arXiv:2303.01688v1 [math.AP] 3 Mar 2023

具有部分小平均振荡系数的时间分数阶抛物型方程

HONGJIE DONG 和 DOYOON KIM

Abstract. 我们证明了散度形式和非散度形式的时间分数阶抛物型方程在 Sobolev 空间中的唯一可解性。对于 a^{ij}, $1 \le i,j \le d$, $(i,j) \neq (1,1)$，主系数关于 (t,x_1) 仅要求可测。系数 a^{11} 在 t 或 x_1 上局部仅要求可测。作为其余变量的函数，这些系数具有小平均振荡。我们研究带有 Muckenhoupt权的混合范数 Sobolev空间。我们的结果将此前关于具有时间分数阶导数的抛物型方程的研究推广到了范围大得多的系数和解空间。

1. Introduction

我们研究具有时间分数阶导数的散度形式和非散度形式抛物型方程。这些方程具有如下形式

$$-\partial_t^\alpha u + D_i(a^{ij}D_j u + a^i u) + b^i D_i u + cu = D_i g_i + f$$

and

$$-\partial_t^\alpha u + a^{ij}D_{ij}u + b^i D_i u + cu = f$$

在 $(0,T) \times \mathbb{R}^d = $ 中： $\mathbb{R}^d_T$，其中 $\partial_t^\alpha u$ 是阶数为$\alpha \in$ （0,1）的 Caputo分数阶时间导数，定义为

$$\partial_t^\alpha u(t,x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\left[u(s,x) - u(0,x)\right] ds$$

对于足够光滑的 $u(t,x)$。

在我们之前的论文 [9], 中，证明了当 $g_i, f \in L_p(\mathbb{R}^d_T)$、 $p \in (1,\infty)$ 和 $b^i = c = 0$ 时，上述方程存在唯一解。 [9] 中的解满足 $u, Du \in L_p(\mathbb{R}^d_T)$ 和 $\partial_t^\alpha u \in \mathbb{H}_p^{-1}(\mathbb{R}^d_T)$（ $\mathbb{H}_p^{-1}$的定义见第 2 节）；对于散度形式的方程，还满足 $u, Du, D^2u, \partial_t^\alpha u \in L_p(\mathbb{R}^d_T)$；这些方程均具有零初始条件。论文 [9] 的新意在于，系数矩阵 $\{a^{ij}\}_{i,\ j=1,\dots,d}$ 除一个对角系数外，允许在时间变量和一个空间变量上不具备任何正则性假设。由于本文中的系数类是对 [9], 的极一般化，下面我们更详细地描述其中的系数。系数 a^{ij} 是 (t,x_1) 的函数 $\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$，且不具备任何

2010 *Mathematics Subject Classification.* 35R11, 26A33, 35R05.*Key words and phrases.* 抛物型方程、时间分数阶导数、可测系数、小平均振荡、Muckenhoupt权。H. Dong 的研究部分受到美国国家科学基金会协议 DMS-2055244、Simons基金会资助（编号 # 709545）以及 Simons Fellowship 的支持。D. Kim 的研究受到韩国国家研究基金会（NRF）由韩国政府（韩国科学技术信息通信部）资助的项目（2019R1A2C1084683）支持。

正则性假设（即仅为可测函数），只需对所有 $i,j=1,\dots,d$ 满足椭圆性和有界性条件（见 (2.7)）。系数 a^{11} 受到限制：它必须是 $a^{11}=a^{11}(t)$ 或 $a^{11}=a^{11}(x_1)$，且不具备任何正则性假设。注意，在具有通常时间导数 u_t的抛物型情形下，如果对于所有 $i,j=1,\dots,d$，$a^{ij}(t,x_1)$ 都不具备任何正则性假设，那么即使 $d=1$，$p\in(1,3/2)$ 或 $p\in(3,\infty)$ 的 Sobolev 空间中的抛物型方程也不唯一可解。反例见 [15] 。因此， [9] 中的系数是最优的，亦即上述对 a^{11} 的限制不可去除。

在本文中，我们将关于具有时间分数阶导数的抛物型方程的已有结果推广到更大范围的系数和解空间。对于解空间，我们考虑带混合范数的加权 Sobolev 空间。见（2.2）。权重的形式为 $w(t,x)=w_1(t)w_2(x)$，其中 $w_1(t)\in A_p(\mathbb{R})$ 且$w_2(x)\in A_q(\mathbb{R}^d)$。这里， $A_p(\cdot)$ 表示一族 Muckenhoupt 权。见（ 2.1 ）。 [8] 中也针对非散度形式方程考虑了此类加权 Sobolev 空间，但其中的系数 $a^{ij}(t,x)$ 仅限于对时间变量可测，并且相对于所有空间变量 $x\in\mathbb{R}^d$ 具有小平均振荡的系数。相比之下，本文中的系数 $a^{ij}=a^{ij}(t,x)$ 是 $(t,x_1)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ （ t 或 x_1 的函数，适用于 a^{11}）的函数，不具有任何正则性假设，并且作为其余变量 $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$ （ $x\in\mathbb{R}^d$ 或 $(t,x')\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{d-1}$ ，适用于 a^{11}）的函数具有小平均振荡，其中 $x'=(x_2,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^{d-1}$ ，适用于 $d=2$、3、.....。见假设 2.6。注意，如果系数 a^{ij}、$(i,j)\neq(1,1)$ 仅是 (t,x_1) 的函数，那么它们与 [9], 中的系数属于同一类，但即使系数 a^{11} 仅是 t 或 x_1 的函数，它也比 [9] 中的系数更一般。我们将在后文进一步讨论关于系数 a^{11} 的假设。考虑此类系数的一个优点是，通过使用偶/奇延拓，我们可以立即得到半空间 $\{x_1>0\}$ 中方程在零狄利克雷边界条件、余法向导数边界条件或诺伊曼边界条件下的相应结果，从而推广 [8] 的主要结果。通过单位分解论证，还可以将结果进一步推广到满足关于 a^{ij} 的适当条件的柱形区域。见注 2.10。

为了在带权抛物型 Sobolev 空间中建立方程的相关结果，我们采用所谓的 L_{p_0}-平均振荡估计， $p_0\in(1,\infty)$，用于系数取自 [9] 的方程的解。参见命题 4.1 和 4.2，其中不涉及权重或混合范数。得到 L_{p_0}-平均振荡估计后，尤其是当 p_0 充分接近 1 时，便可证明带混合范数的加权 Sobolev 空间中的唯一可解性及相应估计。参见下文定理 2.8 和 2.9 的证明，以及 [5] 及其中的参考文献。L_{p_0}-平均振荡估计由 Sobolev 空间中具有非混合范数且不带权重的方程的唯一可解性和先验L_p-估计推导而来。从这个角度看，论文 [9] 可视为本文的前篇。也就是说，我们建立了一系列结果

$$\text{非混合 } L_p \text{ 估计 } \Rightarrow L_{p_0}\text{-平均振荡估计 } \Rightarrow \text{加权 } L_{p,\,q}\text{-估计},$$

其中， [9] 处理了第一个结果，而本文解决了最后两个结果。这一推论链同样适用于具有局部时间导数 u_t 的通常抛物型方程。然而，在时间分数阶抛物型情形中，由于存在非局部时间导数，若沿用例如 [5] 中给出的通常抛物型情形的证明方法，则上述推论链中的第一个推论对于接近 1 的 p_0 并不成立。具体而言，证明这一

第一个推论的主要步骤之一，是提高齐次方程解的正则性。在时间分数阶抛物型情形中，由于时间分数阶导数具有非马尔可夫性质，这种正则性提升过程受到限制。也就是说，函数当前时刻的正则性会受到其全部历史的影响。为克服这一困难，我们借鉴了 [8], 的方法，其主要特点之一是将方程的解分解在形如 $(-\infty,t)\times B_R(x)$ 的无限圆柱中，而非通常的抛物圆柱 $(t-R_1,t)\times B_{R_2}(x)$ 中。此外，我们通过对解进行更精细的分解来发展这一方法，从而得到 D_1u 和 $D_{1j}u,\ j=2,\dots,d$ 的平均振荡估计（分别针对散度形式和非散度形式的方程）；此前的论文中尚未出现这些估计。

我们将进一步阐述 D_1u 和 $D_{1j}u,j=2,\dots,d$的平均振荡估计，并对系数 a^{11} 作一说明。首先回顾一下，已有一些关于具有通常局部时间导数u_t 以及与本文类似的系数 a^{ij} 的抛物型方程的研究。本文的结果可与 [3] 中关于通常散度形式抛物方程的结果，以及 [2] 中关于通常非散度形式抛物方程的结果进行比较。然而，这些先前的结果仅限于不带权的未混合 L_p 空间。在 [3, 2], 中，所需结果是通过例如以下方式得到的：对于散度型方程情形，仅对 $D_ju,\ j=2,\dots,d$进行平均振荡估计，而由于 (t,x_1)中缺少对系数的正则性假设， D_1u 被排除在外。这些平均振荡估计推出了 $D_ju,\ j=2,\dots,d$的 L_p-估计，进而通过精巧的缩放论证证明了 D_1u 的 L_p- 估计（例如，参见[3, 引理 3.4] 或 [9, 引理 3.4]）。对于加权 Sobolev 空间中的方程，缩放论证并不适用，因为它本质上依赖于无权 L_p-范数的缩放不变性（相差一个常数倍）。因此，我们必须处理散度情形下 D_1u 的平均振荡估计，以及非散度情形下 $D_{1j}u,j=2,\dots,d$的平均振荡估计。为获得这类估计，我们采用一种新方法：如上所述，基于精细的分解 $u=w+v=w+\tilde{v}+\hat{}v$，其中 v 是一个齐次方程的解，而 $\hat{}v$ 是一个较简单齐次方程的解。参见引理 3.9。对 D_1u 和 $D_{1j}u,j=2,\dots,d$的平均振荡估计，使我们能够对 a^{11} 作出比 [3, 2]中更一般的假设。区别在于， [3, 2] 中的系数 a^{11} 可以在 t 中可测，也可以在整个区域内x_1 可测；而在本文中， a^{11} 可以在 t 中局部可测，也可以在 x_1 中局部可测。也就是说， a^{11} 可以在区域的一部分中关于 t 可测，而在另一部分中关于 x_1 可测。参见假设 2.6。将本文中的论证以及关于 a^{11} 的假设应用于具有 u_t的方程，可以得到通常抛物型方程的类似结果，这些结果也是新的。还值得注意的是，我们从散度形式方程的结果推出非散度形式方程所需的结果，因此无需分别处理这两种形式的方程。本文发展的技术也可能适用于其他类型的非局部算子方程。

关于我们在时间分数阶抛物方程方面的工作以及文献中的相关结果，读者可参阅论文 [9] 及其中的参考文献。另请参阅 [12], ，该文作者研究了与本文类似的方程，但采用了另一类加权 Sobolev 空间，其中 $\alpha\in(0,2)$，且 $a^{ij}(t,x)$ 连续。此外， [18, 17, 16, 1]中还介绍了希尔伯特空间框架下时间分数阶演化方程的相关结果。

本文其余部分安排如下。下一节将介绍必要的记号，并陈述本文的主要结果。第 3 节中，当系数 a^{ij} 为 (t,x_1) 的函数（a^{11} 是 t 或 x_1的函数）时，我们推导散度形式方程的估计。随后在第 4 节中，我们运用这些结果证明散度情形下 Du 的平均振荡估计，以及非散度情形下D^2u 的平均振荡估计（ D_1^2u除外）。第 5 节中，我们证明主要定理。最后，在附录中，我们给出一个不等式，以处理时间分数阶导数的非局部性质。

2. Notation and Main results

2.1. 符号。我们定义抛物圆柱

$$Q_{R_1,R_2}(t,x)=(t-R_1^{2/\alpha},t)\times B_{R_2}(x),\quad Q_R(t,x)=Q_{R,R}(t,x).$$

对于 $\Omega\subset\mathbb{R}^d$和 $T>0$，我们记 $\Omega_T=(0,T)\times\Omega$。特别地，我们有$\mathbb{R}^d_T=(0,T)\times\mathbb{R}^d$。记

$$D_{x'}u=D_{x_\ell}u,\quad \ell=2,\dots,d.$$

我们用记号 $(u)_{\mathcal{D}}$ 表示 u 在 $\mathcal{D}$上的平均值，其中 $\mathcal{D}$ 是 $\mathbb{R}^{d+1}$的子集。也就是说，

$$(u)_{\mathcal{D}}=\fint_{\mathcal{D}}u(t,x)\,dx\,dt=\frac{1}{|\mathcal{D}|}\int_{\mathcal{D}}u(t,x)\,dx\,dt.$$

设 $\alpha\in(0,1)$ 且 $S\in\mathbb{R}$。我们用 α表示以 S 为原点的 u 积分

$$I_S^\alpha u=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_S^t(t-s)^{\alpha-1}u(s,x)\,ds.$$

特别地，如果 $S=0$，我们记为 $I^\alpha u$。令

$$\partial_t^\alpha u=\partial_t I_S^{1-\alpha}\left(u(\cdot,x)-u(S,x)\right)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\partial_t\int_S^t(t-s)^{-\alpha}\left(u(s,x)-u(S,x)\right)\,ds$$

对于足够光滑的 u，这称为关于时间的 S 处 α 阶 Caputo 分数阶导数（即 S 处的 α 阶时间分数阶导数）。若 u 进一步满足 $u(S,x)=0$，则可知

$$\partial_t^\alpha u=\partial_t I_S^{1-\alpha}u.$$

每当我们写作 $\partial_t^\alpha u$ 时，其原点 S 可由上下文或 $S=0$ 明确，即

$$\partial_t^\alpha u=\partial_t I_0^{1-\alpha}u=\partial_t I^{1-\alpha}u.$$

2.2. 函数空间。这里我们介绍本文所讨论方程的解所处的函数空间。令 $p\in(1,\infty)$ 和 $\alpha\in(0,1)$。

对于 $p\in(1,\infty)$ 和 $k\in\{1,2,\dots\}$，令 $A_p(\mathbb{R}^k,dx)$ 表示定义在 $\mathbb{R}^k$ 上满足以下条件的所有局部可积非负函数 w 的集合

$$[w]_{A_p}:=\sup_{x_0\in\mathbb{R}^k,r>0}\left(\fint_{B_r(x_0)}w(x)\,dx\right)\left(\fint_{B_r(x_0)}w(x)^{-\frac{1}{p-1}}\,dx\right)^{p-1}<\infty,\quad(2.1)$$

其中 $B_r(x_0)=\{x\in\mathbb{R}^k:\,|x-x_0|<r\}$。回顾一下，$[w]_{A_p}\geq1$。

对于 $w(t,x) = w_1(t)w_2(x)$，其中 $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^d$，$w_1 \in A_p(\mathbb{R},dt)$，且 $w_2 \in A_q(\mathbb{R}^d,dx)$，我们将 $L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)$ 设为定义在 $\mathbb{R}^d_T$ 上的所有可测函数 f的集合，使得

$$\|f\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} := \left(\int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t,x)|^q w_2(x)\,dx\right)^{p/q} w_1(t)\,dt\right)^{1/p} < \infty. \tag{2.2}$$

注意，若 $f \in L_{p,\ q,\ w}(\mathbb{R}^d_T)$，根据权重 A_p 的反向 H¨older 不等式（例如参见 [11] 中的推论 7.2.6 和注 7.2.3），存在 $p_0 \in (1,\infty)$，使得对任意 $R>0$，均有 $f \in L_{p_0}((0,T)\times B_R)$。

定义 2.1. 我们称 $u \in \mathbb{H}^{\alpha,\ \overset{0}{p\ q},,w,\ 0}(\Omega_T)$，若 $u \in L_{p,\ q,\ w}(\Omega_T)$，且存在 $f \in L_{p,\ q,\ w}(\Omega_T)$，使得

$$\int_{\Omega_T} I^{1-\alpha}u\,\varphi_t\,dx\,dt = -\int_{\Omega_T} f\,\varphi\,dx\,dt \tag{2.3}$$

对所有 $\varphi \in C_0^\infty([0,T)\times\Omega)$。在此情形下，作为弱导数，我们有 $\partial_t I^{1-\alpha}u = f$。此外还有

$$\partial_t^\alpha u = \partial_t I^{1-\alpha}u. \tag{2.4}$$

参见注 2.2。对于非散度型方程的解，若 k 为正整数，且通常取 $k=2$，我们设

$$\mathbb{H}^{\alpha,k}_{p,q,w,0}(\Omega_T) = \{u \in \mathbb{H}^{\alpha,0}_{p,q,w,0}(\Omega_T) : D^j u \in L_{p,q,w}(\Omega_T), j=1,\dots,k\}$$

其范数为

$$\|u\|_{\mathbb{H}^{\alpha,k}_{p,q,w,0}(\Omega_T)} = \sum_{j=0}^k \|D^j u\|_{L_{p,q,w}(\Omega_T)} + \|\partial_t^\alpha u\|_{L_{p,q,w,0}(\Omega_T)}.$$

注 2.2。注意，(2.3) 中的测试函数 φ 属于 $C_0^\infty([0,T)\times\Omega)$，因此 $\varphi(0,x)$ 不必为零。对于此类测试函数，等式 (2.3) 蕴含等式 (2.4) 对所有 $u \in \mathbb{H}^{\alpha,\ \overset{0}{p\ q},\ ,\ w,\ 0}(\Omega_T)$ 均成立。准确地说，如[13],所示，对于任意 $u \in \mathbb{H}^{\alpha,\ \overset{0}{p\ q},\ ,\ w,\ 0}(\Omega_T)$（以及 $\mathbb{H}^{\alpha,\ \overset{k}{p\ q},\ ,\ w,\ 0}(\Omega_T)$），都存在一个由 u 构成的逼近序列 $\{u_n\}$，使得 $u_n \in C^\infty([0,T]\times\Omega)$，当 $|x|$ 足够大时 u_n 消失（当 Ω 无界时），并且 $u_n(0,x) = 0$。因此，等式 (2.4) 可理解为

$$\partial_t^\alpha u = \lim_{n\to\infty} \partial_t^\alpha u_n = \lim_{n\to\infty} \partial_t I^{1-\alpha}u_n(t,x),$$

其中极限取于 $L_{p,\ q,\ w}(\Omega_T)$ 的范数下。若 $\alpha \in (1/p,1)$，此时初始迹 $u(0,x)$ 是有意义的，则等式 (2.3) 蕴含 $u(0,x)$ 为零。类似地，由下面的 (2.5)，等式 (2.6) 也是有意义的。关于初始迹及其他相关结果，见 [13]。

为引入散度型方程解的函数空间，我们首先如下定义 $\mathbb{H}^{-1}_{p\ q,,w}(\Omega_T)$。若存在 G_i, $F \in L_{p,q,w}(\Omega_T)$，使得 Ω_T 上的分布 v 属于 $v \in \mathbb{H}^{-1}_{p\ q,,w}(\Omega_T)$，则称其

$$v = D_i G_i + F$$

在分布意义下。我们定义 $\mathbb{H}^{-1}_{p\ q,,w}(\Omega_T)$ 的范数为

$$\|v\|_{\mathbb{H}^{-1}_{p,q,w}(\Omega_T)} = \inf\{\|F\|_{L_{p,q,w}(\Omega_T)} + \|G_i\|_{L_{p,q,w}(\Omega_T)} : v = D_i G_i + F\}.$$

