arXiv:2303.01719v1 [cs.IT] 3 Mar 2023

加权偏序块空间上的线性等距群

Wen Ma JinquanLuo*

摘要：本文介绍一种新的度量族——加权偏序块度量，它结合了 Panek 等人 [(19)] 提出的加权坐标偏序度量，以及 Feng 等人 [(6)]提出的线性错误块码度量。这类度量包含许多经典度量，如汉明度量、李度量、偏序度量、pomset 度量、偏序块度量、偏序多重集分块度量等。我们用半直积的形式完整描述了这些度量空间的线性等距群。此外，我们推导出加权偏序块度量下码的 Singleton 型界，并定义了 MDS 码。作为偏序集为链时的特例，我们证明 MDS 码等价于完美码。

关键词：线性等距变换、偏序块度量、主理想、偏序多重集分块度量、加权偏序块度量

1 引言

自20世纪90年代以来，对赋予汉明度量以外其他度量的码的研究逐渐兴起，例如 Brualdi 等人提出的偏序度量（[2]）。在过去二十年里，对偏序度量下的码的研究推动编码理论取得了多项进展，也为研究配备各种度量的码开辟了道路。

Feng、Xu 和 Hickernell（[6]）通过对 $\mathbb{F}_q^n$ 的坐标位置集合进行划分，引入了分块度量，并研究了最大距离可分块码。Alves、Panek 和 Firer（[1]）将偏序度量与分块度量统一起来，引入了偏序块度量。后来，Dass、Sharma 和 Verma 得到了偏序块码的 Singleton 型界，并将达到此界的码定义为最大距离可分偏序块码。他们还将 I-球的概念推广到偏序块度量，并用 I-完美码来描述 r-完美码和最大距离可分（P，π）码。当偏序集为链时，Niederreiter-Rosenbloom-Tsfasman 块度量（简称 NRT 块度量）是偏序块度量的一种特殊情形。Panek、Firer 和 Alves

*作者任职于华中师范大学数学与统计学院及湖北省数学科学重点实验室（中国武汉）。电子邮箱：mawen95@126.com（W.Ma），luojinquan@mail.ccnu.edu.cn（J.Luo）

在 [16] 中对等价码的类别进行了分类，并发展了 NRT 分块码的大部分经典理论。

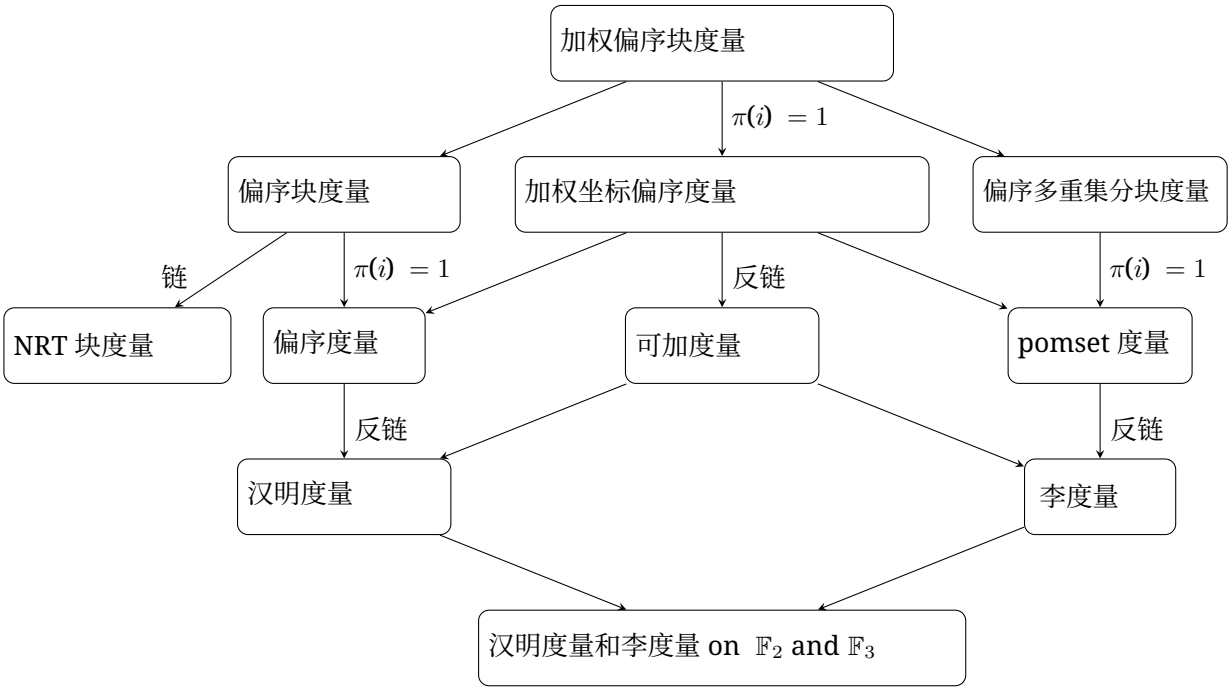
由于向量 v 在 $\mathbb{F}_q^n$ 中的支撑是一个集合，因此会在 $\mathbb{F}_q^n$ 上诱导出序理想和度量；而对于偏序集度量码而言，由于关于李重量的向量支撑不是集合，而是多重集，因此无法容纳李度量结构。为了处理李度量，Irrinki 和 Selvaraj（[20],[21],[22]）为 $\mathbb{Z}_m$ 上的码引入了一类更一般的度量，称为 pomset 度量。此外，他们还构造了 pomset 码，并确定了其度量性质，如最小距离、覆盖半径、麦克威廉斯恒等式、辛格尔顿型界和完美码等。

