arXiv:2303.01657v1 [math.OC] 3 Mar 2023

An O分散化收益投资组合的优化研究 OS

ChaoDing* 和 Hou-Duo Qi†

2023年3月6日

摘要

Booth 和 Fama 于20世纪90年代提出了分散化收益（DR）的概念，金融文献已对此进行了深入研究，主要聚焦于其可能产生的各种来源。然而，与马科维茨经典的均值-方差（MV）模型不同，DR投资组合缺乏优化理论来证明其通常出色的实证表现。在本文中，我们首先从投资组合中心性的角度解释DR准则试图实现什么。这一解释的一个结果是，实践中施加的范数约束实际上隐含地强制了对DR的约束。随后，我们在给定风险下推导出最大DR投资组合，并获得有效DR前沿。我们进一步针对该前沿提出了一个分离定理，并建立了DR前沿与马科维茨均值-方差有效前沿之间的关系。在标的资产的方差向量与预期收益向量成比例的特殊情况下，这两个前沿产生相同的有效组合。证明技术在很大程度上依赖于近期提出的最大DR投资组合的几何解释。最后，我们使用DAX30股票数据来说明所得结果，并展示其与 Choueifaty 和 Coignard 所研究的最大分散化比率投资组合之间一个有趣的联系。

关键词： 分散化收益，有效前沿，分离定理，欧几里得距离矩阵，投资组合中心性，风险—收益图。

1 引言

投资组合的分散化收益（DR）最初由 Booth 和 Fama [1]进行研究。其主要目的是了解，与组成资产按权重简单加权的收益相比，投资组合能够实现多大的超额收益率。Booth 和 Fama [1] 通过复合收益推导出 DR，而 Willenbrock [32]则使用几何收益。近期，Maseso 和 Martellini [21] 从随机投资组合理论出发推导了 DR，并将其称为超额增长率。金融文献已广泛讨论 DR 的概念及其与其他分散化概念的关系，参见 [10,17, 27, 4, 7, 23, 20]及其中的参考文献。尤其是， [21] 报告的大量实证结果表明，最大化投资组合的 DR 可能带来强劲的样本外表现，因此在某些市场条件下可成为具有竞争力的投资组合构建策略。然而，与马科维茨均值-方差模型相比，DR投资组合缺乏最优性理论，难以深入理解其出色表现。本文旨在对 DR投资组合开展系统的理论研究，并将最优分散化收益组合与均值-方差模型的有效前沿联系起来。我们还将通过 DAX30 指数投资组合说明研究结果。

*中国科学院应用数学研究所，中国北京。电子邮箱：dingchao@amss.ac.cn。

†香港理工大学应用数学系，中国香港。电子邮箱：houduo.qi@polyu.edu.hk。

为了引出我们的研究，我们先来考虑现代投资组合理论 [9] 中关于均值-方差（MV）模型的三项基本结果；这些结果已成为教科书中的标准内容。第一项结果是**有效前沿**（EF），即在以标准差为参数的模型中收益最大的投资组合所构成的前沿。EF 从最小方差投资组合（MVP）开始，在标准差与收益空间中形成一条平滑的凹曲线。第二项结果是**分离定理**，它指出，EF 上的任意投资组合都可以由任意两个有效组合表示。例如，最小方差投资组合和切点投资组合就足以构成整个 EF。最后一项结果是**资本市场线**（CML），它适用于存在可供投资的无风险资产的情形。CML 可实现最大的夏普比率。此外，为了提升均值-方差模型的表现，通常会在模型中加入对投资组合权重的各种约束，参见 [19, 8]。

鉴于分散化收益是一种收益，我们可以沿投资组合的标准差参数化，寻找其最高分散化收益。具体而言，我们得出以下结果。

(i) 以标准差为参数的最高分散化收益投资组合，在标准差与分散化收益构成的空间中形成一条凹且光滑的曲线，该空间记为（σ， q）空间，其中 $q(\mathbf{w})$ 表示投资组合 $\mathbf{w}$ 的分散化收益（见定义 1）。我们将这条曲线称为有效DR前沿。此凹性与均值—方差模型在标准差与预期收益空间中的有效前沿的凹性十分相似。其显著特点是，有效分散化收益曲线具有强凹性。因此，该曲线上的最高分散化收益对应于备受研究的最大分散化收益投资组合（MDRP）。

(ii) 此外，还存在一个分离定理：任何有效分散化收益投资组合，都是以下两个投资组合的简单凸组合：最小方差投资组合和最大分散化收益投资组合。从DR原则（投资组合的分散化收益越高越好）的角度来看，MDRP之外的任何投资组合都应被舍弃，因为它们的分散化收益较低、风险却更高。这一切都源于有效分散化收益曲线的强凹性。

(iii) 当存在无风险资产时，有效DR前沿会变成标准抛物线，并且仍然是严格凹的。这意味着，在（σ， q）空间中，不存在类似于资本市场线的直线。

此外，我们还研究了将均值—方差有效组合置于（σ， q）空间中时的形态。我们将由此得到的曲线称为MV有效投资组合的DR曲线。结果表明，在某些条件下，该曲线也具有严格凹性。在这种情况下，该曲线上存在分散化收益最高的投资组合，称为Q投资组合。值得注意的是，Q投资组合的风险必定低于MDRP。正是这一特性使Q投资组合具有实用价值，否则MDRP会更受青睐。我们将在数值部分看到，Q投资组合属于一类表现接近市场投资组合的投资组合。当所有资产的方差向量都与其预期收益率向量成比例时，有效分散化收益曲线与有效投资组合的DR曲线将重合。因此，Q投资组合便成为MDRP。

部分结果，尤其是分离定理，很大程度上依赖于近期在 [26], 中研究的 DR投资组合 的新几何解释；该研究引入了投资组合中心性这一概念，记作 $c(\mathbf{w})$。本文建立了一个重要的恒等式

$$q(\mathbf{w}) + c^2(\mathbf{w}) = q_{\max}, \quad \text{for any portfolio } \mathbf{w}, \tag{1}$$

其中， $q_{\max}$ 是 MDRP 所实现的分散化收益。这种毕达哥拉斯式关系再次证实，分散化收益的概念是欧几里得的。借助能量守恒的类比，我们可以认为投资范围内的总能量恒定为 $q_{\max}$ ，而势能 c^2（$\mathbf{w}$）

与动能 q（$\mathbf{w}$）可以相互转换。在我们的情形中， q（$\mathbf{w}$）可能为负。当 c^2（$\mathbf{w}$ 大于 $q_{\max}$ 时，就会出现这种情况。图1展示了这种可能性。

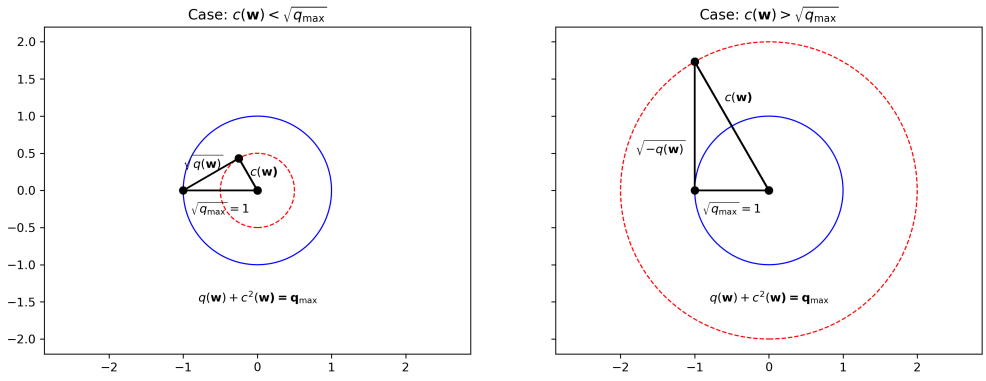


图1： c^2(w)与 q(w)之间的毕达哥拉斯式关系：总和为常数。蓝色圆圈表示MDRP的嵌入球面，原点即为MDRP（详情见定理3）。其半径为$\sqrt{q_{\max}}$，在此图示中为1。红色圆圈表示中心性 c(w)相同的投资组合。当红色圆圈位于蓝色圆圈内部时，斜边的长度为 $\sqrt{q_{\max}}$。否则，直角三角形斜边的长度为 c(w)。

此外，中心性与w的加权范数相关。投资组合的分散化收益与其加权范数之间的这一联系，揭示了基于分散化收益的投资组合的新视角。换言之，范数加权投资组合 [8, 13] 隐含地对分散化收益施加了条件。因此，备受研究的范数正则化投资组合 [8, 13]为系统研究最优分散化收益组合提供了另一个有力动机，这与 [21]中关于MDRP的实证研究相呼应。

Choueufaty and Coignard 的最大分散化比率投资组合（MDP） [6], 是若干富时100产品背后的基础 [3], ，经常与 MDRP 混淆（两者名称非常相似）。事实上，它们密切相关。对于仅做多情形（投资组合权重非负），两种投资组合的目标函数之差可以得到定量界定，而且该差距可能很小。数值部分对此进行了很好的说明，其中 MDP 被证明是聚类投资组合之一。

本文组织如下。下一节将正式介绍投资组合的分散化收益（DR），并给出将 DR 与投资组合的中心性联系起来的新刻画（1），见命题5。第3节研究给定风险水平下最有效的分散化收益投资组合，并将有效分散化收益曲线刻画为强凹函数，见命题7。我们进一步证明分离定理（定理9）：有效分散化收益曲线上的任一投资组合都可以表示为最小方差投资组合（MVP）与最大分散化比率投资组合（MDRP）的简单混合。第4节研究马科维茨有效投资组合的分散化收益表示，并刻画其与有效分散化收益曲线之间的关系。该关系以图 3 的形式直观表示，与均值-方差模型中有效前沿的经典图形表示非常相似。我们还将这一比较研究扩展到包含无风险资产的情形。第5节展示 DAX30 指数股票的分散化收益投资组合的行为。本文在第6节总结全文。

记号： 本文中，粗体小写字母表示列向量。例如，$\mathbf{w} \in \Re^n$ 是维度为 n 的列向量。其转置 $\mathbf{w}^\top$ 是行向量。设 V 表示 n 项资产收益率的协方差矩阵。设 η 表示其对角（列）向量

V，即 $\eta := \mathrm{diag}(V)$，其中":="表示"定义"。根据 V，我们定义一个新的矩阵：

$$D := \frac{1}{2}\Big(\eta^\top \mathbf{1}_n + \mathbf{1}_n \eta^\top\Big) - V,$$

其中， $\mathbf{1}_n$ 是维度为 n的全 1 列向量。 $n \times n$ 恒等矩阵记为 I_n。我们将在下一节看到， D 的性质在我们的分析中发挥着重要作用。当 V 非奇异时，根据 [26, 引理 2.3]， D 也非奇异。在这种情况下，我们用wmvp表示最小方差投资组合

$$\mathbf{w}_{\mathrm{mvp}} := \frac{V^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n} \quad \text{and} \quad \sigma^2_{\mathrm{mvp}} = \frac{1}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n},$$

whe其中， σ^2mvp是最小方差投资组合的方差。全文中， $\|\cdot\|$ 表示欧几里得范数 .