定义 2.3。若 $u \in \mathcal{H}^{\alpha,}{}_{p\,q\,,,w,0}^{\,0}(\Omega_T)$，则称其满足此条件，其中 $u \in L_{p,q,w}(\Omega_T)$，并且存在 $g_i, f \in L_{p,q,w}(\Omega_T)$，使得

$$\int_{\Omega_T} I^{1-\alpha} u\, \varphi_t \, dx\, dt = \int_{\Omega_T} (g_i D_i \varphi - f\varphi)\, dx\, dt \tag{2.5}$$

对所有 $\varphi \in C_0^\infty([0,T) \times \Omega)$。也就是说，在分布意义下，

$$\partial_t I^{1-\alpha} u = D_i g_i + f$$

以及 $\partial_t I^{1-\alpha} u \in \mathbb{H}^{-1}_{p\,q,,w}(\Omega_T)$。如注 2.2 所述，我们有

$$\partial_t^\alpha u = \partial_t I^{1-\alpha} u. \tag{2.6}$$

对于散度型方程的解，我们定义

$$\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p,q,w,0}(\Omega_T) = \{u \in \mathcal{H}^{\alpha,0}_{p,q,w,0}(\Omega) : Du \in L_{p,q,w}(\Omega_T)\}$$

其范数为

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p,q,w,0}(\Omega_T)} = \|u\|_{L_{p,q,w}(\Omega_T)} + \|Du\|_{L_{p,q,w}(\Omega_T)} + \|\partial_t^\alpha u\|_{\mathbb{H}^{-1}_{p,q,w}(\Omega_T)}.$$

通常，当 $p = q$ 且 $w(t,x) = 1$ 时，我们记

$$\mathbb{H}^{\alpha,2}_{p,p,1,0}(\Omega_T) = \mathbb{H}^{\alpha,2}_{p,0}(\Omega_T) \quad \text{and} \quad \mathcal{H}^{\alpha,1}_{p,p,1,0}(\Omega_T) = \mathcal{H}^{\alpha,1}_{p,0}(\Omega_T).$$

注 2.4. 在我们之前的论文中，尤其是在 $p = q$ 和 $w = 1$时，对于非散度型方程（例如见 [6]），我们使用了诸如 $\widetilde{\mathbb{H}}^{\alpha,}{}_{p}{}^{2}(\Omega_T)$、$\mathbb{H}^{\alpha,}{}_{p}{}^{2}(\Omega_T)$、$\mathbb{H}^{\alpha,}{}_{p\,0}^{\,2}(\Omega_T)$ 等空间；对于散度型方程（例如见 [7]），则使用了 $\widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha,}{}_{p}{}^{1}(\Omega_T)$、$\mathcal{H}^{\alpha,}{}_{p}{}^{1}(\Omega_T)$、$\mathcal{H}^{\alpha,}{}_{p\,0}^{\,1}(\Omega_T)$ 等空间。本文中，即使使用相同的记号，[6] 和 [7] 中的一些空间也与本文所指的空间不同。事实上，如注 2.2 所述，$u \in \mathbb{H}^{\alpha,}{}_{p\,0}^{\,k}(\Omega_T)$ 可以由具有零初值的无穷可微函数逼近。这意味着，$\mathbb{H}^{\alpha,}{}_{p\,0}^{\,k}(\Omega_T)$ 恰好对应于例如 [6]中使用相同记号的空间。对于例如在 [7]中定义的 $\mathcal{H}^{\alpha,}{}_{p\,0}^{\,1}(\Omega_T)$，情况也相同。然而，[6] 中的空间 $\mathbb{H}^{\alpha,}{}_{p}{}^{k}(\Omega_T)$ 结果与 $\mathbb{H}^{\alpha,}{}_{p\,0}^{\,k}(\Omega_T)$ 相同。类似地，[7] 中的 $\mathcal{H}^{\alpha,}{}_{p}{}^{1}(\Omega_T)$ 与 $\mathcal{H}^{\alpha,}{}_{p\,0}^{\,1}(\Omega_T)$ 相同。本文不使用 $\widetilde{\mathbb{H}}^{\alpha,}{}_{p}{}^{k}(\Omega_T)$ 和 $\widetilde{\mathcal{H}}^{\alpha,}{}_{p}{}^{1}(\Omega_T)$。值得指出的是，根据 [6], 中的定义，要验证 $u \in \mathbb{H}^{\alpha,}{}_{p\,0}^{\,k}(\Omega_T)$，必须找到一个逼近序列 $\{u_n\}$，使得 $u_n \in C^\infty([0,T] \times \Omega)$ 且 $u_n(0,x) = 0$。然而，根据定义 2.1，我们现在只需检查等式 (2.3) 是否对来自 $C_0^\infty([0,T) \times \Omega)$ 的所有测试函数成立。类似地，要验证 $u \in \mathcal{H}^{\alpha,}{}_{p\,0}^{\,1}(\Omega_T)$，我们只需检查 (2.5) 是否对所有 $\varphi \in C_0^\infty([0,T) \times \Omega)$ 成立。

2.3. 假设。全文中，我们假设存在 $\delta \in (0,1)$，使得

$$a^{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \geq \delta|\xi|^2, \quad |a^{ij}(t,x)| \leq \delta^{-1} \tag{2.7}$$

对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 以及 $(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$。

为陈述关于 a^{ij} 的正则性假设，我们首先引入系数 a^{ij}，它们在 (t,x_1) 上可测，但 $(i,j) = (1,1)$ 除外。对于 a^{11}，我们有 $a^{11} = a^{11}(t)$ 或 $a^{11} = a^{11}(x_1)$。

假设 2.5。满足椭圆性（及有界性）条件 (2.7) 的系数矩阵 $\{a^{ij}\}_{i,j=1,\dots,d}$ 满足以下 (i) 或 (ii)。

(i) $a^{11} = a^{11}(t)$, $a^{ij} = a^{ij}(t,x_1)$ for $(i,j) \neq (1,1)$.

(ii) $a^{11}=a^{11}(x_1)$, $a^{ij}=a^{ij}(t,x_1)$ for $(i,j)\neq(1,1)$.

以下是我们对部分小平均振荡系数的假设。如上所述， a^{ij}始终满足 (2.7)。我们还对低阶系数施加有界性假设。

对于 $x\in\mathbb{R}^d$，我们记为 $x=(x_1,x')$，其中 $x_1\in\mathbb{R}$ 和 $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$。然后记

$$B_r'(x')=\{y'\in\mathbb{R}^{d-1}:|x'-y'|<r\},\quad Q_r'(t,x')=(t-r^{2/\alpha},t)\times B_r'(x').$$

假设 2.6（γ_0）。存在常数 $R_0\in(0,1]$ 满足以下条件。

(1) 对于每个 $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^{d+1}$ 和 $r\in(0,R_0]$，系数 a^{ij} 在 $(i,j)\neq(1,1)$ 上满足

$$\fint_{Q_r(t_0,x_0)}|a^{ij}(t,x_1,x')-\bar{a}^{ij}(t,x_1)|\,dx\,dt\le\gamma_0,$$

其中

$$\bar{a}^{ij}(t,x_1)=\fint_{B_r'(x_0')}a^{ij}(t,x_1,y')\,dy'. \tag{2.8}$$

(2) 对于每个 $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^{d+1}$，系数 a^{11} 满足以下条件 (2.i) 或 (2.ii)。

(2.i) 对于满足 $t_1\in(t_0-3R_0^{2/\alpha},t_0]$ 和 $r\in(0,R_0]$ 的 (t_1,x_0)，

$$\fint_{Q_r(t_1,x_0)}|a^{11}(t,x_1,x')-\bar{a}^{11}(t)|\,dx\,dt\le\gamma_0,$$

其中

$$\bar{a}^{11}(t)=\fint_{B_r(x_0)}a^{11}(t,y)\,dy. \tag{2.9}$$

(2.ii) 对于满足 $t_1\in(t_0-3R_0^{2/\alpha},t_0]$ 和 $r\in(0,2^{\alpha/2}R_0]$ 的 (t_1,x_0)，

$$\fint_{Q_r(t_1,x_0)}|a^{11}(t,x_1,x')-\bar{a}^{11}(x_1)|\,dx\,dt\le\gamma_0,$$

其中

$$\bar{a}^{11}(x_1)=\fint_{Q_r'(t_1,x_0')}a^{11}(s,x_1,y')\,dy'\,ds. \tag{2.10}$$

对于低阶系数 a^i、b^i 和 c，存在 $K_0\ge0$ 使得

$$|a^i|\le K_0,\quad |b^i|\le K_0,\quad |c|\le K_0.$$

注 2.7。在假设 2.6 下，我们注意到，对于任意 $R\in(r^{2/\alpha},2R_0^{2/\alpha}]$ 和 $r\le R_0$，

$$\fint_{t_0-R}^{t_0}\fint_{B_r(x_0)}|a^{ij}-\bar{a}^{ij}|\,dx\,dt\le2\gamma_0$$

对于满足（i,j）$\neq(1,1)$ 的 a^{ij}，以及满足（2.i）的 a^{11}，其中 $\bar{a}^{ij}$ 对于满足（i,j）$\neq(1,1)$ 的 a^{ij} 取（2.8）中的表达式，对于 a^{11} 则取（2.9）中的表达式。对于满足（2.ii）的 a^{11}，我们有

$$\fint_{t_0-R}^{t_0}\fint_{B_r(x_0)}|a^{11}-\bar{a}^{11}|\,dx\,dt\le N\frac{R}{r^{2/\alpha}}\gamma_0,$$

其中 $\bar{a}^{11}$ 见式 (2.10)，而 $N=N(d,\alpha)$。上述不等式的证明参见 [6, 注 2.3] 和 [10, 引理 2.14]。

2.4. 主要结果。我们的第一个主要定理针对散度形式的方程。所谓方程 (2.11) 的解 u，是指 u 满足

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(I^{1-\alpha} u \, \varphi_t \, dx \, dt - a^{ij} D_j u D_i \varphi - a^i u D_i \varphi + b^i D_i u \varphi + c u \varphi \right) dx \, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (f \varphi - g_i D_i \varphi) \, dx \, dt$$

对于任意 $\varphi \in C_0^\infty \left([0,T) \times \mathbb{R}^d \right)$。如注 2.2 所述，根据$\mathcal{H}^{\alpha}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)$ 的定义（上述表述亦然），若初始迹有意义，则 (2.11) 是一个具有零初始条件的方程。

定理 2.8（散度情形）。设 $\alpha \in (0,1)$，$T \in (0,\infty)$，$p, q \in (1,\infty)$，$K_1 \in [1,\infty)$，且 $w(t,x) = w_1(t) w_2(x)$，其中

$$w_1(t) \in A_p(\mathbb{R}, dt), \quad w_2(x) \in A_q(\mathbb{R}^d, dx), \quad [w_1]_{A_p} \le K_1, \quad [w_2]_{A_q} \le K_1.$$

那么，存在 $\gamma_0 = \gamma_0(d, \delta, \alpha, p, q, K_1) \in (0,1)$，使得在假设 2.6 ($\gamma_0$) 下，以下结论成立。

对于满足以下条件的任意 $u \in \mathcal{H}^{\alpha}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)$

$$-\partial_t^\alpha u + D_i(a^{ij} D_j u + a^i u) + b^i D_i u + c u = D_i g_i + f \tag{2.11}$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，其中 $g_i, f \in L_{p,q,w}(\Omega_T)$，我们有

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)} \le N \|g_i\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} + N \|f\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)}, \tag{2.12}$$

其中 $N = N(d, \delta, \alpha, p, q, K_1, K_0, R_0, T)$。此外，对于 $g_i, f \in L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)$，存在唯一解 $u \in \mathcal{H}^{\alpha}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)$，满足 (2.11)。

这是我们关于非散度形式方程的主要定理。方程 (2.13) 几乎处处成立；根据 $\mathbb{H}^{\alpha}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)$ 的定义，若初始迹有意义，则其初始条件为零。

定理 2.9（非散度情形）。设 α, T, p, q, K_1 和 w 与定理 2.8 中相同。则存在 $\gamma_0 = \gamma_0(d, \delta, \alpha, p, q, K_1) \in (0,1)$，使得在假设 2.6 ($\gamma_0$) 下，以下结论成立。

对于满足条件的任意 $u \in \mathbb{H}^{\alpha}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)$

$$-\partial_t^\alpha u + a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u + c u = f \tag{2.13}$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，其中 $f \in L_{p,q,w}(\Omega_T)$，我们有

$$\|u\|_{\mathbb{H}^{\alpha,2}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)} \le N \|f\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)}, \tag{2.14}$$

其中 $N = N(d, \delta, \alpha, p, q, K_1, K_0, R_0, T)$。此外，对于 $f \in L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)$，存在唯一的 $u \in \mathbb{H}^{\alpha}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)$ 满足 (2.13)。

注 2.10. 利用偶/奇延拓，根据定理 2.8 和 2.9，我们可以直接得到半空间 $\{x_1 > 0\}$ 中相应的结果，边界条件可以是零狄利克雷边界条件（适用于散度形式和非散度形式的方程）、余法向导数（适用于散度形式的方程），或诺伊曼边界条件（适用于非散度形式的方程）。关于细节，请参阅 [3, 定理 2.4 和 2.5] 的证明。我们指出，对于定义在全欧几里得空间和半空间之外的足够正则区域上的方程，可以处理在 t 中或在一个空间变量方向上具有 a^{ij} 可测系数的抛物型方程（而非像本文中那样在两个空间变量方向上都具有可测系数）。

t 以及一个空间变量方向上的可测系数）。特别是，在边界附近， a^{ij} 可测的空间方向必须（几乎）垂直于边界。另请参阅 [4]，了解具有受限 p 范围的非散度形式抛物型方程（其 u_t 在边界的切向方向上可测）的相关结果。

3. Equations in divergence form with measurable coefficients

在本节中，我们考虑

$$\partial_t^\alpha u + D_i(a^{ij}D_j u) = D_i g_i + f$$

其中的系数 a^{ij} 满足假设 2.5。

命题 3.1（右端项具有较低的可求和性）。设 $\alpha \in (0,1)$、 $p \in (1,\infty)$、 $T \in (0,\infty)$，且 a^{ij} 满足假设 2.5。则，对于 $g_i \in L_p(\mathbb{R}^d_T)$ 和 $f \in L_q(\mathbb{R}^d_T)$，其中 $q \in (1,\infty)$，以及

$$\frac{1}{d+2/\alpha} + \frac{1}{p} \geq \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p},$$

存在唯一函数 u，其定义于 $\mathbb{R}^d_T$上，使得 u、 $Du \in L_p(\mathbb{R}^d_T)$，并且

$$-\partial_t^\alpha u + D_i\left(a^{ij}D_j u\right) = D_i g_i + f \tag{3.1}$$

在$\mathbb{R}^d_T$ 中，具有估计

$$\|u\|_{L_p(\mathbb{R}^d_T)} + \|Du\|_{L_p(\mathbb{R}^d_T)} \leq N\|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^d_T)} + N\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^d_T)}, \tag{3.2}$$

其中 $N_0 = N_0(d,\delta,\alpha,p,q,T)$。

证明。取一个序列 $\{f^k\}$，使得 $f^k \in L_p \cap L_q(\mathbb{R}^d_T)$ 且 $f_k \to f$ 属于 $L_q(\mathbb{R}^d_T)$。利用 [9, 定理 2.2]，可得 $u^k \in \mathcal{H}^{\alpha}_{,p\ 0}{}^{1}_{,}(\mathbb{R}^d_T)$，满足

$$-\partial_t^\alpha u^k + D_i\left(a^{ij}D_j u^k\right) = D_i g_i + f^k$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中。对于 $\phi_i, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d_T)$， $i = 1,\dots,d$，再次利用 [9, 定理 2.2]，可得 $w \in \mathcal{H}^{\alpha}_{,p'}{}^{1}_{,0}\left((-T,0)\times\mathbb{R}^d\right)$, $1/p + 1/p' = 1$，满足

$$-\partial_t^\alpha w + D_i\left(a^{ji}(-t,x_1)D_j w\right) = D_i\left(-\phi_i(-t,x)\right) + \psi(-t,x)$$

在 $(-T,0)\times\mathbb{R}^d$ 中，其中 $\partial_t^\alpha = \partial_t I_{-T}^{1-\alpha}$，具有估计

$$\|w\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p',0}((-T,0)\times\mathbb{R}^d)} \leq N\|\phi_i\|_{L_{p'}((-T,0)\times\mathbb{R}^d)} + N\|\psi\|_{L_{p'}((-T,0)\times\mathbb{R}^d)}. \tag{3.3}$$

由于

$$1 - \frac{d+2/\alpha}{p'} \geq -\frac{d+2/\alpha}{q'},$$

由 [9, 定理 7.5] 可得

$$\|w\|_{L_{q'}((-T,0)\times\mathbb{R}^d)} \leq N\|w\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p',0}((-T,0)\times\mathbb{R}^d)}, \tag{3.4}$$

其中 $N = N(d, \alpha, p, q)$。然后，按照 [7, 定理 2.1]的证明进行推导，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(\phi_i D_i u^k + \psi u^k\right) \, dx \, dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \left(f^k(t,x) w(-t,x) - g_i(t,x) D_i w(-t,x)\right) \, dx \, dt \\
&\leq \|f^k\|_{L_q} \|w\|_{L_{q'}} + \|g_i\|_{L_p} \|Dw\|_{L_{p'}},
\end{aligned}$$

其中 $L_q, L_p = L_q, L_p(\mathbb{R}^d_T)$ 和 $L_{q'}, L_{p'} = L_{q'}, L_{p'}((-T, 0) \times \mathbb{R}^d)$。将上述不等式与 (3.3) 和 (3.4) 结合可得

$$\|u^k\|_{L_p(\mathbb{R}^d_T)} + \|Du^k\|_{L_p(\mathbb{R}^d_T)} \leq N \|g_i\|_{L_p(\mathbb{R}^d_T)} + N \|f^k\|_{L_q(\mathbb{R}^d_T)}.$$

根据该不等式以及 $\|I_0^{1-\alpha} u^k\|_{L_p} \leq N \|u^k\|_{L_p}$ （见 [6, 注 A.3]）和 $f_k \to f$ 属于 $L_q(\mathbb{R}^d_T)$ 这一事实，我们可知存在一个定义在 $\mathbb{R}^d_T$ 上的函数 u，使得 $u, Du \in L_p(\mathbb{R}^d_T)$，并且 u 满足 (3.1) 和 (3.2)。命题得证。□

