穿过障碍物丛林的下坡颗粒流

Baptiste Darbois Texier、Yann Bertho、Philippe Gondret
Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire FAST, 91405 Orsay, France.

我们研究了柱子阵列对在粗糙斜面上稳态流动的颗粒层的影响。我们通过实验量化了不同层厚和坡角下，柱间距对颗粒稳态流量的影响。随后，我们提出一种模型，该模型基于深度平均近似，并结合 $\mu(I)$流变学，考虑柱体对颗粒层施加的附加力。若将流动中不可忽略的弗劳德数所导致的惯性纳入考虑，该模型能够成功解释大部分观测结果。

arXiv:2303.01617v1 [cond-mat.soft] 2 Mar 2023

I. 引言

倾斜平面是研究流动物料流变特性的经典构型。在稳态条件下，该构型可用于测定未知的底部摩擦力，该力与已知的重力相平衡。事实证明，这种构型适用于研究屈服应力流体 [1], 、浓悬浮液 [2] 和干颗粒材料 [3, 4]的流变学。对于干颗粒物质，斜面实验表明，只有在两个临界倾角 θ_1 和 θ_2 [4, 5]之间才会形成稳态流动。当坡角小于 θ_1 时，不会发生流动；当坡角大于θ_2 时，流动会加速。在这两个极限之间，稳态流动可由 $\mu(I)$流变学 [6] 很好地描述；该流变学通过惯性数 I [7, 8], 在考虑局部压力的基础上，将局部摩擦系数 μ 与局部速度梯度联系起来。尽管这一流变模型存在一些不足 [9], ，但这种局部流变学仍成功解释了不同几何形状和复杂流动构型中的大部分观测结果，例如颗粒柱的坍塌 [10, 11] 或绕圆柱体的流动 [12]。了解颗粒物质的流变行为，对于工业 [13, 14] 和自然 [15] 情境都至关重要。尤其是，理解颗粒流是更准确预测雪崩及其他危险地球物理颗粒流的第一步，例如碎屑流、火山泥流和火山碎屑流。众所周知，自然或人工障碍物能够减弱此类事件的破坏力 [16–20]。因此，对颗粒雪崩与障碍物相互作用进行物理描述，是减轻各种地球物理现象危害的重要依据。为深入认识雪崩与障碍物相互作用，已有多项实验和数值研究考察了这样一种构型：障碍物布置在倾斜平面上非黏性颗粒流的路径中。Faug等人通过数值方法研究了颗粒沿斜坡下流并撞击一面与来流垂直的墙壁的情形 [21]。他们发现，墙壁上游会形成一个三角形滞止区，在低惯性数下，这会显著增大墙壁所受的平均力。Cui和Gray研究了超临界状态下绕圆柱体流动的重力驱动颗粒流 [22]。在这种情况下，他们观察到圆柱体前方会形成非常尖锐的弓形激波，背风侧则会出现无颗粒区。他们研究了弓形激波和颗粒真空区的位置随流动特性的变化，并提出了一个简单的双参数深度平均雪崩模型，以重现其观测结果。

其他研究不再局限于单个障碍物的情形，而是考察了多个障碍物的影响。Benito 等人研究了由圆柱体构成的障碍物丛林对斜坡上颗粒层稳定性的作用 [23]。他们发现，柱体的存在使颗粒层在更大的坡角下仍能保持稳定。他们通过建立一个模型，考虑柱体阵列对颗粒层施加的额外摩擦力，成功地解释了这一效应。最近，Luong 等人研究了颗粒物质沿斜坡流经规则柱体阵列时的扩散过程 [24]。他们发现，柱体的存在会减缓颗粒物质的扩散，并增强其横向扩散。Luong 等人提出了一种经验模型，通过引入取决于柱间距的有效摩擦系数来描述颗粒物质扩散速度的减缓。然而，迄今尚未有人研究颗粒流经障碍物丛林时的定常流；这方面的研究有助于深入理解颗粒流与多个障碍物之间的耦合作用，并检验连续介质流变模型能否解释观测到的结果。

本文介绍了在存在障碍物丛林的倾斜平面上形成的稳态颗粒流的实验结果和模型。第二节详细介绍了用于研究这种稳态重力驱动颗粒流的实验装置，并给出了流量随柱体密度、层厚和坡角变化的实验结果。在第三节中，展示了一种基于深度平均方法并结合 $\mu(I)$ 流变学的模型；该模型考虑了柱体阵列施加的额外阻力，能够成功解释实验结果。最后，在第四节中进行了讨论。

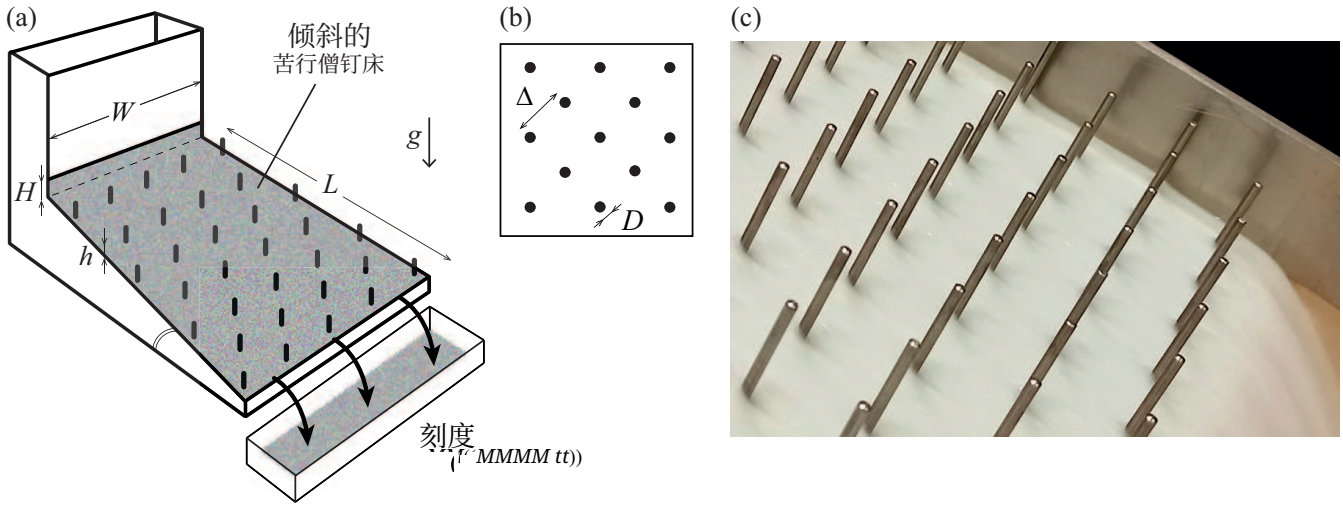

图 1. (a) 实验装置及所用符号示意图。(b) 倾斜平面的俯视图，显示柱体阵列按中心正方形晶格排列。(c) 颗粒介质流经柱阵列的图像，柱体间距为 $\Delta = 20$ mm。

