导一个连续度量（详见 [4, 第 2.5] 节）。此外，如果 Cartier 除子 D 与 Green 函数族 g 构成一对$(D,g=\{g_\omega\})$，且其对应于一个阿代尔$\widehat{\ }$线丛，则称其为一个阿代尔 *Cartier* 除子。我们用 Div(X)表示所有阿代尔 Cartier 除子构成的群。令$\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ 或 $\mathbb{R}$，则可以定义阿代尔 $\mathbb{K}$-Cartier 除子的集合为

$$\widehat{\mathrm{Div}}_{\mathbb{K}}(X)=\widehat{\mathrm{Div}}(X)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{K}/\sim$$

其中，“$\sim$”是由 $\sum(0,g_i)\otimes k_i \sim(0,\sum g_i k_i)$生成的等价关系，其中 g_i是连续函数族，且 $k_i\in\mathbb{K}$。

对于任意 $\mathbb{R}$-Cartier 除子 D，我们可以如下定义整体截面空间：

$$H^0_{\mathbb{R}}(D):=\{f\in K(X)^\times \mid \mathrm{div}(f)+D\geqslant_{\mathbb{R}} 0\}\cup\{0\}.$$

Green 函数族的受控性和可测性将引出以下结果：

定理 4.1. — 对于任意 $(D,g)\in$ 除子$_{\mathbb{R}}(X)$ 以及 $\omega\in\Omega$，我们考虑如下定义的范数$\|\cdot\|_{g_\omega}$

$$\|f\|_{g_\omega}:=\sup_{x\in X^{\mathrm{an}}_\omega}\{\exp(-g_\omega(x)f(x)\}$$

对于 $f\in H^0_{\mathbb{R}}(D)\otimes_K K_\omega$。令 ξ_g 表示范数族$\{\|\cdot\|_{g_\omega}\}_{\omega\in\Omega}$。则数对 $(H^0_{\mathbb{R}}(D)\ \xi_g)$ 是一个阿代尔向量丛。

Proof. — See [4, Theorem 6.2.18]. □

现在，我们可以将渐近不变量的定义（包括$\widehat{\ }$vol$_\chi(\cdot)$ $\widehat{\ }$vol$(\cdot)$ $\widehat{\mu}^{\mathrm{asy}}_{\max}(\cdot)\widehat{\mu}^{\inf}_{\min}(\cdot)$和 $\widehat{\mu}^{\sup}{}_{\min}(\cdot)$）推广到阿代尔 $\mathbb{R}$-Cartier 除子。特别是，vol$(\cdot)$在 [4, 定理 6.4.24]的意义下是连续的。

命题 4.2. — 设 $\overline{D}$ 是一个阿代尔 $\mathbb{R}$-*Cartier* 除子，满足 $\widehat{\mu}^{\sup}{}_{\text{最小值}}(\overline{D})\in\mathbb{R}$，则对 $\alpha\in\mathbb{Q}_+$，有 $\widehat{\ }$体积$_\chi(\alpha\overline{D})=\alpha^{d+1}\widehat{\ }$体积$_\chi(\overline{D})$。

证明. — **步骤 1.** 我们首先证明等式对 $\alpha\in\mathbb{N}_+$ 成立。注意，根据定义，$\widehat{\mu}^{\sup}{}_{\text{最小值}}(\alpha\overline{D})\leq\alpha\widehat{\mu}^{\sup}{}_{\text{最小值}}(\overline{D})$。设 h 是一个 ν-可积函数，满足 $\int_\Omega h\nu(d\omega)>-\widehat{\mu}^{\sup}{}_{\text{最小值}}(\overline{D})$。于是

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\alpha(\overline{D}+(0,h)))&=\widehat{\mathrm{vol}}(\alpha(\overline{D}+(0,h)))\\&=\alpha^{d+1}\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D}+(0,h))=\alpha^{d+1}\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D}+(0,h))\end{aligned}$$

其中，第一个和第三个等式由命题 2.10(4) 得出，第二个$\widehat{\ }$等式由 [4,推论 6.4 得出14]。由于 vol$_\chi(\alpha(D+(0,h)))=$vol$_\chi(\alpha\overline{D})+(d+1)vol(\alpha D)\int_\Omega\alpha h\nu(d\omega)=\widehat{\ }vol_\chi(\alpha\overline{D})+(d+1)\alpha^{d+1}vol(D)\int_\Omega h\nu(d\omega)$，我们得到 $\widehat{\ }$vol$_\chi(\alpha\overline{D})=\alpha^{d+1}\widehat{\ }vol_\chi(\overline{D})$。

