arXiv:2303.01716v1 [cs.IT] 3 Mar 2023

某些 pomset 上线性分组码的麦克威廉斯型恒等式

Wen Ma JinquanLuo*

摘要：多重集偏序块度量是 pomset 度量的一种推广。本文定义了 $\mathbb{Z}_m$ 上关于 pomset 度量的线性块码重量枚举式，并建立了相对于某些 pomset 的线性块码的麦克威廉斯型恒等式。本文还研究了两个线性多重集偏序块码的重量枚举多项式与其直和之间的关系。

关键词：偏序多重集，块码，对偶，重量枚举式，麦克威廉斯恒等式。

1 引言

自 20 世纪 90 年代 Brialdi 等人引入偏序度量（见 [2]）以来，对赋予汉明度量以外其他度量的码的研究逐渐兴起。Feng 等人在 [3] 中引入了分组度量，并研究了 MDS 分组码。Alves 等人在 [1] 中引入了偏序分块度量，将偏序度量和分组度量统一起来。

最近， [11], Selvaraj 和 Sudha 将偏序度量结构推广为 pomset 度量结构。他们提出了 pomset 度量，并初步开展了对配备 pomset 度量的码的研究。他们提出了偏序多重集的序理想概念，并定义了 pomset 度量。关于偏序空间中的两种一般度量，另请参阅 [7, 10] 。

码的重量分布描述了每种可能重量的码字数量。有限域上线性码的麦克威廉斯恒等式是编码理论中最重要的恒等式之一（参见 [8]）。它揭示了线性码的重量枚举式与其对偶码之间的联系。

Kim 和 Oh 对所有满足麦克威廉斯恒等式的偏序集结构进行了分类，并推导了与这些偏序集相对应的偏序集重量枚举器的麦克威廉斯恒等式（见 [6]）。研究证明，偏序集满足分层性是其具有麦克威廉斯

*作者来自华中师范大学数学与统计学院和湖北省数学科学重点实验室，中国武汉。电子邮箱：mawen95@126.com（W.Ma），luojinquan@mail.ccnu.edu.cn（J.Luo）

恒等式的充要条件。他们还推导出了分层偏序集码的 P-重量分布与对偶码的 P-重量分布之间的明确关系。在此基础上，Pinheiro 和 Firer 进一步证明，偏序分块空间具有麦克威廉斯型恒等式，当且仅当偏序集是分层的，且偏序集每一层的所有块都具有相同的维数（见 [9]）。他们明确给出了偏序分块空间满足麦克威廉斯型恒等式时，码及其对偶码的重量枚举式之间的关系。

对于定义在 $\mathbb{Z}_m$ 上的码，当 pomset 取为反链时，pomset 度量是 Lee 度量的一种推广；从某种意义上说，它也是偏序度量的一种推广。Sudha 和 Selvaraj 定义了码 $\mathcal{C}$ 的多重集偏序重量枚举多项式，并针对某些偏序多重集建立了线性码的麦克威廉斯型恒等式（见 [12]）。通过考察这些码所对应偏序多重集的直和与序和，建立了适用于特定类型线性码的恒等式。对于多重集偏序块码，自然可以尝试为特定 pomset 度量下的块码推导某种 MacWilliams 恒等式。本文将 [12] 中针对多重集偏序空间给出的麦克威廉斯型恒等式推广到多重集偏序块空间。

本文组织如下：第 2 节介绍 $\mathbb{Z}_m^n$ 上多重集偏序块度量的基本概念，并定义线性多重集偏序块码的重量枚举式。第 3 节考察 pomset 为链偏序多重集时，多重集偏序块码的重量分布与其对偶码之间的关系。具体而言，当 $\mathbb{Z}_m$ 是一个域且所有块的维数均为 2 时，我们推导出多重集偏序块码的 $\mathbb{P}$-重量分布与其对偶码的 $\mathbb{P}$-重量分布之间的明确关系。我们还给出了一些例子来说明结论。第 4 节针对一般偏序多重集的直和与序和给出麦克威廉斯型恒等式。最后，我们总结研究结果，并提出一个有待进一步研究的问题。

2 预备知识

本节介绍多重集偏序块度量的一些基本记号和有用结果。

包含重复元素的元素集合称为多重集（简称 mset）。Girish 和 John 定义了多重集关系，并探讨了一些基本性质（见 [4] 和 [5]）。

形式化地，设 X 为一个集合。从集合 X 中取出的多重集 M 可表示为函数 count$C_M: X \to \mathbb{N}$，其中 $\mathbb{N}$ 表示非负整数集。对于每个 $a \in X$， $C_M(a)$表示元素 a 在 M中的出现次数。

在 M 中出现 p 次的元素 $a \in X$ 记作 $p/a \in M$，因此 $C_M(a) = p$。如果考虑 $k/a \in M$，则 k 的值满足 $k \leq p$。从集合 $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 中抽取的多重集表示为 $M = \{p_1/a_1, p_2/a_2, \ldots, p_n/a_n\}$。从 X 中抽取的多重集 M 的基数为 $|M| = \sum_{a \in X} C_M(a)$。

M 的根集记作 M^*，定义为 $M^* = \{a \in X\colon\ C_M(a) > 0\}$。

设 M_1 和 M_2 是取自集合 X的两个多重集。若对所有 $a \in X$，$C_{M_1}(a) \le C_{M_2}(a)$，则称 M_1 是 M_2 （$M_1 \subseteq M_2$）的子多重集。 M_1和 M_2的并集是一个记作 $M = M_1 \cup M_2$的多重集，使得对所有 $a \in X$， $C_M(a) = \max\{C_{M_1}(a)\ C_{M_2}(a)\}$。

设 M_1 和 M_2 是取自 X的两个多重集， M_1 和 M_2 的笛卡尔积也是一个多重集，定义如下:

$$M_1 \times M_2 = \{pq/(p/a, q/b) : p/a \in M_1, q/b \in M_2\}.$$

记 $C_1(a,b)$为有序对 (a,b)中第一坐标的计数，记 $C_2(a,b)$为有序对 (a,b)中第二坐标的计数。

若 R 中的每个元素 $(p/a, q/b)$ 的计数 $C_1(a,b) \cdot C_2(a,b)$，则称 $M \times M$ 的子多重集 R 是 M 上的多重集关系。若对所有 $m/a \in M$都有 $m/a\ R\ m/a$ ，则称多重集 M 上的多重集关系 R 是自反的；若 $m/a\ R\ n/b$ 且 $n/b\ R\ m/a$ 蕴含 $m = n$ 且 $a = b$，则称其是反对称的；若$m/a\ R\ n/b$ 且 $n/b\ R\ k/c$ 蕴含 $m/a\ R\ k/c$，则称其是传递的。若多重集关系 R 是自反的、反对称的且传递的，则称其为偏序多重集关系（或序关系）。有序对 (M,R) 称为偏序多重集，记作 $\mathbb{P}$。

设 $\mathbb{P} = (M,R)$ 且 $m/a \in M$。若不存在 $n/b \in M\ (b \neq a)$ 使得 $m/a\ R\ n/b$，则 m/a 是 $\mathbb{P}$ 的极大元；若不存在 $n/b \in M\ (b \neq a)$ 使得 $n/b\ R\ m/a$，则 m/a 是极小元。若 $\mathbb{P}$ 中任意一对不同的点在 $\mathbb{P}$ 中都可比较，则称 $\mathbb{P}$ 为链。若 $\mathbb{P}$ 中任意一对不同的点在 $\mathbb{P}$ 中都不可比较，则称 $\mathbb{P}$ 为反链。

M 的子多重集 I 称为 $\mathbb{P}$ 的序理想（或简称理想），如果 $k/a \in I$ 且 $q/b\ R\ k/a\ (b \neq a)$ 蕴含 $q/b \in I$。由元素 $k/a \in M$ 生成的理想定义为

$$\langle k/a \rangle = \{k/a\} \cup \{q/b \in M : q/b\ R\ k/a \text{ and } b \neq a\}.$$