2 分散化收益的新视角

首先回顾投资组合的分散化收益的定义。

定义 1 *[1]* 假设有 n 项资产，其收益率的协方差矩阵记为 V。满足预算约束 $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1$ 的投资组合的分散化收益定义为

$$q_V(\mathbf{w}) := \frac{1}{2}\Big(\eta^\top \mathbf{w} - \mathbf{w}^\top V \mathbf{w}\Big) \qquad with \;\; \eta := diag(V).$$

为简洁起见，我们通常省略 q 对 V 的依赖关系。

换言之，分散化收益是投资组合中资产的加权平均方差与投资组合方差之差的一半，另见 [21, 式（9）]。我们注意到，分散化收益定义中的因子 $1/2$ 非常重要。从数学上看，它源于投资组合预期收益的二阶泰勒展开，见 [1]。

在这一部分，我们解释一个关于分散化收益的特殊现象。投资组合的不同表示方式可能具有不同的分散化收益，具体取决于投资组合如何分解。随后，我们推导出一个将投资组合的中心性与其分散化收益联系起来的恒等式。该恒等式将解释分散化收益为何以及如何可能为负。

2.1 规模问题

让我们通过一个例子来说明这样一个事实：投资组合的分散化收益取决于其中包含多少项资产。

例2 假设我们有两项相互独立的风险资产 S_1 和 S_2，其协方差矩阵为单位矩阵。假设还有一项无风险资产 S_0。我们考虑一个投资组合 $\mathbf{w}_m$：$=(1/2, 1/4, 1/4)^\top$ ，将财富的50% 投资于 S_0 ，并分别将25% 投资于两项风险资产。三项资产的协方差矩阵为

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad with \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

投资组合的分散化收益为 $q_V(\mathbf{w}_m) = \frac{1}{2}(1/2 - 1/8) = \frac{3}{16}$。

现在考虑由两种风险资产构成的等权重投资组合w*ew* $= (1/2, 1/2)^\top$。其方差为 σ^2*ew* $= 1/2$。那么，投资组合$\mathbf{w}_m$ 可以视为将50% 投资于 S_0 ，并将50% 投资于w*ew*。

$\mathbf{w}_m$ 及其资产的协方差矩阵 S_0 与$\mathbf{w}ew$的新表示如下:

$$\mathbf{w}_m = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \frac{1}{2}\mathbf{w}ew \end{pmatrix}, \qquad \widetilde{V} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad and \quad \widetilde{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}.$$

那么，$\mathbf{w}_m$的分散化收益也可以计算为 $q_{\widetilde{V}}(\mathbf{w}_m) = \frac{1}{2}(1/4 - 1/8) = \frac{1}{16}$。 —

表面看来，例2中同一投资组合$\mathbf{w}_m$ 的两种不同分散化收益，是由于使用了两个不同的协方差矩阵。从深层来看，这是因为投资组合的分散化收益衡量的是投资组合的预期收益与通过其组成资产的预期收益进行二阶近似所得结果之间的差异。因此，组成资产的数量对于计算分散化收益至关重要。对于 $q_V(\mathbf{w}_m)$，其中有三项资产，而$q_{\widetilde{V}}(\mathbf{w}_m)$只使用了两项（一项是 S_0，另一项是$\mathbf{w}ew$）。因此，只有在确定了所涉及资产的数量之后，讨论分散化收益才有意义。

2.2 投资组合中心性

本部分介绍一个重要概念——投资组合中心性，并研究其与投资组合分散化收益之间的关系。对于任何满足预算约束$\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w}$ 的投资组合$\mathbf{w}$ ，其分散化收益可表示如下:

$$q(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^\top V \mathbf{w} = \frac{1}{2}\mathbf{w}^\top \underbrace{\left((\eta \mathbf{1}_n^\top + \mathbf{1}_n \eta^\top)/2 - V\right)}_{=D} \mathbf{w}$$

回顾一下， $\eta = \mathrm{diag}(V)$。这意味着 D 的对角线元素均为零，且其所有元素$D_{ij} \geq 0$。事实上， D 是欧几里得距离矩阵（EDM） [26, 引理2.2]。这意味着存在一组点$\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$，位于欧几里得空间 $\Re^k$ 中，对于某个 $k > 0$，使得

$$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|^2 = D_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

这些点称为 D 的嵌入点，因为它们两两之间的欧几里得距离平方可以还原 D中的元素。这一嵌入结果可追溯至 Schoenberg[29] 以及 Young 和 Householder [34]。显然，此类嵌入点有无穷多个，因为平移和旋转变换不会改变两两之间的距离。有一组特殊的嵌入点有助于刻画 MDRP。下面说明这些点的推导过程。

在 [26, 定理3.1], 中，证明了

$$\mathbf{w}_{\mathrm{mdrp}} = \frac{D^- \mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top D^- \mathbf{1}_n},$$

其中， D^- 可以取满足 $DD^-D = D$ 和 $D^-DD^- = D^-$的 D 的任意广义逆。也就是说，$\mathbf{w}$mdrp 不依赖于 D^-的选择。令

$$\mathbf{s} := \mathbf{w}_{\mathrm{mdrp}}, \quad J_{\mathbf{s}} := I_n - \mathbf{s}\mathbf{1}_n^\top \quad \text{and} \quad B := -\frac{1}{2} J_{\mathbf{s}}^\top D J_{\mathbf{s}}. \tag{2}$$

根据欧几里得距离矩阵 [15], 的理论，矩阵 B 是半正定的。设其具有如下谱分解:

$$B = [\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_k] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^\top \end{bmatrix}, \tag{3}$$

其中， $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k > 0$ 是 B 的正特征值，$\mathbf{p}_i \in \Re^n$ 是对应的正交归一特征向量。令

$$X := [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n] = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^\top \\ \vdots \\ \mathbf{p}_k^\top \end{bmatrix}. \tag{4}$$

那么， $B = X^\top X$和$\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$是 D的一组嵌入点。此外， [26]中证明了以下结论。

定理 3 *[26, 定理3.1]* 设 $q_{\max} := q(\mathbf{w}^{mdrp})$ 为 *MDRP* 的最大分散化收益。设嵌入点$\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$ 由 *(4)* 得出。那么， $q_{\max} = \frac{1}{2\mathbf{1}_n^\top D^{-}\mathbf{1}_n} > 0$ 以及这些嵌入点都位于以原点为球心、$\sqrt{q_{\max}}$ 为半径的球面上，即

$$\|\mathbf{x}_i\| = \sqrt{\frac{1}{2\mathbf{1}_n^\top D^{-}\mathbf{1}_n}} = \sqrt{q_{\max}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

此外，原点是嵌入点的s加权中心：

$$0 = s_1\mathbf{x}_1 + s_2\mathbf{x}_2 + \cdots + s_n\mathbf{x}_n \quad \textit{or equivalently} \quad X\mathbf{s} = 0.$$

从几何角度看，定理3意味着原点代表 MDRP。对于任何其他投资组合$\mathbf{w}$，嵌入点的$\mathbf{w}$加权中心都偏离原点。该中心与原点之间的距离衡量其与 MDRP 的差距。我们将这一距离称为投资组合中心性。

定义 4 （投资组合中心性）设矩阵 B 由 *(2)* 定义。对于给定的投资组合 $\mathbf{w}$，其中心性定义为

$$c(\mathbf{w}) := \sqrt{\mathbf{w}^\top B\mathbf{w}}.$$

备注 1 （中心性的解释）下面说明为什么 $c(\mathbf{w})$ 能够衡量投资组合 $\mathbf{w}$ 相对于 *MDRP* 的中心性。利用 *(4)*，可得

$$c^2(\mathbf{w}) = \mathbf{w}^\top B\mathbf{w} = \mathbf{w}^\top X^\top X\mathbf{w} = \|X\mathbf{w}\|^2.$$

因此， $c(\mathbf{w}) = \|X\mathbf{w}\|$。根据定理*3*，可得 $X\mathbf{s} = 0$，它是嵌入球面的中心。另一方面， $X\mathbf{w}$ 表示投资组合 $\mathbf{w}$ 在由 $\{\mathbf{x}_i\}$张成的嵌入空间中的嵌入点。量 $\|X\mathbf{w}\|$ 衡量它与原点的距离。

另一种有趣的解释如下。分解式 *(3)* 得到 k 主-要维度 $\mathbf{p}_i$, $i = 1, \ldots, k$。对于给定的投资组合 $\mathbf{w}$，我们可以计算其主坐标

$$\widetilde{w}_i := \mathbf{p}_i^\top \mathbf{w}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

将这个新点记为 $\widetilde{\ }\mathbf{w}$。显然，长度保持不变： $\|\widetilde{\ }\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\|$。中心性会根据特征值对长度进行加权：

$$c(\mathbf{w}) = \sqrt{\lambda_1\widetilde{w}_1^2 + \cdots + \lambda_k\widetilde{w}_k^2}.$$

这种解释与主坐标分析的原理密切相关，该原理最初由 *Gower* *[14]* 研究。

由于中心性衡量投资组合与原点的距离，而原点代表最大分散化收益，我们想知道更高的中心性是否意味着更低的分散化收益。下面的结果证明了这一点。

命题5 对于任意满足 $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1$ 的投资组合 $\mathbf{w}$，有

$$c^2(\mathbf{w}) + q(\mathbf{w}) = q_{\max}. \tag{5}$$

证明。首先，根据定理3可知

$$q_{\max} = q(\mathbf{s}) = \frac{1}{2}\frac{1}{\mathbf{1}^n D^{-}\mathbf{1}_n}.$$

对于任意投资组合 $\mathbf{w}$，不难看出

$$J_{\mathbf{s}}\mathbf{w} = \left(I_n - \mathbf{s}\mathbf{1}_n^\top\right)\mathbf{w} = \mathbf{w} - \mathbf{s} \qquad (\text{using } \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1)$$

and

$$\mathbf{w}^\top D\mathbf{s} = \frac{\mathbf{w}^\top D D^{-}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top D^{-}\mathbf{1}} = \frac{\mathbf{w}^\top \mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top D^{-}\mathbf{1}} = \frac{1}{\mathbf{1}_n^\top D^{-}\mathbf{1}} = 2q(\mathbf{s}),$$

其中，第二个方程用到了事实 $DD^{-}\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$，该事实已在 [16, 定理 2]中针对任意欧几里得距离矩阵得以证明。利用这些事实，我们按如下方式计算 $c^2(\mathbf{w})$:

$$\begin{aligned} c^2(\mathbf{w}) &= \mathbf{w}^\top B\mathbf{w} = -\frac{1}{2}\mathbf{w}^\top J_{\mathbf{s}}^\top D J_{\mathbf{s}}\mathbf{w} \\ &= -\frac{1}{2}(\mathbf{w}-\mathbf{s})^\top D(\mathbf{w}-\mathbf{s}) = -\frac{1}{2}\mathbf{w}^\top D\mathbf{w} + \mathbf{w}^\top D\mathbf{s} - \frac{1}{2}\mathbf{s}^\top D\mathbf{s} \\ &= -q(\mathbf{w}) + 2q(\mathbf{s}) - q(\mathbf{s}) = -q(\mathbf{w}) + q(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