II. 实验

A. 装置

图 1(a) 所示的实验装置由一块长 $L = 50$ cm、宽 $W = 37$ cm 的平面组成，该平面可相对于水平面倾斜，角度最高可达 θ，即 $45°$。该装置的特点是在平面上设置了一片圆柱体组成的障碍物丛林，这些圆柱体按照中心正方形晶格规则排列，并垂直于平面表面；其间距记为 Δ [，如图 1(b)] 所示。柱体直径为 $D = 2$ mm，高度为 35 mm，始终大于流动颗粒层的厚度。实验制作了三种不同的柱体阵列，其间距分别为 $\Delta = 20$、14 和 10 mm，对应的柱体密度分别为 $\chi = 1/\Delta^2$ 0.25、0.51 和 1.00 cm^{-2}。零柱体密度（$\chi = 0$）对应于不含任何柱体的平面。柱体所占的表面占比为 $\phi_s = (\pi/4)(D/\Delta)^2$, ，对于这三种不同的柱体阵列，分别约为 0.8%、1.6% 和 3.1%；这远低于对应于极限情形 $\Delta = D$ 的最大值 $\phi_s = \pi/4 \simeq 78.5\%$。实验中使用的颗粒为筛分后的玻璃珠，其密度为 $\rho_g = 2520$ kg m^{-3}，直径为 $d = 450\ \mu$m，直径的相对离散度约为 10%。同样的玻璃珠被铺在倾斜平面的底部，以确保无滑移条件。柱粒径比 D/d 等于 4.4，两个柱体之间的颗粒数（$\Delta - D$）$/d$ 始终大于 17，从而避免堵塞 [25]。

实验时，先将颗粒装入置于斜坡顶部的储料仓，再打开储料仓底部开口为 H 的闸门。使用放置在斜坡末端的秤，测量从斜面落下的颗粒质量 M 随时间 t 的变化，并据此求得瞬时质量流率$Q = dM/dt$。使用低入射角激光片和相机估算流动层的平均厚度 h，精度为 0.1 mm。在坡面中心、远离柱体附近的位置测量层厚，并在激光片约 5 cm 的纵向范围内取平均值。观察发现，在整个稳态持续期间，层厚保持不变。首先，我们进行了一组 60 次实验，坡度保持恒定 $\theta = 29.5°$，平均层厚则在颗粒直径的 5 至 22 倍之间变化。随后，我们进行 45 次实验，倾角以 $0.5°$ 为步长，在 $24.5°$ 至 $32.5°$ 之间变化，同时将层厚维持在约十个颗粒直径。为保持层厚恒定，我们针对每个倾角手动调节闸门开度，以补偿坡度增大时层的平均厚度减小这一现象。对于所有实验，只要测量位置不在闸门附近或倾斜平面的出口处（这些位置会出现入口和出口效应），在稳定状态期间，均未观察到流动层厚度沿平面的横向和侧向发生显著变化（在实验不确定度范围内）。我们还测量了流动层表面颗粒的速度，除侧壁附近一层较薄的区域（宽 ≈ 3 mm）外，未观察到速度沿横向有显著变化。估算流速时忽略这一层的影响

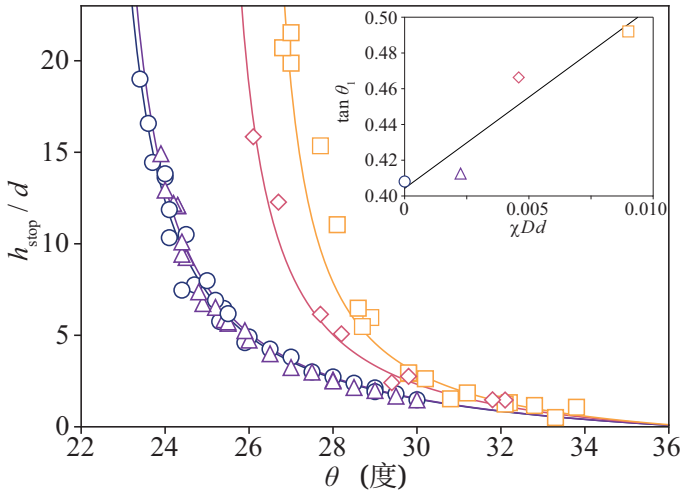

图 2. 雪崩后剩余层的归一化厚度 h_{stop}/d 随坡角 θ 的变化，不同柱体密度下的数据分别为：(○) $\chi = 0$ cm^{-2}、(△) $\chi = 0.25$ cm^{-2}、(◇) $\chi = 0.51$ cm^{-2} 和 (□) $\chi = 1.00$ cm^{-2}。实线为根据方程 (1) 对数据进行的最佳拟合，其中 $\lambda = 1.55$、$\theta_2 = 36.6°$ 和 $\theta_1 = 22.2°$、$22.4°$、$25.0°$ 及 $26.2°$。插图：$\tan\theta_1$ 随柱体密度 χ 的变化。实线为对数据进行的最佳线性拟合，方程为 $\tan\,\theta_1 = 0.404 + 10.2\,\chi Dd$。

对层厚取平均后，$U = Q/\rho W h$，所导致的相对误差小于 1%；其中 $\rho = \phi\rho_g = 1510$ kg m^{-3} 为流动物料的体密度，ϕ 为颗粒堆积率。体积分数 ϕ 是通过对给定表面上的颗粒称重，并沿流动层厚度 h 取平均来估算的。我们发现，平均体积分数保持恒定，为 $\phi = 0.60 \pm 0.01$；与 Benito 等人 [23] 的观察结果一致，它与坡面倾角和流动层厚度均无明显关系。

请注意，我们的实验装置可能会让人联想到“高尔顿钉板”，该装置曾被用于研究颗粒沿下落路径穿过障碍物丛林时的横向扩散 [26, 27]。然而，我们的实验设置与高尔顿钉板存在几处差异：颗粒沿平面整个宽度连续注入，障碍物间距较大，且颗粒与壁面之间存在显著摩擦。