由 M 的子多重集 S 生成的理想定义为 $\langle S \rangle = \bigcup_{k/a \in S} \langle k/a \rangle$。

~ ~对于给定的偏序多重集 $\mathbb{P} = (M,R)$， $\mathbb{P}$ 的对偶偏序多重集 $\mathbb{P} = (M,R)$给出如下:

~ ~$\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P}$ 具有相同的底集 M，并且 $p/a\ R\ q/b$ 在 $\mathbb{P}$ 中当且仅当 $q/b\ R\ p/a$ 在 $\mathbb{P}$中。

~注意， $\mathbb{P}$ 是链偏序多重集意味着 $\mathbb{P}$ 是链偏序多重集。

考虑 $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$，即模 m的整数环。我们考虑定义在多重集 $M = \{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor /1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor /2, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor /s\}$上的偏序多重集 $\mathbb{P}$。

设 $\pi\colon\ [s] \to \mathbb{N}$ 为一个映射，使得 $n = \sum_{i=1}^{s} \pi(i)$。称映射 π 为偏序多重集$\mathbb{P}$的标记，并称数对 $(\mathbb{P}, \pi)$ 为 $[s]$ 上的偏序多重集分组结构。将 $\pi(i)$ 记为 k_i ，并取 V_i 为

自由 $\mathbb{Z}_m$-模 $\mathbb{Z}_m^{k_i}$，对所有 $1 \le i \le s$ 均成立。定义 V 为

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

其与 $\mathbb{Z}_m^n$ 同构。每个 $\boldsymbol{u} \in V$ 均可写成

$$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_s})$$

其中 $\boldsymbol{u_i} = (u_{i1}, u_{i2}, \ldots, u_{ik_i}) \in \mathbb{Z}_m^{k_i}$, $1 \le i \le s$。对于 $a \in \mathbb{Z}_m$, a 的Lee权重 $w_L(a)$ 是 a 和 $m-a$ 中的最小值。$\boldsymbol{u} \in V$ 的Lee块支撑定义为

$$supp_{(L,\pi)}(\boldsymbol{u}) = \left\{ s_i / i : s_i = w_{(L,\pi)}(\boldsymbol{u_i}), s_i \neq 0 \right\},$$

其中

$$w_{(L,\pi)}(\boldsymbol{u_i}) = \max \left\{ w_L(\boldsymbol{u_{i_t}}) : 1 \le t \le \pi(i) \right\}.$$

$\boldsymbol{u} \in V$ 的（$\mathbb{P}, \pi$）-权重定义为由 $supp_{(L,\pi)}(\boldsymbol{u})$ 生成的理想的基数，即

$$w_{(\mathbb{P},\pi)}(\boldsymbol{u}) = \left| \langle supp_{(L,\pi)}(\boldsymbol{u}) \rangle \right|.$$

两个向量 $\boldsymbol{u}$、$\boldsymbol{v} \in V$ 之间的偏序集块距离为

$$d_{(\mathbb{P},\pi)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = w_{(\mathbb{P},\pi)}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v})$$

该距离在 $\mathbb{Z}_m^n$ 上诱导出一种称为偏序集块度量的度量。称有序对 $\left(V, d_{(\mathbb{P},\pi)}\right)$ 为偏序集块空间。设 $\mathcal{C}$ 是 $\left(V, d_{(\mathbb{P},\pi)}\right)$ 的子集，其基数为 K，则称其为（n, K, d）（$\mathbb{P}, \pi$）-码，其中 V 配备偏序集块度量 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(.,.)$，且

$$d = d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}) = \min \left\{ d_{(\mathbb{P},\pi)}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v} \in \mathcal{C} \right\}$$

是 $\mathcal{C}$ 的 $(\mathbb{P}, \pi)$-最小距离。如果 $\mathcal{C}$ 是 V 的一个子模，且基数为 m^k，我们称 $\mathcal{C}$ 为一个线性 (n, m^k, d) $(\mathbb{P}, \pi)$-码。(n, K, d) $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C}$ 的对偶定义为

$$\mathcal{C}^{\perp} = \{ \boldsymbol{v} \in V : \boldsymbol{c}! \cdot \boldsymbol{v} = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0 \text{ for all } \boldsymbol{c} \in \mathcal{C} \}.$$

对于线性 $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$ 的 $(\mathbb{P}, \pi)$-重量枚举式为多项式

$$W_{(\mathcal{C},\pi)}(x, y; \mathbb{P}) = \sum_{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}} x^{s\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - w_{(\mathbb{P},\pi)}(\boldsymbol{u})} y^{w_{(\mathbb{P},\pi)}(\boldsymbol{u})} = \sum_{i=0}^{s\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} A_{i,(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}) x^{s\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - i} y^i,$$

其中 $A_{i,\ (\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}) = \left| \{ \boldsymbol{u} \in \mathcal{C} : \ w_{(\mathbb{P},\pi)}(\boldsymbol{u}) = i \} \right|$。

3 链偏序多重集上的 $(\mathbb{P},\pi)$ 空间中的 MacWilliams 型恒等式

令 $[a]=\{1,2,\ldots,a\}$ 和 $[a,b]$ 为介于 a 和 b之间的所有整数的集合。在本节中，我们将推导链偏序多重集度量下线性分组码的 MacWilliams 型恒等式。不失一般性地，我们在多重集 $M=\{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/s\}$ 上定义偏序多重集 $\mathbb{P}=(M,R)$，其多重集关系如下:

$$\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/i\ R\ \left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/j\Leftrightarrow i\leq j.$$

$_s$令 $(\mathbb{P},\pi)$ 为 V上的偏序多重集分组结构，其中 π 是 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\sum_{i=1}\pi(i)=n$。设 $_{i=1}$，且 $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u_1},\ldots,\boldsymbol{u_s})\in V$，使得 $\boldsymbol{u_i}\neq\mathbf{0}\in\mathbb{Z}_m^{\pi(i)}$ 且 $(\boldsymbol{u_{i+1}},\boldsymbol{u_{i+2}},\ldots,\boldsymbol{u_s})=\mathbf{0}\in\mathbb{Z}_m^{\pi(i+1)+\cdots+\pi(s)}$。根据 $\mathbb{P}$ 的定义，我们有 $w_{(\mathbb{P},\pi)}(\boldsymbol{u})=\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor(i-1)+w_{(L,\pi)}(\boldsymbol{u_i})$。给定一个线性 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}$，我们定义

$$\mathcal{C}_i=\left\{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}:(\boldsymbol{u_i},\boldsymbol{u_{i+1}},\cdots,\boldsymbol{u_s})=\mathbf{0}\in\mathbb{Z}_m^{\pi(i)+\pi(i+1)+\cdots+\pi(s)}\right\}$$

and

$$\mathcal{C}_i^{'}=\left\{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}:\mathbf{0}\neq\boldsymbol{u_i}\in\mathbb{Z}_m^{\pi(i)},\ (\boldsymbol{u_{i+1}},\cdots,\boldsymbol{u_s})=\mathbf{0}\in\mathbb{Z}_m^{\pi(i+1)+\cdots\pi(s)}\right\}.$$

设 $\mathcal{R}$ 是一个有限环。回顾一下， $\mathcal{R}$ 上的加性特征 χ 就是从加法群 $\mathcal{R}$ 到乘法群 $\mathbb{C}^*$ 的群同态。$\mathcal{R}\hat{}$ 的所有加性特征构成一个群 $\mathcal{R}$，称为特征群，其群运算为特征的逐点乘法。此外， $\mathcal{R}$ 是一个右 $\mathcal{R}$-模，其函数 $\mathcal{R}\times\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ 定义为 $(a,\chi)=\chi_a$，其中 $\chi_a\in\hat{}\mathcal{R}$，使得对于所有 $\chi\in\hat{}\mathcal{R}$ 和 $a,b\in\mathcal{R}$，都有 $\chi_a(b)=\chi(ab)$。 $\mathcal{R}$ 的特征 χ 是一个右生成特征，如果映射 $\phi:\mathcal{R}\to\mathcal{R}$ 由 $\phi(r)=\chi_r$ 给出，且是 $\mathcal{R}$-模的同构。关于加性特征的详细讨论，见 [13] 。