注 3.2. 在命题 3.1 中，若 $g_i \in L_q \cap L_p(\mathbb{R}^d_T)$，则根据 [9, 定理 2.2] 及 q，我们还有 $u \in \mathcal{H}^{\alpha, \frac{1}{q}}_{0}(\mathbb{R}^d_T)$。特别地，$\partial_t^\alpha u \in \mathbb{H}^{-1}_q(\mathbb{R}^d_T)$，但我们不一定有 $\partial_t^\alpha u \in \mathbb{H}^{-1}_p(\mathbb{R}^d_T)$，因为 $f \in L_q(\mathbb{R}^d_T)$。

下面引理 3.3 的证明采用了与含局部时间导数的抛物型方程的 [3, 引理 4.2] 证明类似的迭代论证。然而，在这里给出的每个迭代步骤中，我们都会验证解 v 属于 $\mathcal{H}^{\alpha, \frac{1}{p_j}}_{0}$，因为我们需要应用一个仅在该空间中成立的嵌入结果。具体而言，若遵循 [3, 引理 4.2], 的证明，我们知道 $D_{x'} u, u \in L_{p_1}$，但只有事先已知 $u \in \mathcal{H}^{\alpha, \frac{1}{p_1}}_{0}$ 时，才能用 $\|D_{x'} u\|_{p_1}$ 控制 $\|D_1 u\|_{p_1}$。

回顾一下，若 $v \in \mathcal{H}^{\alpha, \frac{1}{p}}_{0}((0,T) \times B_R)$ 满足

$$-\partial_t^\alpha v + D_i \left(a^{ij} D_j v\right) = D_i g_i + f$$

在 $(0,T) \times B_R$ 中，若

$$\int_0^T \int_{B_R} \left(I^{1-\alpha} v \, \varphi_t \, dx \, dt - a^{ij} D_j v D_i \varphi\right) \, dx \, dt = \int_0^T \int_{B_R} (f\varphi - g_i D_i \varphi) \, dx \, dt$$

对任意 $\varphi \in C_0^\infty([0,T) \times B_R)$ 均成立。特别地，$\varphi(0,x)$ 不一定为零。

引理 3.3. 设 $\alpha \in (0,1)$、$p_0 \in (1, \infty)$、$T \in (0, \infty)$、$0 < r < R < \infty$ 和 a^{ij} 满足假设 2.5。假设 $v \in \mathcal{H}^{\alpha, \frac{1}{p_0}}_{0}((0,T) \times B_R)$ 满足

$$-\partial_t^\alpha v + D_i \left(a^{ij} D_j v\right) = 0 \tag{3.5}$$

在 $(0,T) \times B_R$ 中。因此，$v \in \mathcal{H}^{\alpha, \frac{1}{p_1}}_{0}((0,T) \times B_r)$ 对任意 $p_1 \in (1, \infty)$ 均成立。此外，对于任意阶数为 $|\beta| = 1$、2、.....的多重指标 $\beta = (\beta_2, \ldots, \beta_d)$，函数 $v_\beta := D^\beta_{x'} v$ 属于 $\mathcal{H}^{\alpha, \frac{1}{p_1}}_{0}((0,T) \times B_r)$，并满足

$$-\partial_t^\alpha v_\beta + D_i(a^{ij} D_j v_\beta) = 0 \tag{3.6}$$

在 $(0,T)\times B_r$ 中。此外，对于任意 $t_0\le T$、$0<\nu<\mu$，以及满足附录 A 中 (A.3) 的序列 $\{s_k\}$，我们有

$$\begin{aligned}&\|Dv_\beta\|_{L_{p_1}((t_0-\nu,t_0)\times B_{r/2})}\\&\le\frac{N}{r}\|v_\beta\|_{L_{p_1}((t_0-\mu,t_0)\times B_r)}+Nr\frac{\mu^{1-\alpha}}{\mu-\nu}\|v_\beta\|_{L_{p_1}((t_0-2\mu,t_0-\nu)\times B_r)}\\&\quad+N_1r\sum_{k=1}^{\infty}s_k^{-\alpha-1}(s_{k+1}-s_k)^{1-\frac{1}{p_1}}\mu^{\frac{1}{p_1}}\left(\int_{t_0-s_{k+1}}^{t_0-s_k}\int_{B_r}|v_\beta(t,x)|^{p_1}\,dx\,dt\right)^{1/p_1},\end{aligned}\tag{3.7}$$

其中 $N=N(d,\delta,\alpha,p_1)$、$N_1=N(d,\delta,\alpha,p_1,N_0)$（回顾 (A.3) 中的 N_0），且 v_β表示 v_β 在 $t\le0$上的零延拓。

证明。为证明引理中的第一个断言，只需考虑 $p_1\in(p_0,\infty)$。取满足以下条件的 $p_1\in(p_0,\infty)$:

$$1-\frac{d+2/\alpha}{p_0}\ge-\frac{d+2/\alpha}{p_1}.\tag{3.8}$$

固定 R_1和 R_2，使得 $0<r<R_1<R_2<R$。由于 $v\in\mathcal{H}^{\alpha,\,{p_0}^{1},\,0}((0,T)\times B_R)$，由推论 7.6] 可知，存在 $v\in L_{p_1}((0,T)\times B_{R_1})$，满足不等式

$$\|u\|_{L_{p_1}((0,T)\times B_{R_1})}\le N\|u\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_0,0}((0,T)\times B_{R_2})}.\tag{3.9}$$

设 $\phi(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}^d$ 上的无穷次可微函数，使得 $\phi(x)=1$在 B_r 上成立，且 $\phi(x)=0$ 在 $\mathbb{R}^d\setminus B_{R_1}$上成立。我们看到 ϕv属于 $\mathcal{H}^{\alpha,\,{p_0}^{1},\,0}(\mathbb{R}^d_T)$，并满足

$$-\partial_t^\alpha(\phi v)+D_i\left(a^{ij}D_j(\phi v)\right)=D_i\left(a^{ij}vD_j\phi\right)+a^{ij}D_jvD_i\phi$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，其中 $a^{ij}vD_j\phi\in L_{p_0}\cap L_{p_1}(\mathbb{R}^d_T)$ 且 $a^{ij}D_jvD_i\phi\in L_{p_0}(\mathbb{R}^d_T)$。于是，由命题 3.1（另见注 3.2）及 (3.9)，可得 $\phi v,D(\phi v)\in L_{p_1}(\mathbb{R}^d_T)$，并有如下估计

$$\begin{aligned}&\||v|+|Dv|\|_{L_{p_1}((0,T)\times B_r)}\le\|vD\phi\|_{L_{p_1}(\mathbb{R}^d_T)}+\|DvD\phi\|_{L_{p_0}(\mathbb{R}^d_T)}\\&\le N\|v\|_{L_{p_1}((0,T)\times B_{R_1})}+N\|Dv\|_{L_{p_0}((0,T)\times B_{R_1})}\le N\|v\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_0,0}((0,T)\times B_{R_2})}\\&\le N\|v\|_{L_{p_0}((0,T)\times B_{R_2})}+N\|Dv\|_{L_{p_0}((0,T)\times B_{R_2})}\le N\|v\|_{L_{p_0}((0,T)\times B_R)},\end{aligned}\tag{3.10}$$

其中，在第四个不等式中，我们利用方程 (3.5) 将$\|\partial_t^\alpha v\|_{\mathbb{H}^{-1}_{p_0}((0,T)\times B_{R_2})}$上界估计为$\|Dv\|_{L_{p_0}((0,T)\times B_{R_2})}$。(3.10) 中的最后一个不等式由引理 4.3]和定理 2.2]得到。因此，由 (3.10) 和方程 (3.5) 可得 $v\in\mathcal{H}^{\alpha,\,{p_1}^{1},0}((0,T)\times B_r)$，并且

$$\|v\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_1,0}((0,T)\times B_r)}\le N\|v\|_{L_{p_0}((0,T)\times B_R)}.$$

事实上，为了验证 $v\in\mathcal{H}^{\alpha,\,{p_1}^{1},0}((0,T)\times B_r)$，我们利用方程 (3.5) 得知，$v\in L_{p_1}((0,T)\times B_r)$ 满足等式 (2.5)，其中 g_i 被 $a^{ij}D_jv$ 和 $f=0$ 替换，对所有 $\varphi\in C_0^\infty([0,T)\times B_r)$ 均成立。

通过有限次重复上述论证，直到达到 p_1，我们完成了对任意 $p_1\in(p_0,\infty)$ 的第一个断言的证明。特别是，在迭代的每一步中，都必须满足 $u\in\mathcal{H}^{\alpha,\,{p_j}^{1},0}((0,T)\times B_{r_j})$，$p_0<p_j\le p_1, r<r_j<R$，因为嵌入（见 [9, 推论 7.6]）适用于此类空间中的函数。

引理的第二个断言实际上是 [9, 引理 4.1] 的简化版本，其中没有截断函数 η，且右端项为零。更准确地说，我们令

$$\Delta_{\ell,h}v(t,x)=\frac{v(t,x+he_\ell)-v(t,x)}{h},\quad 0<h<\frac{R-r}{2},$$

其中，e_ℓ 是沿 x_ℓ方向的单位向量。利用上文证明的第一个断言，我们得到$\Delta_{\ell,\,h}v(t,x)\in\mathcal{H}^{\alpha,\,p_1}_{1,\,0}((0,T)\times B_{R_1})$，其中 $R_1\in(0,(R+r)/2)$。由于 a^{ij} 仅为 (t,x_1) 的函数，我们还得到

$$-\partial_t^\alpha\left(\Delta_{\ell,h}v\right)+D_i\left(a^{ij}D_j\left(\Delta_{\ell,h}v\right)\right)=0$$

在$(0,T)$中，$\times B_{R_1}$对于 $\ell=2,\dots,d$成立。然后，利用$\Delta_{\ell,\,h}$和 [9, 定理2.2] 的性质，如引理4. [9, 的证明所示，我们得到该断言。

最后，我们证明(3.7)。根据 [7, 引理3.3]，延拓函数 v_β（当 $t\le 0$时为零）属于 $\mathcal{H}^{\alpha,\,p_1}_{1,\,0}((S,t_0)\times B_r)$，其中 $S\le 0$任意。此外，v_β在$(S,t_0)\times B_r$中满足(3.6)，其中 $\partial_t^\alpha v=\partial_t I_S^{1-\alpha}v$。令 $S=\min\{t_0-\mu,0\}$，并从(A.1)中取 $\eta(t)$。于是，由 [7, 引理 3.4]，ηv_β属于 $\mathcal{H}^{\alpha,\,p_1}_{1,\,0}((t_0-\mu,t_0)\times B_r)$，且满足

$$-\partial_t^\alpha(\eta v_\beta)+D_i\left(a^{ij}D_j(\eta v_\beta)\right)=\mathcal{G}_\beta(t,x)\tag{3.11}$$

在 $(t_0-\mu,t_0)\times B_r$ 中，其中 $\mathcal{G}_\beta$ 的定义与 (A.2) 相同，只是将 u 替换为 v_β。将 [7, 引理 4.3] 与 [9, 定理 2.2]应用于 (3.11)，可得

$$\begin{aligned}&\|D(\eta v_\beta)\|_{L_{p_1}\left((t_0-\mu,t_0)\times B_{r/2}\right)}\\&\qquad\le\frac{N}{r}\|v_\beta\|_{L_{p_1}((t_0-\mu,t_0)\times B_r)}+Nr\|\mathcal{G}_\beta\|_{L_{p_1}((t_0-\mu,t_0)\times B_r)},\end{aligned}\tag{3.12}$$

其中 $N=N(d,\delta,\alpha,p_1)$。为处理 $\mathcal{G}_\beta$ 的 L_{p_1}-范数，我们采用例如 [8, 引理 4.1] 的证明中的论证。为方便读者并供后续使用，我们在附录 A 中给出一些细节。也就是说，根据引理 A.1（其中 $p=p_1$、$\Omega=B_r$ 和 $u=v_\beta$），可知

$$\begin{aligned}\|\mathcal{G}_\beta\|_{L_{p_1}((t_0-\mu,t_0)\times B_r)}&\le N(\alpha)\frac{\mu^{1-\alpha}}{(\mu-\nu)}\|v_\beta\|_{L_{p_1}((t_0-2\mu,t_0-\nu)\times B_r)}\\&+N(\alpha,N_0)\sum_{k=1}^{\infty}s_k^{-\alpha-1}(s_{k+1}-s_k)^{1-1/p_1}\mu^{1/p_1}\left(\int_{t_0-s_{k+1}}^{t_0-s_k}\int_{B_r}|v_\beta(t,x)|^{p_1}\,dx\,dt\right)^{1/p_1}.\end{aligned}$$

由此以及 (3.12)，结合以下不等式，可得 (3.7)

$$\|Dv_\beta\|_{L_{p_1}\left((t_0-\nu,t_0)\times B_{r/2}\right)}\le\|D(\eta v_\beta)\|_{L_{p_1}\left((t_0-\mu,t_0)\times B_{r/2}\right)}.$$

引理得证。 □

引理 3.4. 设 $\alpha\in(0,1)$、$p_0\in(1,\infty)$、$t_0\in(0,\infty)$、$0<r<R<\infty$和 a^{ij} 满足假设 2.5。若 $v\in\mathcal{H}^{\alpha,\,p_0}_{1,\,0}((0,t_0)\times B_R)$ 在 $(0,t_0)\times B_R$ 中满足 (3.5)，则对于任意 $p\in(p_0,\infty)$ 和 $t_1\le t_0$，有

$$\left(|D_{x'}v|^p\right)^{1/p}_{Q_{r/2}(t_1,0)}\le N\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(1+\alpha)}\left(|D_{x'}v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{Q_r(t_1-(j-1)r^{2/\alpha},0)},\tag{3.13}$$

其中 $N = N(d, \delta, \alpha, p_0, p)$，而 v（以下同）表示 v 在 $t \le 0$ 上的零延拓。此外，

$$[D_{x'}v]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{r/2}(t_1,0))} \le Nr^{-\sigma}\sum_{j=1}^{\infty} j^{-(1+\alpha)} \left(|D_{x'}v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{Q_r(t_1-(j-1)r^{2/\alpha},0)}, \quad (3.14)$$

其中 $\sigma = \sigma(d, \alpha, p_0) \in (0, 1)$，且 $N = N(d, \delta, \alpha, p_0)$。如果进一步假设对所有 $i, j = 1, \dots, d$，都有 $a^{ij} = a^{ij}(t)$，那么不等式 (3.13) 和 (3.14) 两边以 Dv 替换 $D_{x'}v$ 后仍成立。

证明。由于缩放，只需考虑 $r = 1$。由于 $v \in \mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_0,0}((0, t_0) \times B_R)$，不难看出，将 v 在 $t \le 0$ 处延拓为零后满足

$$-\partial_t^\alpha v + D_i\left(a^{ij}D_j v\right) = 0 \quad (3.15)$$

在 $(S, t_0) \times B_R$ 中，对任意 $S \le 0$均成立，其中 $\partial_t^\alpha v = \partial_t I_S^{1-\alpha} v$。事实上，延拓后的 v满足 (2.5)，其中 Ω_T 替换为 $(S, t_0) \times B_R$，$g_i = a^{ij}D_j v$，且对任意 $\varphi \in C_0^\infty([S, t_0) \times B_R)$，都有 $f = 0$。因此，对任意 $S \le 0$，延拓后的 v属于 $\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_0,0}((S, t_0) \times B_R)$。此外，根据引理 3.3，对任意$q \in (1, \infty)$，有 $v \in \mathcal{H}^{\alpha,1}_{q,0}((S, t_0) \times B_1)$。取 (A.1) 中的 $\eta(t)$，并将 t_0 替换为 t_1，且令 $\mu = 1, \nu = (1/2)^{2/\alpha}$。然后，选择 $S \le t_1 - 1$ 并在引理 4.1] 中分别以 t_1 和 $t_1 - 1$ 替换 T和 t_0，可得 $D_\ell(\eta v) \in \mathcal{H}^{\alpha,1}_{q,0}((t_1 - 1, t_1) \times B_{3/4}), \ell = 2, \dots, d$，并且

$$\begin{aligned}\|D_\ell(\eta v)\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{q,0}((t_1-1,t_1)\times B_{3/4})} &\le N\|D_\ell(\eta v)\|_{L_q(Q_1(t_1,0))} + N\|\mathcal{G}_\ell\|_{L_q(Q_1(t_1,0))} \\ &\le N\sum_{j=1}^{\infty} j^{-(1+\alpha)} \left(|D_\ell v|^q\right)^{1/q}_{Q_1(t_1-(j-1),0)}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

其中 $N = N(d, \delta, \alpha, q)$ 和 $\mathcal{G}_\ell$ 的定义与 (A.2) 中相同，只需将 u 替换为 $D_\ell v$。特别地，取 $p = q$、$\Omega = B_1$, $s_k = k$, $u = D_\ell v$, $N_0 = 2$ 和 $\mu = 1, \nu = (1/2)^{2/\alpha}$，利用引理 A.1 可得 (3.16) 中的第二个不等式。

现在证明 (3.13)。求满足 (3.8) 的 $p_1 \in (p_0, \infty)$。由于 $D_\ell(\eta v) \in \mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_0,0}((t_1 - 1, t_1) \times B_{3/4})$，根据推论 7.6] ，我们有

$$\begin{aligned}\|D_\ell v\|_{L_{p_1}(Q_{1/2}(t_1,0))} &\le \|D_\ell(\eta v)\|_{L_{p_1}((t_1-1,t_1)\times B_{1/2})} \\ &\le N\|D_\ell(\eta v)\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_0,0}((t_1-1,t_1)\times B_{3/4})},\end{aligned}$$

将其与 $q = p_0$ 的 (3.16) 结合，即可证明

$$\left(|D_{x'}v|^{p_1}\right)^{1/p_1}_{Q_{1/2}(t_1,0)} \le N\sum_{j=1}^{\infty} j^{-(1+\alpha)} \left(|D_{x'}v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{Q_1(t_1-(j-1),0)}.$$

若 $p_1 \ge p$，则可得带有 $r = 1$ 的 (3.13)。若非如此，则按照命题 4.3], 的证明中所述进行迭代，最终可得 (3.13)。

为证明 (3.14)，我们首先假设 $1 - (d + 2/\alpha)/p_0 =: \sigma > 0$。根据 $D_\ell(\eta v) \in \mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_0,0}((t_1 - 1, t_1) \times B_{3/4})$，[9, 推论 7.4] 表明

$$\begin{aligned}[D_\ell v]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{1/2}(t_1,0))} &\le [D_\ell(\eta v)]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}((t_1-1,t_1)\times B_{1/2})} \\ &\le N\|D_\ell(\eta v)\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_0,0}((t_1-1,t_1)\times B_{3/4})}.\end{aligned}$$

由此以及 (3.16)，取 $q = p_0$，可得 (3.14)，其中 $r = 1$。若 $1 - (d + 2/\alpha)/p_0 \le 0$，重复上述论证，即可证明 (3.14)，其中 p_1 足够大

将右端的 p_0 替换，使得 $1-(d+2/\alpha)/p_1>0$。然后，通过 [8, 命题 4.3] 的证明中所述的迭代过程，可用 (3.13) 的右端估计 (3.14) 的右端。