注意到 $q(\mathbf{s}) = q_{\max}$，我们由此推导出了所述恒等式。 □

恒等式（5）有一个重要推论：对于某个投资组合而言，其加权中心离原点越远，中心性就越高，因而其分散化收益越低。投资组合的分散化收益与其中心性平方之和为一个常数，即最大分散化收益 $q_{\max}$。我们回顾一下，分散化收益可以表示为 Rao 二次熵 [28, 26], ，而熵通常是一种能量。从这个意义上说，所考虑的 n 风险资产具有恒定的能量，并且对于任意投资组合，这种能量都分解为两部分：一部分对应于投资组合的分散化收益，另一部分对应于其中心性（即与总能量所在位置的距离）。在任意状态下，这两种能量都可以相互转化，但其总和始终保持不变。投资组合构建的艺术在于，决定投资者希望停留并进行投资的状态。

2.3 范数正则化投资组合具有分散化特征

自Jaganathan和Ma的研讨会论文以来， [19], 范数约束投资组合构建受到了广泛关注，参见例如 [8, 13]。下文的核心观点是，范数约束隐含地要求分散化收益高于某一水平。我们以 [8] 中研究的一般范数约束下的全局最小方差投资组合（GMVP）为例，说明这一推论。

$$\min \frac{1}{2}\mathbf{w}^\top V\mathbf{w}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1, \quad \|\mathbf{w}\|_A \le \tau, \tag{6}$$

对于某个 $\tau > 0$，其中 $\|\mathbf{w}\|_A$ 是$\mathbf{w}$ 的 A范数，定义为 $\|\mathbf{w}\|_A := \sqrt{\mathbf{w}^\top A\mathbf{w}}$ ，其中 A 为对称正定矩阵。特别地，当 $A = I_n$ （单位矩阵）时， $\|\mathbf{w}\|_A = \|\mathbf{w}\|$变为欧几里得范数（也称为 [33, 35] 中的 ℓ_2-范数）。

回顾一下，矩阵 B 由式（2）定义。令 $\beta^2 := \lambda_{\min}(A)/\lambda_{\max}(B) > 0$，其中 $\lambda_{\max}(B)$ 是 B 的最大特征值，而 $\lambda_{\min}(A)$ 是 A的最小特征值。则矩阵 $(A - \beta^2 B)$ 为半正定。因此，我们有

$$\|\mathbf{w}\|_A \geq \beta \|\mathbf{w}\|_B = \beta c(\mathbf{w}).$$

因此，式（6）中的范数约束意味着

$$c(\mathbf{w}) \leq \tau/\beta,$$

或者利用恒等式（5）可等价地写成

$$q(\mathbf{w}) \geq q_{\max} - (\tau/\beta)^2.$$

这意味着，式（6）中的任何 A-范数约束实际上都要求投资组合的分散化收益高于某个阈值。有趣的是，Carmichael 等人 [3] 在其投资组合构建中施加了 $q(\mathbf{w}) \geq \tau$ 类型的分散化收益约束，并观察到强劲的样本外表现，这与 [8]中观察到的表现相似。范数约束与分散化收益约束之间的联系解释了为什么二者都能带来相似的样本外表现。

现在，我们借用 [26]中的一个例子来说明本节的主要结果。

例 6 *[26, 例3.1]* 假设有三个风险资产 S_i、$i = 1$、2、3，其协方差矩阵 V、相应的距离矩阵 D 及其逆矩阵 D^{-1} 分别为

$$V = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 11 & 8 & 8 \\ 8 & 23 & -4 \\ 8 & -4 & 23 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -9 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

注意到，V 也是非奇异的。由定理3可知，*MDRP* 为 $\mathbf{wmdrp} = (-1, 1, 1)^\top$。。相应的嵌入点为 $x_1 = (1, 0)^\top$、$x_2 = (1/2, \sqrt{3}/2)^\top$ 和 $x_3 = (1/2, -\sqrt{3}/2)^\top$。。它们位于以原点为中心、半径为 $R = 1$ 的球面上，见图2；图中还标出了最小方差投资组合 $\mathbf{wmvp} = (1/3, 1/3, 1/3)^\top$，其中 $c_{\mathbf{mvp}} = 2/3$，或等价地，$q_{\mathbf{mvp}} = 1 - (2/3)^2 = 5/9$。在单位圆之外，有 $c(\mathbf{w}) > 1$，这意味着这些投资组合的分散化收益为负。由 x_1、x_2 和 x_3 形成的三角形是权重非负的投资组合区域，因为该区域是这三个点的凸包。在三角形之外，至少有一个负权重。例如，*MDRP* 位于三角形之外，其第一个权重为 (-1)。对分散化收益 $q(\mathbf{w})$施加约束也很直接。例如，如果要求分散化收益为非负，则有

$$q(\mathbf{w}) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad c^2(\mathbf{w}) \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \|\mathbf{w}\|_B \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{4}(1 + w_1)^2 + \frac{3}{4}(w_2 - w_3)^2 \leq 1.$$

我们将看到，恒等式（5）将极大地简化下文分离定理的推导。

3 分散化收益投资组合的有效前沿

在上一节中，我们证明了恒等式（5），这意味着最大化分散化收益等价于最小化中心性，而中心性又与投资组合权重的范数正则化密切相关。本节中，我们研究给定风险水平 σ^2 下的最大分散化收益投资组合，并据此建立一个分离定理。从现在起，我们假设

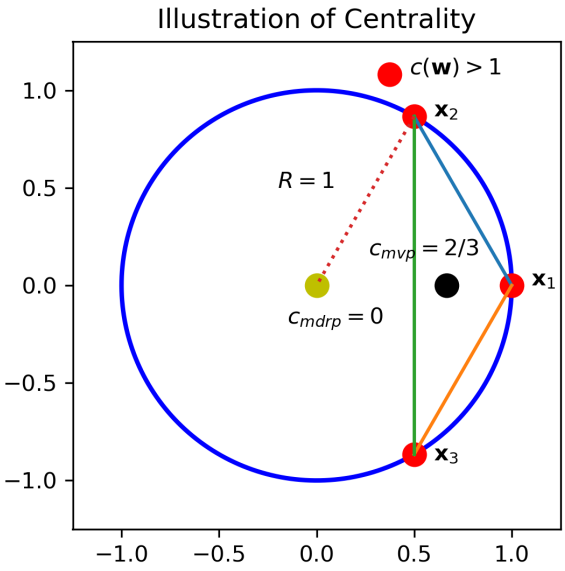


图2：例6中数据在嵌入空间中的资产和投资组合表示：球面以原点为中心，半径为 $R = 1$，球面上的三个资产嵌入点为 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 和 $\mathbf{x}_3$。三个投资组合分别是：MDRP（原点）、MVP（黑色圆点，其中心性为 $2/3$），以及一个位于球面之外的投资组合（$c(\mathbf{w}) > 1$）。

V 是非奇异的。因此，欧几里得距离矩阵 D 也非奇异。此外，最大分散化收益投资组合具有如下闭式解：

$$\mathbf{w}_{\text{mdrp}} = \frac{D^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top D^{-1}\mathbf{1}_n} = \left(1 - \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{2}\right)\frac{V^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n} + \frac{1}{2}V^{-1}\eta. \tag{7}$$

上述第一种表示是用 D^{-1} 表示的，第二种则是用 V^{-1} 表示的，并且也可由 [21, 式（18）] 得到。

3.1 有效分散化收益曲线

我们研究的优化问题定义如下：

$$\mathbf{w}(\sigma) := \arg\max q(\mathbf{w}), \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w}^\top V \mathbf{w} = \sigma^2. \tag{8}$$

具体而言，我们研究 $q(\mathbf{w}(\sigma))$ 与 σ 之间的关系，使得最优投资组合 $\mathbf{w}(\sigma)$ 在 (σ, q) 图中形成一条支配性的光滑凹曲线。这一研究思路与 Merton 对均值-方差模型的经典贡献 [22] 颇为一致。

在条件 $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1$ 下，目标函数 $q(\mathbf{w})$ 变为

$$q(\mathbf{w}) = \frac{1}{2}\mathbf{w}^\top D \mathbf{w} = \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^\top V \mathbf{w} = \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w} - \frac{1}{2}\sigma^2. \tag{9}$$

问题（8）可简化为

$$\mathbf{w}(\sigma) := \arg\max \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w}^\top V \mathbf{w} = \sigma^2. \tag{10}$$

这是在椭球面上最大化一个线性函数。因此，可以在椭球面内进行优化，从而得到以下凸优化问题：

$$\mathbf{w}(\sigma) := \arg\max 2\eta^\top \mathbf{w}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w}^\top V \mathbf{w} \le \sigma^2. \tag{11}$$

我们注意到目标函数有一处小改动：我们使用了 $2\eta^\top \mathbf{w}$ 而不是 $(\eta^\top \mathbf{w})/2$。这一改动是对目标函数进行正比例缩放，因此不会改变最优解 $\mathbf{w}(\sigma)$。研究 (11) 的 KKT条件时，这一改动的好处就会显现出来。我们还注意到，必须要求 $\sigma^2 \geq \sigma^2_{\text{mvp}}$（最小方差投资组合（MVP）的方差），才能使 $\mathbf{w}(\sigma)$ 有明确的定义。下面给出如下结果。

命题7 对于 $\sigma^2 \geq \sigma^2_{mvp}$，我们有

$$\eta^\top \mathbf{w}(\sigma) = \rho\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{mvp}} + \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}, \quad with \quad \rho := \sqrt{\eta^\top V^{-1}\eta - (\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta)^2/\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}. \quad (12)$$

此外，$q_{dr}(\sigma) := q(\mathbf{w}(\sigma))$，则由下式给出

$$q_{dr}(\sigma) = -\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{mvp}} - \rho/2\Big)^2 + \frac{1}{8}\rho^2 + q_{mvp}. \quad (13)$$

特别地，当 $\sigma = \sigma_{mvp}$ 时，最小方差投资组合的分散化收益记为 q_{mvp}，由下式给出

$$q_{mvp} = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta - 1\Big)\sigma^2_{mvp}. \quad (14)$$

证明。对于 $\sigma^2 = \sigma^2_{\text{mvp}}$ 的情形，式 (11) 的可行域仅包含一个点，即$\mathbf{w}_{\text{mvp}}$。由于 $\mathbf{w}(\sigma) = \mathbf{w}_{\text{mvp}}$，因此很容易验证公式 (12)。