Rosenbloom-Tsfasman 空间、广义 Rosenbloom-Tsfasman 空间和皇冠空间的线性等距群已得到确定（参见 [3],[10],[11]）。在 [17], Panek 等人完整描述了偏序集度量空间的线性等距变换群。沿用他们的方法，Panek 和 Pinheiro 研究了加权坐标偏序度量（[19]），它涵盖了任意可加度量空间，例如汉明度量和李度量，也涵盖偏序度量和 pomset 度量。他们用半直积的形式完整描述了这些度量空间的线性等距变换群；结果表明，这与偏序集度量空间的情形相似。

自然会提出这样的问题：是否存在一种与可加度量和分块度量相容的度量？在本文中，我们将加权偏序度量与错误块度量相结合，得到一种称为加权偏序块度量的进一步推广。它不仅包含上述所有可加度量，还包含一些分块度量，例如偏序块度量、偏序多重集分块度量等。

本文结构安排如下。第 2 节介绍偏序集的基本概念，并在 $\mathbb{F}_q^n$上定义加权偏序块度量。在第 3 节中，我们完整描述度量空间 $\left(V,d_{w,\ (P,\pi)}\right)$关于任意加权偏序块度量$d_{w,\ (P,\pi)}$的线性等距群。在第 4 节中，我们通过一些例子阐释结论。最后，我们为具有加权偏序块度量的码建立 Singleton 型界，并将达到此界的码定义为最大距离可分（P,π,w）码（MDS（P,π,w）码）。此外，我们还研究了在 P 被视为链时，MDS（P,π,w）码与完美码之间的联系。

图1:



2 预备知识

本节给出后续各节将用到的加权偏序块度量的基本定义和结果。

2.1 关于加权偏序块度量

权重和度量的定义可以在一般环上给出。特别地，我们将其限定在有限域上，因为在编码理论背景下，对有限域的研究最为深入。

设 $\mathbb{F}_q$ 为阶为 q 的有限域， $\mathbb{F}_q^n$ 为 n 维向量空间，其上的标量域为 $\mathbb{F}_q$。

定义　命题 1. 映射 $d:\ \mathbb{F}_q^n \times \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的度量，当且仅当它满足以下条件　　*s:*

(1)（非负性） $d(u,v) \geq 0$ 对所有 $u, v \in \mathbb{F}_q^n$ 均成立，且 $d(u,v) = 0$ 当且仅当 $u = v$;
(2)（对称性）对所有 $u, v \in \mathbb{F}_q^n$， $d(u,v) = d(v,u)$; (3)（三角不等式）对所有 u, v, $w \in \mathbb{F}_q^n$， $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$。