若 $a^{ij}=a^{ij}(t)$，我们使用引理 4.1] 中相应的断言重复上述证明。该引理得证。□

记

$$V=\sum_{j=1}^{d}a^{1j}D_jv.$$

为了处理满足假设 2.5 (ii) 的方程系数，我们需要以下关于系数为 $a^{ij}=a^{ij}(x_1)$ 的方程的引理。为了利用 [7], 中的结果，我们进一步假设 $a^{ij}(x_1)$ 无穷次可微且具有有界导数。不过，这一限制无妨，因为我们下面得到的估计与 a^{ij} 的光滑性无关，正如 [7] 中一样。回顾一下，本文中的所有系数 a^{ij} 均满足椭圆性条件 (2.7)，下面引理中的系数 a^{ij} 也满足该条件。

引理 3.5（$a^{ij}=a^{ij}(x_1)$ 情形）。设 $\alpha\in(0,1)$、$p_0\in(1,\infty)$、$t_0\in(0,\infty)$、$0<r<R<\infty$ 以及 $a^{ij}=a^{ij}(x_1)$ 均无穷次可微且具有有界导数。若 $v\in\mathcal{H}^{\alpha}_{p_0,0}((0,t_0)\times B_R)$ 在 $(0,t_0)\times B_R$ 中满足 (3.5)，则对任意 $p\in(p_0,\infty)$ 和 $t_1\le t_0$，有

$$(|Dv|^p)^{1/p}_{Q_{r/2}(t_1,0)}\le N\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(1+\alpha)}\,(|Dv|^{p_0})^{1/p_0}_{Q_r(t_1-(j-1)r^{2/\alpha},0)}\,, \tag{3.17}$$

其中 $N=N(d,\delta,\alpha,p_0,p)$ 和 v（此处及下文）表示 v在 $t\le0$时的零延拓。此外，

$$[V]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{r/2}(t_1,0))}\le Nr^{-\sigma}\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(1+\alpha)}\,(|Dv|^{p_0})^{1/p_0}_{Q_r(t_1-(j-1)r^{2/\alpha},0)}\,, \tag{3.18}$$

其中 $\sigma=\sigma(d,\alpha,p_0)\in(0,1)$ 且 $N=N(d,\delta,\alpha,p_0)$。

证明。与引理 3.4 的证明一样，我们考虑 $r=1$。根据引理 3.4 证明开头的观察，v 在 $(S,t_0)\times B_R$ 中满足 (3.15)，对任意 $S\le0$ 和 $v\in\mathcal{H}^{\alpha}_{q,0}((S,t_0)\times B_1)$，对任意 $q\in(1,\infty)$ 均成立。然后，根据引理 4.9]，对于满足以下条件的 $q_1\in(q,\infty]$

$$q_1\ge q+\frac{\alpha}{\alpha d+1-\alpha}, \tag{3.19}$$

我们有

$$\begin{aligned}\|D(\eta v)\|_{L_{q_1}((t_1-1,t_1)\times B_{1/2})}&\le N\|D(\eta v)\|_{L_q(Q_1(t_1,0))}+N\|\mathcal{G}\|_{L_q(Q_1(t_1,0))}\\&\le N\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(1+\alpha)}\,(|Dv|^q)^{1/q}_{Q_1(t_1-(j-1),0)}\,,\end{aligned} \tag{3.20}$$

其中 $N=N(d,\delta,\alpha,q)$、$\eta(t)$来自（A.1），其中 t_0替换为 t_1和 $\mu=1$，$\nu=(1/2)^{2/\alpha}$，$\mathcal{G}=(\mathcal{G}_1,\dots,\mathcal{G}_d)$，$\mathcal{G}_\ell$如（A.2）所示，其中对$\ell=1,2,\dots,d$，将 u替换为 $D_\ell v$；第二个不等式则由引理 A.1 得出，其中以 q代替 p，$\Omega=B_1$, $s_j=j$, $u=D_\ell v$, $N_0=2$，以及 $\mu=1$, $\nu=(1/2)^{2/\alpha}$。

另请注意，证明引理 4.9] 时的不等式（4.34）（在（4.34）中，V 的 [7] 等于此处的 $\eta(t)V$）表明

$$\begin{aligned}\|\eta V\|_{\mathbb{H}^{\alpha,1}_{q,0}\left((t_1-1,t_1)\times B_{1/2}\right)} &\leq N\|D(\eta v)\|_{L_q(Q_1(t_1,0))}+N\|\mathcal{G}_\ell\|_{L_q(Q_1(t_1,0))}\\ &\leq N\sum_{j=1}^{\infty} j^{-(1+\alpha)}\left(|D_\ell v|^q\right)^{1/q}_{Q_1(t_1-(j-1),0)},\end{aligned}\tag{3.21}$$

其中 $N=N(d,\delta,\alpha,q)$。事实上，即使在 [7, 引理 4.9], 中没有明确说明，我们也有

$$\eta(t)V\in\mathbb{H}^{\alpha,2}_{q,0}((t_1-1,t_1)\times B_{1/2})\subset\mathbb{H}^{\alpha,1}_{q,0}((t_1-1,t_1)\times B_{1/2})$$

因为根据 [7] $D_x(\eta v)$ 中的引理 4.7，$\in\mathbb{H}^{\alpha,}_{q\,0}{}^{,}_{2}((t_1-1,t_1)\times B_{1/2})$ 和 a^{ij} 都是无穷次可微的，且具有有界导数。

为证明 (3.17)，找出满足 (3.19) 的 $p_1\in(p_0,\infty)$，其中分别以 p_1 和 p_0 替代 q_1 和 $q_。$ 于是，由带有 p_1 和 p_0 的 (3.20) 中的不等式可推出带有 $r=1$ 的 (3.17)，前提是 $p_1\geq p_。$ 若 $p_1<p$，则采用引理 3.4 的证明（[8, 命题 4.3]）中的迭代过程，得到对 p 成立的 (3.17)。

为证明 (3.18)，我们首先假设 $1-(d+1/\alpha)/p_0:=\sigma>0。$ 由于 $\eta V\in\mathbb{H}^{\alpha,}_{p_0\,0,}{}^{1}((t_1-1,t_1)\times B_{1/2})$，由嵌入 [7, 推论 A.8],，我们有

$$\begin{aligned}[V]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{1/2}(t_1,0))}&\leq[\eta V]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}((t_1-1,t_1)\times B_{1/2})}\\ &\leq N\|\eta V\|_{\mathbb{H}^{\alpha,1}_{p_0,0}((t_1-1,t_1)\times B_{1/2})},\end{aligned}$$

结合带有 $q=p_0$ 的 (3.21)，可得带有 $r=1$ 的 (3.18)。若 $1-(d+1/\alpha)/p_0\leq 0$，则我们使用 (3.17)，按照引理 3.4 证明的最后一部分进行推导。引理得证。□

记

$$\Pi_r=\{(x_1,x')\in\mathbb{R}^d:-r<x_1<r,x'\in\mathbb{R}^{d-1}\}.$$

引理 3.6。设 $\alpha\in(0,1)$、$p_0\in(1,\infty)$、$t_0\in(0,\infty)$、$r\in(0,\infty)$，且 a^{ij} 满足假设 2.5。假设 $w\in\mathcal{H}^{\alpha,}_{p_0\,0,}{}^{1}((0,t_0)\times\Pi_r)$ 满足

$$-\partial_t^\alpha w+D_i\left(a^{ij}D_jw\right)=D_ig_i+f\tag{3.22}$$

在 $(0,t_0)\times\Pi_r$ 上，$w=0$ 在 $(0,t_0)\times\partial\Pi_r$ 上，其中 $g_i,f\in L_p((0,t_0)\times\Pi_r)。$ 于是，我们有

$$\|w\|_{L_{p_0}((0,t_0)\times\Pi_r)}\leq Nr\|g_i\|_{L_{p_0}((0,t_0)\times\Pi_r)}+r^2\|f\|_{L_{p_0}((0,t_0)\times\Pi_r)},\tag{3.23}$$

其中，对于 $p_0\geq 2$，$N=N(d,\delta,p_0)$，对于 $p_0\in(1,2)$，$N=N(d,\delta,\alpha,p_0)$，但与 t_0 无关。

证明。利用缩放，我们令 $r=1。$

对于 $p_0\in[2,\infty)$，将 $|w|^{p_0-2}w$ 作为测试函数代入方程 (3.22)，可得

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}(\partial_t^\alpha w)|w|^{p_0-2}w\,dx\,dt+\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}a^{ij}D_jwD_i\left(|w|^{p_0-2}w\right)\,dx\,dt\\ &\qquad=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}g_iD_i\left(|w|^{p_0-2}w\right)\,dx\,dt-\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}f|w|^{p_0-2}w\,dx\,dt.\end{aligned}\tag{3.24}$$

事实上，$|w|^{p_0-2}w$ 可能不具备测试函数的资格，因为例如，$|w(t_0,x)|^{p_0-2}w(t_0,x)$可能不为零。然而，在考虑一个无穷次可微的

可微逼近序列（如 [7, 引理 4.1], 的证明中所述）后，对于充分光滑的 w，我们可以得到上述等式。正如 [7, 引理 4.1], 的证明中所解释的，(3.24)中的第一项是非负的。由这一观察结合一致椭圆性条件可知

$$\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0-2}|Dw|^2\,dx\,dt \le N\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}a^{ij}D_jwD_iw|w|^{p_0-2}\,dx\,dt$$
$$= N\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}a^{ij}D_jwD_i\left(|w|^{p_0-2}w\right)\,dx\,dt$$
$$\le N\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}g_iD_i\left(|w|^{p_0-2}w\right)\,dx\,dt - N\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}f|w|^{p_0-2}w\,dx\,dt,$$

其中 $N = N(d,\delta,p_0)$。注意到

$$\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}g_iD_i\left(|w|^{p_0-2}w\right)\,dx\,dt = (p_0-1)\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}g_i|w|^{p_0-2}D_iw\,dx\,dt$$
$$\le \varepsilon_1\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0-2}|Dw|^2\,dx\,dt + \varepsilon_2\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\,dx\,dt + N\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}|g|^{p_0}\,dx\,dt$$

对任意的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$，其中 $N = N(\varepsilon_1,\varepsilon_2,p_0)$。另请注意

$$\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}f|w|^{p_0-2}w\,dx\,dt \le \varepsilon_3\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\,dx\,dt + N\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}|f|^{p_0}\,dx\,dt$$

对任意的 $\varepsilon_3>0$，其中 $N = N(\varepsilon_3)$。于是，由于 $w(t,-1,x') = w(t,1,x') = 0$，根据 Poincar´e 不等式，我们注意到

$$\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\,dx\,dt = \int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}\left(|w|^{p_0/2}\right)^2\,dx\,dt \le p_0^2\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0-2}|D_1w|^2\,dx\,dt.$$

将上述不等式与充分小的 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3>0$ 结合起来，我们得到 (3.23)，其中 $r=1$ 适用于 $p_0\ge 2$。除 (3.23) 外，对于下面的对偶论证，我们还需要

$$\|Dw\|_{L_p((0,t_0)\times\Pi_1)} \le N\|g\|_{L_p((0,t_0)\times\Pi_1)} + N\|f\|_{L_p((0,t_0)\times\Pi_1)}, \tag{3.25}$$

其中 $N = N(d,\delta,\alpha,p_0)$，但与 t_0 无关。为证明这一点，我们将 (3.22) 写成

$$-\partial_t^\alpha w + D_i(a^{ij}D_jw) - w = D_ig_i + f - w.$$

于是，由 [9, 命题 6.2] 以及 $\lambda=1$，可得

$$\|Dw\|_{L_p((0,t_0)\times\Pi_1)} \le N\|g\|_{L_p((0,t_0)\times\Pi_1)} + N\|f\|_{L_p((0,t_0)\times\Pi_1)} + N\|w\|_{L_p((0,t_0)\times\Pi_1)},$$

其中 $N = N(d,\delta,\alpha,p_0)$，但与 t_0 无关。结合 (3.23)，由此可得 (3.25)。

对于 $p_0\in(1,2)$，利用存在性结果 [9, 命题 6.2]，针对部分有界区域 $(0,t_0)\times\Pi_1$，以及关于 $p_0\ge 2$ 的估计 (3.23) 和 (3.25)，即可进行通常的对偶论证。对于 $\phi\in C_0^\infty((0,t_0)\times\Pi)$，利用 [9,命题 6.2]，我们得到 $v\in\mathcal{H}^{\alpha,\,1}_{p_0',\,0}((0,t_0)\times\Pi)$，$1/p_0+1/p_0'=1$，满足

$$-\partial_t^\alpha v + D_i\left(a^{ji}(t_0-t)D_jv\right) = \phi_0(t_0-t,x) \tag{3.26}$$

在 $(0,t_0)\times\Pi_1$ 中，满足 Dirichlet 边界条件

$$v(t,-1,x') = v(t,1,x') = 0.$$

令 $\varphi(t,x) = v(t_0-t,x)$ 和 $\phi(t,x) = w(t_0-t,x)$ 分别作为测试函数代入 (3.22) 和 (3.26)，得到

$$\begin{aligned}&\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}\left(f(t,x)v(t_0-t,x)-g_i(t,x)D_iv(t_0-t,x)\right)\,dx\,dt\\&=\int_0^{t_0}\int_{\Pi_1}\phi_0(t,x)w(t,x)\,dx\,dt.\end{aligned}$$

结合关于 v 且具有 $p_0'>2$ 的估计 (3.23) 和 (3.25)，可得当 $r=1$ 时， $p_0\in(1,2)$ 的 (3.23) 成立。□

引理 3.7. 设 $\alpha\in(0,1)$、 $p_0\in(1,\infty)$、 $t_0\in(0,\infty)$、 $0<r<R<\infty$ 和 a^{ij} 满足假设 2.5。假设 $w\in\mathcal{H}^{\alpha,p_0}_{1,0}((0,t_0)\times\Pi_R)$ 在 $(0,t_0)\times\Pi_R$ 上满足 (3.22)，且在 $(0,t_0)\times\partial\Pi_R$ 上具有 $w=0$，其中 $g_i,f\in L_p((0,t_0)\times\Pi_R)$。那么，对于任意 $t_1\le t_0$ 和 $\rho>0$，有

$$\begin{aligned}\|Dw\|_{L_{p_0}((t_1-\rho,t_1)\times B_r)}&\le N\frac{\theta^{1/p_0}R}{R-r}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(\fint_{t_1-s_{j+2}\theta}^{t_1-s_j\theta}\int_{\Pi_R}|g_i|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0}\\&\quad+N\frac{\theta^{1/p_0}R^2}{R-r}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(\fint_{t_1-s_{j+2}\theta}^{t_1-s_j\theta}\int_{\Pi_R}|f|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0},\end{aligned}\tag{3.27}$$

其中，当 $\rho<R^{2/\alpha}$ 时 $\theta=R^{2/\alpha}$，当 $\rho\ge R^{2/\alpha}$ 时 $\theta=\rho$，

$$s_0=0,\quad s_j=2^j,\quad j=1,2,\dots,\tag{3.28}$$

$N=N(d,\delta,\alpha,p_0)$，以及 w,g_i,f 表示它们在 $t\le0$ 上的零延拓。

注 3.8。注意，

$$\fint_{(t_1-s_{j+2}\theta,t_1-s_j\theta)}\le\frac{4}{3}\fint_{(t_1-s_{j+2}\theta,t_1)}.$$

因此，可以将 (3.27) 中的积分替换为在 $(t_1-s_{j+2}\theta,t_1)$ 上的积分，而后者还可以用另一个常数 N 替换为在 $(t_1-s_j\theta,t_1)$ 上的积分。因此，例如，我们可以用以下表达式替代 (3.27) 中最后一个求和项:

$$\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(\fint_{t_1-s_j\theta}^{t_1}\int_{\Pi_R}|f|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0}.$$

在全文中，只要有必要或有助于改善表述，我们都会采用这种替换。

引理 3.7 的证明。通过缩放，不妨设 $0<r<R=1$。我们进一步假设 $\rho\ge1$，之后将去掉这一假设。注意，对于任意 $S\le0$，我们有$w\in\mathcal{H}^{\alpha,p_0}_{1,0}((S,t_1)\times\Pi_1)$，其在 $(S,t_1)\times\Pi_1$ 上满足 (3.22)，其中 $\partial_t^\alpha=\partial_tI_S^{1-\alpha}$。因此，根据 (A.1) 取 η，将 t_0 替换为 t_1，并令 $\mu=2\rho,\nu=\rho$，可知$\eta w\in\mathcal{H}^{\alpha,p_0}_{1,0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)$ 满足

$$-\partial_t^\alpha(\eta w)+D_i\left(a^{ij}D_j(\eta w)\right)=D_i(\eta g_i)+\eta f+F$$

在（$t_1-2\rho,t_1$）中， $\times\Pi_1$ 以及在（$t_1-2\rho,t_1$）中， $\times B_1$，其中$\partial_t^\alpha=\partial_tI_{t_1-2\rho}^{1-\alpha}$和 F（t,x）的定义与（A.2）相同，只是将 u 替换为 w。由 [9, 命题 6.2]（另见

引理 4.3]的证明），可得

$$\begin{aligned}\|Dw\|_{L_{p_0}((t_1-\rho,t_1)\times B_r)} &\le \|D(\eta w)\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times B_r)}\\ &\le \frac{N}{1-r}\|w\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)} + N\|g_i\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)}\\ &\quad + N(1-r)\||f|+|F|\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)},\end{aligned} \tag{3.29}$$

其中 $N = N(d,\delta,\alpha,p_0)$。令

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_j = 2^j\rho, \quad j = 1,2,\dots. \tag{3.30}$$

注意，序列 $\{\tau_j\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 (A.3)。然后，根据引理 A.1，取 $p = p_0$、$\Omega = \Pi_1$, $u = w$, $N_0 = 2$, $s_j = \tau_j$ （来自 (3.30)）、 $\mu = 2\rho$ 和 $\nu = \rho$,

$$\begin{aligned}\|F\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)} &\le N\rho^{-\alpha}\left(\int_{t_1-4\rho}^{t_1-\rho}\int_{\Pi_1}|w(t,x)|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0}\\ &\quad + N\rho^{-\alpha+1/p_0}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(\fint_{t_1-\tau_{j+1}}^{t_1-\tau_j}\int_{\Pi_1}|w(t,x)|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0},\end{aligned} \tag{3.31}$$

其中 $N = N(\alpha)$。记

$$A_j := \left(\fint_{t_1-\tau_{j+1}}^{t_1-\tau_j}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0}$$

对于 $j = 0$, 1, 2, ...。结合 (3.29) 和 (3.31)，我们得到

$$\begin{aligned}\|Dw\|_{L_{p_0}((t_1-\rho,t_1)\times B_r)} &\le N\|g_i\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)} + N(1-r)\|f\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)}\\ &\quad + \frac{N}{1-r}\left(\int_{t_1-2\rho}^{t_1}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\right)^{1/p_0} + N(1-r)\rho^{-\alpha}\left(\int_{t_1-4\rho}^{t_1-\rho}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\right)^{1/p_0}\\ &\quad + N(1-r)\rho^{-\alpha+1/p_0}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\alpha j}A_j.\end{aligned}$$

