arXiv:2303.01715v1 [math.PR] 3 Mar 2023

带奇异核的随机 Volterra 方程的中心极限定理

乔慧杰

东南大学数学学院，中国江苏南京 211189
hjqiaogean@seu.edu.cn

Abstract. 本文研究带奇异核的随机 Volterra 方程。在适当条件下，我们证明了这类方程的中心极限定理。此外，我们将结果应用于核为分数布朗运动且 Hurst 参数为 $H \in (0, 1)$ 的随机 Volterra 方程。

1. Introduction

固定 $T > 0$ 并考虑以下类型的随机 Volterra 方程

$$X_t(x) = x + \int_0^t K_1(t,s)b(s, X_s(x))\mathrm{d}s + \int_0^t K_2(t,s)\sigma(s, X_s(x))\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

其中，$x \in \mathbb{R}^d$, $K_i(t,s)$ $i = 1, 2$ 是定义在 $[0,T] \times [0,T]$ 上的两个正函数，它们可能是奇异的；$(B_t)_{t\in[0,T]}$ 是定义在滤过概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}, \mathbb{P})$ 上的 m 维布朗运动，系数 $b\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d$, $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^m$ 均为博雷尔可测。这类随机 Volterra 方程广泛出现在许多领域，例如非线性滤波 [5]，流体湍流 [3]，大气风湍流建模 [4] 以及数理金融 [2]。相关研究成果已有很多（参见 [1, 8, 9, 12, 13, 14, 15, 16]）。

本文旨在考察方程(1)小扰动的渐近行为。具体而言，考虑以下随机 Volterra 方程

$$X_t^\varepsilon(x) = x + \int_0^t K_1(t,s)b(s, X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}s + \sqrt{\varepsilon}\int_0^t K_2(t,s)\sigma(s, X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}B_s, \quad t \in [0,T]. \tag{2}$$

我们将研究该数量的渐近行为

$$\frac{X_\cdot^\varepsilon - X_\cdot^0}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ in } C([0,T] \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \tag{3}$$

其中 $\varepsilon \to 0$，X^0 满足以下 Volterra 方程:

$$X_t^0(x) = x + \int_0^t K_1(t,s)b(s, X_s^0(x))\mathrm{d}s. \tag{4}$$

美国数学学会学科分类（2020）：60H20；60F05。关键词：带奇异核的随机 Volterra 方程；中心极限定理；分数布朗运动。本工作得到中国国家自然科学基金（编号：12071071）的资助。

对于 (3)，若将 $\sqrt{\varepsilon}$ 替换为常数 1，则这一类渐近行为的结果称为大偏差原理（简称 LDP）。在 [13], Nualart 和 Rovira 首先研究了正则核随机 Volterra 方程的大偏差原理。一方面，Lakhel [11]将这一结果推广到了 Besov-Orlicz 空间。另一方面，Zhang [16] 将这一结果推广到了具有奇异核的随机 Volterra 方程。后来，针对特殊的 Volterra 型粗糙波动率模型，Cellupica 和 Pacchiarotti [2] 以及 Gulisashvili [8] 均建立了相应的大偏差原理。最近，针对一般的随机 Volterra 系统，Jacquier 和 Pannier [9] 在较弱条件下证明了大偏差原理。

在（3）中，若将 $\sqrt{\varepsilon}$ 替换为满足以下条件的函数 $a(\varepsilon)$

$$a(\varepsilon) \to 0, \quad \frac{\varepsilon}{a^2(\varepsilon)} \to 0 \quad as \quad \varepsilon \to 0,$$

我们将这类渐近行为的结果称为中等偏差原理（简称 MDP）。在 [12], Li 等人证明了正则核的一维随机 Volterra 方程的 MDP。在 [9], Jacquier 和 Pannier 将这一结果推广到具有奇异核的随机 Volterra 系统。

对于（3）的情形，这类渐近行为的结果称为中心极限定理（简称 CLT）。中心极限定理描述了当 $\varepsilon \to 0$时，$\frac{X^\varepsilon - X^0}{\sqrt{\varepsilon}}$在某种意义下收敛到一个随机过程。也就是说，根据中心极限定理，我们可以得知具体的极限。然而，迄今为止，尚无关于随机 Volterra 方程的相关结果。本文证明，在一些适当条件下，当 $\varepsilon \to 0$时，$\frac{X^\varepsilon - X^0}{\sqrt{\varepsilon}}$在 L^p 意义下收敛到一个随机 Volterra 方程的解。

请注意，方程(2)的解通常既不是半鞅，也不是马尔可夫过程，因此无法使用 Itô 微积分或 Feynman-Kac 型公式。因此，本文采用了许多技巧来获得一些估计。

最后，我们阐述本文的研究动机。注意，通过对关于分数布朗运动的随机积分进行积分变换，可以将其与涉及奇异核的关于标准布朗运动的随机积分联系起来。因此，由分数布朗运动驱动的随机微分方程可以视为涉及奇异核的随机 Volterra 方程。这促使我们在本文中研究具有奇异核的随机 Volterra 方程的中心极限定理，其中由分数布朗运动驱动的随机微分方程是一个重要的特殊子类。