定义 2. 映射 $w: \mathbb{F}_q^n \to \mathbb{N}$ 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的权重，若其满足以下条件:

(1) $w(u) \geq 0$ 对所有 $u \in \mathbb{F}_q^n$ 成立，且 $w(u) = 0$ 当且仅当 $u = 0$;

(2) $w(u) = w(-u)$ 对所有 $u \in \mathbb{F}_q^n$ 成立; (3) $w(u+v) \leq w(u) + w(v)$ 对所有 $u, v \in \mathbb{F}_q^n$ 成立。

不难证明，若 w 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的权重，则由 $d(u,v) = w(u-v)$ 定义的映射 d_w 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上的度量。关于权重和度量的详细讨论，请参见 [4] 和 [7]。

设 P 是一个集合。P 上的偏序是定义在 P 上的二元关系 $\leq$，满足对于所有 $x, y, z \in P$，都有 $x \leq x$（自反性）; $x \leq y$ 和 $y \leq x$ 蕴含 $x = y$（反对称性）; $x \leq y$ 和 $y \leq z$ 蕴含 $x \leq z$（传递性）。配备了序关系 $\leq$ 的集合 P 称为偏序集。若 $a \leq b$ 且 $b \in P$ 蕴含 $a = b$，则元素 $a \in P$ 是 P 的极大元。我们用 $\max P$ 表示 P 的所有极大元构成的集合。若偏序集 P 中的任意两个元素都可比较，则称其为链。链的对立概念是反链，也就是说，若在 P 中，只有当 $x = y$ 时才有 $x \leq y$，则偏序集 P 是反链。若子集 Q 属于 P，且每当 $x \in Q, y \in P$ 和 $y \leq x$ 成立时都有 $y \in Q$，则称其为理想。对于 P 的子集 E，由 E 生成的理想记作 $\langle E \rangle$，它是包含 E 的 P 的最小理想。我们将由 $\{i\}$ 生成的理想记作 $\langle i \rangle$，而不记作 $\langle \{i\} \rangle$。我们用 $\langle i \rangle^*$ 表示差集 $\langle i \rangle - \{i\} = \{j \in P: j < i\}$。

给定两个偏序集 P 和 Q，若存在双射 φ，将 P 映到 Q，且对于 P 中的 $x \leq y$，当且仅当 Q 中的 $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ 时成立，则称 P 和 Q 同构，记作 $P \cong Q$。此时，称 φ 为序同构。序同构 $\varphi: P \to P$ 称为自同构，我们用 $Aut(P)$ 表示 P 的自同构群。

设 $[s] = \{1, 2, \ldots, s\}$。设 $P = ([s], \leq)$ 为一个偏序集，且 $\pi: [s] \to \mathbb{N}^+$ 是一个映射，满足 $n = \sum \pi(i)$。称映射 π 为偏序集 P 的标记，并称有序对 (P, π) 为 $[s]$ 上的偏序集块 $_{i=1}$ 结构。将 $\pi(i)$ 记为 k_i。对于所有 $1 \leq i \leq s$，我们将 V_i 视为 $\mathbb{F}_q$-向量空间 $\mathbb{F}_q^{k_i}$。我们将 V 定义为直和

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s \tag{1}$$

它与 $\mathbb{F}_q^n$ 同构。每个 $u \in V$ 都可以唯一分解为

$$u = u_1 + u_2 + \cdots + u_s \tag{2}$$

其中 $u_i = (u_{i_1}, \ldots, u_{ik_i})$ 对于 $1 \leq i \leq s$，满足 $\in V_i$。

设 w 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个权重，$P = ([s], \leq)$ 是一个偏序集。给定 $u \in V$，令

$$W_i(u) = \max\{w(u_{ij}) : 1 \leq j \leq k_i\} \text{ for } 1 \leq i \leq s; \tag{3}$$