注意,

$$\left(\int_{t_1-2\rho}^{t_1}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\right)^{1/p_0} = (2\rho)^{1/p_0}A_0$$

and

$$\begin{aligned}\left(\int_{t_1-4\rho}^{t_1-\rho}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\right)^{1/p_0} &\le \left(\int_{t_1-\tau_1}^{t_1}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\right)^{1/p_0} + \left(\int_{t_1-\tau_2}^{t_1-\tau_1}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\right)^{1/p_0}\\ &= (2\rho)^{1/p_0}A_0 + (2\rho)^{1/p_0}A_1.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\|Dw\|_{L_{p_0}((t_1-\rho,t_1)\times B_r)} &\le N\|g_i\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)} + N(1-r)\|f\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)}\\ &\quad + N\rho^{1/p_0}\left(\frac{1}{1-r} + (1-r)\rho^{-\alpha}\right)A_0 + N(1-r)\rho^{-\alpha+1/p_0}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\alpha j}A_j,\end{aligned}$$

其中 $N = N(d, \delta, \alpha, p_0)$。由于 $r < 1$, $\rho \geq 1$, 我们有

$$\|Dw\|_{L_{p_0}((t_1-\rho,t_1)\times B_r)} \leq N\|g_i\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)} + N\|f\|_{L_{p_0}((t_1-2\rho,t_1)\times\Pi_1)} + N\rho^{1/p_0}\frac{1}{1-r}A_0 + N\rho^{-\alpha/2+1/p_0}\sum_{j=1}^{\infty}2^{-\alpha j}A_j. \quad (3.32)$$

为估计 A_j, 对每个 $j = 0$, 1, 2, ..., 我们在 (A.1) 中取 η_j为 η, 其中 $t_0 = t_1 - \tau_j$、$\mu = \tau_{j+2} - \tau_j$ 和 $\nu = \tau_{j+1} - \tau_j$。也就是说,

$$\eta_j(t) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad t \geq t_1 - \tau_{j+1}, \\ 0 & \text{if} \quad t \leq t_1 - \tau_{j+2}, \end{cases}$$

$$|\eta_j'(t)| \leq \frac{2}{\tau_{j+2} - \tau_{j+1}} = 2^{-j}\rho^{-1}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

那么, $\eta_j w \in \mathcal{H}^{\alpha,\ 1}_{p_0,\ 0}((t_1 - \tau_{j+2}, t_1 - \tau_j) \times \Pi_1)$ 满足

$$-\partial_t^\alpha(\eta_j w) + D_i\left(a^{ij}D_j(\eta_j w)\right) = D_i(\eta_j g_i) + \eta_j f + F_j \quad (3.33)$$

在 $(t_1 - \tau_{j+2}, t_1 - \tau_j) \times \Pi_1$ 中, 其中 $F_j(t, x)$ 如 (A.2) 中所示, 将 u 和 η 分别替换为 w 和 η_j。将引理 3.6 应用于 (3.33), 可得

$$\|w\|_{L_{p_0}((t_1-\tau_{j+1},t_1-\tau_j)\times\Pi_1)} \leq \|(\eta_j w)\|_{L_{p_0}((t_1-\tau_{j+2},t_1-\tau_j)\times\Pi_1)} \leq N\||g_i| + |f| + |F_j|\|_{L_{p_0}((t_1-\tau_{j+2},t_1-\tau_j)\times\Pi_1)}, \quad (3.34)$$

其中 $N = N(d, \delta, \alpha, p_0)$。对于上述 F_j, 我们设

$$\tilde{s}_k = \tau_{j+k+1} - \tau_j, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

并使用引理 A.1, 其中 $\{\tilde{s}_k\}$。也就是说, 根据引理 A.1, 取 $p = p_0$、$t_0 = t_1 - \tau_j$、$\Omega = \Pi_1$、$\tilde{s}_k$、$u = w$、$N_0 = 3$, 以及 $\mu = \tau_{j+2} - \tau_j$、$\nu = \tau_{j+1} - \tau_j$, 我们得到

$$\|F_j\|_{L_{p_0}((t_1-\tau_{j+2},t_1-\tau_j)\times\Pi_1)} \leq N\rho^{-\alpha}2^{-\alpha j}\left(\int_{t_1-\tau_j-2(\tau_{j+2}-\tau_j)}^{t_1-\tau_j-(\tau_{j+1}-\tau_j)}\int_{\Pi_1}|w|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0}$$

$$+N\rho^{-\alpha+1/p_0}2^{j/p_0}\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\alpha(j+k)}\left(\fint_{t_1-\tau_{j+k+2}}^{t_1-\tau_{j+k+1}}\int_{\Pi_1}|w(s,x)|^{p_0}\,dx\,ds\right)^{1/p_0}$$

$$\leq N\rho^{-\alpha+1/p_0}2^{j/p_0}\left(2^{-\alpha j}A_{j+1} + 2^{-\alpha j}A_{j+2} + \sum_{k=1}^{\infty}2^{-\alpha(j+k)}A_{j+k+1}\right),$$

其中 $N = N(\alpha)$, 且右端与 A_j 无关。见注 A.2。由上述不等式和 (3.34), 我们有

$$A_j \leq NG_j + N\rho^{-\alpha}\sum_{k=j+1}^{\infty}2^{-\alpha k}A_k \quad (3.35)$$

对于 $j = 0, 1, ..$, 其中

$$G_j = \left(\fint_{t_1-\tau_{j+2}}^{t_1-\tau_j}\int_{\Pi_1}\left(|g_i|^{p_0} + |f|^{p_0}\right)dx\,dt\right)^{1/p_0}.$$

接下来, 我们固定一个正整数 k_0, 它仅取决于 d、δ、α和 p_0, 使得

$$N\frac{2^\alpha}{2^\alpha - 1}2^{-\alpha k_0} < 1/2,$$

其中， N 是(3.35)中求和符号前的常数。将(3.35)两边乘以 $2^{-\alpha j}$，并对 $j = k_0$、$k_0 + 1$、.....求和，得到

$$\sum_{j=k_0}^{\infty} 2^{-\alpha j} A_j \leq N \sum_{j=k_0}^{\infty} 2^{-\alpha j} G_j + N\rho^{-\alpha} \sum_{j=k_0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \sum_{k=j+1}^{\infty} 2^{-\alpha k} A_k. \tag{3.36}$$

根据 k_0的选择，可以将 (3.36) 中最后的双重求和估计为

$$N \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-\alpha k} A_k \sum_{j=k_0}^{k-1} 2^{-\alpha j} \leq N \frac{2^{\alpha} 2^{-\alpha k_0}}{2^{\alpha} - 1} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-\alpha k} A_k < \frac{1}{2} \sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2^{-\alpha k} A_k,$$

由此，根据 (3.36) 以及 $\rho \geq 1$这一事实可得

$$\sum_{j=k_0}^{\infty} 2^{-\alpha j} A_j \leq N \sum_{j=k_0}^{\infty} 2^{-\alpha j} G_j,$$

其中 $(N, k_0) = (N, k_0)(d, \delta, \alpha, p_0)$。对于满足 $j = 0$的 A_j， $1, \ldots, k_0 - 1$，我们还使用上述估计以及 (3.35) 进行归纳，从而得到

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} A_j \leq N \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} G_j,$$

其中 $N = N(d, \delta, \alpha, p_0)$。由此以及 (3.32)，可得

$$\|Dw\|_{L_{p_0}((t_1-\rho, t_1)\times B_r)} \leq N \frac{\rho^{1/p_0}}{1-r} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} G_j.$$

然后，对于 $\rho \geq R^{2/\alpha}$，利用缩放可得 (3.27)。对于 $\rho < R^{2/\alpha}$，我们看到

$$\|Dw\|_{L_{p_0}((t_1-\rho, t_1)\times B_r)} \leq \|Dw\|_{L_{p_0}\left((t_1-R^{2/\alpha}, t_1)\times B_r\right)},$$

由于借助上述在 $\theta = R^{2/\alpha}$ 情形下证明的 $\rho \geq R^{2/\alpha}$，其右端被 (3.27) 的右端所估计。证明完毕。□

在下面的估计 (3.37) 中，右端不出现 $D_1 v$ 是至关重要的。

引理 3.9。设 $\alpha \in (0, 1)$， $p_0 \in (1, \infty)$， $t_0 \in (0, \infty)$， r， $R \in (0, \infty)$，满足 $2r < R$，且 a^{ij} 满足假设 2.5。另设 a^{11} 为无穷次可微函数；若 $a^{11} = a^{11}(x_1)$，则其具有有界导数。假设 $v \in \mathcal{H}^{\alpha,\, 1}_{p_0,\, 0}((0, t_0) \times B_R)$ 在 $(0, t_0) \times B_R$ 中满足 (3.5)。那么，存在 $\tilde{v}$、$\hat{v} \in \mathcal{H}^{\alpha,\, 1}_{p_0,\, 0}((0, t_0) \times B_r)$，使得 $v = \tilde{v} + \hat{v}$ 在 $(0, t_0) \times B_r$ 中，并且对于任意满足以下条件的 $t_1 \leq t_0$、$\tilde{v}$ 和 $\hat{v}$，均有.....

对于 $\tilde{v}$，我们有

$$(|D\tilde{v}|^{p_0})^{1/p_0}_{Q_{r/2}(t_1,0)} \leq N \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} \left(|D_{x'} v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1 - s_{k+1} r^{2/\alpha}, t_1 - s_k r^{2/\alpha}) \times B_{2r}}, \tag{3.37}$$

其中 $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是式 (3.28) 中的序列。

对于 $\hat{v}$，当 $a^{11} = a^{11}(t)$ 时，

$$[D_1 \hat{v}]_{C^{\sigma\alpha/2, \sigma}\left(Q_{r/4}(t_1,0)\right)} \leq N r^{-\sigma} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} \left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1 - 2^k r^{2/\alpha}, t_1) \times B_{2r}} \tag{3.38}$$

并且，当 $a^{11}=a^{11}(x_1)$ 时，

$$[a^{11}(x_1)D_1\hat{v}]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{r/4}(t_1,0))}\le Nr^{-\sigma}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha k}\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-2^kr^{2/\alpha}t_1)\times B_{2r}}. \quad (3.39)$$

在这些陈述中，v、$\tilde{v}$和$\hat{}v$ 表示它们在 $t\le 0$、$\sigma=\sigma(d,\alpha,p_0)\in(0,1)$以及 $N=N(d,\delta,\alpha,p_0)$上的零延拓。

证明。与前面一样，我们只考虑 $r=1$。在这种情况下 $2<R$。由引理 3.3$D_{x'}v\in\mathcal{H}^{\alpha}_{,\,p_0}{}^{1}_{,\,0}((0,t_0)\times B_2)$。特别地，$DD_{x'}v\in L_{p_0}((0,t_0)\times B_2)$。因此，若我们设

$$g_1=-\sum_{j=2}^{d}1_{B_1}a^{1j}D_jv,\quad f=1_{B_1}\Delta_{x'}v-\sum_{i=2}^{d}\sum_{j=1}^{d}1_{B_1}a^{ij}D_{ij}v,$$

其中 1_{B_1} 是 x的示性函数，则 $g_1,f\in L_{p_0}((0,t_0)\times\Pi_1)$，并且根据 [9,命题 6.2],，存在唯一的 $\tilde{v}\in\mathcal{H}^{\alpha}_{,\,p_0}{}^{1}_{,\,0}((0,t_0)\times\Pi_1)$满足

$$-\partial_t^{\alpha}\tilde{v}+D_1(a^{11}D_1\tilde{v})+\Delta_{x'}\tilde{v}=D_1g_1+f \quad (3.40)$$

在 $(0,t_0)\times\Pi_1$ 中，$\tilde{v}=0$ 在 $(0,t_0)\times\partial\Pi_1$上.

取 $\hat{}v=v-\tilde{v}$，它属于 $\mathcal{H}^{\alpha}_{,\,p_0}{}^{1}_{,\,0}((0,t_0)\times B_1)$。由于 a^{ij} 与 $x'\in\mathbb{R}^{d-1}$ 无关，且 $DD_{x'}v\in L_{p_0}((0,t_0)\times B_2)$，$v$ 满足

$$-\partial_t^{\alpha}v+D_1(a^{11}D_1v)+\Delta_{x'}v=D_1g_1+f$$

在 $(0,t_0)\times B_1$中，这意味着 $\hat{}v$ 满足

$$-\partial_t^{\alpha}\hat{v}+D_1\left(a^{11}D_1\hat{v}\right)+\Delta_{x'}\hat{v}=0 \quad (3.41)$$

在 $(0,t_0)\times B_1$中。这些 $\tilde{v}$ 和 $\hat{}v$ 就是 v所需的分解。

现在证明 $\tilde{v}$ 和 $\hat{}v$ 满足引理中的不等式。对于每个$t_1\le t_0$，将引理 3.7 中的 $(R,r,\rho)=(1,1/2,2^{-2/\alpha})$ 应用于满足 (3.40) 且具有边界条件 $\tilde{v}=0$（定义在 $(0,t_0)\times\partial\Pi_1$上）的 $\tilde{v}$，可得

$$\begin{aligned}\left(|D\tilde{v}|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{Q_{1/2}(t_1,0)}&\le N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(\fint_{t_1-s_{j+2}}^{t_1-s_j}\int_{\Pi_1}|g_1|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0}\\&\quad+N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(\fint_{t_1-s_{j+2}}^{t_1-s_j}\int_{\Pi_1}|f|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0},\end{aligned} \quad (3.42)$$

其中，$\{s_j\}_{j=0}^{\infty}$是式 (3.28) 中的序列，且 $N=N(d,\delta,\alpha,p_0)$。注意，对于每个$j=0,1,2,\ldots,$

$$\left(\fint_{t_1-s_{j+2}}^{t_1-s_j}\int_{\Pi_1}|g_1|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0}\le N\left(|D_{x'}v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-s_{j+2},t_1-s_j)\times B_1} \quad (3.43)$$

and

$$\left(\fint_{t_1-s_{j+2}}^{t_1-s_j}\int_{\Pi_1}|f|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0}\le N\left(|DD_{x'}v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-s_{j+2},t_1-s_j)\times B_1}, \quad (3.44)$$

其中 $N=N(d,\delta,p_0)$。为估计 (3.44) 右端的 $DD_{x'}v$，对每个 $j=0$，1，.....，我们应用引理 3.3，特别是将 (3.7) 中的

$$(p_1,t_0,\nu,\mu,r)=(p_0,t_1-s_j,s_{j+2}-s_j,s_{j+3}-s_j,2)$$

替换为 (3.7) 中的 s_k

$$\tilde{s}_k = s_{j+k+2} - s_j$$

使得 $N_0 = 3$。因此，我们有

$$\begin{aligned}\|DD_{x'}v\|_{L_{p_0}((t_1-s_{j+2},t_1-s_j)\times B_1)} &\le N\|D_{x'}v\|_{L_{p_0}((t_1-s_{j+3},t_1-s_j)\times B_2)}\\ &+ N2^{-\alpha j}\|D_{x'}v\|_{L_{p_0}((t_1+s_j-2s_{j+3},t_1-s_{j+2})\times B_2)}\\ &+ N\sum_{k=1}^{\infty}2^{-\alpha(j+k)-k/p_0}\left(\int_{t_1-s_{j+k+3}}^{t_1-s_{j+k+2}}\int_{B_2}|D_{x'}v(t,x)|^{p_0}\,dx\,dt\right)^{1/p_0},\end{aligned}$$

其中 $N = N(d,\delta,\alpha,p_0)$。该不等式可转化为

$$\begin{aligned}(|DD_{x'}v|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-s_{j+2},t_1-s_j)\times B_1} &\le N\,(|D_{x'}v|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-s_{j+3},t_1-s_j)\times B_2}\\ &+N\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha(j+k)}\,(|D_{x'}v|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-s_{j+k+3},t_1-s_{j+k+2})\times B_2}.\end{aligned}$$

结合 (3.42)、(3.43) 和 (3.44)，可得当 $r = 1$ 时 (3.37) 成立。

为证明 (3.38) 和 (3.39)，我们先考虑 $a^{11} = a^{11}(t)$ 的情形。由于 $\hat{v}$ 满足 (3.41)，其系数为 $a^{ij} = a^{ij}(t)$，由引理 3.4（该引理的第二个断言），取 $(r,R) = (1/2,1)$，可得

$$\begin{aligned}[D_1\hat{v}]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{1/4}(t_1,0))} &\le N\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(1+\alpha)}\,(|D\hat{v}|^{p_0})^{1/p_0}_{Q_{1/2}(t_1-(j-1)2^{-2/\alpha},0)}\\ &= N\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(1+\alpha)}\,(|Dv-D\tilde{v}|^{p_0})^{1/p_0}_{Q_{1/2}(t_1-(j-1)2^{-2/\alpha},0)},\end{aligned}\tag{3.45}$$

其中 $\sigma = \sigma(d,\alpha,p_0) \in (0,1)$，且 $N = N(d,\delta,\alpha,p_0)$。由取 $r = 1$ 时的 (3.37)，(3.45) 右端涉及 $D\tilde{v}$ 的项可估计为

$$\begin{aligned}&(|D\tilde{v}|^{p_0})^{1/p_0}_{Q_{1/2}(t_1-(j-1)2^{-2/\alpha},0)}\\ &\le N\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha k}\,(|D_{x'}v|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-(j-1)2^{-2/\alpha}-s_{k+1},t_1-(j-1)2^{-2/\alpha}-s_k)\times B_2}\end{aligned}$$

对于 $j = 1$、2、……。结合 (3.45)，可得

$$[D_1\hat{v}]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{1/4}(t_1,0))} \le N\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(1+\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha k}\,(|Dv|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2},\tag{3.46}$$

其中 $s^j_k = (j-1)2^{-2/\alpha}+s_k$。接下来，我们按照 [8, 命题 4.7]的证明进行，但具体细节略有不同，如下所示。(3.46) 中的双重求和等于

$$\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha k}\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(1+\alpha)}\,(|Dv|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2} := I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha k}\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ (j-1)2^{-2/\alpha}<2^{k+1}}}j^{-(1+\alpha)}\,(|Dv|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2},$$

$$I_2 = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ (j-1)2^{-2/\alpha}\geq 2^{k+1}}} j^{-(1+\alpha)} \left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2}.$$

对于每个 $k=0$，1，2，.....，如果 $j\in\mathbb{N}$ 且 $(j-1)2^{-2/\alpha}<2^{k+1}$，则

$$(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\subset(t_1-s_{k+2},t_1),$$

这意味着

$$\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2} \leq 4^{1/p_0}\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-s_{k+2},t_1)\times B_2}.$$

因此，利用

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ (j-1)2^{-2/\alpha}<2^{k+1}}} j^{-(1+\alpha)} \leq \sum_{j=1}^{\infty} j^{-(1+\alpha)} < \infty,$$