引理 3.1. (*[13]*) 设 χ 是有限环 $\mathcal{R}$的一个特征。那么， χ 是右生成特征，当且仅当 ker χ 不包含非零右理想。

以下引理是引理 3.1 的直接推论。

引理 3.2. 设 χ 是有限交换环 $\mathcal{R}$ 上的非平凡加性特征，且 $\boldsymbol{a}$ 是 $\mathcal{R}$ 的一个固定元素。那么

$$\sum_{\boldsymbol{b}\in\mathcal{R}}\chi(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\begin{cases}|\mathcal{R}|, & if\ \boldsymbol{a}=\mathbf{0};\\ 0, & if\ \boldsymbol{a}\neq\mathbf{0}.\end{cases}$$

引理 3.3. 设 χ 是有限交换环 $\mathcal{R}$ 上的生成特征。对于任意子模 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}^n$，有

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{R}} \chi(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) = \begin{cases} |\mathcal{C}|, & if\ \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}^{\perp}; \\ 0, & if\ \boldsymbol{v} \notin \mathcal{C}^{\perp}. \end{cases}$$

设 f 是定义在 $\mathcal{R}^n$ 上的复值函数，且 χ 是 $\mathcal{R}$ 的生成特征。f 的傅里叶变换为

$$\hat{f}(\boldsymbol{u}) = \sum_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{R}^n} \chi(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) f(\boldsymbol{v}).$$

引理 3.4. 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{R}^n$ 是一个子模，且 f 是定义在 $\mathcal{R}^n$ 上的函数。那么

$$\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathcal{C}^{\perp}} f(\boldsymbol{v}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|} \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}} \hat{f}(\boldsymbol{u}).$$

定理 1. 给定链偏序多重集 $\mathbb{P} = (M, R)$ 上的 $\mathbb{Z}_m$ 上长度为 n 的线性 $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C}$，有如下

(1) 若 m 为奇数，则

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}) = x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} + \sum_{i=1}^{s} \frac{2m^{\pi(i+1)+\cdots+\pi(s)}}{|\mathcal{C}|} \sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} \left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+j} \left[\beta_{ij} W_{(\mathcal{C}_i,\pi)}(x,x;\mathbb{P}) + LW^{j}_{\mathcal{C}'_i,\pi} x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right];$$

(2) 若 m 为偶数，则

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}) = x^{s\frac{m}{2}} + \sum_{i=1}^{s} \frac{m^{\pi(i+1)+\cdots+\pi(s)}}{|\mathcal{C}|} \left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\frac{m}{2}}$$
$$\left[\left(2\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} \beta_{ij} \left(\frac{y}{x}\right)^{j} + \gamma_i \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{m}{2}}\right) W_{(\mathcal{C}_i,\pi)}(x,x;\mathbb{P}) + \left(2\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1} \left(\frac{y}{x}\right)^{j} LW^{j}_{\mathcal{C}'_i,\pi} + \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{m}{2}} LW^{\frac{m}{2}}_{\mathcal{C}'_i,\pi}\right) x^{s\frac{m}{2}}\right],$$

其中 $\beta_{ij} = \frac{(2j+1)^{\pi(i)} - (2j-1)^{\pi(i)}}{2}$，$\gamma_i = m^{\pi(i)} - (m-1)^{\pi(i)}$ 且

$$\begin{cases} LW^{j}_{\mathcal{C}'_i,\pi} = \sum\limits_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}'_i} \sum\limits_{a=1}^{\pi(i)} \cos\frac{2\pi u_{i_a} j}{m} \prod\limits_{b<a} \left(1 + 2\sum\limits_{t=1}^{j-1} \cos\frac{2\pi u_{i_b} t}{m}\right) \prod\limits_{b>a} \left(1 + 2\sum\limits_{t=1}^{j} \cos\frac{2\pi u_{i_b} t}{m}\right) & 1 \le j \le \lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor; \\ LW^{\frac{m}{2}}_{\mathcal{C}'_i,\pi} = \sum\limits_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}'_i} \sum\limits_{a=1}^{\pi(i)} (-1)^{u_{i_a}} \prod\limits_{b<a} \left(1 + 2\sum\limits_{t=1}^{\frac{m}{2}-1} \cos\frac{2\pi u_{i_b} t}{m}\right) \prod\limits_{b>a} \left(1 + (-1)^{u_{i_b}} + 2\sum\limits_{t=1}^{\frac{m}{2}-1} \cos\frac{2\pi u_{i_b} t}{m}\right) & j = \frac{m}{2} \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

证明。考虑由下式定义的函数 $f\colon\ V \to \mathcal{C}(x,y)$

$$f(\boldsymbol{u}) = x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)}(\boldsymbol{u})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)}(\boldsymbol{u})}.$$

然后由引理 3.4 可得

$$W_{(\mathcal{C}^\perp,\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}) = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}^\perp} f(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}} \hat{f}(\boldsymbol{u}). \tag{3.1}$$

ˆ 现在我们详细分析 $f(\boldsymbol{u})$ 的值。我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(\boldsymbol{u}) &= \sum_{\boldsymbol{v}\in V} \chi(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)}(\boldsymbol{v})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)}(\boldsymbol{v})} \\ &= x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left[1+\sum_{\mathbf{0}\neq\boldsymbol{v}\in\ V}\chi(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\left(\frac{y}{x}\right)^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)(\boldsymbol{v})}}\right].\end{aligned}$$

给定 $i\in[s]$、$j\in\left[\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\right]$ 和 $a\in[\pi(i)]$, 集:

$$\begin{cases} D_i = \{\boldsymbol{v}\in V\setminus\{\mathbf{0}\} : \min\{k : \boldsymbol{v_k}\neq\mathbf{0}\} = i\}; \\ E_{ij} = \{\boldsymbol{v}\in D_i : w_{(L,\pi)}(\boldsymbol{v_i}) = j\}; \\ E_{ija} = \{\boldsymbol{v}\in E_{ij} : \min\{k : w_L(v_{i_k}) = j\} = a\}. \end{cases}$$

根据这些定义, 我们有

$$\begin{aligned}\hat{f}(\boldsymbol{u}) &= x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left[1+\sum_{i=1}^{s}\sum_{\boldsymbol{v}\in D_i}\chi(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})\left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+w_{(L,\pi)}(\boldsymbol{v_i})}\right] \\ &= x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left[1+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\sum_{\boldsymbol{v}\in E_{ij}}\left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+j}\chi(\boldsymbol{u_i}\cdot\boldsymbol{v_i}+\cdots+\boldsymbol{u_s}\cdot\boldsymbol{v_s})\right] \\ &= x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left[1+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+j}\sum_{\boldsymbol{v}\in E_{ij}}\chi(\boldsymbol{u_i}\cdot\boldsymbol{v_i}+\cdots+\boldsymbol{u_s}\cdot\boldsymbol{v_s})\right] \\ &= x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left[1+\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+j}\sum_{\substack{\mathbf{0}\neq\boldsymbol{v_i}\in V_i\\ w_{(L,\pi)}(\boldsymbol{v_i})=j}}\chi(\boldsymbol{u_i}\cdot\boldsymbol{v_i})\sum_{\boldsymbol{v'}\in\mathbb{Z}_m^{\pi(i+1)+\cdots+\pi(s)}}\chi(\boldsymbol{u'}\cdot\boldsymbol{v'})\right],\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{u'}=(\boldsymbol{u_{i+1}},\ldots,\boldsymbol{u_s})\in\mathbb{Z}_m^{\pi(i+1)+\cdots+\pi(s)}$。由引理 3.2 可得

$$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}}\hat{f}(\boldsymbol{u}) = |\mathcal{C}|x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}+\sum_{i=1}^{s}x^{i\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}y^{(s-i)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}m^{\pi(i+1)+\cdots+\pi(s)}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(\frac{y}{x}\right)^{j}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i\cup\mathcal{C}_i'}\sum_{\substack{\mathbf{0}\neq\boldsymbol{v_i}\in V_i\\ w_{(L,\pi)}(\boldsymbol{v_i})=j}}\chi(\boldsymbol{u_i}\cdot\boldsymbol{v_i}). \tag{3.2}$$