现在考虑 $\sigma^2 > \sigma^2_{\text{mvp}}$ 的情形。对于这种情形，我们注意到 Slater条件成立。可以验证，$\mathbf{w}_{\text{mvp}}$ 位于式 (11) 可行域的相对内部。因此，KKT条件在$\mathbf{w} = \mathbf{w}(\sigma)$处成立：

$$-2\eta - 2\lambda\mathbf{1}_n + 2\beta V\mathbf{w} = 0, \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1, \quad \beta \geq 0, \quad \mathbf{w}^\top V\mathbf{w} \leq \sigma^2 \text{ and } \beta(\mathbf{w}^\top V\mathbf{w} - \sigma^2) = 0. \quad (15)$$

其中，(2λ) 是与 $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1$ 对应的拉格朗日乘子，而 $\beta \geq 0$ 是椭球约束对应的拉格朗日乘子。下面求解 KKT条件 (15)。

我们首先排除平凡情形，即 η 与 $\mathbf{1}_n$成比例，也就是说，对于某个 $\gamma > 0$，有 $\eta = \gamma\mathbf{1}_n$。在这种情况下，目标函数为常数 2γ，因此 (11) 的可行域中的任意点都是最优点。容易验证，(12) 中的公式给出了 $\eta^\top \mathbf{w}(\sigma)$ 的正确值。因此，我们假设对于任意 $\gamma > 0$，都有 $\eta \neq \gamma\mathbf{1}_n$。由 (15) 中的第一个方程可得

$$\beta\mathbf{w} = V^{-1}(\eta + \lambda\mathbf{1}_n) \neq 0 \qquad (\text{because } \eta + \lambda\mathbf{1}_n \neq 0,\ \forall\ \lambda \in \Re).$$

因此 $\beta \neq 0$。利用 (15) 中的第二个方程，我们得到

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\beta}\Big(V^{-1}\eta + \lambda V^{-1}\mathbf{1}_n\Big) \quad \text{and} \quad \lambda = \frac{1}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}\beta - \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}.$$

由于 $\mathbf{w}(\sigma)$ 必定位于椭球面的边界上，我们将 $\mathbf{w}$ 代入方程 $\mathbf{w}^\top V\mathbf{w} = \sigma^2$，化简后得到：

$$\Big(\sigma^2 - \sigma^2_{\text{mvp}}\Big)\beta^2 = \eta^\top V^{-1}\eta - \frac{(\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta)^2}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}$$

根据柯西-施瓦茨不等式，我们有 $(\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta)^2 \leq (\eta^\top V^{-1}\eta)(\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n)$。因此，上述方程的右侧非负。已知 $\beta > 0$，我们有

$$\beta = \sqrt{\frac{\eta^\top V^{-1}\eta - (\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta)^2/\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}{\sigma^2 - \sigma^2_{\text{mvp}}}}.$$

然后，我们可以用 β 表示 λ ，进而得到

$$\begin{aligned}\eta^\top \mathbf{w}(\sigma) &= \frac{1}{\beta}\Big(\eta^\top V^{-1}\eta + \lambda \eta^\top V^{-1}\mathbf{1}_n\Big) \\ &= \frac{1}{\beta}\left(\eta^\top V^{-1}\eta + \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}\beta - \frac{(\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta)^2}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}\right) \\ &= \frac{1}{\beta}\left(\eta^\top V^{-1}\eta - \frac{(\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta)^2}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}\right) + \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}.\end{aligned}$$

将 β 代入上面的最后一个方程，得到公式 (12)。我们证明了该公式在所有情况下都成立。由 (12) 可得

$$\eta^\top \mathbf{w}_{\rm mvp} = \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n} = (\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta)\sigma^2_{\rm mvp} \quad (\text{using the fact } \sigma^2_{\rm mvp} = \frac{1}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}),$$

结合 (9)，可得

$$q_{\rm mvp} = -\frac{1}{2}\sigma^2_{\rm mvp} + \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}_{\rm mvp} = \frac{1}{2}(\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta - 1)\sigma^2_{\rm mvp}.$$

这就证明了 (14))。注意到以下事实，公式 (13) 可由 (12) 直接得到

$$\begin{aligned}q_{\rm dr}(\sigma) &= q(\mathbf{w}(\sigma)) = -\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}(\sigma) \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\rho\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{\rm mvp}} + \frac{1}{2}\frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n} \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{\rm mvp}} - \rho/2\Big)^2 + \frac{1}{8}\rho^2 + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta)\sigma^2_{\rm mvp} - \frac{1}{2}\sigma^2_{\rm mvp}}_{=\, q_{\rm mvp} \text{ by (14)}}.\end{aligned}$$

□

下面给出一条注释，其中包含一些有用的恒等式。

注 2 容易验证，函数

$$f(x) := \left(\sqrt{x^2 - x_0^2} - c\right)^2$$

当 $x \geq x_0$ 且 $x_0 > 0$ 和 $c \geq 0$时，该函数为严格凸函数。因此，对于 $\sigma \geq \sigma$最小方差投资组合，函数 q分散化收益(σ) 关于 σ 是严格凹的。解方程

$$0 = q'_{dr}(\sigma) = \frac{\rho}{2}\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{mvp}}} - \sigma \tag{16}$$

可获得最大的分散化收益。相应的投资组合为 $\mathbf{w}mdrp$。*(16)* 的解及相应的分散化收益如下：

$$\sigma^2_{mdrp} = \sigma^2_{mvp} + \frac{\rho^2}{4} \quad and \quad q_{mdrp} = \frac{1}{8}\rho^2 + q_{mvp}. \tag{17}$$

$q$dr(σ)的凹性使有效 DR 投资组合位于（σ， q）图的前沿，这与马科维茨均值-方差投资组合的经典有效前沿十分相似。接下来，我们将证明，该前沿可以通过组合两种投资组合获得：MVP 和 MDRP。

3.2 分离定理

本部分的主要目的是证明，要投资于分散化收益的有效前沿，只需投资于两种投资组合：最小方差投资组合和最大分散化收益投资组合，并通过指定水平 α对它们进行简单组合，

$$\mathbf{w}_\alpha = \alpha \mathbf{w}_{\text{mdrp}} + (1-\alpha)\mathbf{w}_{\text{mvp}} = \mathbf{w}_{\text{mvp}} + \alpha(\mathbf{w}_{\text{mdrp}} - \mathbf{w}_{\text{mvp}}), \quad \alpha \geq 0. \tag{18}$$

在马科维茨有效前沿的经典理论中，这称为分离定理[31] ，且见 [2, 定理 5.2.1]。我们通过证明组合投资组合$\mathbf{w}(\alpha)$形成的标准差（σ）与分散化收益（q）曲线和$q\mathbf{dr}$相同，来确立这一结果。

定理 8 令常数 ρ 定义如式（*12*）。问题（*8*）的最优分散化收益投资组合$\mathbf{w}(\sigma)$ 为

$$\mathbf{w}(\sigma) = \alpha \mathbf{w}_{mdrp} + (1-\alpha)\mathbf{w}_{mvp}, \qquad with \quad \alpha := \frac{2}{\rho}\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{mvp}}.$$

证明。 考虑投资组合$\mathbf{w}\text{mdrp}$ 和$\mathbf{w}\text{mvp}$ 在（18）中的仿射组合$\mathbf{w}^\alpha$ 。我们将证明，一旦指定$\mathbf{w}_\alpha$ 的方差水平为 σ^2，则 α 便唯一确定，且等于结果中所述的（$2/\rho$）$\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2}\text{mvp}$。

Let

$$\mathbf{d} := \mathbf{w}_{\text{mdrp}} - \mathbf{w}_{\text{mvp}} = \frac{1}{2}V^{-1}\eta - \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{2} \times \frac{V^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n} \tag{19}$$

且 $\sigma^2_{\mathbf{d}}$ 为$\mathbf{d}$的方差。容易验证

$$\begin{aligned} \sigma^2_{\mathbf{d}} = \mathbf{d}^\top V \mathbf{d} &= \left(\frac{1}{2}V^{-1}\eta - \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{2} \times \frac{V^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}\right)^\top \left(\frac{1}{2}\eta - \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{2} \times \frac{\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}\right) \\ &= \frac{1}{4}\rho^2 \end{aligned} \tag{20}$$

and

$$\mathbf{d}^\top V \mathbf{w}_{\text{mvp}} = \left(\frac{1}{2}V^{-1}\eta - \frac{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\eta}{2} \times \frac{V^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n}\right)^\top \frac{\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n} = 0.$$

因此，我们有

$$\sigma^2 = \mathbf{w}_\alpha^\top V \mathbf{w}_\alpha = \sigma^2_{\text{mvp}} + \alpha^2\sigma^2_{\mathbf{d}} = \sigma^2_{\text{mvp}} + \frac{1}{4}\rho^2\alpha^2.$$

给定 $\alpha \geq 0$，我们有

$$\alpha = \frac{2}{\rho}\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{\text{mvp}}}. \tag{21}$$

在建立了（21）之后，我们现在计算 $\mathbf{w}_\alpha$ 的分散化收益及其中心性。为简单起见，令$q_\alpha := q(\mathbf{w}_\alpha)$以及 $c_\alpha := c(\mathbf{w}_\alpha)$。我们通过 c_α计算 q_α 。需要注意的是，在（2）中定义的矩阵 $J_{\mathbf{s}}$ 具有以下性质

$$J_{\mathbf{s}}\mathbf{w}_{\text{mdrp}} = J_{\mathbf{s}}\mathbf{s} = 0.$$

这意味着 $B\mathbf{w}\text{mdrp} = 0$。于是我们有

$$\begin{aligned} c_\alpha^2 &= \mathbf{w}_\alpha^\top B \mathbf{w}_\alpha \\ &= \alpha^2 \mathbf{w}_{\text{mdrp}}^\top B \mathbf{w}_{\text{mdrp}} + 2\alpha(1-\alpha)\mathbf{w}_{\text{mvp}}^\top B \mathbf{w}_{\text{mdrp}} + (1-\alpha)^2 \mathbf{w}_{\text{mvp}}^\top B \mathbf{w}_{\text{mvp}} \\ &= (1-\alpha)^2 \mathbf{w}_{\text{mvp}}^\top B \mathbf{w}_{\text{mvp}} = (1-\alpha)^2 c^2_{\text{mvp}} \end{aligned} \tag{22}$$

现在我们两次运用恒等式（5）。第一次用于 $c$mvp：该恒等式意味着

$$c_{\text{mvp}}^2 + q_{\text{mvp}} = q_{\text{mdrp}} \qquad (\text{note } q_{\text{mdrp}} \text{ is } q_{\max}).$$

由（17）可得

$$c_{\text{mvp}}^2 = \frac{1}{8}\rho^2. \tag{23}$$

第二次使用恒等式（5）是在 c_α 处，以得到

$$q_\alpha = q_{\text{mdrp}} - c_\alpha^2 \overset{(22)}{=} q_{\text{mdrp}} - (1-\alpha)^2 c_{\text{mvp}}^2 \overset{(23)}{=} q_{\text{mdrp}} - \frac{\rho^2}{8}(1-\alpha)^2.$$

