arXiv:2303.01689v1 [math.CO] 3 Mar 2023

局部有限不可比图偏序集的 Aharoni–Korman猜想

IMED ZAGUIA*

Abstract. Aharoni 和 Korman（《序》9（1992）245–253）提出猜想：每个不含无限反链的偏序集，都有一条链以及一个由反链组成的划分，使得每个部分都与该链相交。对于不可比图局部有限的偏序集，该猜想成立。因此，对于不含无限反链的 $(3+1)$-自由偏序集，该猜想也成立。

1. Introduction and presentation of the results

在 [2], Aharoni 和 Korman 提出了以下猜想。

猜想 1. 对于一个 P 不含无限反链的偏序集，以及任意正整数 k，存在 k 条链 $C_1,\dots,C_k$，以及一个将 P划分为反链 $(A_i : i \in I)$ 的划分，使得每个A_i 与 $\min(|A_i|, k)$ 条链 C_j相交。

这一猜想是一个定理的对偶，Aharoni 和 Korman 将该定理称为著名的 Greene–Kleitman Sperner k-族定理的“正确的无限版本”[6]。

该猜想的 $k = 1$ 情形已被证明：对于每一层均为有限集的良基有序集，该猜想成立 [2]。这可由一阶逻辑紧致性定理推出。Duffus 和 Goddard 在 [3]中给出了构造性证明。猜想 1 对宽度为二的偏序集（即不含基数为 3 的反链）也成立。Aharoni 和 Korman [2] 通过应用以下基本定理得到了这一结果。

定理 1.（K¨onig 对偶定理）。每个二分图 G 都包含一个覆盖 D 和一个匹配 F，使得 D 恰好从 F 的每条边中各包含一个顶点。

K¨onig 在有限情形 [7], 下证明了这一定理，而 Aharoni [1] 则证明了其完全一般的情形。

该猜想的另外两个成立情形 $k = 1$ 由 Duffus 和 Goddard [3]给出：

定理 2（[3]）。设 C 是一条链， P 是一个高度有限的偏序集。那么，直积 $C \times P$ 存在一个由反链组成的划分，并且 $C \times P$ 中存在一条链与该划分的每个成员相交。

日期：2023年3月6日。2010年数学主题分类：06A6，06F15。关键词和短语：（偏）序集；链；反链；Aharoni–Korman 猜想；局部有限；半序。*作者受加拿大国防学院研究计划资助。

定理 3（[3]）。如果 P 是一个没有无限区间且没有无限反链的偏序集，那么 P 存在一个由反链组成的划分，并且 P 中存在一条链与该划分的每个成员相交。

本文旨在证明以下结果。如果每个顶点都只与有限多个顶点相邻，则称一个图为局部有限图。

定理 4. 若 P 是一个偏序集，且其不可比图局部有限，则存在一个将 P 划分为反链的划分，并且存在 P 的一条链与该划分中的每个部分都相交。

具有局部有限不可比图的偏序集类，包含不含无限反链的无 (3+1) 偏序集类。因此，

推论 5. 若 P 是一个不含无限反链的无 $(3+1)$ 偏序集，则存在一个将 P 划分为反链的划分，并且存在 P 的一条链与该划分中的每个部分都相交。

无 $(3+1)$ 偏序集类已得到充分研究（参见 [5, 8, 10, 11, 13]）。这些偏序集在 Stanley 和 Stembridge 的无 $(3+1)$ 猜想 [12] 中发挥着核心作用。在无 $(3+1)$ 偏序集类中，有一个著名的类，即半序。

下文中，我们将把猜想 1 的实例 $k = 1$ 称为 Aharoni–Korman猜想。

2. Prerequisites

下文中，$P := (X, \leq)$ 表示一个偏序集，简称偏序集。对于 $x, y \in V$，我们称 x 和 y 可比，当且仅当 $x \leq y$ 或 $y \leq x$；否则称 x 和 y 不可比。两两不可比元素集称为反链。链是全序集。P 的可比图（分别是不可比图）是指顶点集为 X 、边为由可比的不同顶点组成的点对 $\{u, v\}$（即 $u < v$ 或 $v < u$）的图，记作 $Comp(P)$（分别记作 $Inc(P)$）。

设 I 是一个偏序集，满足 $|I| \geq 2$，并设 $\{P_i := (V_i, \leq_i)\}_{i \in I}$ 是一个由两两不交的非空偏序集组成、且各自均与 I不交的族。字典序和 $\sum_{i \in I} P_i$ 是偏序集
在 $\bigcup_{i \in I} V_i$ 上定义 $x \leq y$，当且仅当

(a) 存在 $i \in I$，使得 x、$y \in V_i$ 和 $x \leq_i y$ 属于 P_i；或 (b) 存在不同的元素 i、$j \in I$，使得 $i < j$ 属于 I、$x \in V_i$ 和 $y \in V_j$。

如果 I 是一个全序集，那么 $\sum_{i \in I} P_i$ 被称为线性和。

3. Proof of Theorem 4

将偏序集的不可比图分解为连通分支，可表述为以下引理；该引理属于有序集理论中的公知结果。

引理6. 如果 $P := (V, \leq)$ 是一个偏序集，则 P 上的序在 $Connect(P)$ 的连通分支集合上诱导出一个全序，其中 $Connect(P)$ 是 Inc(P) 的连通分支，而 P 是这些分支关于链 $Connect(P)$ 的字典序和。特别地，如果 $\leq$ 是扩展 P 的序 $\leq$ 的一个全序，则 Inc(P) 的每个连通分支 A 都是链 $(V, \leq)$ 的一个区间。