本文结构如下。下一节将陈述主要结果。第 3 节将详细证明主要定理。最后，我们将展示如何将该结果应用于由分数布朗运动驱动的随机微分方程。

在下文中，带或不带下标的 C 将表示不同的正常数，其数值可能随行而变。

2. The central limit theorem for stochastic Volterra equations with singular kernels

本节研究具有奇异核的随机 Volterra 方程的中心极限定理。首先，对于方程(2)和方程(4)，我们作如下假设:

（H_K^1）存在 $\beta > 1$ 使得

$$\sup_{t\in[0,T]} \int_0^t \left[K_1(t,s)^\beta + K_2(t,s)^{2\beta}\right] \mathrm{d}s \leqslant C.$$

（$\mathbf{H}_K^2$）存在 $\gamma>0$ 使得对于任意 $t,\ t'\in[0,T]$

$$\int_0^{t\wedge t'}\left[|K_1(t',s)-K_1(t,s)|+|K_2(t',s)-K_2(t,s)|^2\right]\mathrm{d}s\leqslant C|t'-t|^{\gamma}.$$

对于任意 $t\in[0,T]$ 和 x、x_1、$x_2\in\mathbb{R}^d$，$(\mathbf{H}_{b,\sigma}^1)$ b、σ 均成立

$$\begin{aligned}&\|\nabla b(t,x)\|\leqslant L_1,\quad |b(t,x)|\leqslant L_1(1+|x|),\\&\|\sigma(t,x_1)-\sigma(t,x_2)\|\leqslant L_1|x_1-x_2|,\quad \|\sigma(t,x)\|\leqslant L_1(1+|x|),\end{aligned}$$

其中，$\nabla b(t,x)$ 表示 $b(t,x)$ 在位置 x 处的导数，而 $L_1>0$ 是一个常数。

$(\mathbf{H}_b^2)$ 对任意 $t\in[0,T]$ 和 $x_1,\ x_2\in\mathbb{R}^d$

$$\|\nabla b(t,x_1)-\nabla b(t,x_2)\|\leqslant L_2|x_1-x_2|,$$

其中 $L_2>0$ 是一个常数。

备注 2.1. 存在广泛的一类核满足 $(\mathbf{H}_K^1)$ 和 $(\mathbf{H}_K^2)$。例如，黎曼–刘维尔核 $K(t,s)=\frac{(t-s)_+^{H-\frac12}}{\Gamma(H+\frac12)}$ 对于 $H\in(0,1)$ 满足 $(\mathbf{H}_K^1)$ 和 $(\mathbf{H}_K^2)$，其中 Γ 表示通常的伽马函数，且 $(\cdot)_+:=\max\{\cdot,0\}$。事实上，令 $\alpha:=|\frac12-H|$，则对于任意 $1<\beta<\frac{1}{2\alpha}$，有

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t K(t,s)^{2\beta}\mathrm{d}s\leqslant\frac{T^{1+2\alpha\beta}}{(1+2\alpha\beta)\Big(\Gamma(H+\frac12)\Big)^{2\beta}},\quad H>1/2,$$

and

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t K(t,s)^{2\beta}\mathrm{d}s\leqslant\frac{T^{1-2\alpha\beta}}{(1-2\alpha\beta)\Big(\Gamma(H+\frac12)\Big)^{2\beta}},\quad H<1/2.$$

因此，$K(t,s)$ 满足 $(\mathbf{H}_K^1)$。对于 $(\mathbf{H}_K^2)$，注意到对于 $s<t$

$$\int_0^s\left((s-r)^{\alpha}-(t-r)^{\alpha}\right)^2\mathrm{d}r\leqslant T(t-s)^{2\alpha},\quad H>1/2,$$

and

$$\begin{aligned}&\int_0^s\left((s-r)^{-\alpha}-(t-r)^{-\alpha}\right)^2\mathrm{d}r=\int_0^s\left(\frac{(t-r)^{\alpha}-(s-r)^{\alpha}}{(s-r)^{\alpha}(t-r)^{\alpha}}\right)^2\mathrm{d}r\\\leqslant\ &(t-s)^{2\alpha}\int_0^s\frac{1}{(s-r)^{2\alpha}(t-r)^{2\alpha}}\mathrm{d}r=(t-s)^{1-2\alpha}\int_0^{\frac{s}{(t-s)}}\frac{1}{(v+1)^{2\alpha}v^{2\alpha}}\mathrm{d}v\\\leqslant\ &\begin{cases}C_\alpha(t-s)^{2\alpha},\ H\in(\frac14,\frac12),\\C_\alpha(t-s)^{\frac12-\alpha},H\in(0,\frac14].\end{cases}\end{aligned}$$

因此，由上述推导可知，$K(t,s)$ 满足 $(\mathbf{H}_K^2)$。此外，我们提醒，在 $0<H<1/2$ 的情形下，$K(t,s)$ 是奇异的。

注 2.2. 由 $(\mathbf{H}_{b,\sigma}^1)$，对于 $t\in[0,T]$, $x,y\in\mathbb{R}^d$，有

$$|b(t,x)-b(t,y)|\leqslant L_1|x-y|.$$

在 $(\mathbf{H}_K^1)$ $(\mathbf{H}_{b,\sigma}^1)$ 条件下，由 [15, 定理 1.1] 可知，方程 (2) 和方程 (4) 分别有唯一解 $X_\cdot^\varepsilon, X_\cdot^0$。对于任意 $\varepsilon > 0$，令

$$Z_\cdot^\varepsilon := \frac{X_\cdot^\varepsilon - X_\cdot^0}{\sqrt{\varepsilon}},$$