B. 结果

为了表征我们的系统，我们首先按照 Pouliquen [4] 所述的步骤，测量不同柱体密度下颗粒流停止时的厚度 h_{stop} 与 θ 的关系。该临界厚度是指低于此厚度时无法观察到稳态流动。图 2 展示了本文所考虑的不同柱体密度 χ 下的停止曲线 $h_{\mathrm{stop}}(\theta)$。我们观察到，柱体的存在会使曲线向较大的坡角方向移动，且 χ 越大，这种移动越明显；这一结果与 Benito 等人 [23] 的观察一致。根据 [23], ，这些结果可用以下方程拟合

$$\frac{h_{\mathrm{stop}}(\theta,\chi)}{d} = \lambda\,\frac{\tan\theta_2 - \tan\theta}{\tan\theta - \tan\theta_1(\chi)}, \tag{1}$$

其中，θ_1 和 θ_2 分别对应于无限层高（$h \to \infty$）和层厚趋于零（$h \to 0$）时颗粒层的特征停止角；λ 是表征粗糙底面对停止高度影响的数值前因子。注意，在式（1）中，$\tan\theta_1$ 对 χ 的依赖源于颗粒层与柱体之间的额外摩擦，并不代表介质体相性质发生了变化。对于无柱体的情况（$\chi = 0$），数据的最佳拟合参数为 $\theta_1 = 22.2°$、$\theta_2 = 36.6°$ 和$\lambda = 1.55$。对于有柱体的情况（$\chi \neq 0$），根据 Benito 等人的发现，我们保持 θ_2 和 λ 不变；他们指出，只有 θ_1 会显著依赖于 χ [23]。三种柱体密度 $\chi = 0.25$、0.51 和 1.00 cm^{-2} 对应曲线的最佳拟合参数分别为 $\theta_1 = 22.4°$、$25.0°$ 和 $26.2°$。这些拟合曲线在图 2 中以实线表示，与数据吻合良好。正如预期，增大 χ 会使 θ_1 增大，如图 2 插图所示。形式为 $\tan\,\theta_1(\chi) = \tan\theta_1(0) + \alpha\chi Dd$、其中 $\alpha \simeq 10$ 的线性拟合与数据吻合较好，且与 Benito 等人 [23] 先前的发现比较一致。

此后，我们关注储料仓排放过程中形成的颗粒流。图3(a)展示了在给定开口的情况下，储料仓打开后颗粒质量 M 随时间 t 的典型变化

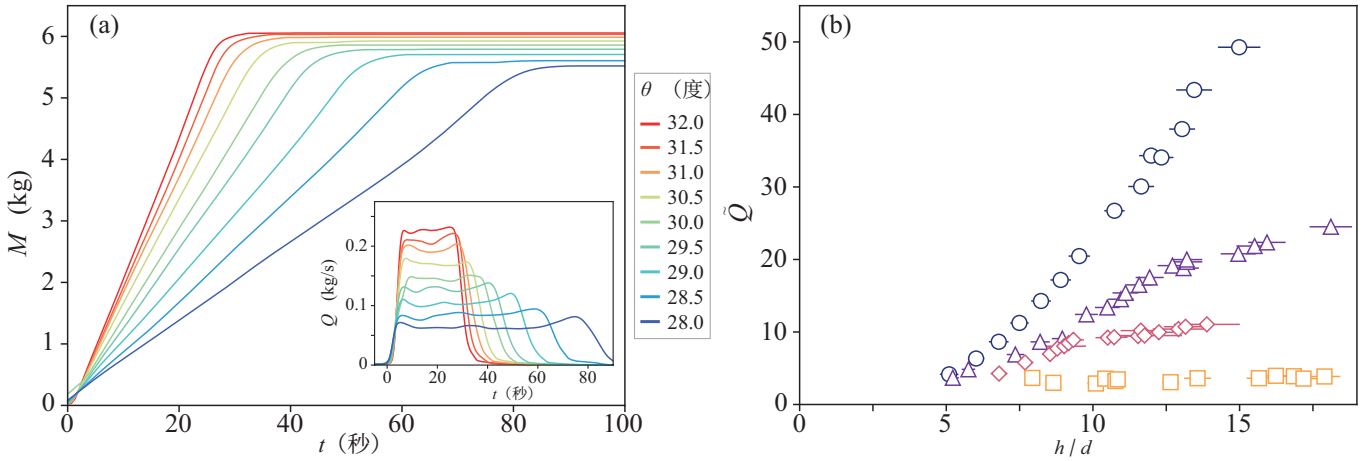

图3。（a）在给定闸门开度（$H = 5.5$ 毫米）、柱体密度（$\chi = 0.51$ 厘米$^{-2}$）及坡角从 28.0° 到 32.0° 、步长为 0.5°的九种不同条件下，打开储料仓后颗粒质量 M 随时间 t 的变化。插图：由此得到的质量流率$Q = dM/dt$ 随时间的变化。（b）在坡角为 $\theta = 29.5°$时，不同柱体密度（○） $\chi = 0$ 厘米$^{-2}$、（△） $\chi = 0.25$ 厘米$^{-2}$、（◇） $\chi = 0.51$ 厘米$^{-2}$和（□） $\chi = 1.00$ 厘米$^{-2}$条件下，归一化稳态流量 $\tilde{Q} = \langle Q \rangle / \rho W g^{1/2} d^{3/2}$ 随归一化层厚 h/d 的变化。

闸门的开口为（$H = 5.5$ mm），柱体密度为（$\chi = 0.51$ cm^{-2}），坡角不同（$28° \leq \theta \leq 32°$）。图3(a)的插图展示了根据这些测量结果得出的瞬时质量流率 Q（t） $= dM/dt$ 。经过持续 $t \gtrsim 5$ s的瞬态阶段后，我们观察到质量流率迅速增加至恒定平台值，并在大部分排放持续时间内保持不变，直至储料仓排空时降为零。由于詹森效应 [28]，出口处的压力不受储料仓内颗粒高度影响，因此储料仓的流量近似保持恒定。下文将重点讨论在起始和停止这两个瞬态阶段之间形成的稳态流量 $\langle Q \rangle$ ，以及它与颗粒层厚度和坡角的关系。每项实验至少重复三次，以确定稳态流量的平均值，并估算结果的离散度。图3(b)展示了给定坡角$\theta = 29.5°$时，平均归一化流量 $\tilde{Q} = \langle Q \rangle / \rho W g^{1/2} d^{3/2}$ 随流动层归一化厚度 h/d 的变化关系。无柱体（$\chi = 0$）时， Q 随 h/d 呈超线性增长。柱体阵列（$\chi \neq 0$）的存在会降低颗粒流流量，其变化趋势不再是超线性的，而是次线性的。颗粒层厚度或柱体密度越大，流量降低越明显。对于最低柱体密度（$\chi = 0.25$ cm^{-2}），只有当层厚足够大（$h/d \gtrsim 7$）时，流量才会显著降低；这与坡角为 $\theta = 29.5°$时，低密度柱体阵列并不会显著增加停止层 h_{stop} 这一事实相符。有趣的是，增加柱体不仅˜会降低质量流率，还会以非平凡的方式改变 Q 对层厚的依赖关系。特别是对于 $\chi = 1.00$ cm^{-2}，流量几乎恒定，不再依赖颗粒层厚度 [图3(b)]。