将 α 代入（21），并将 $q$mdrp 代入（17），代入上式可得（经适当化简）

$$q_\alpha = -\frac{1}{2}\left(\sqrt{\sigma^2 - \sigma_{\text{mvp}}^2} - \frac{\rho}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\rho^2 + q_{\text{mvp}}$$

利用关于 $q$mvp 的公式（14），q_α 正是（13）中的 $q$dr。也就是说，由投资组合 $\mathbf{w}_\alpha$ 形成的（σ, q）曲线与最优投资组合 $\mathbf{w}(\sigma)$形成的曲线相同。α 与 σ 之间的对应关系由（21）给出。这就证明了该定理。□

值得注意的是，α 的有意义范围是 $0 \le \alpha \le 1$。这是因为当$\alpha > 1$时，根据（21），相应的投资组合比 MDRP（即$\sigma > \sigma$mdrp）具有更大的标准差，但分散化收益更少。

4 两个有效前沿的关系

在这一部分，我们将回答一个有趣的问题：经典有效前沿在（σ，q）图中处于什么位置？它与刚刚研究的分散化收益前沿相距多远？我们还将探讨有效前沿上分散化收益最高的投资组合。

4.1 均值—方差有效组合的（σ，q）曲线

我们简要回顾一下马科维茨均值-方差模型中有效组合的一些关键事实。我们用 $\mathbf{r}$ 表示 n 个风险资产的预期收益向量。对于给定的风险水平σ^2，均值-方差模型通过求解以下问题来寻找最优投资组合：

$$\mathbf{w}_{\text{mv}}(\sigma) := \arg\max\ \bar{\mathbf{r}}^\top \mathbf{w}, \qquad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1, \quad \mathbf{w}^\top V \mathbf{w} \le \sigma^2. \tag{24}$$

为排除平凡情形，我们假设 $\mathbf{r}$ 与 $\mathbf{1}_n$ 不成比例。否则，所有风险资产的预期收益率都相同，因此所有投资组合的收益也都相同。经典投资组合理论指出，随着 σ 变化，所有最优投资组合 $\mathbf{w}$mv 构成标准差—收益图中的一条有效前沿。此外，这些投资组合具有如下表示形式 [2, 推论。4.2.1]:

$$\mathbf{w}_{\text{mv}}(\sigma) = \mathbf{w}_{\text{mvp}} + \alpha \mathbf{w}_o, \quad \text{with} \ \ \alpha = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_{mvp}^2},$$

其中

$$\mathbf{w}_o := \frac{V^{-1}\left(\bar{\mathbf{r}} - \frac{b}{a}\mathbf{1}_n\right)}{\sqrt{\left(\bar{\mathbf{r}} - \frac{b}{a}\mathbf{1}_n\right)^\top V^{-1}\left(\bar{\mathbf{r}} - \frac{b}{a}\mathbf{1}_n\right)}}, \quad a := \mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n, \quad b := \mathbf{1}_n^\top V^{-1}\bar{\mathbf{r}}. \tag{25}$$

In [2], $\mathbf{w}_o$ 称为自融资投资组合，并且由于以下事实而进行了归一化：

$$\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w}_o = 0 \qquad \text{and} \qquad \mathbf{w}_o^\top V \mathbf{w}_o = 1. \tag{26}$$

我们将$\mathbf{w}$mv(σ)的分散化收益记为$q$ef(σ)（此处的$q$ef表示均值-方差模型有效前沿上的分散化收益）。

现在利用上述事实和公式（9）计算$q$ef:

$$\begin{aligned} q_{\mathrm{ef}}(\sigma) &= -\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}_{\mathrm{mv}}(\sigma) \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}_{\mathrm{mvp}} + \frac{\alpha}{2}\eta^\top \mathbf{w}_o \\ &= -\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{\mathrm{mvp}}}(\eta^\top \mathbf{w}_o) + \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}_{\mathrm{mvp}} \\ &= -\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{\mathrm{mvp}}} - \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}_o\Big)^2 + \frac{1}{8}(\eta^\top \mathbf{w}_o)^2 - \frac{1}{2}\sigma^2_{\mathrm{mvp}} + \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}_{\mathrm{mvp}} \end{aligned} \tag{27}$$

注意,

$$\eta^\top \mathbf{w}_{\mathrm{mvp}} = \eta^\top \frac{V^{-1}\mathbf{1}_n}{\mathbf{1}_n^\top V^{-1}\mathbf{1}_n} = (\eta^\top V^{-1}\mathbf{1}_n)\sigma^2_{\mathrm{mvp}} = 2q_{\mathrm{mvp}} + \sigma^2_{\mathrm{mvp}},$$

其中，上面的最后一个等式使用了公式（14）中的恒等式。将其代入（27））得

$$q_{\mathrm{ef}}(\sigma) = -\frac{1}{2}\Big(\sqrt{\sigma^2 - \sigma^2_{\mathrm{mvp}}} - \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}_o\Big)^2 + \frac{1}{8}(\eta^\top \mathbf{w}_o)^2 + q_{\mathrm{mvp}}. \tag{28}$$

函数$q$ef(σ)定义了有效前沿的（σ， q）曲线。其形式与$q$dr(σ)的形式相似。由于$q$dr是所有投资组合中的支配前沿，因此必有

$$q_{\mathrm{dr}}(\sigma) \geq q_{\mathrm{ef}}(\sigma) \qquad \forall \sigma \geq \sigma_{\mathrm{mvp}}.$$

然而，与$q$dr为凹函数不同，$q$ef的形状取决于 $\eta^\top \mathbf{w}_o$的符号。我们还希望了解$q$ef与$q$dr相距多远。下面将对此进行精确定义。

4.2 Q投资组合

$q$dr 与 $q$ef 之间的数量差异与 Q 投资组合密切相关：

$$\mathbf{w}_Q := \mathbf{w}_{\mathrm{mvp}} + (\eta^\top \mathbf{w}_o/2)\mathbf{w}_o.$$

根据（26），由于 $\mathbf{1}^\top \mathbf{w}_o = 0$， $\mathbf{w}_Q$ 是一个满足预算约束的投资组合。我们来考虑自融资投资组合

$$\mathbf{d}_Q := \mathbf{w}_Q - \mathbf{w}_{\mathrm{mdrp}} = \frac{1}{2}(\eta^\top \mathbf{w}_o)\mathbf{w}_o - \mathbf{d} \quad \text{with} \quad \mathbf{d} = \mathbf{w}_{\mathrm{mdrp}} - \mathbf{w}_{\mathrm{mvp}}.$$

由（19）以及 $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w}_o = 0$ 这一事实可得

$$\mathbf{w}_o^\top V \mathbf{d} = \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}_o.$$

利用（20），我们可以计算$\mathbf{d}_Q$ 的方差：

$$0 \leq \sigma^2_{\mathbf{d}_Q} = \frac{1}{4}\rho^2 - (\eta^\top \mathbf{w}_o)\mathbf{w}_o^\top V \mathbf{d} + \frac{1}{4}(\eta^\top \mathbf{w}_o)^2 \underbrace{\mathbf{w}_o^\top V \mathbf{w}_o}_{=1} = \frac{1}{4}\rho^2 - \frac{1}{4}(\eta^\top \mathbf{w}_o)^2.$$

因此，我们有

$$|\eta^\top \mathbf{w}_o| \leq \rho. \tag{29}$$

定理 9 关于这两个有效前沿，以下结果成立。

(i) q分散化收益曲线支配q有效投资组合曲线。此外，

$$q_{dr}(\sigma) - q_{ef}(\sigma) = \frac{1}{2}(\rho - \eta^\top \mathbf{w}_o)\sqrt{\sigma^2 - \sigma_{mvp}^2} \qquad \forall\ \sigma \geq \sigma_{mvp}.$$

(ii) 假设 $\eta^\top \mathbf{w}_o \geq 0$。则$q$有效投资组合$(\sigma)$ 是严格凹的，而Q投资组合是具有最高分散化收益的有效投资组合。此外，我们有$\sigma_{MDRP} \geq \sigma_Q$，其中$\sigma_Q$ 是Q投资组合的标准差。

(iii) 假设 $\eta^\top \mathbf{w}_o < 0$。令

$$\tau_o := \sigma_{mvp}\sqrt{1 + \frac{(\eta^\top \mathbf{w}_o)^{4/3}}{\sigma_{mvp}^{2/3}}}.$$

则q有效投资组合(σ) 严格递减。此外，q有效投资组合(σ) 在区间$[\sigma$最小方差投资组合 $\tau_o]$ 上是凸的，并在 $[\tau_o, \infty)$上是凹的。

(iv) 当风险向量与预期收益向量成比例时，即对于某个$\gamma > 0$，有 $\eta = \gamma \mathbf{r}$ ，我们有 $\bar{\rho} = \eta^\top \mathbf{w}_o$。这意味着对于所有 σ，q分散化收益$(\sigma) = q$有效投资组合(σ) 。

证明。 (i) 由式(28)中的q有效投资组合与式(13)中的q分散化收益直接相减可得。之所以具有支配性，是因为根据式(29)，$(\rho - \eta^\top \mathbf{w}_o) \geq 0$ 。

对于 (ii)，我们注意到该函数

$$f(x) = -\frac{1}{2}\Big(\sqrt{x^2 - x_0^2} - c\Big)^2$$

在 $x \geq x_0$、 $x_0 \geq 0$ 和 $c \geq 0$ 时是严格凹函数。将 $x = \sigma$、 $x_0 = \sigma$mvp 和 $c = \eta^\top \mathbf{w}_o \geq 0$ 直接代入可知，$q$ef(σ) 是严格凹函数。在这种情况下，$q$ef(σ) 在以下条件下达到最大值

$$\sqrt{\sigma^2 - \sigma_{\text{mvp}}^2} = \frac{1}{2}\eta^\top \mathbf{w}_0. \tag{30}$$

这对应于 Q投资组合。因此（在式 (30) 中将 σ 替换为 σ_Q ）

$$\sigma_Q^2 = \sigma_{\text{mvp}}^2 + \frac{1}{4}(\eta^\top \mathbf{w}_o) \overset{(29)}{\leq} \sigma_{\text{mvp}}^2 + \frac{1}{4}\rho^2 \overset{(16)}{=} \sigma_{\text{mdrp}}^2.$$