且 $Z_\cdot^\varepsilon$满足以下随机 Volterra 方程：对任意 $t \in [0,T]$

$$Z_t^\varepsilon(x) = \int_0^t K_1(t,s)\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x)) - b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}s + \int_0^t K_2(t,s)\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}B_s. \tag{5}$$

然后我们构造另一个随机 Volterra 方程：

$$Z_t(x) = \int_0^t K_1(t,s)\nabla_{Z_s(x)}b(s,X_s^0(x))\mathrm{d}s + \int_0^t K_2(t,s)\sigma(s,X_s^0(x))\mathrm{d}B_s. \tag{6}$$

并且假设 $(\mathbf{H}_K^1)$ $(\mathbf{H}_{b,\ \sigma}^1)$ 保证方程(6)具有唯一解 $Z_\cdot$。因此，方程(2)的中心极限定理意味着，当 ε 趋于 0 时，

$$Z_\cdot^\varepsilon \to Z_\cdot \text{ in distribution.}$$

下面的定理是本文的主要结果。

定理 2.3。假设 $(\mathbf{H}_K^1)$ $(\mathbf{H}_K^2)$ $(\mathbf{H}_{b,\ \sigma}^1)$ 和 $(\mathbf{H}_b^2)$ 成立。则对任意 $R > 0$ 且 $p \geqslant \frac{2\beta}{\beta-1}$ 充分大，有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T],|x|\leqslant R}|Z_t^\varepsilon(x) - Z_t(x)|^p\right) = 0.$$

定理 2.3 的证明将在下一节给出。

根据上述定理以及依 L^p 意义收敛蕴含依分布收敛这一事实，我们知道

$$\frac{X_\cdot^\varepsilon - X_\cdot^0}{\sqrt{\varepsilon}} \to Z_\cdot$$

in 依分布收敛，这意味着 $\{X_\cdot^\varepsilon, \varepsilon \in (0,1)\}$ 满足中心极限定理 .

3. Proof of Theorem 2.3

在本节 中，我们证明定理 2.3。首先，我们进行一些必要的估计 .

引理 3.1. 在假设 $(\mathbf{H}_K^1)$ $(\mathbf{H}_{b,\sigma}^1)$ 下，对任意 $p \geqslant \frac{2\beta}{\beta-1}$ 和x，都有 $y \in \mathbb{R}^d$

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|X_t^\varepsilon(x)|^{2p} \leqslant C(1+|x|^{2p}), \quad \sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|X_t^\varepsilon(x) - X_t^\varepsilon(y)|^{2p} \leqslant C|x-y|^{2p},$$

其中常数 $C > 0$ 与 ε无关。

证明。首先，我们处理第一个估计。由 H¨older 不等式、Burkholder-Davis-Gundy 不等式以及 $(\mathbf{H}_K^1)$ $(\mathbf{H}_{b,\ \sigma}^1)$，可知对任意 $p \geqslant \frac{2\beta}{\beta-1}$ 和 $0 < \varepsilon < 1$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|X_t^\varepsilon(x)|^{2p} \ \leqslant\ & 3^{2p-1}|x|^{2p} + 3^{2p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_1(t,s)b(s,X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}s\right|^{2p} \\ & +3^{2p-1}\mathbb{E}\left|\sqrt{\varepsilon}\int_0^t K_2(t,s)\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}B_s\right|^{2p}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leqslant\ & 3^{2p-1}|x|^{2p}+3^{2p-1}\left(\int_0^t K_1(t,s)^{\frac{2p}{2p-1}}\mathrm{d}s\right)^{2p-1}\mathbb{E}\int_0^t|b(s,X_s^\varepsilon(x))|^{2p}\mathrm{d}s\\
&+3^{2p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_2(t,s)^2\|\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))\|^2\mathrm{d}s\right|^p\\
\leqslant\ & 3^{2p-1}|x|^{2p}+3^{2p-1}\left(\int_0^t K_1(t,s)^{\frac{2p}{2p-1}}\mathrm{d}s\right)^{2p-1}\mathbb{E}\int_0^t|b(s,X_s^\varepsilon(x))|^{2p}\mathrm{d}s\\
&+3^{2p-1}\left(\int_0^t K_2(t,s)^{\frac{2p}{p-1}}\mathrm{d}s\right)^{p-1}\int_0^t\mathbb{E}\|\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))\|^{2p}\mathrm{d}s\\
\leqslant\ & 3^{2p-1}|x|^{2p}+3^{2p-1}C\int_0^t(1+\mathbb{E}|X_s^\varepsilon(x)|^{2p})\mathrm{d}s\\
&+3^{2p-1}C\int_0^t(1+\mathbb{E}|X_s^\varepsilon(x)|^{2p})\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中我们用到了以下事实:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t K_1(t,s)^{\frac{2p}{2p-1}}\mathrm{d}s\leqslant t^{1-\frac{2p}{(2p-1)\beta}}\left(\int_0^t K_1(t,s)^\beta\mathrm{d}s\right)^{\frac{2p}{(2p-1)\beta}}\leqslant C,\\
&\int_0^t K_2(t,s)^{\frac{2p}{p-1}}\mathrm{d}s\leqslant t^{1-\frac{p}{(p-1)\beta}}\left(\int_0^t K_2(t,s)^{2\beta}\mathrm{d}s\right)^{\frac{p}{(p-1)\beta}}\leqslant C.
\end{aligned}
$$