Set

$$Z_i = \sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(\frac{y}{x}\right)^{j}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i\cup\mathcal{C}_i'}\sum_{\substack{\mathbf{0}\neq\boldsymbol{v_i}\in V_i\\ w_{(L,\pi)}(\boldsymbol{v_i})=j}}\chi(\boldsymbol{u_i}\cdot\boldsymbol{v_i}).$$

若 m 为奇数，则我们观察到

$$\begin{aligned}
Z_i &= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\frac{y}{x}\right)^j \sum_{\boldsymbol{u}\in \mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_i'} \sum_{a=1}^{\pi(i)} \sum_{\boldsymbol{v}\in E_{ija}} \chi(\boldsymbol{u_i}\cdot \boldsymbol{v_i}) \\
&= \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\frac{y}{x}\right)^j \sum_{\boldsymbol{u}\in \mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_i'} \sum_{a=1}^{\pi(i)} \sum_{\substack{\boldsymbol{v_i}\in V_i, w_L(v_{i_a})=j; \\ w_L(v_{i_b})<j \text{ for } b<a; w_L(v_{i_b})\le j \text{ for } b>a}} \chi(\boldsymbol{u_i}\cdot \boldsymbol{v_i}) \\
&= 2\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\frac{y}{x}\right)^j \sum_{\boldsymbol{u}\in \mathcal{C}_i \cup \mathcal{C}_i'} \sum_{a=1}^{\pi(i)} \cos\frac{2\pi u_{i_a} j}{m} \prod_{b<a}\left(1+2\sum_{t=1}^{j-1}\cos\frac{2\pi u_{i_b} t}{m}\right)\prod_{b>a}\left(1+2\sum_{t=1}^{j}\cos\frac{2\pi u_{i_b} t}{m}\right) \\
&= 2\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(\frac{y}{x}\right)^j \left[|\mathcal{C}_i|\frac{(2j+1)^{\pi(i)}-(2j-1)^{\pi(i)}}{2} + \right. \\
&\quad \left. \sum_{\boldsymbol{u}\in \mathcal{C}_i'} \sum_{a=1}^{\pi(i)} \cos\frac{2\pi u_{i_a} j}{m} \prod_{b<a}\left(1+2\sum_{t=1}^{j-1}\cos\frac{2\pi u_{i_b} t}{m}\right)\prod_{b>a}\left(1+2\sum_{t=1}^{j}\cos\frac{2\pi u_{i_b} t}{m}\right)\right].
\end{aligned}$$

因此，结论由 (3.1) 和 (3.2) 得出。 m 为偶数的情形也可用类似方法证明。 □

注记 3.1. 注意，当我们在 $\mathbb{Z}_2^s$ 和 $\mathbb{Z}_3^s$ 上考虑多重集偏序块度量时，该度量将与偏序分块度量一致。定理 1 与 *[9]* 中的结果一致。

例 3.1. 设 $M=\{2/1, 2/2\}$ 和 $\mathbb{P}=(M,\ R)$ 为一个偏序多重集，其序关系为链关系。设 π 是偏序多重集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1)=2$ 且 $\pi(2)=1$。考虑由下式给出的 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_4^3$

$$\mathcal{C}=\{000, 112, 220, 332\}.$$

于是，根据定理 1，可得

$$\begin{aligned}
W_{(\mathcal{C}^\perp,\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}) &= x^4+\sum_{i=1}^{2}\frac{4^{\pi(i+1)+\cdots+\pi(2)}}{4}\left(\frac{y}{x}\right)^{4-2i} \\
&\quad \left[\left(2\beta_{i1}\frac{y}{x}+\gamma_i\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)W_{(\mathcal{C}_i,\pi)}(x,x;\mathbb{P})+\left(2\left(\frac{y}{x}\right)LW^1_{\mathcal{C}_i',\pi}+\left(\frac{y}{x}\right)^2 LW^2_{\mathcal{C}_i',\pi}\right)x^4\right].
\end{aligned}$$

注意，$\mathcal{C}_1=\{000\}$、$\mathcal{C}_2=\{000, 220\}$、$\mathcal{C}_1'=\{220\}$ 和 $\mathcal{C}_2'=\{112, 332\}$。因此

$$W_{(\mathcal{C}^\perp,\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}) = x^4+x^2y^2+8xy^3+6y^4.$$

另一方面，$\mathcal{C}$ 的对偶为

$$\mathcal{C}^\perp=\{000, 111, 222, 333, 130, 220, 310, 021, 002, 023, 201, 203, 113, 132, 312, 331\}.$$

$\mathcal{C}^{\perp}$ 的（$\widetilde{\mathbb{P}},\pi$）-重量枚举式为

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=x^4+x^2y^2+8xy^3+6y^4,$$

这与定理 1 一致。 □

例3.2. 设 $M=\{2/1,2/2\}$ 和 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是一个偏序多重集，其序关系为链关系。设 π 是偏序多重集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1)=1$ 且 $\pi(2)=2$。考虑由下式给出的 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_5^3$

$$\mathcal{C}=\{000,132,214,341,423\}.$$

于是我们有 $\mathcal{C}_1=\{000\}=\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_1'=\emptyset$ 和 $\mathcal{C}_2'=\{132,214,341,423\}$。由定理 1 可得 t

$$\begin{aligned}W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}) &= x^4+\sum_{i=1}^{2}\frac{2\times5^{\pi(i+1)+\cdots+\pi(2)}}{5}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{y}{x}\right)^{4-2i+j}\left[\beta_{ij}W_{(\mathcal{C}_i,\pi)}(x,x;\mathbb{P})+LW^{j}_{\mathcal{C}_i',\pi}x^4\right]\\ &= x^4+2x^3y+2x^2y^2+10xy^3+10y^4.\end{aligned}$$

另一方面， $\mathcal{C}$ 的对偶为

$$\mathcal{C}^{\perp}=\{000,102,204,301,403,011,022,033,044,113,221,334,$$

$$442,124,243,312,431,130,210,340,420,141,232,323,414\}.$$

$\mathcal{C}^{\perp}$ 的 $(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)$-重量枚举式为

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=x^4+2x^3y+2x^2y^2+10xy^3+10y^4,$$

这也与定理 1 一致。 □

注3.2. 设 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是定义在 $M=\left\{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/2,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/s\right\}$ 上、具有链关系的偏序多重集， π 是偏序多重集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，其中 $\pi(i)=1$ 对于 $i\in[s]$。设 $\mathcal{C}$ 是一个线性 $(\mathbb{P},\pi)$-码。那么 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的 $(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)$-重量枚举式如下。

- 当 m 为奇数时，

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}+\sum_{i=1}^{s}\frac{2m^{s-i}}{|\mathcal{C}|}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+j}\left(W_{(\mathcal{C}_i,\pi)}(x,x;\mathbb{P})+\sum_{l=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\cos\frac{2\pi lj}{m}W_{\mathcal{C}_{il}'}(x,x;\mathbb{P})\right).$$