以下引理的证明很简单，留给读者完成。

引理 7. 设 $P = \sum_{i\in I} P_i$ 为一个线性和。设 A_i 是 P_i 的一个反链划分，C_i 是 P_i 的一条链，使得 C_i 与 A_i的每个部分都相交。那么 $\bigcup_{i\in I} A_i$ 是 P 的一个反链划分，而 $\sum_{i\in I} C_i$ 是 P 的一条链，并且与 $\bigcup_{i\in I} A_i$的每个部分都相交。

由引理 6 和引理 7 可轻易推出：如果 Aharoni-Korman 猜想对不含无限反链且不可比图连通的偏序集成立，那么它就对所有不含无限反链的偏序集成立。

我们考虑这样一类偏序集，其中每个元素都仅与有限多个元素不可比。也就是说，这类偏序集 P 满足 Inc(P) 局部有限。

以下引理是众所周知的。

引理 8. 设 $G = (V, E)$ 是一个连通且局部有限的图。那么 G 至多可数。

证明。令 $v \in V$，并考虑 V_n 中所有与 v距离为 n 的顶点组成的集合。由于 G 是连通的，$V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$。由 G 局部有限可知，每个 V_n 都是有限的，因此 V 至多可数。□

令 $P = (V, \leq)$ 是一个偏序集，且 $X \subseteq V$。我们用 $\downarrow X := \{v \in V : v \leq x$ 表示某个 $x \in X$.

引理 9。设 $P = (V, \leq)$ 是一个偏序集，满足 Inc(P) 局部有限。若 $\omega + 1$ 嵌入到P中，则 $\downarrow \omega$是 Inc(P) 的一个非平凡分支，因此 Inc(P) 不连通。

证明。设 C 是 P中的一条序型为 $\omega + 1$ 的链，且令 c 为 C的最大元素。令$I := \downarrow C \setminus \{c\}$，并令 $F := V \setminus I$。于是 $c \in F$，因此 $F \neq \varnothing$。令 $x \in F$。用 $I_\omega(x)$ 表示 $C \setminus \{c\}$中与 x不可比的元素集合。于是 $I_\omega(x)$ 是 $C \setminus \{c\}$的一个终区间（它是区间这一点显然；它是终区间这一点则由 $x \notin I$ 且I 是 P的初始段可知）。根据我们的假设，即 P 的不可比图局部有限，并结合 $C \setminus \{c\}$的非空终区间都是无限集这一事实，可知$I_\omega(x) = \varnothing$。因此，$x$ 大于 $C \setminus \{c\}$中的所有元素（这是因为 $x \notin I$），所以 x 大于 I中的所有元素。于是 F中的每个元素都大于 I中的所有元素。由于 $\{I, F\}$ 是 V 的一个非平凡划分，我们可知 I 是 Inc(P) 的一个非平凡分支，因此 Inc(P) 不连通。□

推论 10. 设 $P = (V, \leq)$ 是一个偏序集，使得 Inc(P) 连通且局部有限。那么 P 的每条链都嵌入链 $\mathbb{Z}$。

证明. 由引理 9 可知，P 不嵌入 $\omega + 1$。由于 P 及其对偶具有相同的不可比图，我们推知 $\omega + 1$ 不嵌入 P 的对偶，也就是说，$1 + \omega^*$ 不嵌入 P。因此，P 的每条链都嵌入链 $\mathbb{Z}$。□

接下来只需考虑 P 的每个区间都是有限的情形。结论由定理 3 得出。

References

[1] R. Aharoni，König 关于无限二分图的对偶定理，《伦敦数学学会杂志》29（1984）1–12。[2] R. Aharoni 和 V. Korman，无限偏序集的 Greene-Kleitman 定理，《序》9（1992）245–253。[3] D. Duffs 和 T. Goddard，关于 Aharoni-Korman 猜想的一些进展，《离散数学》250（2002）79–91。

[4] P. C. Fishburn，《区间序与区间图》。John Willey & Sons，1985年。[5] V. Gasharov，不含（3 + 1）的偏序集的不可比图是 s-正的，《离散数学》157（1996年）211–215。[6] C. Greene，D.J. Kleitman，Sperner k-族的结构，《组合理论杂志》A辑20（1976年）69–79。[7] D. König，《有限图与无限图理论》（Chelsea，纽约，1950年）。[8] Guay-Paquet, Mathieu；Morales, Alejandro H.；Rowland, Eric，不含（3 + 1）的偏序集的结构与计数。《组合年刊》18（2014年）645–674。[9] M. Pouzet 和 I. Zaguia，具有路径的不可比图的度量性质。《离散数学贡献》17（2022年）109–141。[10] Mark Skandera，不含（3 + 1）的偏序集的刻画，《组合理论杂志》A辑93（2001年）231–241。[11] Mark Skandera 和 Brian Reed，全非负性与不含（3 + 1）的偏序集，《组合理论杂志》A辑103（2003年）237–256。[12] Stanley, R.P.，Stembridge, J.R.，关于 Jacobi-Trudi矩阵的 Immanant 以及位置受限的排列。《组合理论杂志》A辑62（1993年）261–279。[13] Imed Zaguia，关于（3 + 1）-自由有序集的不动点性质，《序》28（2011年）465–479。

Department of Mathematics & Computer Science, Royal Military College of Canada, P.O.Box 17000, Station Forces, Kingston, Ontario, Canada K7K 7B4电子邮箱地址：zaguia@rmc.ca