然后，我们在尽可能保持流动层厚度恒定的条件下，测量稳态流量 $\langle Q \rangle$ 随坡角的变化。事实上，正如 Cui 和 Gray [22]所指出的，闸门开度与颗粒层厚度之间的关系并不简单，因此很难严格保持层厚恒定。˜图 4(a) 和图 4(b) 展示了 Q 和 h/d 随坡角 θ变化的同步测量结果。观察发现，当坡角超过某一阈值角后，归一化流量会随 θ 增大；无柱体时，该阈值角约为 $24°$ （$\chi = 0$）。这一阈值对应于受控厚度 $h/d \simeq 10$ 下的数值 θ_{stop}（h/d），对于不同的 θ [，该厚度均保持近似恒定，见图 4(b)]。这一观察结果与图 2 一致：当 $\theta = 24°$ 和 $\chi = 0$时，若 $h/d \simeq 10$ ，流动就会停止。随着柱体密度增加，阈值角向较大值偏移；柱体密度最高时（$\chi = 1.00$ cm^{-2}），阈值角约为 $30°$ 。请注意，流量的增加主要是由流速增加所致，因为对于每个 χ [值，在整个坡角范围 θ 内，流动层厚度都近似恒定，见图 4(b)]。

对于沿粗糙斜面下流、且没有柱体阵列（$\chi = 0$）的颗粒流，观测发现，平均速度 U 经（gh）$^{1/2}$ 归一化后，与经停止厚度 h_{stop} [4, 8, 29]归一化的厚度 h 呈线性标度关系。这意味着，无量纲流量 $\tilde{Q}$ 应按 $h^{5/2}/$（h_{stop} $d^{3/2}$）标度变化。将这一标度关系与我们的数据（图 5）进行检验后，我们发现，针对 $\chi = 0$ 获得的不同组数据很好地遵循了这一标度关系，其数值系数为 0.14；Pouliquen [4] 在底部铺有胶粘玻璃珠的条件下研究流动玻璃珠时也得到了这一数值系数。然而，这些数据

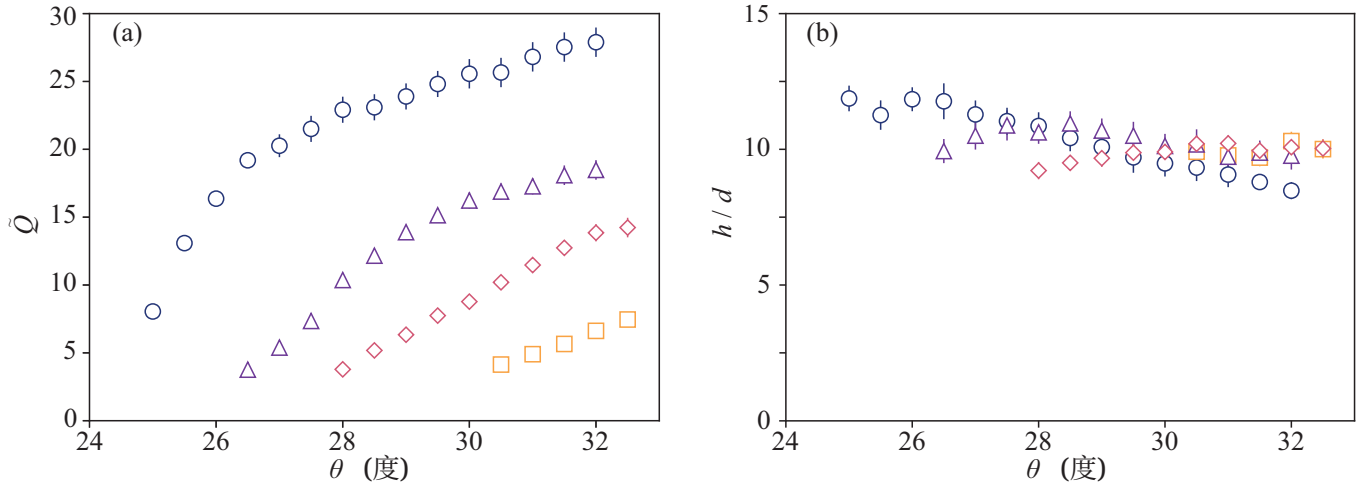

图 4. (a) 归一化稳态流量 $\tilde{Q} = \langle Q \rangle / \rho W g^{1/2} d^{3/2}$ 和 (b) 归一化层厚 h/d随坡角 θ 的变化，对应不同的柱体密度（○） $\chi = 0$ 厘米$^{-2}$，（△） $\chi = 0.25$ 厘米$^{-2}$，（◇） $\chi = 0.51$ 厘米$^{-2}$，以及（□） $\chi = 1.00$ 厘米$^{-2}$。

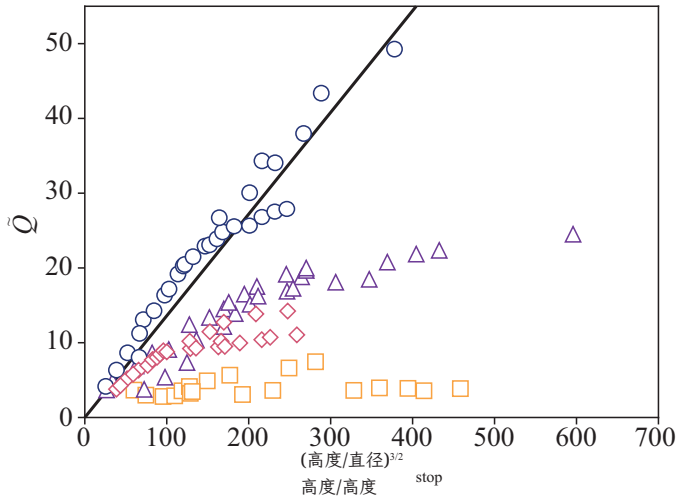

图 5. 归一化稳态流量 $\tilde{Q} = \langle Q \rangle / \rho W g^{1/2} d^{3/2}$ 随归一化厚度（h/d）$^{3/2}$ h/h_{stop}（χ）对应不同的柱体密度（○） $\chi = 0$ 厘米$^{-2}$，（△） $\chi = 0.25$ 厘米$^{-2}$，（◇） $\chi = 0.51$ 厘米$^{-2}$，以及（□） $\chi = 1.00$ 厘米$^{-2}$。实线表示 Pouliquen 针对玻璃珠在无柱体斜坡上流动提出的斜率为 0.14 的线性趋势。 [4]