这证明了 $\sigma_Q \leq \sigma$mdrp。

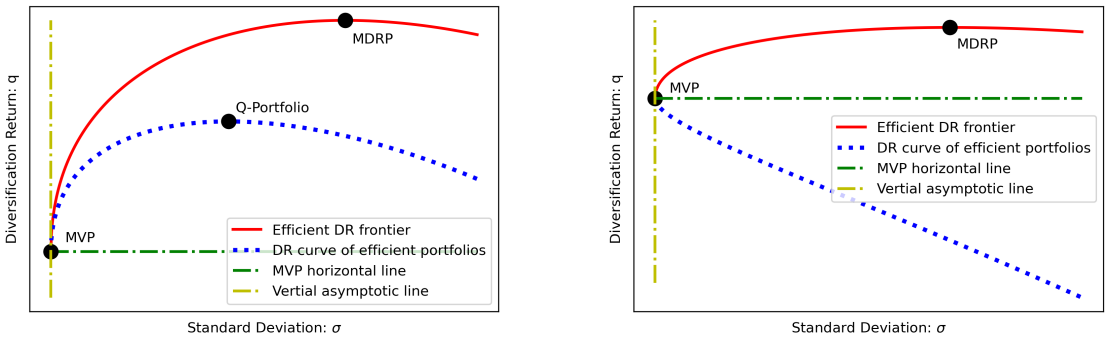
对于 (iii)，我们只需对函数 $q$ef(σ) 求两次导数。容易看出，其一阶导数始终为负。因此，q ef(σ) 是递减的。二阶导数在区间 $[\sigma$mvp $\tau_o]$ 上非负，在 $[\tau_o, \infty)$ 上非正。

(iv) 中的论断可直接验证。 □

关于两条分散化收益曲线之间的关系，我们作如下说明。图 3 展示了两种情形（$\eta^\top \mathbf{w}_o \geq 0$ 或 < 0）下两条分散化收益曲线及关键投资组合（最小方差投资组合、MDRP、Q投资组合）的表现。

注 3 *(i)* 定理 *9(i)* 的结果表明，两条曲线之间的风险调整后的差值为常数：

$$\frac{q_{dr}(\sigma) - q_{ef}(\sigma)}{\sqrt{\sigma^2 - \sigma_{mvp}^2}} = \frac{1}{2}(\rho - \eta^\top \mathbf{w}_o), \quad \forall\ \sigma > \sigma_{mvp}.$$



(a) (b)

图3：在（σ， q）空间中对有效DR前沿的图形表示。图 3a 对应 $\eta^\top \mathbf{w}_o \geq 0$ 的情形。Q投资组合位于有效组合曲线上，且分散化收益最高。它位于MDRP下方且在其左侧。图 3b 对应 $\eta^\top \mathbf{w}_o < 0$ 的情形。分散化收益最高的有效组合是MVP。在两幅图中，有效DR前沿均优于MV有效投资组合的DR曲线。

这表明，若要兼得两者之长（最小方差效率和分散化收益效率），应聚焦于最小方差投资组合附近的区域。若离它太远，两条有效曲线可能朝相反方向延伸，且两者之间的差距会随调整风险按恒定速率扩大。具体而言，当 σmvp 较小，因而分母近似与 σ 成正比时，差距与 σ 成正比。

（*iii*）在条件 $\eta^\top \mathbf{w}_o \geq 0$ 下，*Q*投资组合具有这样的性质：它是有效组合，且在所有*MV*有效投资组合中，其*DR*最高。此外，除非*Q*投资组合恰好是*MDRP*，否则其标准差必定严格小于*MDRP*的标准差。这是因为 $\mathbf{d}_Q \neq 0$ 若 Q 投资组合不是*MDRP*，且 $\sigma_{\mathbf{d}_Q} > 0$，则迫使$|\eta^\top \mathbf{w}_o|$严格小于式 (29) 中的 ρ。这进而意味着$\sigma_Q < \sigma mdrp$。如果 $\eta^\top \mathbf{w}_o < 0$，则*MVP*是在所有*MV*有效投资组合中*DR*最高的有效组合。

(iv) 定理*9(iv)*中的结果推广了一个众所周知的事实：当方差向量与预期收益向量成比例时，最大分散化收益投资组合$\mathbf{w}mdrp$ 是有效投资组合，参见 *[3, 21]*。该结果表明，分散化收益前沿上的任何投资组合都是有效投资组合。

4.3 存在无风险资产时的比较

当存在无风险资产时，我们上述的研究可以直接扩展到这一重要情形。经典的马科维茨理论指出，有效投资组合构成资本市场线（CML） [30, 11]。我们研究资本市场线（CML）在（σ、 q）图上的表现。结果表明，它是一条具有一些良好特性的抛物线。

假设无风险资产的收益为 r_0，并将其视为第（$n+1$）个资产，添加到上文研究的 n 个风险资产中。令$\mathbf{w}_T$ 表示切点投资组合（也称为市场投资组合）。已知（例如，参见 [2,第 5.2] 节）：

$$\mathbf{w}_T = \frac{1}{b - r_0 a} V^{-1}\Big(\overline{\mathbf{r}} - r_0 \mathbf{1}_n\Big),$$

其中，量 a 和 b 在式（25）中定义。要使切点投资组合$\mathbf{w}_T$ 存在，最小方差投资组合$\mathbf{w}_{\mathrm{mvp}}$ 的预期收益必须高于无风险资产的收益 r_0，参见 [22]。这等价于要求（$b - r_0 a$） > 0。

Let

$$\Pi_T := \begin{pmatrix} \mathbf{w}_T \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \Pi_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

分别表示切点投资组合和无风险资产在（$n+1$）资产空间中的表示。于是，资本市场线上的投资组合可表示为

$$\Pi(\beta) = \Pi_0 + \beta(\Pi_T - \Pi_0), \quad \beta \geq 0.$$

~ ~令 V 表示（$n+1$）个资产的协方差矩阵， D 表示相应的欧几里得距离矩阵。我们有

$$\widetilde{V} = \begin{bmatrix} V & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \widetilde{D} = \begin{bmatrix} D & \frac{1}{2}\eta \\ \frac{1}{2}\eta^\top & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\eta \mathbf{1}_n^\top + \mathbf{1}_n \eta^\top) - V & \frac{1}{2}\eta \\ \frac{1}{2}\eta^\top & 0 \end{bmatrix}.$$

我们使用 $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w}_T = 1$ 计算投资组合 Π 的分散化收益

$$\begin{aligned} q(\Pi) &= \frac{1}{2}\Pi^\top \widetilde{D}\Pi \\ &= -\frac{1}{2}\beta^2 \mathbf{w}_T^\top V \mathbf{w}_T + \frac{1}{2}\beta^2(\eta^\top \mathbf{w}_T) + \frac{1}{2}\beta(1-\beta)(\eta^\top \mathbf{w}_T) \\ &= -\frac{1}{2}\beta^2 \sigma_T^2 + \frac{1}{2}\beta(\eta^\top \mathbf{w}_T), \end{aligned} \tag{31}$$

其中， σ_T^2 是投资组合 $\mathbf{w}_T$ 的方差。另一方面，投资组合Π的方差是 β 的二次函数:

$$\sigma_\Pi^2 = \beta^2 \sigma_T^2.$$

将其代入（31），得到

$$q(\Pi) = -\frac{1}{2}\sigma_\Pi^2 + \frac{\eta^\top \mathbf{w}_T}{2\sigma_T}\sigma_\Pi.$$

为表明其对资本市场线的依赖性，我们用 $q_{\mathrm{cml}}(\sigma)$ 表示 $q(\Pi)$。因此，我们有

$$q_{\mathrm{cml}}(\sigma) = -\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\eta^\top \mathbf{w}_T}{2\sigma_T}\sigma = -\frac{1}{2}\left(\sigma - \frac{\eta^\top \mathbf{w}_T}{2\sigma_T}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(\frac{\eta^\top \mathbf{w}_T}{\sigma_T}\right)^2. \tag{32}$$

当 $\eta^\top \mathbf{w}_T > 0$ 时，最大的分散化收益投资组合出现在

$$\sigma = \frac{\eta^\top \mathbf{w}_T}{2\sigma_T} \qquad \text{or equivalently at} \qquad \beta = \frac{\eta^\top \mathbf{w}_T}{2\sigma_T^2}.$$

在计算出资本市场线的分散化收益曲线（32）后，我们现在计算这（$n+1$）项资产的有效分散化收益曲线。我们注意到，不能在此直接应用公式（13）），原因如下：(i) 这里有（$n+1$）项资产，而 q_{dr} 只有 n 项风险资产，并且投资组合的分散化收益取决于其包含的资产数量，详见第 2.1 小节的讨论；(ii) ~假设 V 的协方差矩阵 q_{dr} 非奇异，而 V 是奇异的。因此，我们需要从头计算有效分散化收益曲线。定义

$$\widetilde{\mathbf{w}}(\sigma) := \arg\max\ \widetilde{q}(\widetilde{\mathbf{w}}) = \frac{1}{2}\widetilde{\mathbf{w}}^\top \widetilde{D}\widetilde{\mathbf{w}},\ \text{s.t.}\ \begin{cases} \mathbf{1}_{n+1}^\top \widetilde{\mathbf{w}} = 1 \\ \mathbf{w}^\top V \mathbf{w} = \sigma^2 \end{cases} \quad \text{with} \quad \widetilde{\mathbf{w}} := \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ w_0 \end{pmatrix} \in \Re^{n+1} \tag{33}$$

其中， σ^2 是给定的风险水平， w_0 表示投资于无风险资产的权重。

利用 $\mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1 - w_0$ 这一事实，可得 $\widetilde{q}(\widetilde{\mathbf{w}}) = q(\mathbf{w})$。因此，问题（33）等价于以下问题：

$$\widehat{\mathbf{w}}(\sigma) := \arg\max \ q(\mathbf{w}), \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{w}^\top V \mathbf{w} = \sigma^2. \tag{34}$$

权重向量 $\widehat{\mathbf{w}}(\sigma)$ 是 $\widetilde{\mathbf{w}}(\sigma)$ 的风险部分，而 $\widehat{w}_0 := 1 - \mathbf{1}_n^\top \widehat{\mathbf{w}}(\sigma)$ 是投资于无风险资产的权重。因此，$\widetilde{q}(\widetilde{\mathbf{w}}(\sigma)) = q(\widehat{\mathbf{w}}(\sigma))$。重复计算式（13）所用的计算过程，以求得 q_{dr}，我们可以计算 $q(\widehat{\mathbf{w}}(\sigma))$，如下所示：

$$q(\widehat{\mathbf{w}}(\sigma)) = -\frac{1}{2}\sigma^2 + \frac{\sigma}{2}\sqrt{\eta^\top V^{-1}\eta} =: \widetilde{q}_{\mathrm{dr}}(\sigma), \tag{35}$$

其中，最优分散化收益记为 $\widetilde{q}_{\mathrm{dr}}(\sigma)$，以表示其是在给定风险水平 σ^2 下的最优分散化收益。这是针对（$n+1$）项资产的有效分散化收益曲线。比较式（35）与式（32），可得出以下两点结论。

(i) 两条曲线 $\widetilde{q}_{\mathrm{dr}}(\sigma)$ 和 $q_{\mathrm{cml}}(\sigma)$ 都是标准抛物线，比仅考虑风险资产时的对应曲线 $q_{\mathrm{dr}}(\sigma)$ 和 $q_{\mathrm{ef}}(\sigma)$ 简单得多。由于 $\widetilde{q}_{\mathrm{dr}}(\sigma) \geq q_{\mathrm{cml}}(\sigma)$（有效分散化收益曲线支配资本市场线的分散化收益曲线），可得

$$\sqrt{\eta^\top V^{-1}\eta}\,\sigma_T \geq \eta^\top \mathbf{w}_T. \tag{36}$$

我们进一步注意到，量 $(\eta^\top V^{-1}\eta)$ 定义为

$$\sigma_\eta^2 := \min \mathbf{w}^\top V \mathbf{w}, \qquad \text{s.t.} \quad \eta^\top \mathbf{w} = 1.$$