- 当 m为偶数时 ，

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}+\sum_{i=1}^{s}\frac{m^{s-i}}{|\mathcal{C}|}\left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\frac{m}{2}}$$

$$\left[\left(2\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{j}+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{m}{2}}\right)W_{(\mathcal{C}_i,\pi)}(x,x;\mathbb{P})+\left(2\sum_{j=1}^{\frac{m}{2}-1}\left(\frac{y}{x}\right)^{j}\sum_{u\in\mathcal{C}_i'}\cos(\frac{2\pi u_ij}{m})+\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{m}{2}}\sum_{u\in\mathcal{C}_i'}(-1)^{u_i}\right)x^{\frac{sm}{2}}\right].$$

该结果与偏序多重集度量情形下的 MacWilliams 型恒等式相同（见 *[12]*）。

在证明下一个推论之前，我们先约定以下记号:

(1) 给定 $j \in \left[\lfloor \frac{m}{2} \rfloor\right]$ 为偶数。考虑 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}$ 的第 i 块（u_{i_1}, u_{i_2}）。

- $\mathcal{C}_{ij}^1 = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_1}) = (1, \pm t)\}$, where t satisfies one of the following conditions:
  a) $\frac{lm+1}{j} - 1 \leq t \leq \frac{lm-1}{j} + 1$ $(1 \leq l \leq \frac{j}{2} - 1)$, $t \mid j$ or $t \nmid j$ but $\exists\, a \in [-j, j]$ $s.t.$ $at + j \equiv 0 \pmod{m}$;
  b) $\frac{jm+2}{2j} - 1 \leq t \leq \frac{m-1}{2}$, $t \mid j$ or $t \nmid j$ but $\exists\, a \in [-j, j]$ $s.t.$ $at + j \equiv 0 \pmod{m}$.
- $\mathcal{C}_{ij}^2 = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_1}) = (1, \pm t)\}$, where t satisfies one of the following conditions:
  a) $1 \leq t \leq \frac{m+1}{j} - 1$, $t \nmid j$;
  b) $\frac{lm-1}{j} + 1 < t < \frac{(l+1)m+1}{j} - 1$ $(1 \leq l \leq \frac{j}{2} - 1)$, $t \nmid j$ and there does not exist $a \in [-j, j]$ $s.t.$ $at + j \equiv 0 \pmod{m}$.
- $\mathcal{C}_{ij}^3 = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_2}) = (1, \pm t),\ \boldsymbol{u} \notin \mathcal{C}_{ij}^1 \cup \mathcal{C}_{ij}^2\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_2}) = (0, 1)\}$.

(2) 给定 $j \in \left[3, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor\right]$ 为奇数。考虑 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}$ 的第 i 块（u_{i_1}, u_{i_2}）。

- $\mathcal{C}_{ij}^1 = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_2}) = (1, \pm t)\}$ where t satisfies

  $\frac{lm+1}{j} - 1 \leq t \leq \frac{lm-1}{j} + 1$ $(1 \leq l \leq \frac{j-1}{2})$, $t \mid j$ or $t \nmid j$ but $\exists\, a \in [-j, j]$ $s.t.$ $at + j \equiv 0 \pmod{m}$;

- $\mathcal{C}_{ij}^2 = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_2}) = (1, \pm t)\}$ where t satisfies one of the following conditions:
  a) $1 \leq t < \frac{m+1}{j} - 1$, $t \nmid j$;
  b) $\frac{lm-1}{j} + 1 \leq t \leq \frac{(l+1)m+1}{j} - 1$ $(1 \leq l \leq \frac{j-3}{2})$, $t \nmid j$ and there does not exist $a \in [-j, j]$ $s.t.$ $at + j \equiv 0 \pmod{m}$.
  c) $\frac{(j-1)m-2}{2j} + 1 < t \leq \frac{m-1}{2}$, $t \nmid j$ and there exists no $a \in [-j, j]$ $s.t.$ $at + j \equiv 0 \pmod{m}$.
- $\mathcal{C}_{ij}^3 = \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_2}) = (1, \pm t),\ \boldsymbol{u} \notin \mathcal{C}_{ij}^1 \cup \mathcal{C}_{ij}^2\} \cup \{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_2}) = (0, 1)\}$.

(3) 对于 $j = 1$, 置 $\mathcal{C}_{i1}^1 = \emptyset$,

$$\mathcal{C}_{i1}^2 = \left\{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_2}) = (1, t), t \in \mathbb{Z}_m \setminus \{\pm 1, 0\}\right\},$$

and

$$\mathcal{C}_{i1}^3 = \left\{\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'} : (u_{i_1}, u_{i_2}) = (1, t), t \in \{\pm 1, 0\} \text{ or } (u_{i_1}, u_{i_2}) = (0, 1)\right\}.$$

推论 3.1. 设 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是 $M=\left\{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/2,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/2s\right\}$ 上具有链关系的偏序多重集，且 π 是偏序多重集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，其中 $\pi(i)=2$ 对于 $i\in[s]$ 成立。设 $\mathcal{C}$ 是一个线性 $(\mathbb{P},\pi)$-码。若 $\mathbb{Z}_m$ 是一个域（即 m 是素数），则 $\mathcal{C}^{\perp}$ 的 $(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)$-重量枚举式为:

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}+\sum_{i=1}^{s}\frac{2m^{2(s-i)}}{|\mathcal{C}|}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+j}$$

$$\left[4jW_{(\mathcal{C}_i^{\perp},\pi)}(x,y;\mathbb{P})+(2m-4j)W_{(\mathcal{C}_{ij}^{1\perp},\pi)}(x,y;\mathbb{P})-4jW_{(\mathcal{C}_{ij}^{2\perp},\pi)}(x,y;\mathbb{P})+(m-4j)W_{(\mathcal{C}_{ij}^{3\perp},\pi)}(x,y;\mathbb{P})\right].$$

证明。由定理 1，我们有

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=x^{s\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}+\sum_{i=1}^{s}\frac{2m^{2(s-i)}}{|\mathcal{C}|}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(\frac{y}{x}\right)^{(s-i)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+j}$$

$$\left[4jW_{(\mathcal{C}_i,\pi)}(x,y;\mathbb{P})+\sum_{u\in\mathcal{C}_i'}\sum_{a=1}^{2}\cos\frac{2\pi u_{i_a}j}{m}\prod_{b<a}\left(1+2\sum_{l=1}^{j-1}\cos\frac{2\pi u_{i_b}l}{m}\right)\prod_{b>a}\left(1+2\sum_{l=1}^{j}\cos\frac{2\pi u_{i_b}l}{m}\right)\right].$$

记

$$Z_{ij}^{\boldsymbol{u}}=\sum_{a=1}^{2}\cos\frac{2\pi u_{i_a}j}{m}\prod_{b<a}\left(1+2\sum_{l=1}^{j-1}\cos\frac{2\pi u_{i_b}l}{m}\right)\prod_{b>a}\left(1+2\sum_{l=1}^{j}\cos\frac{2\pi u_{i_b}l}{m}\right).$$

对于每个 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i'$，我们有 u_{i_1} 和 u_{i_2} 不全为 0。取 $\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i'$，其第 i 个块 (u_{i_1},u_{i_2}) 的形式为 $(u_{i_1},u_{i_2})=(1,0)$。由于 $\mathbb{Z}_m$ 是一个域，$\mathbb{Z}_m\setminus\{0\}$ 中的每个元素在 u_{i_1} 处出现的次数相同。因此我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i',u_{i_2}=0}Z_{ij}^{\boldsymbol{u}} &= \sum_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i',\\(u_{i_1},u_{i_2})=(1,0)}}\left[(2j+1)\sum_{t=1}^{m-1}\cos\frac{2\pi tj}{m}+\sum_{t=1}^{m-1}(1+2\sum_{l=1}^{j-1}\cos\frac{2\pi tl}{m})\right]\\ &= \sum_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i',\\(u_{i_1},u_{i_2})=(1,0)}}\left[-2j-1+m-1+2\sum_{l=1}^{j-1}\sum_{t=1}^{m-1}\cos\frac{2\pi tl}{m}\right]\\ &= \sum_{\substack{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i',\\(u_{i_1},u_{i_2})=(1,0)}}(m-2j-2-2j+2)\\ &= (m-4j)\cdot\left|\left\{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i':(u_{i_1},u_{i_2})=(1,0)\right\}\right|.\end{aligned}$$