与柱体阵列（$\chi \neq 0$）对应的数据组并不遵循这一标度关系；或者说，随着 χ 增大，标度关系的斜率显著减小。下一节将介绍一个模型，用以解释这些结果。

III. 模型

现在，我们采用深度平均方法，通过考虑 μ（I）流变关系 [7]，对重力 g 驱动的沿斜坡向下的颗粒流进行建模。该流变关系将颗粒介质的摩擦系数 μ（定义为剪切应力与法向应力之比 P）与惯性数联系起来，惯性数定义为 $I = \dot{\gamma}\, d/\sqrt{P/\rho_g}$，其中 $\dot{\gamma}$ 是流动的剪切速率。在深度平均近似下，颗粒层的一薄片受到自身重力和由 μ（I）流变关系决定的底部摩擦；在稳态下，这两个力相互平衡 [29]。在稳态下，对一片厚度为 h 、长度和宽度均为单位值的颗粒层进行力平衡，可写为

$$\rho g h \sin\theta - \mu_b(I_b)\rho g h \cos\theta = 0, \tag{2}$$

其中，底部摩擦系数 μ_b 仅是颗粒层底部计算所得惯性数 I_b 的函数。对于颗粒层中的 Bagnold 速度剖面，底部剪切速率 $\dot{\gamma}_b$ 与平均流速

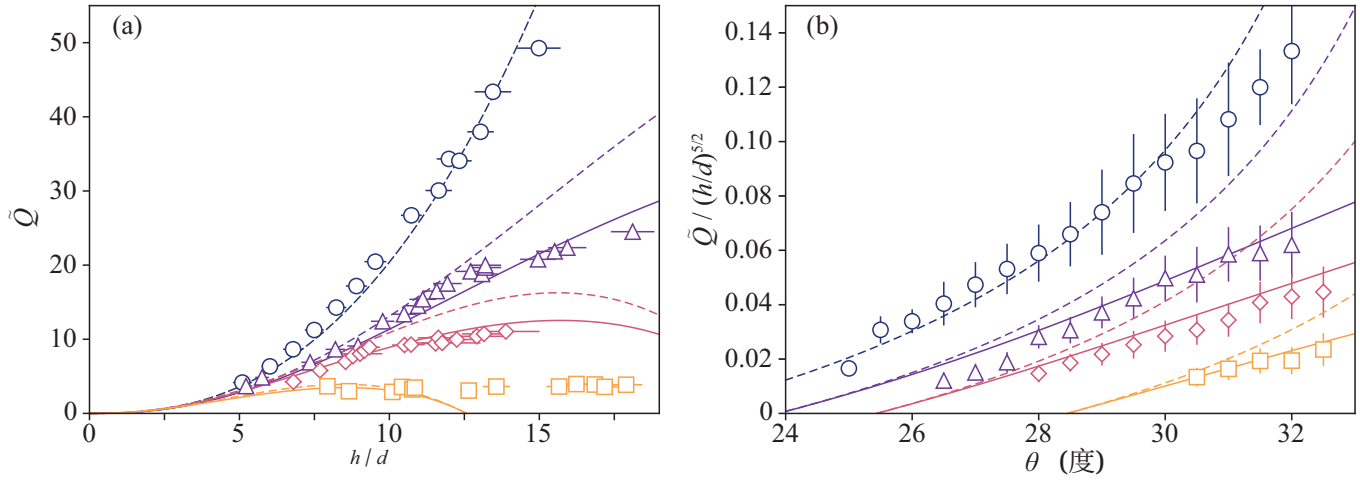

图 6. (a) 在给定坡角 $\theta = 29.5°$ 时，归一化稳态流量 $\tilde{Q} = \langle Q\rangle/\rho W g^{1/2} d^{3/2}$ 随归一化层厚 h/d 的变化。(b) 归一化稳态流量 $\tilde{Q}$ 除以 $(h/d)^{5/2}$ 后随坡角 θ 的变化。数据与图 3(b) 和图 4 相同。虚线表示根据方程 (7) 得出的各柱体密度下的非惯性预测 ($C_d = 0$)，其中 $I_0 = 0.35$ 和 $\beta = 1.5$。实线表示方程 (6) 的惯性数值解，其中 $\beta = 1.5$ 和 $C_d = 3$。

$U = \langle Q\rangle/\rho W h$ 之间满足关系式 $\dot{\gamma}_b = 5U/2h$。考虑到颗粒层底部的压力为 $P = \rho g h \cos\theta$，可得该处的惯性数为 $I_b(h, U) = 5\,U\,d/2\sqrt{\phi g h^3}\cos\theta$。在不同流动构型下获得的实验结果，使得人们能够建立底部摩擦系数与流动参数之间关系的表达式

$$\mu_b(I_b) = \tan\theta_1 + \frac{\tan\theta_2 - \tan\theta_1}{1 + I_0/I_b}, \tag{3}$$

其中，I_0 是特征惯性数，超过该值后，摩擦系数会从 $\tan\theta_1$ 增加至 $\tan\theta_2$ [8]。注意，I_0 可视为以颗粒直径为尺度的特征长度的倒数，并取决于颗粒材料和床面粗糙度 [30]。将方程 (3) 中的摩擦定律代入方程 (2)，可得无柱体时归一化流量的预测：

$$\tilde{Q}(h, \theta) = \frac{2I_0}{5}\frac{\tan\theta - \tan\theta_1}{\tan\theta_2 - \tan\theta}\sqrt{\phi\cos\theta}\left(\frac{h}{d}\right)^{5/2}. \tag{4}$$

为了将这一经典预测与我们在没有柱体的情况下（$\chi = 0$）所做的观测进行比较，我们分别在图 6(a) 中展示归一化流量 $\tilde{Q} = \langle Q\rangle/\rho W g^{1/2} d^{3/2}$ 随 h/d 变化的关系（对应 $\theta = 29.5°$），以及在图 6(b) 中展示归一化流量 $\tilde{Q}$ 除以（h/d）$^{5/2}$ 后随 θ 变化的关系。图中的蓝线表示根据式（4）对数据进行的最佳拟合，其中采用了此前确定的角度值 θ_1 和 θ_2（第 II B 节），并将 I_0 作为自由参数。最佳拟合对应的 $I_0 = 0.35$ 与此前对玻璃珠所作的估算（$I_0 \simeq 0.28 - 0.30$）[6, 7]相当一致。该模型对图 6(a) 中实验数据的拟合相当好，这意味着无量纲流量 $\tilde{Q}$ 遵循预期的幂律标度关系（h/d）$^{5/2}$。对于中等坡角 θ，该模型对图 6(b) 中的数据˜也拟合得很好，但似乎会高估 Q（当 $\theta \gtrsim 30°$时）。请注意，对于介于 θ_1 和 θ_2之间的给定坡角，该模型预测当厚度 h 趋于零时，稳态流动会消失，却无法预测流动在 $h_{\rm stop}$时停止。这是 $\mu(I)$ 流变学的一个已知缺陷，因为这种局部方法无法捕捉颗粒物质复杂的液固转变 [8]。