因此，由格朗沃尔不等式可得

$$
\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|X_t^\varepsilon(x)|^{2p}\leqslant C(1+|x|^{2p}).
$$

最后，采用与第一个估计相同的推导方法，可得第二个估计。 □

通过与引理 3.1 类似甚至更简单的推导，可得以下结果。

引理 3.2. 对任意 $p\geqslant\frac{2\beta}{\beta-1}$，对于任意 $x,y\in\mathbb{R}^d$，均有

$$
\sup_{t\in[0,T]}|X_t^0(x)|^{2p}\leqslant C(1+|x|^{2p}),\quad \sup_{t\in[0,T]}|X_t^0(x)-X_t^0(y)|^{2p}\leqslant C|x-y|^{2p}.
$$

Lemma 3.3. 在假设 $(\mathbf{H}_K^1)$ $(\mathbf{H}_{b,\ \sigma}^1)$ 下，对于任意 $p\geqslant\frac{2\beta}{\beta-1}$

$$
\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|Z_t^\varepsilon(x)|^{2p}\leqslant C(1+|x|^{2p}).
$$

证明。首先，我们注意到 Z^ε。根据 $(\mathbf{H}_K^1)$、$(\mathbf{H}_{b,\sigma}^1)$、Burkholder-Davis-Gundy 不等式和 H¨older 不等式可知，对于任意 $p\geqslant\frac{2\beta}{\beta-1}$

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Z_t^\varepsilon(x)|^{2p}\\
\leqslant\ & 2^{2p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_1(t,s)\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}s\right|^{2p}\\
&+2^{2p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_2(t,s)\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}B_s\right|^{2p}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2^{2p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^t K_1(t,s)^{\frac{2p}{2p-1}}\mathrm{d}s\right)^{2p-1}\int_0^t\left|\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^{2p}\mathrm{d}s\\
&\quad+2^{2p-1}C\mathbb{E}\left|\int_0^t K_2(t,s)^2\|\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))\|^2\mathrm{d}s\right|^p\\
&\leqslant 2^{2p-1}CL_1^{2p}\int_0^t\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x)|^{2p}\mathrm{d}s+2^{2p-1}C\left(\int_0^t K_2(t,s)^{\frac{2p}{p-1}}\mathrm{d}s\right)^{p-1}\int_0^t\mathbb{E}\|\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))\|^{2p}\mathrm{d}s\\
&\leqslant 2^{2p-1}CL_1^{2p}\int_0^t\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x)|^{2p}\mathrm{d}s+2^{2p-1}C\int_0^T(1+\mathbb{E}|X_s^\varepsilon(x)|^{2p})\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

因此，引理 3.1 和格朗沃尔不等式推出所需的估计。证明完毕。□

引理 3.4. 在假设 $(\mathbf{H}_K^1)$（$\mathbf{H}_{b,\ \sigma}^1$）和 $(\mathbf{H}_b^2)$ 下，对于任意 $p\geqslant\frac{2\beta}{\beta-1}$和 $x,\ y\in\mathbb{R}^d$

$$
\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|Z_t^\varepsilon(x)-Z_t^\varepsilon(y)|^p\leqslant C(1+|x|^p)|x-y|^p.
$$

证明。首先，对于任意 $p\geqslant\frac{2\beta}{\beta-1}$，有

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Z_t^\varepsilon(x)-Z_t^\varepsilon(y)|^p\\
&\leqslant 2^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_1(t,s)\left(\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{b(s,X_s^\varepsilon(y))-b(s,X_s^0(y))}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\mathrm{d}s\right|^p\\
&\quad+2^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_2(t,s)\Big(\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))-\sigma(s,X_s^\varepsilon(y))\Big)\mathrm{d}B_s\right|^p\\
&\leqslant 2^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^t K_1(t,s)^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}s\right)^{p-1}\int_0^t\left|\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{b(s,X_s^\varepsilon(y))-b(s,X_s^0(y))}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^p\mathrm{d}s\\
&\quad+2^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_2(t,s)^2\|\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))-\sigma(s,X_s^\varepsilon(y))\|^2\mathrm{d}s\right|^{p/2}\\
&\leqslant 2^{p-1}C\int_0^t\mathbb{E}\left|\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{b(s,X_s^\varepsilon(y))-b(s,X_s^0(y))}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^p\mathrm{d}s\\
&\quad+2^{p-1}C\int_0^T\mathbb{E}|X_s^\varepsilon(x)-X_s^\varepsilon(y)|^p\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

此外，注意到

$$
\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}=\int_0^1\nabla_{Z_s^\varepsilon(x)}b(s,X_s^0(x)+\zeta(X_s^\varepsilon(x)-X_s^0(x)))\mathrm{d}\zeta.\tag{7}
$$