我们得到

$$I_1 \leq N\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k}\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-s_{k+2},t_1)\times B_2}. \tag{3.47}$$

为估计 I_2，我们写出

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k}\sum_{m=k+1}^{\infty}\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ 2^m\leq(j-1)2^{-2/\alpha}<2^{m+1}}} j^{-(1+\alpha)}\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2}\\ &\leq N\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k}\sum_{m=k+1}^{\infty} 2^{-m(1+\alpha)}\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ 2^m\leq(j-1)2^{-2/\alpha}<2^{m+1}}}\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2}, \end{aligned}$$

其中 $N=N(\alpha)$。根据 H¨尔德不等式

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ 2^m\leq(j-1)2^{-2/\alpha}<2^{m+1}}}\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2}\\ &\leq N2^{m-m/p_0}\left(\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ 2^m\leq(j-1)2^{-2/\alpha}<2^{m+1}}}\left(|Dv|^{p_0}\right)_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2}\right)^{1/p_0}, \end{aligned}$$

其中 $N=N(\alpha,p_0)$。对于每个 $k=0$，1，2，.....，求一个正整数 $\mathcal{N}(k)$，使得

$$2^{2/\alpha}(s_{k+1}-s_k)\leq\mathcal{N}(k)<2^{2/\alpha}(s_{k+1}-s_k)+1.$$

于是，我们得到

$$\left(|Dv|^{p_0}\right)_{(t_1-s^j_{k+1},t_1-s^j_k)\times B_2} \leq 2^{-k}\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}(k)}\int_{t_1-s^j_k-\ell 2^{-2/\alpha}}^{t_1-s^j_k-(\ell-1)2^{-2/\alpha}}\fint_{B_2}|Dv|^{p_0}\,dx\,dt,$$

由此可得

$$\sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ 2^m\le(j-1)2^{-2/\alpha}<2^{m+1}}} (|Dv|^{p_0})_{(t_1-s_{k+1}^j,t_1-s_k^j)\times B_2}$$
$$\le 2^{-k}\sum_{\ell=1}^{\mathcal{N}(k)} \sum_{\substack{j\in\mathbb{N}\\ 2^m\le(j-1)2^{-2/\alpha}<2^{m+1}}} \fint_{t_1-s_k-(j+\ell-1)2^{-2/\alpha}}^{t_1-s_k-(j+\ell-2)2^{-2/\alpha}} \fint_{B_2} |Dv|^{p_0}\,dx\,dt$$
$$\le N(\alpha)(2^{k+1}+2^{m+1}+1)\fint_{t_1-2^{k+1}-2^{m+1}-1}^{t_1}\fint_{B_2}|Dv|^{p_0}\,dx\,dt.$$

因此，利用 $m\ge k+1$ 这一事实，我们有

$$I_2 \le N\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha k}\sum_{m=k+1}^{\infty}2^{-\alpha m}\,(|Dv|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-2^{m+2},t_1)\times B_2}$$
$$\le N\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{m-1}2^{-\alpha k}2^{-\alpha m}\,(|Dv|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-2^{m+2},t_1)\times B_2}$$
$$\le N\sum_{m=0}^{\infty}2^{-\alpha m}\,(|Dv|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_1-2^{m+2},t_1)\times B_2},$$

其中 $N=N(d,\delta,\alpha,p_0)$。结合对 I_1 的估计 (3.47) 和不等式 (3.46)，可得 $r=1$ 时的 (3.38)，其中我们用 2^k 代替 2^{k+2}。参见注 3.8。

当 $a^{11}=a^{11}(x_1)$ 时，按照上述处理 $a^{11}=a^{11}(t)$ 情形的相同步骤，可得 (3.39)。唯一的区别是，我们使用引理 3.5，而不是引理 3.4。另请注意，将引理 3.5 应用于方程 (3.41) 时，我们有 $V=a^{11}D_1\hat{v}$。引理得证。□

4. 平均振荡估计

现在我们准备给出方程解的平均振荡估计。

下文中，$u\in\mathcal{H}^{\alpha,p_0}_{1,0,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_T)$ 和 $u\in\mathbb{H}^{\alpha,p_0}_{2,0,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_T)$ 分别表示：对每个 $R>0$，$u\in\mathcal{H}^{\alpha,p_0}_{1,0}((0,T)\times B_R)$ 和 $u\in\mathbb{H}^{\alpha,p_0}_{2,0}((0,T)\times B_R)$ 成立。我们类似地定义$L_{p_0,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_T)$。

首先，我们得到散度型方程解的平均振荡估计。

命题 4.1. 设 $p_0\in(1,\infty)$、$T\in(0,\infty)$ 和 a^{ij} 满足假设 2.5。此外，若 $a^{11}=a^{11}(x_1)$，则设 a^{11} 无穷次可微且具有有界导数。假设 $u\in\mathcal{H}^{\alpha,p_0}_{1,0,,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_T)$ 满足

$$-\partial_t^\alpha u+D_i(a^{ij}D_ju)=D_ig_i$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，其中 $g_i\in L_{p,\ \mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_T)$。那么，对于任意的 $(t_0,x_0)\in(0,T]\times\mathbb{R}^d$，$r\in(0,\infty)$，且$\kappa\in(0,1/16)$，我们有如下结论。

(1) 对于 $D_{x'}u$,

$$\begin{aligned}
&\left(|D_{x'}u-(D_{x'}u)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)}|\right)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)}\\
&\le N\kappa^{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|D_{x'}u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^jr^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)}\\
&\quad+N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j/2}\left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^jr^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}.
\end{aligned}\tag{4.1}$$

(2) 对于 D_1u, 当 $a^{11}=a^{11}(x_1)$ 时,

$$\begin{aligned}
&\left(|a^{11}D_1u-(a^{11}D_1u)_{Q_{\kappa r}(t_0,0)}|\right)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)}\\
&\le N\kappa^{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}(|Du|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_0-2^jr^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)}\\
&\quad+N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}(|D_{x'}u|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_0-2^jr^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)}\\
&\quad+N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j/2}\left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^jr^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)},
\end{aligned}\tag{4.2}$$

并且, 当 $a^{11}=a^{11}(t)$ 时, 我们得到 (4.2), 其中不等式左侧的 $a^{11}D_1u$ 被 D_1u 替换。

在这些估计中, $\sigma=\sigma(d,\alpha,p_0)\in(0,1)$, $N=N(d,\delta,\alpha,p_0)$, 并且, 与上一节一样, 所有函数在 $t\le 0$ 时均延拓为零。

证明. 由于平移和伸缩, 我们不妨设 $x_0=0$ 和 $r=1$。由于 $g_i1_{B_1}\in L_{p_0}(\mathbb{R}^d_T)$, 根据命题 6.2], , 存在 $w\in\mathcal{H}^{\alpha}_{,p_0}{}^{1}_{,0}((0,t_0)\times\Pi_1)$, 满足

$$-\partial_t^{\alpha}w+D_i(a^{ij}D_jw)=D_i(g_i1_{B_1})\tag{4.3}$$

在 $(0,t_0)$ 中 $\times\Pi_1$, 且在 $(0,t_0)$ 上 $w=0\times\partial\Pi_1$。令 $v=u-w$, 它属于$\mathcal{H}^{\alpha}_{,}$ $^{1}_{p_0\ 0,}((0,t_0)\times B_1)$, 并满足

$$-\partial_t^{\alpha}v+D_i(a^{ij}D_iv)=0$$

在 $(0,t_0)\times B_1$。

我们首先证明 (4.1)。设

$$\begin{aligned}
&\left(|D_{x'}u-(D_{x'}u)_{Q_{\kappa}(t_0,0)}|\right)_{Q_{\kappa}(t_0,0)}\\
&\le\left(|D_{x'}v-(D_{x'}v)_{Q_{\kappa}(t_0,0)}|\right)_{Q_{\kappa}(t_0,0)}+2\left(|D_{x'}w|\right)_{Q_{\kappa}(t_0,0)}:=J_1+J_2.
\end{aligned}$$

由于 $\kappa<1/16$, 因此

$$J_1\le 3\kappa^{\sigma}[D_{x'}v]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{1/4}(t_0,0))}$$

根据引理 3.4 中的 $\sigma\in(0,1)$, 结合 $(R,r)=(1,1/2)$, 可得

$$\begin{aligned}
[D_{x'}v]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{1/4}(t_0,0))}&\le N\sum_{j=1}^{\infty}j^{-(1+\alpha)}\left(|D_{x'}v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{Q_{1/2}(t_0-(j-1)2^{-2/\alpha},0)}\\
&\le N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|D_{x'}v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j,t_0)\times B_{1/2}},
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式参见 [8, 注 4.4]。接着利用如下事实$u = w + v$，可得

$$[D_{x'}v]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{1/4}(t_0,0))} \leq N\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|D_{x'}u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j,t_0)\times B_{1/2}} + N\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|D_{x'}w|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j,t_0)\times B_{1/2}}. \tag{4.4}$$

对于 (4.4) 中的 $D_{x'}w$ 项，由引理 3.7（以及注 3.8），取 $(R, r, \rho) = (1, 1/2, 2^j)$ 应用于满足 (4.3) 的 ws，对于每个 $j = 0$、1、2、.....，我们有

$$\left(|Dw|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j,t_0)\times B_{1/2}} \leq N\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k} \left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{k+j+2},t_0)\times B_1}, \tag{4.5}$$

这表明

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|D_{x'}w|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j,t_0)\times B_{1/2}} \leq N\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha(j+k)} \left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{k+j+2},t_0)\times B_1}$$

$$\leq N\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k/2} \left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^k,t_0)\times B_1}.$$

因此，

$$J_1 \leq N\kappa^{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|D_{x'}u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j,t_0)\times B_{1/2}} + N\kappa^{\sigma}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-\alpha k/2} \left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^k,t_0)\times B_1}.$$

为估计 J_2，由于 w 在 $(0, t_0) \times \Pi_1$ 中满足 (4.3)，我们再次使用引理 3.7（以及注 3.8），取 $(R, r, \rho) = (1, \kappa, \kappa^{2/\alpha})$，并应用 Hölder 不等式，得到

$$\left(|Dw|\right)_{Q_\kappa(t_0,0)} \leq \left(|Dw|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{Q_\kappa(t_0,0)} \leq N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j,t_0)\times B_1}. \tag{4.6}$$

汇总对 J_1 和 J_2 的估计，并注意到 $\kappa^{\sigma} \leq \kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}$，我们得到对于 $r = 1$，(4.1) 成立。

对于 $a^{11}D_1u$ if $a^{11} = a^{11}(x_1)$ 或 D_1u if$a^{11} = a^{11}(t)$ 的平均振荡估计，我们首先写出

$$v = \tilde{v} + \hat{v}$$

在 $(0, t_0) \times B_{1/4}$ 中，这由引理 3.9 得出，其中 $(R, r) = (1, 1/4)$。因此，$u = w + \tilde{v} + \hat{v}$ 在 $(0, t_0) \times B_{1/4}$ 中。

对于 $a^{11} = a^{11}(x_1)$，我们写出

$$\left(|a^{11}D_1u - (a^{11}D_1u)_{Q_\kappa(t_0,0)}|\right)_{Q_\kappa(t_0,0)} \leq \left(|a^{11}D_1\hat{v} - (a^{11}D_1\hat{v})_{Q_\kappa(t_0,0)}|\right)_{Q_\kappa(t_0,0)}$$

$$+N(|D_1\tilde{v}|)_{Q_\kappa(t_0,0)} + N(|D_1w|)_{Q_\kappa(t_0,0)} =: J_3 + J_4 + J_5.$$

对于 J_3，与 J_1 一样，我们有

$$J_3 \leq 3\kappa^{\sigma}[a^{11}D_1\hat{v}]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{1/16}(t_0,0))}.$$

由 (3.39) 及 $r=1/4$,

$$\begin{aligned}\left[a^{11}D_1\hat{v}\right]_{C^{\sigma\alpha/2,\sigma}(Q_{1/16}(t_0,0))} &\le N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j-4/\alpha},t_0)\times B_{1/2}}\\ &\le N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}}.\end{aligned}$$

利用 $u=w+v$ in $(0,t_0)\times B_1$ 中的关系，对于每个 $j=0$，1，2，.....,

$$\left(|Dv|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}}\le\left(|Du|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}}+\left(|Dw|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}},$$

其中，最后一项按照（4.5）进行估计。因此,

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|Dw|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}} &\le N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\sum_{k=0}^{\infty}2^{-\alpha k}\left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{k+j+2},t_0)\times B_1}\\ &\le N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j/2}\left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_1}. \qquad (4.7)\end{aligned}$$

由上述不等式可知,

$$J_3\le N\kappa^{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|Du|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}}+N\kappa^{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j/2}\left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_1}.$$

对于 J_4，注意到根据 H¨older 不等式,

$$\left(|D_1\tilde{v}|\right)_{Q_\kappa(t_0,0)}\le\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\left(|D_1\tilde{v}|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{Q_{1/8}(t_0,0)},$$

由（3.37）及 $r=1/4$，可得

$$\begin{aligned}\left(|D\tilde{v}|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{Q_{1/8}(t_0,0)} &\le N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|D_{x'}v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-s_{j+1}2^{-4/\alpha},t_0-s_j2^{-4/\alpha})\times B_{1/2}}\\ &\le N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|D_{x'}v|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}}.\end{aligned}$$

然后，利用 $u=w+v$,

$$\begin{aligned}\left(|D_1\tilde{v}|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{Q_{1/8}(t_0,0)} &\le N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|D_{x'}u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}}\\ &\quad+N\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}\left(|D_{x'}w|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}}.\end{aligned}$$

结合 (4.7)，由此不等式可得

$$J_4\le\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\sum_{j=0}^{\infty}\left[2^{-\alpha j}\left(|D_{x'}u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_{1/2}}+2^{-\alpha j/2}\left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^{j},t_0)\times B_1}\right].$$

对于 J_5，我们使用 (4.6)。汇总针对 J_3、 J_4 和 J_5 的估计，可得 (4.2)。

对于 $a^{11}=a^{11}(t)$，我们像上文一样，将 $a^{11}D_1u$ 和 $a^{11}D_1\hat{}v$ 分别替换为 D_1u 和 $D_1\hat{}v$。特别地，我们使用 (3.38) 来估计 $D_1\hat{}v$ 的 H¨older 半范数。命题得证。□

下一个命题给出了非散度形式方程的平均振荡估计，这些估计几乎可以直接由散度形式方程对应的估计（命题 4.1）推导得出。

命题 4.2. 设 $p_0 \in (1,\infty)$、 $T \in (0,\infty)$ 和 a^{ij} 满足假设 2.5。另设当 $a^{11} = a^{11}(x_1)$ 时， a^{11} 为无穷次可微且具有有界导数。假设 $u \in \mathbb{H}^{\alpha}_{,p_0}{}^{2}_{0,,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_T)$ 满足

$$-\partial_t^\alpha u + a^{ij} D_{ij} u = f$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，其中 $f \in L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_T)$。那么，对于任意的 $(t_0,x_0) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d$, $r \in (0,\infty)$ 和 $\kappa \in (0,\delta^2/16)$，有以下结论。

(1) 对于$D^2_{x'}u$,

$$\begin{aligned}
&\left(|D^2_{x'}u - (D^2_{x'}u)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)}|\right)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)} \\
&\le N\kappa^{\sigma} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|D^2_{x'}u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)} \\
&\quad + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j/2} \left(|f|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)},
\end{aligned} \tag{4.8}$$

(2) 对于 $D_1 D_\ell u$, $\ell = 2,\dots,d$,

$$\begin{aligned}
&\left(|D_1 D_\ell u - (D_1 D_\ell u)_{Q_{\kappa r}(t_0,0)}|\right)_{Q_{\kappa r}(t_0,0)} \\
&\le N\kappa^{\sigma} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} (|DD_\ell u|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)} \\
&\quad + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} (|D^2_{x'}u|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)} \\
&\quad + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j/2} \left(|f|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

在这些估计中， $\sigma = \sigma(d,\alpha,p_0) \in (0,1)$， $N = N(d,\delta,\alpha,p_0)$，并且所有函数在 $t \le 0$ 时均延拓为零。

证明。对于 $a^{11} = a^{11}(t)$ 的情形，令 $\mathcal{U}_\ell = D_\ell u$ for $\ell = 2,\dots,d$。由 [9, 引理 3.2] $\mathcal{U}_\ell \in \mathcal{H}^{\alpha}_{,p_0}{}^{1}_{0,,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_T)$。此外， $\mathcal{U}_\ell$ 满足散度型方程

$$-\partial_t^\alpha \mathcal{U}_\ell + D_i\left(\tilde{a}^{ij} D_j \mathcal{U}_\ell\right) = D_\ell f$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，其中 $\tilde{a}^{ij}$ 定义为

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}^{11} = a^{11}, \quad \tilde{a}^{ij} = a^{ij}, \quad i,j = 2,\dots,d, \\
&\tilde{a}^{1j} = 0, \quad j = 2,\dots,d, \quad \tilde{a}^{i1} = a^{1i} + a^{i1}, \quad i = 2,\dots,d.
\end{aligned}$$

我们看到，系数矩阵$\{\tilde{a}^{ij}\}_{i,j=1,\dots,d}$ 满足假设 2.5 (i)。然后，将命题 4.1 应用于 $\mathcal{U}_\ell$，得到 (4.8) 和 (4.9)。

对于情形 $a^{11} = a^{11}(x_1)$，如命题 4.1 的证明中所述，我们假设 $x_0 = 0$ 和 $r = 1$。接下来使用以下变量替换:

$$y_1 = \chi(x_1) = \int_0^{x_1} \frac{1}{a^{11}(r)}\, dr, \quad y_i = x_i, \quad i = 2,\dots,d.$$

由 $\delta \le a^{11} \le \delta^{-1}$ 可知，逆变换 $\chi^{-1}(y_1)$ 存在，且

$$|\chi(x_1)| \le \delta^{-1}|x_1|, \quad |\chi^{-1}(y_1)| \le \delta^{-1}|y_1|. \tag{4.10}$$

Set

$$\mathcal{U}_\ell(t, y_1, y') = D_\ell u(t, \chi^{-1}(y_1), y'), \quad \ell = 2, \dots, d.$$

那么，$\mathcal{U}_\ell$ 属于 $\mathcal{H}^{\alpha,\ 1}_{p_0,\ 0,\ ,\ \text{局部}}(\mathbb{R}^d_T)$，并满足

$$-\partial_t^\alpha \mathcal{U}_\ell + D_i\left(\hat{a}^{ij} D_j \mathcal{U}_\ell\right) = D_\ell \mathcal{F}$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，其中 $\mathcal{F}(t, y_1, y') = f(t, \chi^{-1}(y_1)\ y')$ 和 $\hat{a}^{ij}$ 定义为

$$\begin{cases} \hat{a}^{11}(y_1) = \dfrac{1}{a^{11}(\chi^{-1}(y_1))}, \quad \hat{a}^{1j} = 0, & j = 2, \dots, d, \\ \hat{a}^{i1}(t, y_1) = \hat{a}^{11}(y_1)\left(a^{1i}(t, \chi^{-1}(y_1)) + a^{i1}(t, \chi^{-1}(y_1))\right), & i = 2, \dots, d, \\ \hat{a}^{ij}(t, y_1) = a^{ij}(t, \chi^{-1}(y_1)), & i, j = 2, \dots, d. \end{cases} \tag{4.11}$$