随后，我们建立一个模型，以阐明柱体对颗粒流的影响。需要注意的是，仅考虑 $\mu(I)$ 流变关系的不同参数，无法建立令人满意的模型。事实上，这种方法无法捕捉流量对层厚和坡角依赖关系的变化。因此，我们在模型中引入一个新的因素，即柱体施加在颗粒层上的力。单个浸没在颗粒流中的柱体所受的力取决于流动状态，而流动状态由弗劳德数 $\mathrm{Fr} = U/\sqrt{gh\cos\theta}$ 确定，该数值基于平均流速 U 和层厚 h [31]。在弗劳德数较小的极限（$\mathrm{Fr} \ll 1$）下，阻力来源于作用在柱体暴露表面 $h\,D$ 上的类静水压力 $\rho g z\cos\theta$，其表达式为 $f_h = \beta\rho g h^2 D\cos\theta$，其中 β 是数值前因子 [32]。在相反的弗劳德数较大极限（$\mathrm{Fr} \gg 1$）下，阻力来源于惯性，表达式为 $f_i = C_d\,\rho\,h D\,U^2$，

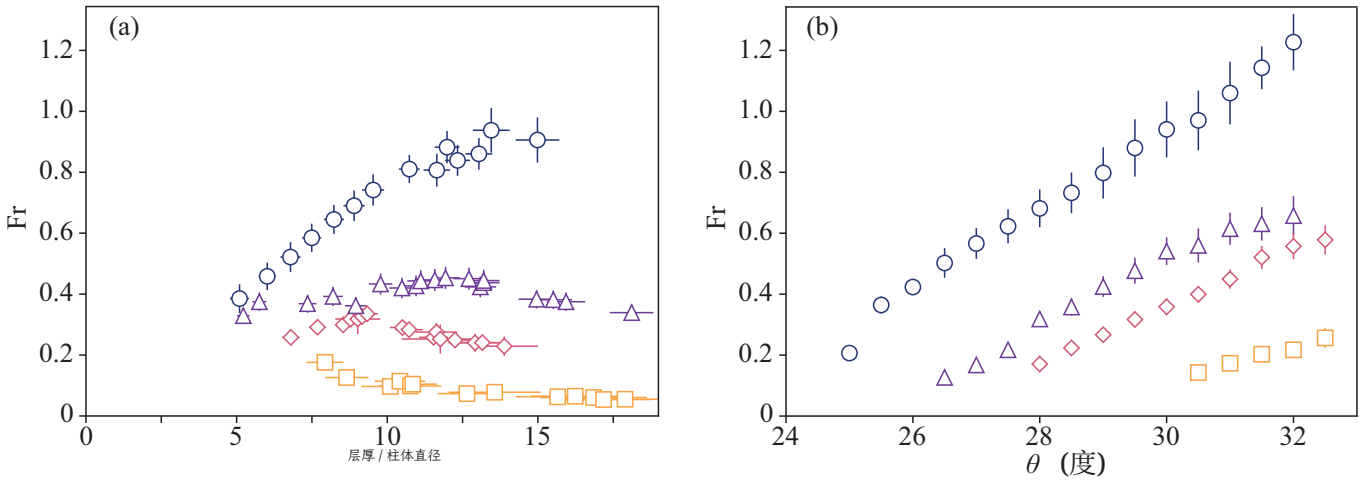

图 7. 弗劳德数 Fr 随以下参数变化：(a) 归一化层厚 h/d 和 (b) 坡角 θ，对应四种不同的柱体密度（○） $\chi = 0$ 厘米$^{-2}$，（△） $\chi = 0.25$ 厘米$^{-2}$，（◇） $\chi = 0.51$ 厘米$^{-2}$，以及（□） $\chi = 1.00$ 厘米$^{-2}$。

其中 C_d 是无量纲阻力系数。弗劳德数 Fr 随 h/d 和 θ变化的情况分别如图 7(a) 和 7(b) 所示。只有少数 Fr 值略大于 1，且所有对应于柱体阵列（$\chi \neq 0$）的情况的 Fr 值均小于 0.7。在此范围内，阻力预计主要对应于准静态力项，惯性作用较小。这意味着我们的模型必须同时考虑阻力的两种贡献。为简便起见，我们认为过渡区间内的合力等于两个极限项之和 $f_h + f_i$。这种粗略的建模方法已被用于相当准确地再现力随 Fr 的变化 [31]，，并能正确预测物体撞击颗粒材料时的动力学过程 [33, 34]。为了考虑多个柱体的影响，我们假设柱体之间没有相互作用，并且柱体对颗粒层施加的各个力之和，等效于作用于整个颗粒层的单位面积合力，因此可简单写为（$f_h + f_i$）χ。事实上，实验研究了圆柱形障碍物附近形成的颗粒流，结果表明，速度扰动在大约一个圆柱体直径的距离处消失 [35]。在我们的实验中，柱体之间的最小距离（$\Delta = 10$ mm）远大于柱体直径（$D = 2$ mm），因此预计柱体之间不会发生相互作用。在这些近似条件下，存在柱体时颗粒层薄片的力平衡变为

$$\rho g h \sin\theta - \mu_b(U,h)\rho g h \cos\theta - \beta \rho g \chi h^2 D \cos\theta - C_d \rho \chi h D\, U^2 = 0, \tag{5}$$

可将其写成无量纲形式：

$$\tan\theta - \mu_b(U,h) - \beta\chi h D - C_d \frac{\chi D\, U^2}{g\cos\theta} = 0. \tag{6}$$

˜求解方程（6）可得平均流速 U（或等价地，归一化流量 Q）与问题相关参数（h、 θ、 χ、.....）之间的关系。注意，在 $\chi \to 0$ 的极限情况下，方程（5）可导出方程（2），从而得到标准 $\mu(I)$ 流变学的预测。在 $C_d = 0$ 的特殊情形下，可以求得方程（6）关于归一化流量 Q 的简单解析˜解：

$$\tilde{Q} = \frac{2I_0}{5} \frac{\tan\theta - \tan\theta_1 - \beta\chi h D}{\tan\theta_2 + \beta\chi h D - \tan\theta} \sqrt{\phi\cos\theta} \left(\frac{h}{d}\right)^{5/2}. \tag{7}$$