步骤 2. 现在假设，对于 β、$\gamma\in\mathbb{N}_+$，$\alpha=\beta/\gamma$。那么 $\beta^{d+1}\widehat{\ }$vol$_\chi(\overline{D})=\widehat{\ }vol_\chi(\beta\overline{D})=\widehat{\ }vol_\chi(\alpha\gamma\overline{D})=\gamma^{d+1}\widehat{\ }vol_\chi(\alpha\overline{D})$，证毕。 □

定理 4.3. — 此外，若维数 $X = 1$ 或 X 是环面的，则对于 *adelic*$\mathbb{Q}$-*Cartier* 除子 $\overline{D}_1, \cdots, \overline{D}_r$，其中 $D_1, \ldots, D_r$ 均为丰沛除子，函数

$$a = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Q}^r \mapsto \frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(a_1\overline{D}_1 + \cdots + a_r\overline{D}_r)}{\mathrm{vol}(a_1D_1 + \cdots + a_rD_r)}$$

是凹的。

证明。——设 $a = (a_1, \ldots, a_r)$ $b = (b_1, \ldots, b_r) \in \mathbb{Q}^r$ 和 $\lambda \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$。我们要证明

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\sum(\lambda a_i + (1-\lambda)b_i)\overline{D})}{\mathrm{vol}(\sum(\lambda a_i + (1-\lambda)b_i)D)} &\geq \lambda\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\sum a_i\overline{D})}{\mathrm{vol}(\sum a_iD)} + (1-\lambda)\frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\sum b_i\overline{D})}{\mathrm{vol}(\sum b_iD)}.\\ &= \frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\sum \lambda a_i\overline{D})}{\mathrm{vol}(\sum \lambda a_iD)} + \frac{\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\sum(1-\lambda)b_i\overline{D})}{\mathrm{vol}(\sum(1-\lambda)b_iD)}.\end{aligned}$$

由齐次性，我们可以假设 $D_1, \ldots, D_r$ 都是很丰沛的，且 $\lambda a_i, (1-\lambda)b_i$ 是整数。由命题 3.11 以及曲线和环面簇上奥昆科夫体的可加性，再根据定理 3.1]，即可得到结论。[8, □

4.1. χ-体积的连续性。——

引理 4.4。——设 $\overline{D}_1 = (D_1, g_1) \ldots, \overline{D}_r = (D_r, g_r)$ 是 X 上的阿代尔 *Cartier* 除子。记

$$\begin{cases} C_{\mathbb{R}}(\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_r) := \overline{D}_1 \cdot \mathbb{R}_{\geq 0} + \cdots + \overline{D}_r \cdot \mathbb{R}_{\geq 0}, \\ C_{\mathbb{Q}}(\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_r) := \overline{D}_1 \cdot \mathbb{Q}_{\geq 0} + \cdots + \overline{D}_r \cdot \mathbb{Q}_{\geq 0}, \end{cases}$$

分别由 $\overline{D}_1$、.....、$\overline{D}_r$ 在 $\mathbb{R}_{\geq 0}$ 和 $\mathbb{Q}_{\geq 0}$ 上生成的多面锥。假设在锥 $C_{\mathbb{R}}(\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_r)$ 上存在一个常值函数 $\lambda(\cdot)$，使得

$$\widehat{\mu}^{\sup}_{\min}(\overline{D}) > \lambda(\overline{D})$$

⌒对于任意 $\overline{D} \in C_{\mathbb{Q}}(\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_r)$，存在一个定义在 $C_{\mathbb{R}}(\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_r)$ 上的连续函数 体积$_I(\cdot)$，使得

$$\widehat{\mathrm{vol}}_I(\overline{D}) = \widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D})$$

对于任意 $\overline{D} \in C_{\mathbb{Q}}(\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_r)$。

证明。——取一个 ν-可积函数 f，使得 $\int_\Omega h\nu(\omega) = 1.$。我们令

$$\widehat{\mathrm{vol}}_I(\overline{D}) := \widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D} - \lambda(\overline{D})(0,h)) + (d+1)\mathrm{vol}(D)\lambda(\overline{D}).$$

⌒由于 vol(·)、vol(·) 和 $\lambda(\cdot)$ 的连续性，这显然是一个连续函数。此外，对于任意 $\overline{D} \in C_{\mathbb{Q}}(\overline{D}_1, \ldots, \overline{D}_r)$，由于

$$\widehat{\mu}^{\sup}_{\min}(\overline{D} - \lambda(\overline{D})(0,h)) = \widehat{\mu}^{\sup}_{\min}(\overline{D}) - \lambda(\overline{D}) > 0,$$