因此，由 $(\mathbf{H}_{b,\ \sigma}^1)$ $(\mathbf{H}_b^2)$ 可得

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}-\frac{b(s,X_s^\varepsilon(y))-b(s,X_s^0(y))}{\sqrt{\varepsilon}}\right|^p\\
&\leqslant 2^{p-1}\bigg(\int_0^1\Big|\nabla_{Z_s^\varepsilon(x)}b(s,X_s^0(x)+\zeta(X_s^\varepsilon(x)-X_s^0(x)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad -\nabla_{Z_s^\varepsilon(x)} b(s, X_s^0(y) + \zeta(X_s^\varepsilon(y) - X_s^0(y)))\Big|\mathrm{d}\zeta\Big)^p \\
&+2^{p-1}\Big(\int_0^1 \Big|\nabla_{Z_s^\varepsilon(x)} b(s, X_s^0(y) + \zeta(X_s^\varepsilon(y) - X_s^0(y))) \\
&\quad -\nabla_{Z_s^\varepsilon(y)} b(s, X_s^0(y) + \zeta(X_s^\varepsilon(y) - X_s^0(y)))\Big|\mathrm{d}\zeta\Big)^p \\
\leqslant\ & 2^{p-1}L_2^p\Big(2|X_s^0(x) - X_s^0(y)| + |X_s^\varepsilon(x) - X_s^\varepsilon(y)|\Big)^p |Z_s^\varepsilon(x)|^p \\
&+2^{p-1}L_1^p |Z_s^\varepsilon(x) - Z_s^\varepsilon(y)|^p.
\end{aligned}
$$

而 Hölder 不等式意味着

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left|\frac{b(s, X_s^\varepsilon(x)) - b(s, X_s^0(x))}{a(\varepsilon)} - \frac{b(s, X_s^\varepsilon(y)) - b(s, X_s^0(y))}{a(\varepsilon)}\right|^p \\
\leqslant\ & 2^{p-1}L_2^p\left(\mathbb{E}\Big(2|X_s^0(x) - X_s^0(y)| + |X_s^\varepsilon(x) - X_s^\varepsilon(y)|\Big)^{2p}\right)^{1/2} (\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x)|^{2p})^{1/2} \\
&+2^{p-1}L_1^p\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x) - Z_s^\varepsilon(y)|^p \\
\leqslant\ & 2^{p-1}L_2^p C|x-y|^p(1+|x|^p) + 2^{p-1}L_1^p\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x) - Z_s^\varepsilon(y)|^p,
\end{aligned}
$$

其中，在最后一个不等式中我们使用了引理 3.2、3.1、3.3。

最后，上述所有推导表明

$$
\mathbb{E}|Z_t^\varepsilon(x) - Z_t^\varepsilon(y)|^p \leqslant C(1+|x|^p)|x-y|^p + C\int_0^t \mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x) - Z_s^\varepsilon(y)|^p \mathrm{d}s.
$$

格朗沃尔不等式保证了所需的估计。证明完毕。 □

引理 3.5. 对于任意 $p \geqslant 2$ 充分大的情形，存在一个常数 $C > 0$，使得对于任意 t、$t' \in [0,T]$ 和 $x \in \mathbb{R}^d$

$$
\mathbb{E}|Z_t^\varepsilon(x) - Z_{t'}^\varepsilon(x)|^p \leqslant C(1+|x|^p)|t-t'|^{\theta p},
$$

其中，$\theta > 0$ 取决于 γ、β。

证明。对于任意 $t < t'$，由 (5) 可得

$$
\begin{aligned}
Z_t^\varepsilon(x) - Z_{t'}^\varepsilon(x) \quad =\quad & \int_0^t (K_1(t,s) - K_1(t',s))\frac{b(s, X_s^\varepsilon(x)) - b(s, X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}s \\
&+ \int_t^{t'} K_1(t',s)\frac{b(s, X_s^\varepsilon(x)) - b(s, X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}\mathrm{d}s \\
&+ \int_0^t (K_2(t,s) - K_2(t',s))\sigma(s, X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}B_s \\
&+ \int_t^{t'} K_2(t',s)\sigma(s, X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}B_s \\
=:\ & I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
\end{aligned}
$$

对于 I_1，由 $(\mathbf{H}_{b,\ \sigma}^{1})$、$(\mathbf{H}_K^2)$ 以及 [10, 推论 1.32，第 27], 页中的扩展闵可夫斯基不等式可知

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|I_1|^p &\leqslant L_1^p\mathbb{E}\left(\int_0^t |K_1(t,s)-K_1(t',s)||Z_s^\varepsilon(x)|\mathrm{d}s\right)^p\\ &\leqslant L_1^p\left(\int_0^t |K_1(t,s)-K_1(t',s)|(\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x)|^p)^{1/p}\mathrm{d}s\right)^p\\ &\leqslant C(1+|x|^p)|t-t'|^{\gamma p}.\end{aligned}$$

对于 I_2，由 [10, 推论 1.32 中的拓展闵可夫斯基不等式以及 H¨older 不等式可得

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|I_2|^p &\leqslant L_1^p\mathbb{E}\left(\int_t^{t'} K_1(t',s)|Z_s^\varepsilon(x)|\mathrm{d}s\right)^p \leqslant L_1^p\left(\int_t^{t'} K_1(t',s)(\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x)|^p)^{1/p}\mathrm{d}s\right)^p\\ &\leqslant C(1+|x|^p)\left(\int_t^{t'} K_1(t',s)\mathrm{d}s\right)^p \leqslant C(1+|x|^p)|t-t'|^{\frac{(\beta-1)p}{\beta}}.\end{aligned}$$