在惯性阻力趋于零的极限（$C_d = 0$）下，对应于足够低的 Fr，式（7）预测，柱体的存在˜会通过将两个摩擦系数 $\mu_1 = \tan\theta_1$ 和 $\mu_2 = \tan\theta_2$（对应于没有柱体的倾斜平面）都偏移一个量 $\beta\chi h D$，从而改变排放流量曲线 $Q(h,\theta)$。该偏移量与柱体密度 χ及其暴露于流动中的表面积 hD 成正比。在给定角度下，这一修正会减缓流量随 h 增大的趋势，与图3所示的观测结果定性一致。对于流动层，式（7）预测的 $\tan\theta_2$ 偏移，与停止层情况下观察到 $\tan\theta_2$ 不随 χ 变化的事实形成对比（如第 II B 节所述）。这种差异可以从颗粒层与底壁及柱体之间的摩擦竞争来理解：事实上，当 θ 趋近于 θ_2时，停止

颗粒层的厚度必然可忽略，其行为由与底壁的摩擦主导（$\beta\chi h_{\mathrm{stop}}D \ll \mu_b$）；而对于厚度较大的流动层，柱体的阻力则不可再忽略（$\beta\chi hD \sim \mu_b$）。为了将式（7）的预测与我们的数据进行定量比较，我们采用了无柱体时确定的参数 $\tan\theta_1$、$\tan\theta_2$和 I_0的取值，并将力系数 β 作为自由参数。实验数据的最佳拟合表明，$\beta = 1.5 \pm 0.1$时与式（7）的预测最为吻合；图6(a)和图6(b)中的虚线展示了本文所研究的所有柱体密度下的拟合结果。非惯性模型的预测捕捉到了数据的主要趋势，即颗粒流随柱体密度增加而减弱。尽管如此，假设惯性阻力为零（$C_d = 0$）过于强烈，无法细致地解释我们的实验观测，尤其是图6(b)所示无量纲流量 Q 随坡角 θ 的变化。

现在我们考虑计入惯性贡献的普遍情形（$C_d \neq 0$）。为简单起见，我们不明确写出方程（6）的解析解，而是给出其数值解。为了将这些预测与观测结果进行比较，我们采用无柱体时确定的参数值 I_0、$\tan\theta_1$和 $\tan\theta_2$，并将两个力系数 β和 C_d作为自由参数进行调整，以使实验结果与理论达到最佳拟合。最佳拟合对应于 $\beta = 1.5 \pm 0.1$ 和 $C_d = 3 \pm 1$，并以实线绘于图 6(a) 和图 6(b) 中。计入柱体阻力的惯性贡献后，理论与实验的吻合程度大为提高，尤其是归一化流量随坡角变化的关系。我们的准静态系数 $\beta \simeq 1.5$与 Albert 等人 [32] 在物体尺寸远大于颗粒直径（$D/d > 3$）的极限情况下得到的数值$\beta = 2.4$ 相当接近。这两个数值之间的差异仍处于准静态颗粒流相关力系数通常的误差范围内 [31]。至于阻力系数，我们得到的数值 $C_d \simeq 3$ 与 Faug [31]报告的范围 $C_d = 3 \pm 2$ 非常吻合。柱体上的惯性阻力与准静态阻力之比可写为 $f_i/f_h = (C_d/\beta)\,\mathrm{Fr}^2$。由于 $C_d/\beta \simeq 2$，预计这两种状态之间的转变发生在临界弗劳德数 $\mathrm{Fr}_c = (\beta/C_d)^{1/2} \simeq 0.7$附近。这证实了我们在柱体阵列（$\chi \neq 0$）中获得的数据对应于带有少量惯性的准静态状态。然而，本文建立的模型有一个主要局限：它预测厚层颗粒流在 $\theta = 29.5^\circ$ 时会被最大柱体密度阻停，其中 $h/d \gtrsim 12.5$ （见图 6(a) 中对应于 $\chi = 1.00\ \mathrm{cm}^{-2}$的橙色实线），但我们的实验并未观察到这一现象。这种差异凸显了空间平均假设的局限性。实际上，柱体的影响范围有限，无法阻止其作用范围之外的流动；平均假设并未考虑这一行为。

IV. 讨论

在惯性趋于零的极限（$C_d \simeq 0$ 当 $\mathrm{Fr} \ll 1$）下建立的模型表明，对于层厚为 $\beta\chi hD$ 的稳态流动，柱体的存在可通过参数 h加以考虑。该参数与 h成正比，在给定坡角 h 以及给定密度的柱体阵列 θ 条件下，χ越大，流量的降低越明显。请注意，停止厚度 h_{stop} 被发现通过参数 χ 取决于 $\alpha\chi Dd$ [图 2(b) 的插图]。将 $\tan(\theta_1(\chi))$ 的线性变化与惯性趋于零时的式（6） U 相结合，可以在考虑 $h_{\mathrm{stop}}/d = \alpha/\beta \simeq 6$ 和 $\alpha \simeq 10$ 的情况下估算停止厚度 $\beta \simeq 1.5$。该估算值与我们的数据相当吻合，因为在 $h/d \lesssim 5$ [图 3(b) 和图 6(a)]中，我们未观察到任何稳态流动。根据式（7），当参数 $\beta\chi hD$ 与 $\tan\theta - \tan\theta_1$或 $\tan\theta_2 - \tan\theta$处于同一量级时，柱体阵列对颗粒流流量的影响十分显著。在中间情形下，其中 $\theta = (\theta_1 + \theta_2)/2$，我们有 $\tan\theta - \tan\theta_1 = \tan\theta_2 - \tan\theta = 0.17$；当柱体密度达到临界值 $\chi_c \simeq 0.02/hD$时，由柱体存在所产生的项等于该值的五分之一。在这些条件下，根据式（7），预计柱体的存在会使质量流率降低至原来的三分之二。在此前研究的装置中，柱体直径为 $D = 2$ mm，层厚约为 5 mm；当柱体密度高于 $\chi_c = 0.2\ \mathrm{cm}^{-2}$时，柱体的存在将显著影响流量。将同样的考虑应用于穿过森林的颗粒材料雪崩（典型值为 $h \sim 1$ m 和 $D \sim 0.2$ m），则临界障碍物密度应为 $0.1\ \mathrm{m}^{-2}$，相当于每 3 m 有一棵树。