注意，$\{\hat{a}^{ij}\}_{i,\ j=1,\dots,d}$ 满足假设 2.5 (ii)。对于常数 C，利用 (4.10) 中的第一个不等式，得到

$$\begin{aligned} &\left(|D_{x'} D_\ell u - C|\right)_{Q_\kappa(t_0,0)} = N\kappa^{-2/\alpha-d} \int_{t_0-\kappa^{2/\alpha}}^{t_0} \int_{B_\kappa} |D_{x'}\mathcal{U}_\ell(t, \chi(x_1), x') - C|\, dx\, dt \\ &\le N\kappa^{-2/\alpha-d} \int_{t_0-\kappa^{2/\alpha}}^{t_0} \int_{|\chi(x_1)|^2+|x'|^2 \le (\delta^{-1}\kappa)^2} |D_{x'}\mathcal{U}_\ell(t, \chi(x_1), x') - C|\, dx\, dt \\ &\le N\kappa^{-2/\alpha-d} \int_{t_0-\kappa^{2/\alpha}}^{t_0} \int_{B_{\delta^{-1}\kappa}} |D_{x'}\mathcal{U}_\ell(t, y_1, y') - C|\, dy\, dt \\ &\le N\left(|D_{x'}\mathcal{U}_\ell - C|\right)_{Q_{\delta^{-1}\kappa}(t_0,0)} = N\left(|D_{x'}\mathcal{U}_\ell - C|\right)_{Q_{\kappa_1\delta}(t_0,0)}, \end{aligned}$$

其中 $N = N(d, \delta)$ 且 $\kappa_1 := \delta^{-2}\kappa$。注意，由于 $\kappa < \delta^2/16$，有 $\kappa_1 < 1/16$。然后，根据命题 4.1，取 κ_1 和 $r = \delta$，以及 $C = (D_{x'}\mathcal{U}_\ell)_{Q_{\kappa_1\delta}(t_0,\ 0)}$，得到

$$\begin{aligned} &\left(|D_{x'}\mathcal{U}_\ell - (D_{x'}\mathcal{U}_\ell)_{Q_{\kappa_1\delta}(t_0,0)}|\right)_{Q_{\kappa_1\delta}(t_0,0)} \\ &\le N\kappa_1^\sigma \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|D_{x'}\mathcal{U}_\ell|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j\delta^{2/\alpha},t_0)\times B_{\delta/2}} \\ &\quad + N\kappa_1^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j/2} \left(|\mathcal{F}|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j\delta^{2/\alpha},t_0)\times B_\delta}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

其中我们注意到，例如，由于 (4.10) 中的第二个不等式，

$$\left(|\mathcal{F}|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j\delta^{2/\alpha},t_0)\times B_\delta} \le N\left(|f|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j,t_0)\times B_1}.$$

因此，由 (4.12) 以及以下观察

$$\left(|D_{x'} D_\ell u - (D_{x'} D_\ell u)_{Q_\kappa(t_0,0)}|\right)_{Q_\kappa(t_0,0)} \le 2\left(|D_{x'} D_\ell u - C|\right)_{Q_\kappa(t_0,0)},$$

可得 $r=1$ 对应的 (4.8)。为得到 (4.9)，注意到以下事实后，我们按照上文类似的方法进行:

$$
\begin{aligned}
&(|D_1 D_\ell u - C|)_{Q_\kappa(t_0,0)} \\
&\le N\kappa^{-2/\alpha-d}\int_{t_0-\kappa^{2/\alpha}}^{t_0}\int_{B_{\delta^{-1}\kappa}}\left|\frac{1}{a^{11}(\chi^{-1}(y_1))}D_1\mathcal{U}_\ell(t,y_1,y')-C\right| a^{11}(\chi^{-1}(y_1))\,dy\,dt \\
&\le N\left(|\hat{a}^{11}D_1\mathcal{U}_\ell - C|\right)_{Q_{\delta^{-1}\kappa}(t_0,0)},
\end{aligned}
$$

其中 $\hat{a}^{11}$ 来自 (4.11)。该命题得证。 □

5. Proofs of Theorems 2.8 and 2.9

引理 5.1. 设 $\alpha\in(0,1)$, $T\in(0,\infty)$, $p,q\in(1,\infty)$, $K_1\ge 1$, $w=w_1(t)w_2(x)$, 其中

$$
w_1(t)\in A_p(\mathbb{R},dt),\quad w_2(x)\in A_q(\mathbb{R}^d,dx),\quad [w_1]_{A_p}\le K_1,\quad [w_2]_{A_q}\le K_1.
$$

那么，存在 $p_0=p_0(d,p,q,K_1)\in(1,\infty)$ 和 $\mu=\mu(d,\alpha,p,q,K_1)\in(1,\infty)$, $1/\mu+1/\nu=1$, 使得

$$
p_0<p_0\mu<\min\{p,q\},\quad \frac{1}{p_0\nu}<\frac{\alpha}{2}, \tag{5.1}
$$

并且以下结论成立。若 $u\in\mathcal{H}^{\alpha,\ p\ q}_{1,,w,\ 0}(\mathbb{R}^d_T)$ 在 $Q_{R_0}(t_1,0)$ 中具有紧支集，其中 $t_1\in[0,T]$, R_0 来自假设 2.6，且满足

$$
-\partial_t^\alpha u + D_i(a^{ij}D_j u)=D_i g_i
$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，若 a^{ij} 满足假设 2.6（γ_0）且 $g_i\in L_{p,\ q,\ w}(\mathbb{R}^d_T)$，那么对于任意 $(t_0,x_0)\in(0,T]\times\mathbb{R}^d$, $r\in(0,\infty)$、 $\kappa\in(0,1/16)$，我们有如下结论。

(1) *For $D_{x'}u$,*

$$
\begin{aligned}
&\left(|D_{x'}u-(D_{x'}u)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)}|\right)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)} \\
&\le N\kappa^\sigma\sum_{j=0}^\infty 2^{-\alpha j}\left(|D_{x'}u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B(x_0)} \\
&\quad + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\gamma_0^{1/(\nu p_0)}\sum_{j=0}^\infty 2^{j\left(\frac{1}{p_0\nu}-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(|D_x u|^{\mu p_0}\right)^{1/(\mu p_0)}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)} \\
&\quad + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\sum_{j=0}^\infty 2^{-\alpha j/2}\left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

(2) 对于 $D_1 u$，存在一个函数 U_1，定义在 $Q_{\kappa r}(t_0,x_0)$ 上，使得

$$
N_1(\delta)|D_1 u|\le U_1\le N_2(\delta)|D_1 u| \tag{5.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&in\ Q_{\kappa r}(t_0,x_0)\ and\\
&\left(|U_1-(U_1)_{Q_{\kappa r}(t_0,0)}|\right)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)} \le N\kappa^{\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}(|Du|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_0-2^jr^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)}\\
&+N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j}(|D_{x'}u|^{p_0})^{1/p_0}_{(t_0-2^jr^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)}\\
&+N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\gamma_0^{1/(\nu p_0)}\sum_{j=0}^{\infty}2^{j\left(\frac{1}{p_0\nu}-\frac{\alpha}{2}\right)}\left(|D_xu|^{\mu p_0}\right)^{1/(\mu p_0)}_{(t_0-2^jr^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}\\
&+N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\sum_{j=0}^{\infty}2^{-\alpha j/2}\left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^jr^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}.
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

在这些陈述中，$\sigma=\sigma(d,\alpha,p,q,K_1)\in(0,1)$，$N=N(d,\delta,\alpha,p,q,K_1)$，并且所有函数在 $t\le 0$ 时均扩展为零。

证明。对于给定的 $w_1\in A_p(\mathbb{R},dt)$ 和 $w_2\in A_q(\mathbb{R}^d,dx)$，利用权重 A_p 下的反向 H¨older 不等式，我们得到

$$\sigma_1=\sigma_1(p,K_1),\quad \sigma_2=\sigma_2(d,q,K_1)$$

使得 $p-\sigma_1>1$、$q-\sigma_2>1$，并且

$$w_1\in A_{p-\sigma_1}(\mathbb{R},dt),\quad w_2\in A_{q-\sigma_2}(\mathbb{R}^d,dx).$$

于是我们得到 $p_0\in(1,\infty)$，使得

$$p_0<\frac{p}{p-\sigma_1}\quad\text{and}\quad p_0<\frac{q}{q-\sigma_2}.$$

利用上述 σ_1、σ_2 和 p_0，我们令 $\mu\in(1,\infty)$，从而

$$\frac{1}{\mu}>1-\frac{\alpha p_0}{2},\quad p_0\mu\le\frac{p}{p-\sigma_1},\quad p_0\mu\le\frac{q}{q-\sigma_2}.$$

我们看到 p_0 和 μ 满足 (5.1)。注意

$$w_1\in A_{p-\sigma_1}\subset A_{\frac{p}{p_0\mu}}\subset A_{\frac{p}{p_0}}(\mathbb{R},dt),$$
$$w_2\in A_{q-\sigma_2}\subset A_{\frac{q}{p_0\mu}}\subset A_{\frac{q}{p_0}}(\mathbb{R}^d,dt).$$

由这些包含关系以及事实 $u\in\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p,q,,w,0}(\mathbb{R}^d_T)$ 可知（参见 [5, 引理 5.10] 的证明）

$$u\in\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p_0\mu,0,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_T).$$

为证明该引理中的估计，我们现在固定 $(t_0,x_0)\in\mathbb{R}^d_T$, $r\in(0,\infty)$，以及$\kappa\in(0,1/16)$。于是，只需考虑以下情形

$$Q_{\kappa r}(t_0,x_0)\cap Q_{R_0}(t_1,0)\ne\emptyset.\tag{5.5}$$

否则，这些估计显然成立。在 (5.5) 的情形下，我们有

$$t_0-(\kappa r)^{2/\alpha}<t_1\quad\text{and}\quad t_1-R_0^{2/\alpha}<t_0,\tag{5.6}$$

这意味着，若 $t\le t_0-2R_0^{2/\alpha}$，则 $u(t,x)=0$，前提是 $r<R_0$。对于固定的 (t_0,x_0) 和 $r\in(0,\infty)$，我们定义 $\bar a^{ij}$，它们是仅关于 t, x_1 或 (t,x_1) 的可测函数，如下所示。

(1) 若 $r<R_0$,

(a) 对于 $(i,j) \neq (1,1)$，我们设

$$\bar{a}^{ij}(t,x_1) = \fint_{B'_r(x'_0)} a^{ij}(t,x_1,y')\,dy',$$

(b) 对于 $(i,j) = (1,1)$，其中

(i) a^{11} 满足假设 2.6 (2.i) 于 (t_0,x_0)，令

$$\bar{a}^{11}(t) = \fint_{B_r(x_0)} a^{11}(t,y)\,dy,$$

(ii) a^{11} 满足假设 2.6 (2.ii) 于 (t_0,x_0)，令

$$\bar{a}^{11}(x_1) = \fint_{Q'_r(t_0,x'_0)} a^{11}(s,x_1,y')\,dy'\,ds.$$

(2) 若 $r \geq R_0$,

(a) 对于 $(i,j) \neq (1,1)$，令

$$\bar{a}^{ij}(t,x_1) = \fint_{B'_{R_0}} a^{ij}(t,x_1,y')\,dy',$$

(b) 对于 $(i,j) = (1,1)$，满足

(i) a^{11} 在 $(t_1,0)$ 处满足假设 2.6 (2.i)，我们令

$$\bar{a}^{11}(t) = \fint_{B_{R_0}} a^{11}(t,y)\,dy,$$

(ii) a^{11} 在 $(t_0,0)$ 处满足假设 2.6 (2.ii)，我们令

$$\bar{a}^{11}(x_1) = \fint_{Q'_{R_0}(t_1,0)} a^{11}(s,x_1,y')\,dy'\,ds.$$

利用上述定义的 $\bar{a}^{ij}$，记

$$-\partial_t^\alpha u + D_i(\bar{a}^{ij}D_j u) = D_i \bar{g}_i$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，其中

$$\bar{g}_i = (\bar{a}^{ij} - a^{ij})D_j u + g_i.$$

由于 $\bar{a}^{ij}$ 满足假设 2.5，将 g_i 替换为 $\bar{g}_i$ 后，由命题 4.1 可得，当 $\bar{a}^{11} = \bar{a}^{11}(x_1)$ 时，有 (4.1)、(4.2)；当 $\bar{a}^{11} = \bar{a}^{11}(t)$ 时，则可得到 (4.2) 的一个版本，其中不等式左侧的 $a^{11}D_1 u$ 被 $D_1 u$ 替换。关于涉及 $\bar{g}_i$ 的项，由于 u 在 $Q_{R_0}(t_1,0)$ 中具有紧支集，我们有

$$\sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j/2} \left(|\bar{g}_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)} \leq \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j/2} \left(|g_i|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}$$

$$+ \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j/2} \left(|a^{ij} - \bar{a}^{ij}|^{p_0}|Du|^{p_0} 1_{Q_{R_0}(t_1,0)}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)} := J_1 + J_2,$$

由 H¨older 不等式可知,

$$\left(|a^{ij} - \bar{a}^{ij}|^{p_0}|Du|^{p_0} 1_{Q_{R_0}(t_1,0)}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}$$

$$\leq \left(|a^{ij} - \bar{a}^{ij}|^{p_0\nu} 1_{Q_{R_0}(t_1,0)}\right)^{1/(p_0\nu)}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)} \left(|Du|^{p_0\mu}\right)^{1/(p_0\mu)}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}.$$

Set

$$J_{2,j} := \left(|a^{ij} - \bar{a}^{ij}|^{p_0\nu} 1_{Q_{R_0}(t_1,0)}\right)_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}$$

对于 $j = 0, 1, \ldots$. 我们声称

$$J_{2,j} \le N 2^j \gamma_0 \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5.7}$$

其中 $N = N(d, \alpha)$。为此，我们分两种情况讨论： $r < R_0$ 和 $r \ge R_0$。在后一种情况下，根据 $\bar{a}^{ij}$ 的定义以及 a^{ij} 被 δ^{-1} 有界可知

$$J_{2,j} \le N \left(|a^{ij} - \bar{a}^{ij}|\right)_{(t_1-R_0^{2/\alpha},t_1)\times B_{R_0}} \le N\gamma_0$$

对所有 $j = 0, 1, 2, \ldots$, 均成立。

对于 $r < R_0$，我们有

$$|a^{ij} - \bar{a}^{ij}| 1_{Q_{R_0}(t_1,0)} = 0 \quad \text{for } t < t_0 - 2R_0^{2/\alpha} \tag{5.8}$$

因为根据 (5.6)，对于这样的 t，我们有

$$t < t_0 - 2R_0^{2/\alpha} \le t_0 - (\kappa r)^{2/\alpha} - R_0^{2/\alpha} < t_1 - R_0^{2/\alpha}.$$

利用 a^{ij} 被 δ^{-1} 有界这一性质以及 (5.8)，

$$\begin{aligned} J_{2,j} &\le N(\delta) \left(|a^{ij} - \bar{a}^{ij}| 1_{Q_{R_0}(t_1,0)}\right)_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)} \\ &\le \begin{cases} N \left(|a^{ij} - \bar{a}^{ij}|\right)_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)} & \text{if} \quad 2^j r^{2/\alpha} < 2R_0^{2/\alpha}, \\ N \left(|a^{ij} - \bar{a}^{ij}|\right)_{(t_0-2R_0^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)} & \text{if} \quad 2^j r^{2/\alpha} \ge 2R_0^{2/\alpha}. \end{cases} \end{aligned}$$

于是，由注 2.7 可知，(5.7) 成立。因此，

$$\begin{aligned} J_2 &\le N \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j/2} J_{2,j}^{1/(p_0\nu)} \left(|Du|^{p_0\mu}\right)^{1/(p_0\mu)}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)} \\ &\le N\gamma_0^{1/(p_0\nu)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{\left(\frac{1}{p_0\nu} - \frac{\alpha}{2}\right) j} \left(|Du|^{p_0\mu}\right)^{1/(p_0\mu)}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}. \end{aligned}$$

将此估计与命题 4.1 结合，可得 (5.2) 和 (5.4)。特别地， $U_1 = D_1 u$ if $\bar{a}^{11} = \bar{a}^{11}(t)$ and $U_1 = \bar{a}^{11} D_1 u$ if $\bar{a}^{11} = \bar{a}^{11}(x_1)$。□

类似地，利用命题 4.2，可得以下引理。

引理 5.2. 设 $\alpha \in (0, 1)$, $T \in (0, \infty)$, $p, q \in (1, \infty)$, $K_1 \ge 1$, $w = w_1(t) w_2(x)$, 其中

$$w_1(t) \in A_p(\mathbb{R}, dt), \quad w_2(x) \in A_q(\mathbb{R}^d, dx), \quad [w_1]_{A_p} \le K_1, \quad [w_2]_{A_q} \le K_1.$$

那么，存在 $p_0 = p_0(d, p, q, K_1) \in (1, \infty)$ 和 $\mu = \mu(d, \alpha, p, q, K_1) \in (1, \infty)$, $1/\mu + 1/\nu = 1$, 使得

$$p_0 < p_0\mu < \min\{p, q\}, \quad \frac{1}{p_0\nu} < \frac{\alpha}{2},$$

且以下条件成立。如果 $u \in \mathbb{H}^{\alpha}_{,p\ q\ ,,w,0}(\mathbb{R}^d_T)$ 在 $(t_1 - R_0^{2/\alpha}, t_1) \times B_{R_0}$ 中具有紧支集，适用于 $t_1 \in [0, T]$, 其中 R_0 来自假设 2.6，并且满足

$$-\partial_t^{\alpha} u + a^{ij} D_{ij} u = f$$

在 $\mathbb{R}^d_T$ 中，其中 a^{ij} 满足假设 2.6（γ_0）并且 $f \in L_{p,\ q,\ w}(\mathbb{R}^d_T)$，那么对于任意 $(t_0,\ x_0) \in (0,\ T] \times \mathbb{R}^d$, $r \in (0,\ \infty)$, $\kappa \in (0,\ 1/16)$，我们有如下结论。

(1) *For* $D_{x'}^2 u$,

$$\left(|D_{x'}^2 u - (D_{x'}^2 u)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)}|\right)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)} \le N\kappa^{\sigma} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|D_{x'}^2 u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B(x_0)}$$

$$+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0} \gamma_0^{1/(\nu p_0)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\left(\frac{1}{p_0\nu}-\frac{\alpha}{2}\right)} \left(|D^2 u|^{\mu p_0}\right)^{1/(\mu p_0)}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}$$

$$+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j/2} \left(|f|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}. \tag{5.9}$$