因此，不等式 (36) 可写为

$$\frac{\sigma_T}{\sigma_\eta} \geq \eta^\top \mathbf{w}_T.$$

关于切点投资组合 $\mathbf{w}_T$ 的这个不等式是新的。

(ii) 当方差向量 η 与超额收益率 $(\mathbf{r} - r_0\mathbf{1}_n)$ 成比例时，即对于某个 $\gamma > 0$，有 $\overline{\eta} = \gamma(\mathbf{r} - r_0\mathbf{1}_n)$，则我们可以证明 $q_{\mathrm{cml}}(\sigma) = \widetilde{q}(\sigma)$。换言之，资本市场线的分散化收益曲线变为有效分散化收益投资组合。此结果将定理9(iv)推广到包含无风险资产的情形。否则，差距可衡量如下：

$$\widetilde{q}(\sigma) - q_{\mathrm{cml}}(\sigma) = \frac{\sigma}{2}\Big(\sqrt{\eta^\top V^{-1}\eta} - \frac{\eta^\top \mathbf{w}_T}{\sigma_T}\Big) \qquad \forall\ \sigma \geq 0.$$

差距是 σ 的线性函数。$q_{\mathrm{cml}}(\sigma)$ 和 $\widetilde{q}(\sigma)$ 的曲线与图 3 中对应的曲线相似。

5 数值示例

从理论上说，我们对基于分散化收益的投资组合有何预期，已经基本明了。本部分使用一个真实数据集展示这些投资组合的表现，并将其与一些现有投资组合进行比较。该示例揭示了一些有趣的观测值，也加深了我们对这些投资组合的理解。具体而言，我们展示以下内容：

(i) 我们通过三幅图展示相关投资组合：$(\sigma,\ q)$（标准差与分散化收益）图；$(\sigma,\ c)$（标准差与中心性）图；以及 $(\sigma,\ R)$（标准差与收益）图。

(ii) 我们还特别指出几种特定的投资组合，包括：MVP：最小方差投资组合；MDRP：最大分散化收益投资组合； Q-投资组合：分散化收益最大的有效均值-方差投资组合；以及 MDP：最大分散化比率投资组合，相关研究见 [6]。下文将对此投资组合进行说明。

5.1 最大分散化比率投资组合

研究人员常常会混淆最大分散化收益投资组合（MDRP）与最大分散化比率投资组合（MDP）；后者最初由 Choueifaty 和 Coignard [6] 进行研究：

$$\mathbf{w}_{\mathrm{mdp}} := \arg\max \ \frac{\sqrt{\eta}^\top \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^\top V \mathbf{w}}}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1. \tag{37}$$

研究它们之间的关系会很有意思。显然，(37) 等价于

$$\mathbf{w}_{\mathrm{mdp}} = \arg\max \ \left(\frac{\sqrt{\eta}^\top \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}^\top V \mathbf{w}}} \right)^2 = \frac{\mathbf{w}^\top \sqrt{\eta}\sqrt{\eta}^\top \mathbf{w}}{\mathbf{w}^\top V \mathbf{w}} \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1.$$

将风险水平固定为 $\mathbf{w}^\top V \mathbf{w} = \sigma^2$，并考虑相应的最大分散化比率投资组合：

$$\mathbf{w}_{\mathrm{mdp}}(\sigma) := \arg\max \ \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top \sqrt{\eta}\sqrt{\eta}^\top \mathbf{w}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1, \ \ \mathbf{w}^\top V \mathbf{w} = \sigma^2. \tag{38}$$

我们估算两个投资组合 MDRP (10) 和 MDP (38) 的目标函数之差：

$$\begin{aligned} d_\sigma &:= \frac{1}{2} \max_{\mathbf{w}} \ \eta^\top \mathbf{w} - \frac{1}{2} \max_{\mathbf{w}} \ \mathbf{w}^\top \sqrt{\eta}\sqrt{\eta}^\top \mathbf{w} \\ &\leq \frac{1}{2} \max_{\mathbf{w}} \ \left(\eta^\top \mathbf{w} - \mathbf{w}^\top \sqrt{\eta}\sqrt{\eta}^\top \mathbf{w} \right) \\ &= \frac{1}{2} \max_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^\top \underbrace{\left(\frac{1}{2}(\eta^\top \mathbf{1}_n + \mathbf{1}_n \eta^\top) - \sqrt{\eta}\sqrt{\eta}^\top \right)}_{=: D_\eta} \mathbf{w} \end{aligned}$$

不难看出

$$\mathrm{diag}(D_\eta) = 0 \quad \text{and} \quad -JD_\eta J = J\sqrt{\eta}\sqrt{\eta}^\top J \succeq 0,$$

其中 $J := I_n - \frac{1}{n}\mathbf{1}_n \mathbf{1}_n^\top$ 是中心化矩阵。由 [16]（另见 [24, Eq.(1)]）可知，D_η 是欧几里得距离矩阵。我们将范围限制在仅做多投资组合 $\mathbf{w} \geq 0$，并定义

$$S_\sigma^+ := \left\{ \mathbf{w} \mid \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1, \ \ \mathbf{w}^\top V \mathbf{w} = \sigma^2, \ \ \mathbf{w} \geq 0 \right\}.$$

一方面，

$$-2d_\sigma = \max_{\mathbf{w} \in S_\sigma^+} \ \mathbf{w}^\top \sqrt{\eta}\sqrt{\eta}^\top \mathbf{w} - \max_{\mathbf{w} \in S_\sigma^+} \ \eta^\top \mathbf{w} \leq \max_{\mathbf{w} \in S_\sigma^+} \mathbf{w}^\top (-D_\eta) \mathbf{w} \leq 0,$$

其中，最后一个不等式用到了以下事实：D_η 是欧几里得距离矩阵（因此其元素均为非负数），且 $\mathbf{w} \geq 0$。另一方面，

$$d_\sigma \leq \left\{ \max_{\mathbf{w} \geq 0} \frac{1}{2} \mathbf{w}^\top D_\eta \mathbf{w}, \quad \text{s.t.} \quad \mathbf{1}_n^\top \mathbf{w} = 1 \right\} =: d_{\max}. \tag{39}$$

因此，对于仅做多投资组合（参见 [25]），我们必须有

$$\max_{\mathbf{w} \in S_\sigma^+} \ \mathbf{w}^\top \sqrt{\eta}\sqrt{\eta}^\top \mathbf{w} \leq \max_{\mathbf{w} \in S_\sigma^+} \ \eta^\top \mathbf{w} \leq \max_{\mathbf{w} \in S_\sigma^+} \ \mathbf{w}^\top \sqrt{\eta}\sqrt{\eta}^\top \mathbf{w} + d_{\max}.$$

我们注意到，$d_{\max} > 0$ 与相关投资组合的 σ^2 水平无关。这意味着，对于任意风险水平 σ^2，两个投资组合目标函数之间的距离均有统一上界，与风险水平无关。换言之，分散化比率投资组合应遵循分散化收益投资组合的趋势。这正是以下数值示例中所观察到的现象。

5.2 DAX30 数据

该数据集由30只股票组成[1]，这些股票曾出现在DAX30 指数（DAX30）中，数据用于 [18, 第 336]页。数据期间为2017年1月3日至2021年12月31日。日收益率的均值和协方差矩阵均已年化[2]。我们还对平均周度数据进行了检验，相关投资组合的表现与图4、图5和图6中所绘图形的表现相似，因此不再列出。在这三幅图中，我们绘制了wmdrp(σ)（式（11））、wmv(σ)（式（24））和wmdp(σ)（式（38））对应的投资组合，令 σ 变化。它们分别代表最优分散化收益投资组合、最优均值—方差投资组合和分散化收益比率投资组合。我们注意到，只有wmv(σ)与股票收益率存在明确关系，另外两个仅与股票的协方差有关。

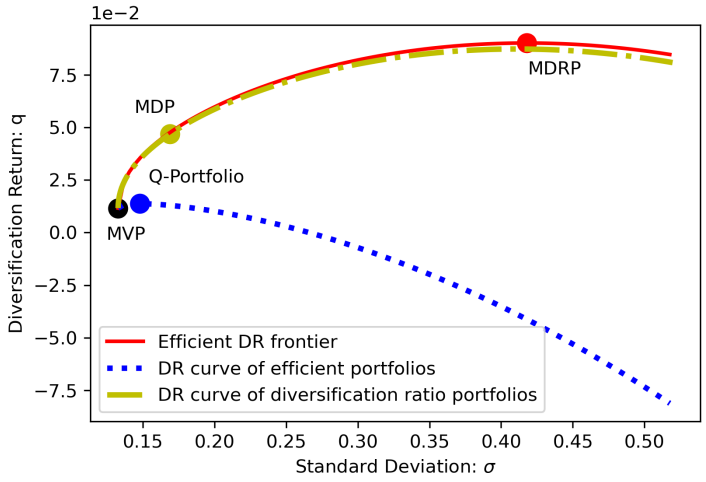


图4：投资组合在（σ， q）平面中的比较。

我们将主要观测结果总结如下。

(i) 最优分散化收益投资组合wmdrp(σ)的有效分散化收益曲线与最优分散化比率投资组合wmdp(σ)的有效分散化收益曲线出乎意料地接近，见图4中的标准差与分散化收益（σ， q）图。这在一定程度上是因为二者各自的目标函数相差不大，而且无论涉及何种风险水平，差距都始终有界。同样令人惊讶的是，二者的预期收益率也相近，如图6中的标准差与收益（σ, R）图所示。然而，二者的差异在标准差与中心性（σ， c）图中十分明显，见图5。MDP的中心性曲线似乎比MDRP更平滑。此外，wmdp(σ)的中心性严格高于wmdrp(σ)的中心性。不过，总体趋势是二者相互跟随。

(ii) 与上述观察相反，均值—方差投资组合的轨迹与 MDRP 和 MDP 的轨迹方向相反。具体而言，

[1]这些股票的股票代码为 ADS.DE、ALV.DE、BAS.DE、BAYN.DE、BEI.DE、BMW.DE、CBK.DE、CON.DE、DAI.DE、DB1.DE、DBK.DE、DPW.DE、DTE.DE、EOAN.DE、FME.DE、FRE.DE、HEI.DE、HEN3.DE、IFX.DE、LHA.DE、LIN.DE、LXS.DE、MRK.DE、MUV2.DE、RWE.DE、SAP.DE、SDF.DE、SIE.DE、TKA.DE、VOW3.DE。[2]假设观测值来自时间 t_0 至时间 T。设 n 表示这一时期内收益率的数量， N 表示 t_0 与 T 之间的日历天数。年化时间步长为 $\delta = N/(365n)$。设 $\widehat{\mu}$ 和 $\widehat{V}$ 分别为收益率的样本均值和协方差矩阵。那么，年化均值和协方差矩阵分别为 $\mu = \widehat{\mu}/\delta$ 和 $V = \widehat{V}/\delta$。DAX30 数据集的 δ 值为 0。003952。