本文探讨了圆柱体阵列对沿斜坡向下稳态流动的颗粒流的影响。这项实验为利用障碍物丛林实现地球物理流动减灾提供了一个范例。除了降低颗粒流流量外，柱体的存在还显著改变了流量对颗粒层厚度的依赖关系，即排放流量曲线。我们采用基于深度平均方法和 $\mu(I)$ 流变学的模型，描述柱体阵列对颗粒流产生的复杂影响。该模型通过作用于颗粒层的平均力纳入柱体的影响，同时忽略柱体间相互作用。事实证明，这种方法能够定量预测柱体存在所导致的颗粒流流量降低。它可用于确定显著降低颗粒流所携带能量所需的最小柱体密度

。这些结果证明， $\mu(I)$ 流变学可用于描述非单向颗粒流，例如本文研究的这种流动。不过，模型预测与实验结果之间仍存在一些差异，这应促使未来的研究放宽平均近似，并探究柱体间隙中的颗粒流。事实上，圆柱体周围颗粒流的速度场及颗粒温度场已得到表征，而且已证明二者均局限于局部 [35, 36]；但若能进一步研究这些场在含多个障碍物的倾斜平面上的变化，将会很有意义。最后，本文提出了若干问题，例如颗粒尺寸与柱体直径之间的关系，以及柱体排列对流动的影响。尽管已有研究证实，对于无柱平面，所提出的标度律适用于不同颗粒尺寸，但若能在柱林情形下验证这些结果，也会很有意义。此外，可以考虑在倾斜平面上随机分布柱体，这或许更接近自然界中的情形，并会使颗粒流产生局部堵塞和优先通道。

致谢

我们感谢 P. Jenffer 和 G. Marteau 对实验装置的设计与实现所作出的贡献，并感谢 J. Amarni、A. Aubertin、L. Auffray、C. Manquest 和 R. Pidoux 提供的技术支持。本研究得到 ANR PIA 资助，项目编号为 ANR-20-IDEES-0002。

[1] P. Coussot 和 S. Boyer, 《流变学学报》34, 534 (1995)。 [2] C. Bonnoit、T. Darnige、E. Clement 和 A. Lindner, 《流变学杂志》54, 65 (2010)。 [3] GDR MiDi, 《欧洲物理学杂志E辑》14, 341 (2004)。 [4] O. Pouliquen, 《流体物理学》11, 542 (1999)。 [5] A. Daerr 和 S. Douady, 《自然》399, 241 (1999)。 [6] P. Jop、Y. Forterre 和 O. Pouliquen, 《自然》441, 727 (2006)。 [7] Y. Forterre 和 O. Pouliquen, 《流体力学年度评论》40, 1 (2008)。 [8] B. Andreotti、Y. Forterre 和 O. Pouliquen, 《颗粒介质：流体与固体之间》（剑桥大学出版社，2013）。 [9] T. Barker、D. G. Schaeffer、P. Boh´orquez 和 J. Gray, 《流体力学杂志》779, 794 (2015)。 [10] L. Lacaze 和 R. R. Kerswell, 《物理评论快报》102, 108305 (2009)。 [11] P.-Y. Lagr´ee、L. Staron 和 S. Popinet, 《流体力学杂志》686, 378 (2011)。 [12] A. Seguin、A. Lefebvre-Lepot、S. Faure 和 P. Gondret, 《欧洲物理学杂志E辑》39, 1 (2016)。 [13] N. Gaudel、S. K. de Richter、N. Louvet、M. Jenny 和 S. Skali-Lami, 《物理评论E辑》94, 032904 (2016)。 [14] N. Gaudel 和 S. Kiesgen de Richter, 《粉末技术》346, 256 (2019)。 [15] R. Delannay、A. Valance、A. Mangeney、O. Roche 和 P. Richard, 《物理学杂志D：应用物理》50, 053001 (2017)。 [16] T. Feistl、P. Bebi、M. Teich、Y. B¨uhler、M. Christen、K. Thuro 和 P. Bartelt, 《冰川学杂志》60, 124 (2014)。 [17] M. Teich、J.-T. Fischer、T. Feistl、P. Bebi、M. Christen 和 A. Grˆet-Regamey, 《自然灾害与地球系统科学》14, 2233 (2014)。 [18] K. Yan、J. He、Q. Cheng、J. Zhang 和 R. Fuentes, 《滑坡》18, 1761 (2021)。 [19] L. V´edrine、X. Li 和 J. Gaume, 《自然灾害与地球系统科学》22, 1015 (2022)。 [20] Z. Liang、C. E. Choi、Y. Zhao、Y. Jiang 和 J. Choo, 《计算岩土工程》155, 105194 (2023)。 [21] T. Faug、R. Beguin 和 B. Chanut, 《物理评论E辑》80, 021305 (2009)。 [22] X. Cui 和 J. M. N. T. Gray, 《流体力学杂志》720, 314 (2013)。 [23] J. Benito、Y. Bertho、I. Ippolito 和 P. Gondret, 《欧洲物理快报》100, 34004 (2012)。 [24] T. H. Luong、J. L. Baker 和 I. Einav, 《颗粒物质》22, 1 (2020)。 [25] I. Zuriguel、A. Garcimart´ın、D. Maza、L. A. Pugnaloni 和 J. Pastor, 《物理评论E辑》71, 051303 (2005)。 [26] L. Bruno、A. Calvo 和 I. Ippolito, 《欧洲物理学杂志E辑》11, 131 (2003)。 [27] J. G. Benito、G. Meglio、I. Ippolito、M. Re 和 A. M. Vidales, 《颗粒物质》9, 159 (2007)。 [28] Y. Bertho、F. Giorgiutti-Dauphin´e 和 J.-P. Hulin, 《物理评论快报》90, 144301 (2003)。 [29] Y. Forterre 和 O. Pouliquen, 《流体力学杂志》486, 21 (2003)。 [30] J. Gray 和 A. Edwards, 《流体力学杂志》755, 503 (2014)。 [31] T. Faug, 《欧洲物理学杂志E辑》38, 1 (2015)。 [32] R. Albert、M. A. Pfeifer、A.-L. Barab´asi 和 P. Schiffer, 《物理评论快报》82, 205 (1999)。 [33] A. Seguin、Y. Bertho、P. Gondret 和 J. Crassous, 《欧洲物理快报》88, 44002 (2009)。 [34] H. Katsuragi 和 D. J. Durian, 《物理评论E辑》87, 052208 (2013)。 [35] A. Seguin、Y. Bertho、P. Gondret 和 J. Crassous, 《物理评论快报》107, 048001 (2011)。 [36] A. Seguin、Y. Bertho、F. Martinez、J. Crassous 和 P. Gondret, 《物理评论E辑》87, 012201 (2013)。