(2)对于 $D_1 D_\ell u$, $\ell = 2, \ldots, d$,

$$\left(|D_1 D_\ell u - (D_1 D_\ell u)_{Q_{\kappa r}(t_0,0)}|\right)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)}$$

$$\le N\kappa^{\sigma} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|DD_\ell u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)}$$

$$+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j} \left(|D_{x'}^2 u|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_{r/2}(x_0)}$$

$$+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0} \gamma_0^{1/(\nu p_0)} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j\left(\frac{1}{p_0\nu}-\frac{\alpha}{2}\right)} \left(|D^2 u|^{\mu p_0}\right)^{1/(\mu p_0)}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}$$

$$+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-\alpha j/2} \left(|f|^{p_0}\right)^{1/p_0}_{(t_0-2^j r^{2/\alpha},t_0)\times B_r(x_0)}. \tag{5.10}$$

在这些陈述中，$\sigma = \sigma(d, \alpha, p, q, K_1) \in (0, 1)$，$N = N(d, \delta, \alpha, p, q, K_1)$，并且所有函数在 $t \le 0$ 时均延拓为零。

注 5.3. 引理 5.2 与 [8, Lemma 5.1], 类似，其中 $a^{ij}(t,x)$ 在 t 上仅可测，并且在 $x \in \mathbb{R}^d$ 上具有小平均振荡。然而，[8] 中的不等式 (5.2) 右侧必须写成无穷求和，如 (5.9) 和 (5.10) 中所示，而不能使用强极大函数。尽管 [8] 中的不等式 (5.2) 是正确的，但要通过平均振荡估计和扰动论证推导出 L_p-估计，需要一个带有无穷求和的不等式。[8, 引理 5.1] 的证明实际上得出了这样的估计。

为了证明我们的主要定理，我们使用以下极大函数和强极大函数。对于具有 $T \in (-\infty, \infty]$ 的 $(t_0, x_0) \in (-\infty, T) \times \mathbb{R}^d$，以及定义在 $(-\infty, T) \times \mathbb{R}^d$ 上的函数 f，我们令

$$\mathcal{M}f(t_0,x_0) = \sup_{Q_R(t,x) \ni (t_0,x_0)} \fint_{Q_R(t,x)} |f(s,y)|\,dy\,ds$$

and

$$\mathcal{SM}f(t_0,x_0) = \sup_{Q_{R_1,R_2}(t,x) \ni (t_0,x_0)} \fint_{Q_{R_1,R_2}(t,x)} |f(s,y)|\,dy\,ds,$$

其中，上确界取遍所有满足 $(t,x) \in (-\infty, T] \times \mathbb{R}^d$ 的 $Q_R(t,x)$ 和 $Q_{R_1,R_2}(t,x)$。证明中还将使用如下定义的锐函数:

$$f^{\#}(t_0,x_0) = \sup_{Q_R(t,x) \ni (t_0,x_0)} \fint_{Q_R(t,x)} |f(s,y) - (f)_{Q_R(t,x)}|\,dy\,ds,$$

其中，上确界的取法如上。

定理 2.8 的证明。我们先证明

$$\|Du\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} \le N\|g_i\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} \tag{5.11}$$

对于 $u \in \mathcal{H}^{\alpha}_{,p\ q\ ,,w,0}(\mathbb{R}^d_T)$，其在 $Q_{R_0}(t_1, 0)$ 中具有紧支集，并满足 (2.11)，其中

$$a^i = b^i = c = f = 0. \tag{5.12}$$

由引理 5.1 (1) 可知，对于任意的 $(t,x) \in (-\infty, T)\times\mathbb{R}^d$ 和 $\kappa \in (0, 1/16)$，有

$$\begin{aligned}(D_{x'}u)^{\#}(t,x) \le{}& N\kappa^{\sigma}\big(\mathcal{SM}|D_{x'}u|^{p_0}(t,x)\big)^{1/p_0}\\ &+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\gamma_0^{1/(\nu p_0)}\big(\mathcal{SM}|Du|^{\mu p_0}(t,x)\big)^{1/(\mu p_0)}\\ &+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\big(\mathcal{SM}|g_i|^{p_0}(t,x)\big)^{1/p_0},\end{aligned}$$

其中所有函数在 $t \le 0$ 外均延拓为零。于是，由加权混合范数 Hardy-Littlewood 极大函数定理（例如，参见 [8, 定理 5.2]）和加权混合范数 Fefferman–Stein 锐函数定理（参见 [5,推论 2.7 和 (2.4)]），可得

$$\|D_{x'}u\| \le N\kappa^{\sigma}\|D_{x'}u\| + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\gamma_0^{1/(\nu p_0)}\|Du\| + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\|g_i\|, \tag{5.13}$$

其中 $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)}$，且常数 N 与 κ 无关。为估计 D_1u，注意到引理 5.1 (2) 推出如下结论。对于每个 $Q_{\kappa r}(t_0,x_0)$，其中 $(t_0,x_0) \in (0,T]\times\mathbb{R}^d$, $r \in (0,\infty)$，且 $\kappa \in (0, 1/16)$，存在一个定义在 $Q_{\kappa r}(t_0,x_0)$ 上的函数 U_1，使得 (5.3) 成立，并且

$$\begin{aligned}\big(|U_1 - (U_1)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)}|\big)_{Q_{\kappa r}(t_0,x_0)} \le{}& N\kappa^{\sigma}\big(\mathcal{SM}|Du|^{p_0}(t,x)\big)^{1/p_0}\\ &+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\big(\mathcal{SM}|D_{x'}u|^{p_0}(t,x)\big)^{1/p_0}\\ &+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\gamma_0^{1/(\nu p_0)}\big(\mathcal{SM}|Du|^{\mu p_0}(t,x)\big)^{1/(\mu p_0)}\\ &+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\big(\mathcal{SM}|g_i|^{p_0}(t,x)\big)^{1/p_0}\end{aligned}$$

对所有 $(t,x) \in Q_{\kappa r}(t_0,x_0)$ 均成立。现在，我们像上文一样使用加权混合范数 Hardy–Littlewood 极大函数定理，并结合推论 2.8] 以及不等式 (5.3)，得到

$$\begin{aligned}\|D_1u\| \le{}& N\kappa^{\sigma}\|Du\| + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\|D_{x'}u\|\\ &+ N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\gamma_0^{1/(\nu p_0)}\|Du\| + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\|g_i\|,\end{aligned} \tag{5.14}$$

其中，同样地，$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)}$，且常数 N 与 κ 无关。结合 (5.13) 和 (5.14) 可得

$$\begin{aligned}&\|D_{x'}u\| + (2N)^{-1}\kappa^{(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\|D_1u\| \le (N\kappa^{\sigma} + 1/2)\|D_{x'}u\|\\ &+ N(\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\gamma_0^{1/(\nu p_0)} + \kappa^{\sigma+(d+\frac{2}{\alpha})/p_0})\|Du\| + N\kappa^{-(d+\frac{2}{\alpha})/p_0}\|g_i\|.\end{aligned}$$

首先选取 κ 足够小，然后令 γ_0 足够小，我们吸收上式右端的前两项，从而得到（5.11）。

现在，我们按照[7, 引理 6.4 和 6.5]的证明，去掉 u 的小支集条件以及（5.12）。通过使用单位分解论证和 S. Agmon 的思想（另见 [14, 引理 5.5]），我们得到

$$\|u\|_{\mathcal{H}^{\alpha,1}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)} \le N\|g_i\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} + N\|f\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} + N\|u\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)}, \tag{5.15}$$

其中 $N = N(d, \delta, \alpha, p, q, K_1, K_0, R_0)$。为消去 (5.15) 右端的 u 项并得出估计 (2.12)，我们采用与证明定理 2.4] 相同的时间分割论证。最后，由先验估计 (2.12) 和连续性方法可得该方程的可解性。□

定理 2.9 的证明。与前面一样，我们首先证明

$$\|D^2u\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} \le N\|f\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} \tag{5.16}$$

对于 $u \in \mathbb{H}^{\alpha,}{}^{2}_{p\,q}{}_{,\ ,\ w,\ 0}(\mathbb{R}^d_T)$，其在 $Q_{R_0}(t_1, 0)$ 中具有紧支集，并满足带有 $b^i = c = 0$ 的 (2.13)。按照证明定理 2.8 的方法使用引理 5.2，可得

$$\|DD_{x'}u\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} \le N\|f\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} + N\gamma_0^{1/(\nu p_0)}\|D^2u\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)}. \tag{5.17}$$

为完成证明，也就是说，为了得到关于 D_1^2u 的估计，我们将方程写成

$$-\partial_t^\alpha u + a^{11}D_{11}u + \Delta_{x'}u = \Delta_{x'}u - \sum_{(i,j)\neq(1,1)} a^{ij}D_{ij}u + f.$$

令 $u_1 = D_1u$，其满足散度型方程

$$-\partial_t^\alpha u_1 + D_1\left(a^{11}D_1u_1\right) + \Delta_{x'}u_1 = D_1g_1, \tag{5.18}$$

其中

$$g_1 = \Delta_{x'}u - \sum_{(i,j)\neq(1,1)} a^{ij}D_{ij}u + f.$$

将定理 2.8 应用于 (5.18)，可得

$$\|D_1^2u\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} = \|D_1u_1\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} \le N\|g_1\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)}$$

$$\le N\|DD_{x'}u\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} + N\|f\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)}.$$

结合 (5.17)，当 γ_0 充分小时，这便证明了 (5.16)。

现在，我们利用与 [8, 推论 5.4] 中相同的单位分解论证，去除对 u 的小支集条件以及条件 $b^i = c = 0$。于是得到

$$\|u\|_{\mathbb{H}^{\alpha,2}_{p,q,w,0}(\mathbb{R}^d_T)} \le N\|f\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)} + N\|u\|_{L_{p,q,w}(\mathbb{R}^d_T)}, \tag{5.19}$$

其中 $N = N(d, \delta, \alpha, p, q, K_1, K_0, R_0)$。为了消去 (5.19) 右端的 u 项，并得出估计 (2.14)，我们采用与证明 [8, 定理 2.2] 相同的时间分割论证。最后，由先验估计 (2.14) 和连续性方法可得该方程的可解性。□

Appendix A.

设 $t_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \nu < \mu$, $u \in L_p((-\infty, t_0) \times \Omega)$, $1 < p < \infty$, 以及

$$\eta(t) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad t \geq t_0 - \nu, \\ 0 & \text{if} \quad t \leq t_0 - \mu, \end{cases} \quad |\eta'(t)| \leq \frac{2}{\mu - \nu}. \tag{A.1}$$

Set

$$G(t,x) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha-1} (\eta(s) - \eta(t))\, u(s,x)\, ds. \tag{A.2}$$

另设 $\{s_k\}$ 为一个满足下式的序列

$$s_1 = \mu, \quad s_k + \mu \leq s_{k+1}, \quad \frac{s_{k+1}}{N_0} \leq s_k, \tag{A.3}$$

其中 $N_0 > 0$。

引理 A.1. 对于上文中 $\{s_k\}$所定义的 (A.2) 中的 G ，有

$$\begin{aligned} \|G\|_{L_p((t_0-\mu,t_0)\times\Omega)} &\leq \frac{2\alpha\mu^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(1-\alpha)(\mu-\nu)} \left(\int_{t_0-2\mu}^{t_0-\nu} \int_{\Omega} |u(t,x)|^p \, dx\, dt \right)^{1/p} \\ &+ \frac{\alpha(N_0^{\alpha+1}+1)}{\Gamma(1-\alpha)} \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-\alpha-1} (s_{k+1}-s_k)^{1-1/p} \mu^{1/p} \left(\int_{t_0-s_{k+1}}^{t_0-s_k} \int_{\Omega} |u(s,x)|^p \, dx\, ds \right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{A.4}$$

注 A.2. 值得注意的是，不等式 (A.4) 的右端不包含 u 关于 t 在 $(t_0 - \nu, t_0)$ 上的积分，因为对于 $t \geq t_0 - \nu$， $\eta(t) = 1$。

引理 A.1 的证明。注意

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} G(t,x) = \int_{-\infty}^{t} (t-s)^{-\alpha-1} (\eta(s) - \eta(t))\, u(s,x) 1_{s \leq t_0 - \nu}\, ds$$

因为 $\eta(s) - \eta(t) = 0$ 对于 $s \in (t_0 - \nu, t_0)$ 和 $t \geq s$。然后我们写出

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} G(t,x) &= \left(\int_{t-\mu}^{t} + \int_{-\infty}^{t-\mu} \right) (t-s)^{-\alpha-1} (\eta(s) - \eta(t))\, u(s,x) 1_{s \leq t_0 - \nu}\, ds \\ &=: I_1(t,x) + I_2(t,x). \end{aligned} \tag{A.5}$$

由于

$$\begin{aligned} |I_1(t,x)| &\leq \frac{2}{\mu - \nu} \int_{t-\mu}^{t} (t-s)^{-\alpha} |u(s,x)| 1_{s \leq t_0 - \nu}\, ds \\ &= \frac{2}{\mu - \nu} \int_{0}^{\mu} s^{-\alpha} |u(t-s,x)| 1_{t-s \leq t_0 - \nu}\, ds, \end{aligned}$$

根据闵可夫斯基不等式，我们有

$$\|I_1\|_{L_p((t_0-\mu,t_0)\times\Omega)} \leq \frac{2\mu^{1-\alpha}}{(1-\alpha)(\mu-\nu)} \left(\int_{t_0-2\mu}^{t_0-\nu} \int_{\Omega} |u(t,x)|^p \, dx\, dt \right)^{1/p}. \tag{A.6}$$

为估计 I_2，注意到 $\eta(s) = 0$ 对于 $s \le t-\mu = t-s_1$ 和 $t \in (t_0-\mu, t_0)$，这意味着，对于 $t \in (t_0-\mu, t_0)$，

$$
\begin{aligned}
&|I_2(t,x)| \le \int_{-\infty}^{t-s_1} (t-s)^{-\alpha-1}|u(s,x)|\,ds \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{t-s_{k+1}}^{t-s_k} (t-s)^{-\alpha-1}|u(s,x)|\,ds \le \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-\alpha-1} \int_{t-s_{k+1}}^{t-s_k} |u(s,x)|\,ds \\
&\le \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-\alpha-1} \int_{t_0-\mu-s_{k+1}}^{t_0-s_k} |u(s,x)|\,ds \le \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-\alpha-1} \int_{t_0-s_{k+2}}^{t_0-s_k} |u(s,x)|\,ds \\
&\le (N_0^{\alpha+1}+1) \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-\alpha-1} \int_{t_0-s_{k+1}}^{t_0-s_k} |u(s,x)|\,ds,
\end{aligned}
$$

其中在最后一个不等式中，我们使用了条件 $s_{k+1} \le N_0 s_k$ in (A.3)。因此，根据 H¨older 不等式和富比尼定理，

$$
\begin{aligned}
&\|I_2\|_{L_p((t_0-\mu,t_0)\times\Omega)} \\
&\le (N_0^{\alpha+1}+1) \sum_{k=1}^{\infty} s_k^{-\alpha-1} (s_{k+1}-s_k)^{1-1/p} \mu^{1/p} \left(\int_{t_0-s_{k+1}}^{t_0-s_k} \int_{\Omega} |u(s,x)|^p \,dx\,ds \right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

由此不等式、(A.5) 和 (A.6)，我们得到引理中的不等式。 □

References

[1] Goro Akagi. 希尔伯特空间中由次微分驱动的分数阶流。 *Israel J. Math.*，234 2 809( ): –862，2019。[2] Hongjie Dong. 具有分层部分有界平均振荡系数的二阶方程的可解性。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，364(1):493–517，2012。[3] Hongjie Dong 和 Doyoon Kim. L_p 具有部分有界平均振荡系数的散度型抛物型与椭圆型系统的可解性。 *Calc. Var. Partial Differential Equations*，40(3-4):357–389，2011。[4] Hongjie Dong 和 Doyoon Kim. 时间不规则系数下简单凸多面体中的抛物型方程。 *SIAM J. Math. Anal.*，46(3):1789–1819，2014。[5] Hongjie Dong 和 Doyoon Kim. 关于具有A_p 权重的椭圆方程和抛物型方程的 L_p估计。 *Trans. Amer. Math. Soc.*，370(7):5081–5130，2018。[6] Hongjie Dong 和 Doyoon Kim. 时间可测系数的时间分数阶抛物方程的 L_p估计。 *Adv. Math.*，345:289–345，2019。[7] Hongjie Dong 和 Doyoon Kim. 具有可测系数的散度形式时间分数阶抛物方程的 L_p估计。 *J. Funct. Anal.*，278(3):108338，66，2020。[8] Hongjie Dong 和 Doyoon Kim. 对含局部和非局部时间导数的抛物型方程加权混合范数估计的一种方法。 *Adv. Math.*，377:107494，44，2021。[9] Hongjie Dong 和 Doyoon Kim. 具有可测系数的时间分数阶抛物方程及分数阶抛物型索博列夫空间的嵌入。 *Int. Math. Res. Not. IMRN*，(22):17563–17610，2021。[10] Hongjie Dong 和 Yanze Liu. 具有VMO系数的分数阶波动方程的加权混合范数估计。 *J. Differential Equations*，337:168–254，2022。[11] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis*，*Graduate Texts in Mathematics* 第249卷。Springer，纽约，第三版，2014。[12] Beom-Seok Han、Kyeong-Hun Kim 和 Daehan Park. C^1 区域上具有时间分数阶导数的扩散波方程的加权索博列夫空间理论。 *Discrete Contin. Dyn. Syst.*，41(7):3415–3445，2021。[13] Doyoon Kim 和 Kwan Woo. 时间分数阶演化方程的索博列夫空间与迹定理。2022。

[14] N. V. Krylov. 具有VMO系数的抛物型方程和椭圆方程。

Comm. Partial Differ- , (-): – 。[15]

ential Equations 32 1 3 453 475, 2007
N. V. Krylov. 关于一维空间中的抛物型方程。

Comm. Partial Differential , ( ): – 。[16]

Equations 41 4 644 664, 2016
Adam Kubica、Katarzyna Ryszewska 和 Masahiro Yamamoto. *Time-fractional differential equations—a theoretical introduction* 。Springer数学简明丛书。Springer，新加坡，[2020]©2020。[17] Adam Kubica 和 Masahiro Yamamoto. 时变系数下分数阶扩散方程的初边值问题。 *Fract. Calc. Appl. Anal.*，21 311，2018 2 276( ): – 。[18] Rico Zacher. 希尔伯特空间中抽象演化积分微分方程的弱解。 *Funkcial. Ekvac.*，52(1):1–18，2009。

（H. Dong） Division of Applied Mathematics, Brown University, 182 George Street,Providence, RI 02912, USA*Email address*: Hongjie_Dong@brown.edu

（D. Kim） Department of Mathematics, Korea University, 145 Anam-ro, Seongbuk-gu, Seoul, 02841, Republic of Korea*Email address*: doyoon_kim@korea.ac.kr