通过与 I_1 的推导类似的推导，我们处理 I_3，I_4 并得到

$$\mathbb{E}|I_3|^p \leqslant C(1+|x|^p)|t-t'|^{\gamma p/2},\quad \mathbb{E}|I_4|^p \leqslant C(1+|x|^p)|t-t'|^{\frac{(\beta-1)p}{2\beta}}.$$

最后，结合上述估计即可得到所需结果 . □

于是，根据引理 3.2 以及与引理 3.3、3.4、3.5 中类似的推导，我们给出以下估计。

引理 3.6. 在假设 $(\mathbf{H}_K^1)$ $(\mathbf{H}_K^2)$ $(\mathbf{H}_{b,\ \sigma}^{1})$ 和 $(\mathbf{H}_b^2)$ 下，有

$$\begin{aligned}&\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|Z_t(x)|^p \leqslant C(1+|x|^p),\quad x\in\mathbb{R}^d, p\geqslant\frac{2\beta}{\beta-1},\\ &\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|Z_t(x)-Z_t(y)|^p \leqslant C(1+|x|^p)|x-y|^p,\quad x,y\in\mathbb{R}^d, p\geqslant\frac{2\beta}{\beta-1},\\ &\mathbb{E}|Z_t(x)-Z_{t'}(x)|^p \leqslant C(1+|x|^p)|t-t'|^{\theta p},\quad t,t'\in[0,T], x\in\mathbb{R}^d, p\geqslant 2.\end{aligned}$$

该 f 以下引理对于证明方程 (2) 的中心极限定理很重要).

引理 3.7 。在假设 $(\mathbf{H}_K)$ $(\mathbf{H}_{b,\ \sigma}^{1})$ 和 $(\mathbf{H}_b^2)$ 下，对任意 $p\geqslant\frac{2\beta}{\beta-}$，

$$\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}\,|Z_t^\varepsilon(x)-Z_t(x)|^p \leqslant C(1+|x|^{2p})\varepsilon^{p/2},\quad x\in\mathbb{R}^d,$$

其中常数 $C>0$ 与 ε 无关。

证明。我们从 (5) 和 (6) 开始。对于任意 $p\geqslant\frac{2\beta}{\beta-1}$，有

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}|Z_t^\varepsilon(x)-Z_t(x)|^p\\ \leqslant\ & 2^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_1(t,s)\left(\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}-\nabla_{Z_s(x)}b(s,X_s^0(x))\right)\mathrm{d}s\right|^p\\ &+2^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_2(t,s)(\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))-\sigma(s,X_s^0(x)))\mathrm{d}B_s\right|^p\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 2^{p-1}\mathbb{E}\left(\int_0^t K_1(t,s)^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}s\right)^{p-1}\int_0^t\left|\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}\right.\\
&\qquad\left.-\nabla_{Z_s(x)}b(s,X_s^0(x))\right|^p\mathrm{d}s\\
&\quad+2^{p-1}\mathbb{E}\left|\int_0^t K_2(t,s)^2\|\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))-\sigma(s,X_s^0(x))\|^2\mathrm{d}s\right|^{p/2}\\
&\leqslant 2^{p-1}C\mathbb{E}\int_0^t\left|\frac{b(s,X_s^\varepsilon(x))-b(s,X_s^0(x))}{\sqrt{\varepsilon}}-\nabla_{Z_s(x)}b(s,X_s^0(x))\right|^p\mathrm{d}s\\
&\quad+2^{p-1}C\mathbb{E}\int_0^t\|\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))-\sigma(s,X_s^0(x))\|^p\mathrm{d}s\\
&=: I_1+I_2.
\end{aligned}
$$

对于 I_1，(7)、($\mathbf{H}^1_{b,\sigma}$) 和 ($\mathbf{H}^2_b$) 意味着

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leqslant 4^{p-1}C\mathbb{E}\int_0^t\left|\int_0^1\nabla_{Z_s^\varepsilon(x)}b(s,X_s^0(x)+\zeta(X_s^\varepsilon(x)-X_s^0(x)))\mathrm{d}\zeta-\nabla_{Z_s^\varepsilon(x)}b(s,X_s^0(x))\right|^p\mathrm{d}s\\
&\quad+4^{p-1}C\mathbb{E}\int_0^t\left|\nabla_{Z_s^\varepsilon(x)}b(s,X_s^0(x))-\nabla_{Z_s(x)}b(s,X_s^0(x))\right|^p\mathrm{d}s\\
&\leqslant 4^{p-1}CL_2^p\mathbb{E}\int_0^t\left|X_s^\varepsilon(x)-X_s^0(x)\right|^p|Z_s^\varepsilon(x)|^p\mathrm{d}s+4^{p-1}CL_1^p\mathbb{E}\int_0^t|Z_s^\varepsilon(x)-Z_s(x)|^p\,\mathrm{d}s\\
&\leqslant 4^{p-1}CL_2^p\varepsilon^{p/2}\int_0^t\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x)|^{2p}\mathrm{d}s+4^{p-1}CL_1^p\int_0^t\mathbb{E}\,|Z_s^\varepsilon(x)-Z_s(x)|^p\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