可以用同样的方法证明，$\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i',\ u_{i_1}=0}Z_{ij}=(m-4j)\cdot\left|\left\{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}_i':\ (u_{i_1},u_{i_2})=(0,1)\right\}\right|$。

假设 $\boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_i^{'}$ 满足既非 $u_{i_1} \neq 0$ 也非 $u_{i_2} \neq 0$。不失一般性，设$(u_{i_1}, u_{i_2}) = (1, t)$，其中 $t \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$。于是

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}\mathbb{Z}_m \setminus \{\mathbf{0}\};\\ (u_{i_1}, u_{i_2}) = (1,t)}} Z_{ij}^{\boldsymbol{v}} &= \sum_{r=1}^{m-1} \cos\frac{2\pi rj}{m} \left(1 + 2\sum_{l=1}^{j} \cos\frac{2\pi rtl}{m}\right) + \sum_{r=1}^{m-1} \cos\frac{2\pi rtj}{m} \left(1 + 2\sum_{l=1}^{j-1} \cos\frac{2\pi rl}{m}\right) \\
&= \sum_{r=1}^{m-1} \left[\cos\frac{2\pi rj}{m} \frac{e^{-i\frac{2\pi rtj}{m}} - e^{i\frac{2\pi rt(j+1)}{m}}}{1 - e^{i\frac{2\pi rt}{m}}} + \cos\frac{2\pi rtj}{m} \frac{e^{-i\frac{2\pi r(j-1)}{m}} - e^{i\frac{2\pi rj}{m}}}{1 - e^{i\frac{2\pi r}{m}}}\right] \\
&= \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r \left(\frac{\omega^j + \omega^{-j}}{2} \frac{\omega^{-tj} - \omega^{t(j+1)}}{1 - \omega^t}\right) + \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r \left(\frac{\omega^{tj} + \omega^{-tj}}{2} \frac{\omega^{-(j-1)} - \omega^j}{1 - \omega}\right), \qquad (3.3)
\end{aligned}$$

其中 $\omega = e^{i\frac{2\pi}{m}}$ 和 $\{\sigma_r : \ 1 \leq r \leq m-1\}$ 是 m 次分圆域 $\mathbb{Q}(\omega)$ 的伽罗瓦群。注意 $\sum_{\substack{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}\mathbb{Z}_m \setminus \{\mathbf{0}\};(^{u_{i_1}},\\ {}^{u_{i_2}}) = (1,t)}} Z_{ij}^{\boldsymbol{v}} = \sum_{(^{u_{i_1}}, ^{u_{i_2}}) = (1,-t)} Z_{ij}^{\boldsymbol{v}}$。(3.3) 中的第一求和变为

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r \left(\left(\omega^j + \omega^{-j}\right)\omega^{-tj}(1 + \omega^t + \omega^{2t} + \cdots + \omega^{2jt})\right) \\
= \ & \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r \left(\sum_{k=0}^{2j} \omega^{j-tj+kt} + \sum_{k=0}^{2j} \omega^{-j-tj+kt}\right) \\
= \ & \sum_{k=0}^{2j} \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r \left(\omega^{j-tj+kt}\right).
\end{aligned}$$

(3.3) 中的第二求和变为

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r \left((\omega^{tj} + \omega^{-tj})\omega^{-(j-1)}(1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{2j-2})\right) \\
= \ & \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r \left(\sum_{k=1}^{2j-1} \omega^{tj-j+k} + \sum_{k=1}^{2j-1} \omega^{-tj-j+k}\right) \\
= \ & \sum_{k=1}^{2j-1} \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r(\omega^{tj-j+k}).
\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}\mathbb{Z}_m \setminus \{\mathbf{0}\};\\ (u_{i_1}, u_{i_2}) = (1,t)}} Z_{ij}^{\boldsymbol{v}} = \sum_{k=0}^{2j} \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r(\omega^{j-tj+kt}) + \sum_{k=1}^{2j-1} \sum_{r=1}^{m-1} \sigma_r(\omega^{tj-j+k}).$$

由此观察可得

$$\sum_{\substack{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{u}\mathbb{Z}_m \setminus \{\mathbf{0}\};\\ (u_{i_1}, u_{i_2}) = (1,\pm t)}} Z_{ij}^{\boldsymbol{v}} = \begin{cases} 2m - 4j, & \text{if } t \in \mathcal{C}_{ij}^1; \\ -4j, & \text{if } t \in \mathcal{C}_{ij}^2; \\ m - 4j, & \text{if } t \in \mathcal{C}_i^{'} \setminus \mathcal{C}_{ij}^1 \cup \mathcal{C}_{ij}^2. \end{cases}$$

于是结论得证。 □

例 3.3. 设 $M=\{2/1,2/2\}$ 和 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是一个偏序多重集，其序关系为链关系。设 π 是偏序多重集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1)=\pi(2)=2$。考虑由下列矩阵生成的 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_5^4$：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

由推论 3.1 可得

$$W_{(\mathcal{C}^\perp,\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=x^4+\sum_{i=1}^{2}\frac{2\times 5^{4-2i}}{25}x^{2i}y^{4-2i}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{y}{x}\right)^j\left[4j|\mathcal{C}_i|+(10-4j)|\mathcal{C}_{ij}^1|-4j|\mathcal{C}_{ij}^2|+(5-4j)|\mathcal{C}_{ij}^3|\right].$$

注意，$\mathcal{C}_1=\mathcal{C}_2=\{000\}$；$\mathcal{C}_{11}^1=\mathcal{C}_{11}^2=\mathcal{C}_{11}^3=\mathcal{C}_{12}^1=\mathcal{C}_{12}^2=\mathcal{C}_{12}^3=\mathcal{C}_{21}^1=\mathcal{C}_{22}^2=\emptyset$；$\mathcal{C}_{21}^2=\{2212,3413\}$；$\mathcal{C}_{21}^3=\{1011,4114,0310,1201\}$；$\mathcal{C}_{22}^1=\{2212,3413\}$；$\mathcal{C}_{22}^3=\{1011,0310,1201,4114\}$。因此

$$\begin{aligned} W_{(\mathcal{C}^\perp,\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}) &= x^4+2x^2y^2\left[4\left(\frac{y}{x}\right)+8\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]+ \\ &\quad \frac{2}{25}x^4\left[\left(\frac{y}{x}\right)(4+6|\mathcal{C}_{21}^1|-4|\mathcal{C}_{21}^2|+|\mathcal{C}_{21}^3|)+\left(\frac{y}{x}\right)^2(8+2|\mathcal{C}_{22}^1|-8|\mathcal{C}_{22}^2|-3|\mathcal{C}_{22}^3|\right] \\ &= x^4+8xy^3+16y^4+\frac{2x^4}{25}\left[\left(\frac{y}{x}\right)(4-4\times 2+4)+\left(\frac{y}{x}\right)^2(8+2\times 2-3\times 4)\right] \\ &= x^4+8xy^3+16y^4. \end{aligned}$$

另一方面，$\mathcal{C}$ 的对偶为

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^\perp=&\{1004,2003,3002,4001,0123,0241,0314,0432,1122,2244,3311,4433,\\ &1240,2430,3120,4310,1313,2121,3434,4242,1431,2312,3243,4124\} \end{aligned}$$

并且 $\mathcal{C}^\perp$ 的 $(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)$-重量枚举式为

$$W_{(\mathcal{C}^\perp,\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=x^4+8xy^3+16y^4,$$