我们有
$\widehat{\mathrm{vol}}(\overline{D}-\lambda(\overline{D})(0,h))=\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D}-\lambda(\overline{D})(0,h))=\widehat{\mathrm{vol}}_\chi(\overline{D})-(d+1)\mathrm{vol}(D)\lambda(\overline{D})$
，由此我们得出证明。 □

定理 *4.5.* — 设 $\overline{D}_1=(D_1,g_1)\dots,\overline{D}_r=(D_r,g_r)$ 是定义在 X 上的 *adelic* $\mathbb{Q}$-*Cartier*$\widehat{\ }$ 除子，且 D_i 均为半丰沛。则 $\mathrm{vol}_\chi(\cdot)$ 在 $\frown C_{\mathbb{Q}}(\overline{D}_1,\dots,\overline{D}_r)$ 上连续。此外，$\mathrm{vol}_\chi(\cdot)$ 可连续延拓为定义在 $C_{\mathbb{R}}(\overline{D}_1,\dots,\overline{D}_r)$ 上的函数。

证明. — 由于齐次性，我们可以假设所有 D_i 都是整数 Cartier 除子。因此，存在依赖于 $\overline{D}_1,\dots,\overline{D}_r$ 的常数 S 和 T，使得

$$\widehat{\mu}_{\min}(H^0(X,\sum_{i=1}^r n_iD_i),\xi_{\sum_{i=1}^r n_ig_i})\geqslant T+S\sum_{i=1}^r n_i,$$

其中 $n_i\in\mathbb{N}$。我们将 $a_i=p_i/q_i$ 写作 p_i，其中 p_i 和 q_i 是互素整数，且 $q_i>0$。令 $q=\prod_{i=1}^r q_i$。则有

$$\widehat{\mu}_{\min}(H^0(X,mq(\sum_{i=1}^r a_iD_i)),\xi_{mq(\sum_{i=1}^r a_ig_i)})\geqslant T+Smq(\sum_{i=1}^r a_i)$$

对每个 $m\in\mathbb{N}$ 均成立。因此

$$\widehat{\mu}^{\sup}_{\min}(\sum_{i=1}^r a_i\overline{D}_i)\geqslant S(\sum_{i=1}^r a_i).$$

我们接着利用引理 4.4 完成证明。 □

参考文献

[1]V. G. Berkovich – 非阿基米德域上的谱理论与解析几何，《数学调查与专著》，第 33 卷，美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1990 年。[2] J.-B. Bost & H. Chen – “关于阿拉克洛夫几何中张量积的半稳定性”，*J. Math. Pures Appl. (9)* **99** (2013)，第 4 期，第 436–488 页。[3] H. Chen – “牛顿–奥昆科夫体：函数域算术的一种方法”，波尔多数论杂志 **30** (2018)，第 3 期，第 829–845 页。[4] H. Chen & A. Moriwaki –阿代尔曲线上的阿拉克洛夫几何，《数学讲义》，第 2258 卷，新加坡：Springer，[2020] ©2020。[5] H. Chen & A. Moriwaki – “阿代尔曲线上的算术交理论”，2021 年。[6] ———, “阿代尔曲线上的希尔伯特–塞缪尔公式与等分布定理”，2022 年。

[7] H. Ikoma – 《算术簇上逐次极小值的有界性》，《代数几何杂志》**22** (2013)，第 2 期，第 249–302 页。[8] K. Kaveh – 《关于球面簇的上同调环与体积多项式的注记》，《李理论杂志》**21** (2011)，第 2 期，第 263–283 页。[9] W. Luo – 《函数域上的相对大性不等式与等分布定理》，2021。[10] ———，《斜率有界性与等分布定理》，2022。[11] A. Moriwaki – 《有限生成域上的算术高度函数》，《数学发明》**140** (2000)，第 1 期，第 101–142 页。[12] ———，《算术簇上体积的连续性》，*J. Algebraic Geom.* **18**(2009)，第 3 期，第 407–457 页。[13] X. Yuan – 《算术簇上的大线丛》，《数学发明》**173**(2008)，第 3 期，第 603–649 页。

*2023*年*3*月*6*日Wenbin LUO • 电子邮箱：w.luo@math.kyoto-u.ac.jp，京都大学理学院研究生院数学系，日本京都 606-8502