我们处理 I_2。由 ($\mathbf{H}^1_{b,\ \sigma}$)，可得

$$
I_2\leqslant 2^{p-1}CL_1^p\mathbb{E}\int_0^t|X_s^\varepsilon(x)-X_s^0(x)|^p\mathrm{d}s\leqslant 2^{p-1}CL_1^p\varepsilon^{p/2}\int_0^t\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x)|^p\mathrm{d}s.
$$

综合以上推导，我们得出

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}|Z_t^\varepsilon(x)-Z_t(x)|^p\\
\leqslant\ & 4^{p-1}CL_2^p\varepsilon^{p/2}\int_0^t\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x)|^{2p}\mathrm{d}s+4^{p-1}CL_1^p\int_0^t\mathbb{E}\,|Z_s^\varepsilon(x)-Z_s(x)|^p\,\mathrm{d}s\\
&+2^{p-1}CL_1^p\varepsilon^{p/2}\int_0^t\mathbb{E}|Z_s^\varepsilon(x)|^p\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

最后，由引理 3.3 和格朗沃尔不等式可得

$$
\sup_{t\in[0,T]}\mathbb{E}|Z_t^\varepsilon(x)-Z_t(x)|^p\leqslant C(1+|x|^{2p})\varepsilon^{p/2}.
$$

证明完毕。 □

定理 2.3 的证明。首先，取任意满足 $\varepsilon_n\downarrow 0$ 的序列 $\{\varepsilon_n,n\in\mathbb{N}\}$，其中 $n\to\infty$，并构造如下过程:

$$
\mathbf{Z}(r,t,x)=\begin{cases}Z_t(x), & r=0\\ Z_t^{\varepsilon_n}(x)+\varepsilon_{n+1}^{-1}(r-\varepsilon_nT)\left[Z_t^{\varepsilon_{n+1}}(x)-Z_t^{\varepsilon_n}(x)\right], & \varepsilon_{n+1}T<r\leqslant\varepsilon_nT,\quad n\in\mathbb{N}.\end{cases}
$$

对于任意 $R>0$，引理 3.4、3.5、3.6 表明，对于任意 $p \geqslant \frac{2\beta}{\beta-1}$、 t、$t' \in [0,T]$ 以及 x、$y \in D_R := \{x \in \mathbb{R}^d;\ |x| \leqslant R\}$

$$\mathbb{E}|\mathbf{Z}(r,t,x)-\mathbf{Z}(r',t',y)|^p \leqslant C(|r-r'|^{\eta p}+|t-t'|^{\eta p}+|x-y|^{\eta p}),$$

其中常数 $\eta>0$ 取决于 β、γ、θ。因此，当 p 充分大时，根据 Kolmogorov 连续性判据，存在一个 p阶可积随机变量 ξ，使得

$$\sup_{t\in[0,T],|x|\leqslant R} |\mathbf{Z}(r,t,x)-\mathbf{Z}(r',t,x)| \leqslant \xi\,|r-r'|^{\lambda}, \quad \text{a.s.}$$

其中 $\lambda \in \left(0,\eta-\frac{d+2}{p}\right)$。特别地，取 $r'=0$、$r=\varepsilon_n T$，可得

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T],|x|\leqslant R}|Z_t^{\varepsilon_n}(x)-Z_t(x)|^p\right) \leqslant T^{\lambda p}\mathbb{E}|\xi|^p\varepsilon_n^{\lambda p},$$

由此得到所需的收敛性。

4. 应用

本节将我们的结果应用于核为分数布朗运动核、Hurst 参数为 $H \in \in$(0,1) 的随机 Volterra 方程。

首先，我们回顾分数布朗运动的一些基础知识（参见 [6, 7]）。固定$T>0$。设 $\{B_t^H, t\in[0,T]\}$ 为 Hurst 指数$H \in \in$(0, 1) 的分数布朗运动，它是一个具有如下协方差的中心高斯过程

$$R_H(s,t)=\frac{V_H}{2}(s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H}),$$

其中 $V_H=\frac{\Gamma}{(2-2H)\cos(\pi H)\,\pi H(1-2H)}$，$\Gamma$ 表示通常的伽马函数。已知分数布朗运动 B^H 的分布表示为:

$$B_t^H=\int_0^t K_H(t,s)\mathrm{d}B_s,$$

其中 $K_H(t,s)$ 是协方差算子的平方根，即

$$R_H(s,t)=\int_0^T K_H(s,r)K_H(t,r)\mathrm{d}r.$$

更准确地说,

$$K_H(t,r)=\frac{(t-r)^{H-\frac{1}{2}}}{\Gamma(H+\frac{1}{2})}F(\frac{1}{2}-H,H-\frac{1}{2},H+\frac{1}{2},1-\frac{t}{r})I_{[0,t)}(r),$$

其中 F 是高斯超几何函数。

接下来，我们证明 $K_H(t,s)$ 满足 $(\mathbf{H}_K^1)$ $(\mathbf{H}_K^2)$。注意，$0 \leqslant K_H(t,s) \leqslant Cs^{-|H-1/2|}(t-s)^{-(1/2-H)_+}I_{s<t}$。令 $H_0:=|H-1/2|$，则对于$1<\beta<\frac{1}{2H_0}$，有