这与推论 3.1 一致。 □

4 一般偏序多重集的直和与序和上的 MacWilliams 型恒等式

对于 $i\in\{1,2\}$，令 $(\mathbb{P}_i,\pi_i)$ 为 $[s_i]$ 上的偏序多重集分组结构，其中 $\pi_i\colon [s_i]\to\mathbb{N}$ 是一个映射，使得 $\sum_{j=1}^{s_i}\pi_i(j)=n_i$ 且 $\mathbb{P}_i=(M_i,R_i)$，其中 $M_i=\{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/n_i\}$。记为 $n=n_1+n_2$。假设

$\mathcal{C}_i$ 是一个线性 $(\mathbb{P}_i, \pi_i)$-码。 $\mathcal{C}_1$ 与 $\mathcal{C}_2$ 的直和记为 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$，定义如下：

$$\mathcal{C} = \{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) : \boldsymbol{u} \in \mathcal{C}_1, \boldsymbol{v} \in \mathcal{C}_2\}.$$

注意， $\mathcal{C}$ 也是 V的一个子模。

令$M = \left[\lfloor \frac{m}{2} \rfloor/1, \cdots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor/n_1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor/(n_1+1) \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor/(n_1+n_2)\right]$。按如下方式在 M上定义偏序集关系 R：

$$p/i \; R \; q/j \Leftrightarrow (i, j \leq n_1 \text{ and } p/i \; R_1 \; q/j) \text{ or } (i, j > n_1 \text{ and } p/(i-n_1) \; R_2 \; q/(j-n_1)).$$

对于任意 $p/i, q/j \in M$。显然， $\mathbb{P} = (M, R)$是一个偏序多重集，称为 $\mathbb{P}_1$和 $\mathbb{P}_2$的直和，记作 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{P}_2$。

定义 M 上的偏序集关系 R 如下：

$p/i \; R \; q/j \Leftrightarrow (i, j \leq n_1$和 $p/i \; R_1 \; q/j)$或$(i, j > n_1$和 $p/(i-n_1) \; R_2 \; q/(j-n_1))$或$(i \leq n_1 < j)$，对于任意 $p/i, q/j \in M$。那么， $\mathbb{P} = (M, R)$是一个偏序多重集，称为 $\mathbb{P}_1$和 $\mathbb{P}_2$的序和，记作 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$。关于偏序多重集之和的详细讨论，参见 [11]。

$\widetilde{\quad} \quad \sim \quad \sim \quad \widetilde{\quad} \quad \sim \quad \sim$根据这些定义，我们有 $\mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{P}_2$ 和 $\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_2 + \mathbb{P}_1$。将$\pi_1$与 π_2的和记为 $\pi = \pi_1 \oplus \pi_2$，定义为 π： $[s_1 + s_2] \to \mathbb{N}$，使得

$$\pi(i) = \begin{cases} \pi_1(i) & \text{if } i \leq n_1; \\ \pi_2(i - n_1) & \text{if } i > n_1. \end{cases}$$

现在考虑配备了（$\mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{P}_2, \pi$）和（$\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2, \pi$）块结构的码 $\mathcal{C}$。

根据以上引入的记号，我们得到以下结果。

定理 2. (1) 对于线性（$\mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{P}_2, \pi$）码 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$，有

$$W_{(\mathcal{C}^\perp, \pi)}(x, y; \widetilde{\mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{P}_2}) = W_{(\mathcal{C}_1^\perp, \pi_1)}(x, y; \widetilde{\mathbb{P}}_1) W_{(\mathcal{C}_2^\perp, \pi_2)}(x, y; \widetilde{\mathbb{P}}_2).$$

(2) 对于线性（$\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2, \pi$）码 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \oplus \mathcal{C}_2$，有

$$W_{(\mathcal{C}^\perp, \pi)}(x, y; \widetilde{\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2}) = x^{s_1 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} W_{(\mathcal{C}_2^\perp, \pi_2)}(x, y; \widetilde{\mathbb{P}}_2) + \frac{m^{n_2}}{|\mathcal{C}_2|} y^{s_2 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left(W_{(\mathcal{C}_1^\perp, \pi_1)}(x, y; \widetilde{\mathbb{P}}_1) - x^{s_1 \lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right).$$

证明。令 $\mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \oplus \mathbb{P}_2$。定义函数 f： $\mathbb{Z}_m^n \to \mathbb{C}[x, y]$，其定义为

$$f(\boldsymbol{u}) = x^{(s_1+s_2)\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}, \pi)}(\boldsymbol{u})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}, \pi)}(\boldsymbol{u})}.$$

$\hat{}$ 则 f 的傅里叶变换 $\hat{f}$ 为

$$\hat{f}(\boldsymbol{u}) = \sum_{(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) \in \mathbb{Z}_m^n} \chi(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) x^{(s_1+s_2)\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}, \pi)}(\boldsymbol{v})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}, \pi)}(\boldsymbol{v})}.$$

$\mathcal{C}^{\perp}$ 的 $(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)$-重量枚举式为

$$
\begin{aligned}
& W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}) = \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}^{\perp}} f(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}} \hat{f}(\boldsymbol{u}) \\
= \;& \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}}\sum_{(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2})\in\mathbb{Z}_m^n} \chi(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) x^{(s_1+s_2)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)}(\boldsymbol{v})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)}(\boldsymbol{v})} \\
= \;& \frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}}\sum_{\boldsymbol{v}\in\mathbb{Z}_m^n} \chi(\boldsymbol{u_1}\cdot\boldsymbol{v_1})\chi(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) x^{(s_1+s_2)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1}) - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1}) + w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} \\
= \;& \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{|\mathcal{C}_i|}\sum_{\boldsymbol{u_i}\in\mathcal{C}_i}\sum_{\boldsymbol{v_i}\in\mathbb{Z}_m^{n_i}} \chi(\boldsymbol{u_i}\cdot\boldsymbol{v_i}) x^{s_i\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_i,\pi_i)}(\boldsymbol{v_i})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_i,\pi_i)}(\boldsymbol{v_i})} \\
= \;& W_{(\mathcal{C}_1^{\perp},\pi_1)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}_1) W_{(\mathcal{C}_2^{\perp},\pi_2)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}_2).
\end{aligned}
$$

若 $\mathbb{P}=\mathbb{P}_1+\mathbb{P}_2$, 则

$$
\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}} \hat{f}(\boldsymbol{u}) &= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}}\sum_{(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2})\in\mathbb{Z}_m^n} \chi(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}) x^{(s_1+s_2)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)}(\boldsymbol{v})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)}(\boldsymbol{v})} \\
&= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}} \Bigg[\sum_{(\boldsymbol{0},\boldsymbol{v_2})\in\mathbb{Z}_m^n} \chi(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) x^{(s_1+s_2)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} + \\
&\qquad \sum_{\substack{(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2})\in\mathbb{Z}_m^n \\ \boldsymbol{v_1}\neq\boldsymbol{0}}} \chi(\boldsymbol{u_1}\cdot\boldsymbol{v_1})\chi(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) x^{(s_1+s_2)\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1}) - s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1}) + s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} \Bigg] \\
&= \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}} x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} \sum_{\boldsymbol{v_2}\in\mathbb{Z}_m^{n_2}} \chi(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) x^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} + \\
&\quad \sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}} y^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} \sum_{\substack{(\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2})\in\mathbb{Z}_m^n \\ \boldsymbol{v_1}\neq\boldsymbol{0}}} \chi(\boldsymbol{u_1}\cdot\boldsymbol{v_1})\chi(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})}. \qquad (4.1)
\end{aligned}
$$

(4.1) 中的第一求和为

$$
\begin{aligned}
& x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} \sum_{(\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2})\in\mathcal{C}} \sum_{\boldsymbol{v_2}\in\mathbb{Z}_m^{n_2}} \chi(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) x^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} \\
= \;& |\mathcal{C}_1| x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} \sum_{\boldsymbol{u_2}\in\mathcal{C}_2} \sum_{\boldsymbol{v_2}\in\mathbb{Z}_m^{n_2}} \chi(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) x^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} \\
= \;& |\mathcal{C}| x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} \sum_{\boldsymbol{v_2}\in\mathcal{C}_2^{\perp}} x^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor - w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_2,\pi_2)}(\boldsymbol{v_2})} \\
= \;& |\mathcal{C}| x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor} W_{(\mathcal{C}_2^{\perp},\pi_2)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}_2).
\end{aligned}
$$