$$M_w = \max\{w(\alpha) : \alpha \in \mathbb{F}_q\}; \tag{4}$$

$$m_w = \min\{w(\alpha) : 0 \neq \alpha \in \mathbb{F}_q\}. \tag{5}$$

$u \in V$ 的块支撑或 π-支撑是集合

$$supp_\pi(u) = \{i \in [s] : u_i \neq 0\}.$$

我们将由 $supp_\pi(u)$ 生成的理想记为 I_u^P，并将理想 I_u^P 中的极大元集合记为 M_u^P。 u 的 (P,π,w)-权重定义为

$$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u) = \sum_{i \in M_u^P} W_i(u) + \sum_{i \in I_u^P \setminus M_u^P} M_w. \tag{6}$$

对于 u 和 $v \in V$，定义它们之间的 (P,π,w)-距离为

$$d_{w,(P,\pi)}(u,v) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u-v). \tag{7}$$

定理 1。上述定义的 (P,π,w)-权重是 V 上的权重，因此 (P,π,w)-距离$d_{w,\ (P,\pi)}(.,.)$ 是 V 上的度量。

证明。(1) 显然，对于所有 $u \in V$，$\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(u) \geq 0$ 且 $\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(u) = 0$ 当且仅当 $u = 0$。

(2) 由于对于所有 $a \in \mathbb{F}_q$， $w(a) = w(-a)$，且对于所有 $u \in V$， $supp_\pi(u) = supp_\pi(-u)$，因此可得 $\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(u) = \overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(-u)$。

（3）最后，我们证明（P,π）-权重满足三角不等式。取 $u,v \in V$，我们有

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u+v) &= \sum_{i \in M_{u+v}^P} W_i(u+v) + \sum_{i \in I_{u+v}^P \setminus M_{u+v}^P} M_w \\
&\leq \sum_{i \in M_{u+v}^P} [W_i(u) + W_i(v)] + \sum_{i \in I_{u+v}^P \setminus M_{u+v}^P} M_w \\
&\leq \sum_{i \in M_u^P} W_i(u) + \sum_{i \in I_u^p \setminus M_u^P} M_w + \sum_{i \in M_v^P} W_i(v) + \sum_{i \in I_v^p \setminus M_v^P} M_w \\
&= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u) + \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v).
\end{aligned}$$

第二和第三个不等式分别由以下事实推出： w 是定义在 $\mathbb{F}_q$ 上的权重，且 $supp_\pi(u+v) \subseteq supp_\pi(u) \cup supp_\pi(v)$， $I_{u+v}^P \setminus M_{u+v}^P \subseteq I_u^P \setminus M_u^P \cup I_v^P \setminus M_v^P$（见 [19]）。因此， $\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}$是定义在 V上的权重。

□

度量$d_{w,(P,\pi)}(.,.)$称为加权偏序块度量，而数对 $\left(V,d_{w,(P,\pi)}\right)$ 称为加权偏序块空间。当标记 π 对所有 $i \in [s]$ 都满足 $\pi(i) = 1$ 时，该加权偏序块度量就是 Panek 等人在 [19] 中提出的加权坐标偏序度量。它结合并扩展了编码理论中的若干经典度量，例如汉明度量、李度量、偏序度量（[2]）、pomset 度量（[20]）等。关于一种称为加权偏序度量的一般度量，读者也可参见 [9, 12, 23, 24] 。设 P 为一个偏序集，$\theta: P \to \mathbb{R}^+$ 为一个映射。对于任意 $\beta \in V$， β 的加权偏序权重定义为

$$wt_{(P,w)}(\beta) = \sum_{i \in \langle supp(\beta) \rangle_P} \theta(i).$$

请注意，加权偏序度量是一种满足支撑条件的度量。当权重 w over$\mathbb{F}_q$ 使得 $w(\alpha) = t$ 对所有 $\alpha \in \mathbb{F}_q$ 均成立，且 $\theta(i) = t$ 对所有 $1 \leq i \leq s$均成立时，加权偏序块度量就与 V上的加权偏序度量一致。