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t K_H(t,s)^{2\beta}\mathrm{d}s \leqslant CT^{1-2\beta H_0}\mathbf{B}(1-2\beta H_0,1-2\beta H_0), \quad H<1/2,$$

其中 B 是通常的贝塔函数，并且

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t K_H(t,s)^{2\beta}\mathrm{d}s \leqslant C\frac{T^{1-2\beta H_0}}{1-2\beta H_0}, \quad H>1/2.$$

因此， $K_H(t,s)$ 满足（H_K^1）。此外，对于 $t<t'$

$$\begin{aligned}\int_0^{t\wedge t'}|K_H(t',s)-K_H(t,s)|^2\mathrm{d}s &\leqslant \int_0^T K_H(t',s)K_H(t',s)\mathrm{d}s-2\int_0^T K_H(t',s)K_H(t,s)\mathrm{d}s\\ &\quad+\int_0^T K_H(t,s)K_H(t,s)\mathrm{d}s\\ &= R(t',t')-2R(t',t)+R(t,t)\leqslant C|t-t'|^{2H}.\end{aligned}$$

也就是说， $K_H(t,s)$ 满足 (H_K^2)。

最后，我们取 $K_1(t,s)=K_2(t,s)=K_H(t,s)$，并考虑以下随机 Volterra 方程：对于 $0<\varepsilon<1$

$$X_t^\varepsilon(x)=x+\int_0^t K_H(t,s)b(s,X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}s+\sqrt{\varepsilon}\int_0^t K_H(t,s)\sigma(s,X_s^\varepsilon(x))\mathrm{d}B_s,\quad t\in[0,T].$$

假设 b,σ 满足 $(\mathrm{H}_{b,\ \sigma}^1)$ 和 (H_b^2)。那么上述方程有唯一解X^ε。此外，由定理 2.3 可得

$$\frac{X^\varepsilon-X^0}{\sqrt{\varepsilon}}\xrightarrow{L^p}Z,$$

其中 X^0 是以下 Volterra 方程的解

$$X_t^0(x)=x+\int_0^t K_H(t,s)b(s,X_s^0(x))\mathrm{d}s,$$

且 Z 是以下随机 Volterra 方程的解

$$Z_t(x)=\int_0^t K_H(t,s)\nabla_{Z_s(x)}b(s,X_s^0(x))\mathrm{d}s+\int_0^t K_H(t,s)\sigma(s,X_s^0(x))\mathrm{d}B_s.$$

References

[1]E. Abi Jaber, M. Larsson, S. Pulido：仿射 Volterra 过程，《应用概率年刊》，29(5)(2017)3155-3200。[2] M. Cellupica 和 B. Pacchiarotti：Volterra 型粗糙波动率模型的路径渐近性，《理论概率学杂志》，(2020)。[3] L. Chevillard：正则化分数阶 Ornstein-Uhlenbeck 过程及其在流体湍流建模中的意义，《物理评论 E》，97(2017)。[4] J. M. Corcuera, E. Hedevang, M. S. Pakkanen 和 M. Podolskij：布朗半平稳过程的渐近理论及其在湍流中的应用，《随机过程及其应用》，123(2017)2552-2574。[5] L. Coutin 和 L. Decreusefond：分数布朗运动背景下的抽象非线性滤波理论，《应用概率年刊》，9(4)(1999)1058-1090。[6] L. Coutin 和 L. Decreusefond：由分数布朗运动驱动的随机微分方程。载于 A. B. Cruzeiro 等（编），《随机分析与数学物理》，2001年。.[7] L. Decreusefond 和 A. S. Ust¨unel：分数布朗运动的随机分析，《位势分析》，10(1999)177-214。[8] A. Gulisashvili：Volterra 型分数阶随机波动率模型的大偏差原理，《SIAM 金融数学杂志》，9(3)(2018)1102-1136。[9] A. Jacquier 和 A. Pannier：随机 Volterra 系统的大偏差与中偏差，《随机过程及其应用》，149(2022)142-187。[10] O. Kallenberg：《现代概率论基础》，第 3 版。Springer Nature Switzerland AG，2021年。[11] E. H. Lakhel：Besov-Orlicz 空间中随机 Volterra 方程的大偏差及其应用，《随机算子与随机方程》，11(4)(2003)333-350。

[12] Y. Li, R. Wang, N. Yao 和 S. Zhang：随机 Volterra 方程的中等偏差原理，统计与概率快报，122(2017)79-85。[13]D. Nualart 和 C. Rovira：随机 Volterra 方程的大偏差，Bernoulli，6(2)(2000)339-355。[14] H. Qiao 和 J.-L.Wu：具有奇异核和 H¨older 连续系数的随机 Volterra 方程的加性泛函的路径无关性，http: //arxiv.org/abs/2207.03094。[15] Z. Wang：具有奇异核和非 Lipschitz 系数的随机 Volterra 方程解的存在唯一性。统计与概率快报，78(2008)1062-1071。[16] X. Zhang：具有奇异核的随机 Volterra 方程的 Euler 格式与大偏差。微分方程杂志，224(2008)2226-2250。