(4.1) 中的第二求和为

$$\begin{aligned}
& y^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\sum_{\boldsymbol{u}\in\mathcal{C}}\sum_{\mathbf{0}\neq\boldsymbol{v_1}\in\mathbb{Z}_m^{n_1}}\chi(\boldsymbol{u_1}\cdot\boldsymbol{v_1})x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})}y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})}\sum_{\boldsymbol{v_2}\in\mathbb{Z}_m^{n_2}}\chi(\boldsymbol{u_2}\cdot\boldsymbol{v_2}) \\
= \;& m^{n_2}y^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\sum_{(\boldsymbol{u_1},\mathbf{0})\in\mathcal{C}}\sum_{\mathbf{0}\neq\boldsymbol{v_1}\in\mathbb{Z}_m^{n_1}}\chi(\boldsymbol{u_1}\cdot\boldsymbol{v_1})x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})}y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})} \\
= \;& m^{n_2}y^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\sum_{\boldsymbol{u_1}\in\mathcal{C}_1}\left(\sum_{\boldsymbol{v_1}\in\mathbb{Z}_m^{n_1}}\chi(\boldsymbol{u_1}\cdot\boldsymbol{v_1})x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})}y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})}-x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right) \\
= \;& m^{n_2}y^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(|\mathcal{C}_1|\sum_{\boldsymbol{v_1}\in\mathcal{C}_1^{\perp}}x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})}y^{w_{(\widetilde{\mathbb{P}}_1,\pi_1)}(\boldsymbol{v_1})}-|\mathcal{C}_1|x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right) \\
= \;& |\mathcal{C}_1|m^{n_2}y^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(W_{(\mathcal{C}_1^{\perp},\pi_1)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}_1)-x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right).
\end{aligned}$$

因此

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=\frac{1}{|\mathcal{C}|}\sum_{u\in\mathcal{C}}\hat{f}(u)=x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}W_{(\mathcal{C}_2^{\perp},\pi_2)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}_2)+\frac{m^{n_2}}{|\mathcal{C}_2|}y^{s_2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\left(W_{(\mathcal{C}_1^{\perp},\pi_1)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}_1)-x^{s_1\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right).$$

□

λ λ设$\mathcal{C}_i\subseteq\mathbb{Z}_m^{n_i}$是 $i\in\{1,2,\ldots,\lambda\}$的一个线性（$\mathbb{P}_i,\pi_i$）码。设 $\mathcal{C}=\bigoplus\mathcal{C}_i$和 $\pi=\bigoplus\pi_i$。通过对 λ进行$i=1$ $i=1$归纳法，我们得到以下结果。

λ定理 3. (1) 若 $\mathbb{P}=\bigoplus\mathbb{P}_i$，则 $\mathcal{C}$是一个线性（$\mathbb{P},\pi$）码，且

$i=1$

$$W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}})=\prod_{i=1}^{\lambda}W_{(\mathcal{C}_i^{\perp},\pi_i)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}_i).$$

(2) 设 $s=s_1+\cdots+s_\lambda$。若 $\mathbb{P}=\mathbb{P}_1+\mathbb{P}_2+\cdots+\mathbb{P}_\lambda$，则 $\mathcal{C}$是一个线性（$\mathbb{P},\pi$）码，且

$$\begin{aligned}
W_{(\mathcal{C}^{\perp},\pi)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}) \;=\; & x^{s_1+\cdots+s_{\lambda-1}\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}W_{(\mathcal{C}_\lambda^{\perp},\pi_\lambda)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}_\lambda)+ \\
& \prod_{i=1}^{\lambda}\frac{m^{n_{i+1}+\cdots+n_\lambda}y^{s_{i+1}+\cdots+s_\lambda}}{|\mathcal{C}_{i+1}|\cdots|\mathcal{C}_\lambda|x^{s_i+\cdots+s_\lambda-s}}\left(W_{(\mathcal{C}_i^{\perp},\pi_i)}(x,y;\widetilde{\mathbb{P}}_i)-x^{s_i\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right).
\end{aligned}$$

注释 4.1。当块的结构是平凡的（也就是说，$\pi(i)=1$ 对 $i\in[s]$），则可得到 *[12]*中所述的 pomset 度量的结果。

5 结论

本文研究偏序多重集为链偏序多重集时，码及其对偶的重量枚举式之间的关系。注意，当度量取为 $\mathbb{F}_q^n$ 上的偏序度量，且 $\mathbb{F}_q$ 是有限域时，已知偏序 P 满足麦克威廉斯恒等式，当且仅当 P 是分层偏序集（见 [6]）。此外，当度量取为 $\mathbb{F}_q^n$上的偏序分块度量时，已知偏序分块空间满足 MacWilliams 型恒等式，当且仅当该偏序集是分层的，并且在偏序集的每个层级上，所有块的维数都相同（见 [9]）。然而，成为链偏序多重集并非一个偏序多重集满足麦克威廉斯恒等式的充要条件。

基于这些观察，自然会产生一个问题：分层的是否是偏序多重集 $\mathbb{P} = (M, R)$ 具有麦克威廉斯恒等式的必要条件（此处，分层偏序多重集是指 M可以划分为 $\mathbb{P}$中的 l 个非空反链，例如（$A_1, \ldots, A_l$），使得对于任意满足$i < j$的 i和 $j \in [s]$，都有 $p/a \; R \; q/b$，对所有 $a \in A_i$ 和 $b \in A_j$均成立）？

参考文献

[1] M.M.S. Alves、L. Panek、M. Firer，《错误分块码与偏序度量》，Adv. Math. Commun. 2 (1) (2008) 95-111。[2] R. Brualdi、J.S. Graves、M. Lawrence，《具有偏序度量的码》，离散数学 147 (1) (1995) 57-72。[3] K. Feng、L. Xu、F.J. Hickernell，《线性错误分块码》，Finie Fields Appl. 12 (4) (2006) 638-652。[4] K.P. Girish、S.J. John，《偏序多重集及其链与反链之间的一般关系》，Math. Commun. 14 (2009) 193-205。[5] K.P. Girish、S.J. John，《由多重集关系诱导的多重集拓扑》，Inf. Sci. 188(2012) 298-313。[6] H. K. Kim 和 D. Y. Oh，《允许麦克威廉斯恒等式的偏序集分类》，IEEE 信息论汇刊 51 (4) (2005) 1424-1431。[7] R.A. Machado、M. Firer，《尊重支撑的权重与最近邻译码》，IEEE 信息论汇刊 66 (6) (2020) 3664-3674。[8] F. J. MacWilliams 和 N. J. Sloane，《纠错码理论》，North-Holland，阿姆斯特丹，1977。

[9] J. A. Pinheiro 和 M. Firer, 《允许麦克威廉斯型恒等式的偏序集块空间分类》, IEEE 信息论汇刊 58 (12) (2012) 7246-7252。[10] L. Panek 和 J.A. Pinheiro, 《偏序度量与加性度量的一般方法》, IEEE 信息论汇刊 68 (4) (2020) 6823-6834。[11] I. G. Sudha 和 R. S. Selvaraj, 《具有 pomset 度量的码及其构造》, 设计、编码与密码学 86 (4) (2018) 875-892。[12] I. G. Sudha 和 R. S. Selvaraj, 《某些 pomset 上线性码的麦克威廉斯型恒等式：链、直和与序和》, 离散数学 343 (2020) 111782。[13] J. A. Wood, 《有限环上模的对偶性及其在编码理论中的应用》, 美国数学杂志 121 (1999) 555-575。