2.2 加权偏序块度量的特殊情形

本节将介绍一些可由加权偏序块度量推导出的重要度量。

1. 偏序块度量

偏序块权重定义为

$$w_{(P,\pi)}(v) = |\langle supp_\pi(v) \rangle|$$

对所有 $v \in V$均成立。对于 $u, v \in V$,

$$d_{(P,\pi)}(u,v) = w_{(P,\pi)}(u - v)$$

在 V 上定义了一个称为偏序块度量的度量，并称 $\left(V、d_{(P,\pi)}\right)$ 这一对为偏序块空间。显然，当 w 取为 $\mathbb{F}_q$ 上的汉明重量时，偏序块权重是加权偏序块权重的一种特殊情形。

2. 偏序多重集分块度量

尽管我们在第 2.1 节中定义了 $V = \bigoplus_{i=1}^{s} \mathbb{F}_q^{k_i}$上的加权偏序块度量，但若考虑 $\mathbb{Z}_m$ 上的自由模而非 $\mathbb{F}_q$，该定义仍然有效。

现在我们回顾定义偏序多重集分块度量所需的一些关于多重集的定义和性质，并说明它是加权偏序块度量的一种特殊情形。

设 X 为一个元素集合。从 X 中取出的多重集（简称 mset）表示为 $M = \{m_1/a_1, m_2/a_2, \ldots, m_n/a_n\}$，其中 $a_i \in X$，而 m_i表示 a_i在 M中出现的次数，记作

$C_M(a_i)$。 M的基数为 $|M| = \sum C_M(a)$。集合 $M^* = \{a \in X: C_M(a) > 0\}$是$_{a\in X}$ M的根集。 M的子多重集（简称子集）是一个从 X中取出的多重集 M_1，满足对所有 $a \in X$， $C_{M_1}(a) \le C_M(a)$。

设 M_1 和 M_2 是取自集合 X的两个多重集。 M_1 和 M_2 的并集是一个多重集 M，满足对所有 $a \in X$， C_M（a）$=\max\{C_{M_1}$（a） C_{M_2}（a）$\}$。 M_1和 M_2的笛卡尔积记作$M_1 \times M_2$，是一个多重集 $M = \{mm'/ab:\ m/a \in M_1,\ m'/b \in M_2\}$。若子集 R属于 M_1和 M_2，且 R中的每个元素（m/a， m'/b）的计数满足 C_{M_1}（a）$\cdot C_{M_2}$（b），则称其为多重集关系。

取自 X 的多重集 M 上的多重集关系称为自反的，当且仅当对所有$m/a \in M$，有（m/a， m/a）$\in R$；称为反对称的，当且仅当（m/a， m'/b）$\in R$且（m'/b， m/a）$\in R$蕴含 $m = m'$和 $a = b$；称为传递的，当且仅当（m/a， r/b）$\in R$、（r/b， t/c）$\in R$蕴含（m/a， t/c）$\in R$。关系 R称为偏序多重集关系，如果它具有自反性、反对称性和传递性。对 $\mathbb{P} =$（M， R）称为偏序多重集。$\mathbb{P}$ 的序理想是 M 的子集 I，满足：若 $m/a \in I$ 且（m'/b， m/a）$\in R$，其中 $a \neq b$，则 $m'/b \in I$。由 $m/a \in M$ 生成的序理想定义为

$$\langle m/a\rangle = \{m/a\} \cup \{m'/b \in M : (m'/b, m/a) \in R \text{ for some } k > 0 \text{ and } b \neq a\}.$$

由子集 S 生成的序理想定义为 $\langle S\rangle = \bigcup_{m/a\in S} \langle m/a\rangle$。

考虑空间 $\mathbb{Z}_m^n$ 以及从集合 $X = \{1, 2, \ldots, s\}$ 中取出的多重集 $M = \left\{\left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor /1, \left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor /2, \ldots, \left\lfloor \frac{m}{2}\right\rfloor /s\right\}$。元素 $a \in \mathbb{Z}_m$ 的李重量定义为 $w_L(a) =\min\{a, m - a\}$，而 $u \in \mathbb{Z}_m^n$ 的 Lee块支撑定义为

$$supp_{(L,\pi)}(u) = \left\{s_i/i : s_i = w_{(L,\pi)}(u_i), s_i \neq 0\right\},$$