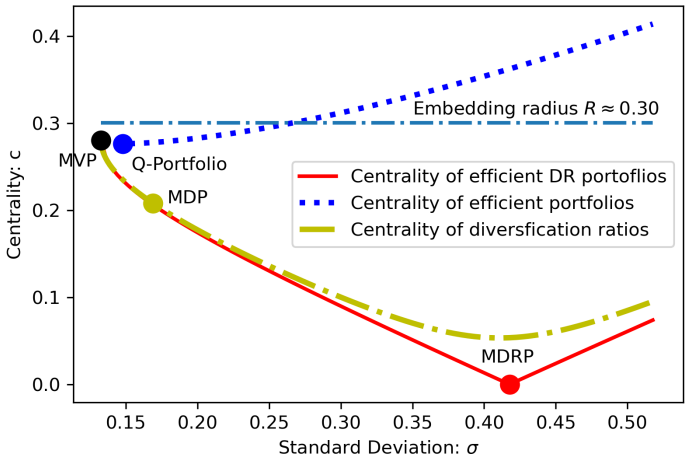


图 5：在 $(\sigma,\ c)$ 平面中比较投资组合。

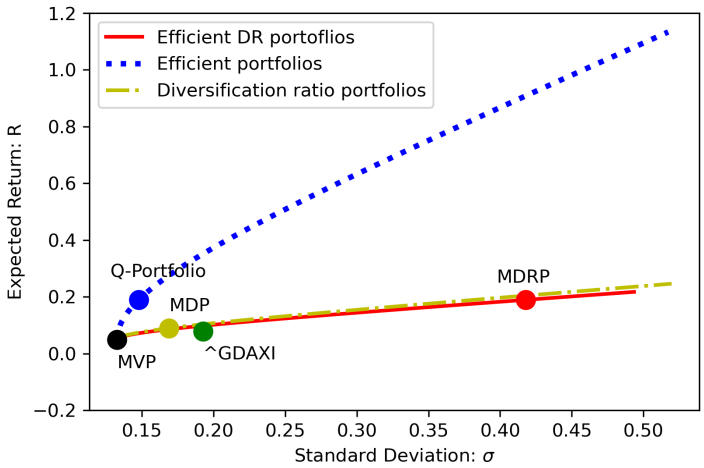


图 6：在 $(\sigma,\ R)$ 平面中比较投资组合。

有效均值—方差投资组合的分散化收益很快转为负值，见图4。这意味着，当标准差 σ（等价地，预期收益）超过某个阈值时，这些投资组合往往会集中于少数资产，从而降低投资组合的分散化程度。这一点也体现在图5的中心性图中。根据公式（5），任何位于对应嵌入半径 $R \approx 0.30$ 的水平线之上的均值—方差投资组合，其 q 均为负值。该数据集上的均值—方差投资组合还有另一个缺点：其预期收益增长过快，见图6。我们还绘制了 DAX指数本身的收益，记作 ^GDAXI（该指数的代码），其收益曲线与有效分散化收益投资组合的收益曲线非常接近，并远低于有效前沿。

(iii) 感兴趣的投资组合中存在一个明显的聚类。最小方差投资组合、MDP 和 Q投资组合在所有三幅图中都形成一个聚类。此外，市场投资组合 ^GDAXI 也靠近该聚类，这意味着靠近该聚类的投资组合往往会跟随市场趋势。还需要进行更多数值实验，以确定这是否是普遍现象。尽管有效组合往往会迅速产生负的分散化收益，但 Q投资组合的分散化收益为正，因此应通过数值研究来验证其价值。相比之下，

MDRP 与该聚类相距甚远。图6 中有效 DR 投资组合的收益曲线看起来较为平缓，这表明收益的增加速度远低于标准差的增加速度。这一观察再次证实，尽管 MDRP 和 MDP 在每幅图中都接近同一条曲线，但二者基于截然不同的准则。

6 结论

本文从优化的角度对基于分散化收益的投资组合进行了深入研究。研究表明，分散化收益与范数加权组合之间存在内在联系，而且有效分散化收益投资组合也满足分离定理。这些投资组合的 DR 曲线在（σ、 q）空间中具有很强的凹性。因此，MDRP 之外的任何投资组合都应予以舍弃，因为其标准差高于 MDRP，而分散化收益却更低。分离定理意味着，有意义的投资组合是 MVP 与 MDRP 的凸组合。我们还推导了均值—方差有效组合的 DR 曲线公式，并将其与有效分散化收益曲线进行了比较。特别是，Q投资组合似乎比其他均值—方差有效组合更具优势。我们还将这项研究拓展至存在无风险资产的情形。在这种情况下，DR 曲线是标准抛物线，两条 DR 曲线之间的风险调整后差距为常数。我们还探讨了 MDRP 与最大分散化比率组合（MDP）之间的联系。尽管两者依据不同的标准构建，但走势往往相近，数值示例充分展示了这一点。

对 DR投资组合 的深入理解也引出了一个重要问题：如何在 噪声环境 下改进 分散化收益 模型。这自然会引出 稳健变体，这类变体已在 均值—方差模型 中得到广泛研究，参见 [5, 12]。我们计划在下一项研究中探讨这一可能性。

参考文献

[1] David G Booth 和 Eugene F Fama。分散化收益与资产贡献。《金融分析师杂志》，48(3):26–32，1992。[2] Pierre Brugi`ere。定量投资组合管理。《*Springer* 商业与经济学丛书》，2020。[3] Benoˆıt Carmichael、Gilles Boevi Koumou 和 Kevin Moran。Rao二次熵与最大分散化指数化。《定量金融》，18(6):1017–1031，2018。[4] Donald R Chambers 和 John S Zdanowicz。分散化收益的局限性。《投资组合管理杂志》，40(4):65–76，2014。[5] Li Chen、Simai He 和 Shuzhong Zhang。若干风险度量的紧界及其在稳健投资组合选择中的应用。《运筹学》，59(4):847–865，2011。[6] Yves Choueifaty 和 Yves Coignard。迈向最大分散化。《投资组合管理杂志》，35(1):40–51，2008。[7] Keith Cuthbertson、Simon Hayley、Nick Motson 和 Dirk Nitzsche。分散化收益、再平衡收益与波动率增益。再平衡收益与波动率增益（*2015*年*1*月*14*日），2015。[8] Victor DeMiguel、Lorenzo Garlappi、Francisco J Nogales 和 Raman Uppal。投资组合优化的广义方法：通过约束投资组合范数提升绩效。《管理科学》，55(5):798–812，2009。

[9] Edwin J Elton、Martin J Gruber、Stephen J Brown 和 William N Goetzmann。现代投资组合理论与投资分析。John Wiley & Sons，2009。[10] Claude B Erb 和 Campbell R Harvey。商品期货的战略与战术价值。《金融分析师杂志》，62(2):69–97，2006。[11] Eugene F Fama 和 Kenneth R French。资本资产定价模型：理论与证据。《经济学展望杂志》，18(3):25–46，2004。[12] Alireza Ghahtarani、Ahmed Saif 和 Alireza Ghasemi。稳健投资组合选择问题：全面综述。《运筹学》，22(4):3203–3264，2022。[13] Jun-ya Gotoh 和 Akiko Takeda。范数约束在投资组合选择中的作用。《计算管理科学》，8(4):323–353，2011。[14] John C Gower。多元分析中使用的潜根与向量方法的若干距离性质。《生物统计学》，53(3-4):325–338，1966。[15] John Clifford Gower。欧氏距离几何。《数学科学》，1:1–14，1982。[16] John Clifford Gower。欧几里得与非欧几里得距离矩阵的性质。《线性代数及其应用》，67:81–97，1985。[17] Jason T Greene 和 David A Rakowski。投资组合收益的来源：基础股票收益与超额增长率。可见 *SSRN 1802591*，2011。[18] Yves Hilpisch。金融*Python*：分析大型金融数据。” O’Reilly Media, Inc.”，2014。[19] Ravi Jagannathan 和 Tongshu Ma。大型投资组合中的风险降低：为何施加错误的约束反而有帮助。《金融学杂志》，58(4):1651–1683，2003。[20] Sergiy Lesyk 和 Andrew Dougan。分散化收益在因子投资组合中的作用。*ftserussell.com*，2021。[21] Jean-Michel Maeso 和 Lionel Martellini。最大化股票投资组合的超额增长率：一种新型智能贝塔策略? 《定量金融》，20(7):1185–1197，2020。[22] Robert C Merton。有效投资组合前沿的解析推导。《金融与定量分析杂志》，7(4):1851–1872，1972。[23] Frieder Meyer-Bullerdiek。再平衡与分散化收益——来自德国股票市场的证据。《金融与投资分析杂志》，6(2):1–28，2017。[24] Hou-Duo Qi。求解最近欧氏距离矩阵问题的半光滑牛顿法。《*SIAM*矩阵分析与应用杂志》，34(1):67–93，2013。[25] Hou-Duo Qi。单因子模型下的仅做多最小方差投资组合。《运筹学快报》，49(5):795–801，2021。[26] Hou-Duo Qi。通过Rao二次熵对最大分散化收益投资组合进行几何刻画。《*SIAM*金融数学杂志》（即将出版），2023。[27] Edward Qian。分散化收益与杠杆投资组合。《投资组合管理杂志》，38(4):14–25，2012。

[28] C Radhakrishna Rao. 多样性：其测量、分解、分配与分析。*Sankhy¯a: The Indian Journal of Statistics, Series A*, 44(1):1–22, 1982.[29] IJ Schoenberg. 对莫里斯·弗雷歇文章《论希尔伯特空间上可向量方式适用的距离空间类的公理化定义》的评述。*Ann. ofMath*, 36:724–732, 1935.[30] William F Sharpe. 资本资产价格：风险条件下的市场均衡理论。***The journal of finance***, 19(3):425–442, 1964.[31] James Tobin. 作为风险行为的流动性偏好。*The review of economic studies*, 25(2):65–86, 1958.[32] Scott Willenbrock. 分散化收益、投资组合再平衡与商品收益之谜。*Financial Analysts Journal*, 67(4):42–49, 2011.[33]Yu-Min Yen and Tso-Jung Yen. 通过逐坐标下降算法求解范数约束的投资组合优化。*Computational Statistics & Data Analysis*, 76:737–759, 2014.[34] Gale Young and Aiston S Householder. 以相互距离描述一组点。*Psychometrika*, 3(1):19–22, 1938.[35] Hongxin Zhao, Lingchen Kong, and Hou-Duo Qi. 通过$\ell_{1,2}$-范数正则化进行最优投资组合选择。《计算优化与应用》, 80(3):853–881, 2021.