其中

$$w_{(L,\pi)}(u_i) = \max\left\{w_L(u_{i_t}) : 1 \le t \le \pi(i)\right\}.$$

$u \in \mathbb{Z}_m^n$ 的（$\mathbb{P}$， π）-权重为

$$w_{(\mathbb{P},\pi)}(u) = \left|\langle supp_{(L,\pi)}(u)\rangle\right|.$$

对于 u， $v \in \mathbb{Z}_m^n$，

$$d_{(\mathbb{P},\pi)}(u, v) = w_{(\mathbb{P},\pi)}(u - v)$$

在 $\mathbb{Z}_m^n$ 上定义一种度量，称为偏序多重集分块度量。称有序对 $\left(\mathbb{Z}_m^n、 d_{(\mathbb{P},\pi)}\right)$ 为偏序集块空间。

命题 2.1. 设 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是一个具有 $M=\left\{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/1,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/2,\ldots,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/s\right\}$ 的偏序多重集。设 P 是s集 $[s]$，且 $\pi:\ [s]\to\mathbb{N}^+$ 是一个标记，满足 $\sum_{i=1}\pi(i)=n$。在 P 上定义偏序如下：

$$a\le b\ in\ P\Leftrightarrow(r/a,t/b)\in R.$$

那么，在 $\mathbb{Z}_m^n$ 上，(P,π,w)-权重与 $(\mathbb{P},\pi)$-权重将重合。

证明。取 $u\in\mathbb{Z}_m^n$。则 u 可写为 $u=u_1+u_2+\cdots+u_s$，其中 $u_i\in\mathbb{Z}_m^{\pi(i)}$。注意到

$$w_{(L,\pi)}(u_i)=\max\left\{w_L(u_{i_t}):1\le t\le\pi(i)\right\}=W_i(u).$$

因此

$$\begin{aligned}w_{(\mathbb{P},\pi)}(u)&=|\langle supp_{(L,\pi)}(u)\rangle|\\&=\sum_{i\in M_u^{\mathcal{P}}}w_{(L,\pi)}(u_i)+\sum_{i\in I_u^{\mathcal{P}}\setminus M_u^{\mathcal{P}}}\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\\&=\sum_{i\in M_u^{\mathcal{P}}}W_i(u)+\sum_{i\in I_u^{\mathcal{P}}\setminus M_u^{\mathcal{P}}}\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\\&=\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u).\end{aligned}$$

□

- 当权重 w 是 $\mathbb{F}_q$ 上的汉明重量时，(P,π,w)-权重就是 Alves等人在 [1] 中提出的偏序块权重。特别地，当 P 取为一条链时，偏序块度量可推出 NRT 块度量；当对于所有 $i\in[s]$，$\pi(i)=1$ 时，可推出偏序度量。类似地，当 P 是一条反链时，经典汉明度量成为偏序度量的一个特例。

- 当权重 w 是 $\mathbb{Z}_m$ 上的李重量时，(P,π,w)-权重就是偏序多重集分块重量。特别地，当对于所有 $i\in[s]$，$\pi(i)=1$ 时，偏序多重集分块度量可推出 pomset 度量。特别是，当 $\mathbb{P}=(M,R)$ 且 $R=\left\{\left(\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/a,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/a\right):\ 1\le a\le s\right\}$ 时，pomset 度量可推出李度量。

图1展示了这些事实。

3 加权偏序集分块空间的线性等距变换

在本节中，我们始终假设 w 是 $\mathbb{F}_q$ 上的权重，$P=([s],\preceq)$ 是一个偏序集，$\pi:\ [s]\to\mathbb{N}$ 是偏序集 P 的一个 s 标记，且 $V=\bigoplus_{i=1}\mathbb{F}_q^{k_i}$ 与 $\mathbb{F}_q^n$ 同构。

定义 3. 设 $\left(V, d_{w,(P,\pi)}\right)$ 是一个加权偏序块空间。 $\left(V, d_{w,(P,\pi)}\right)$ 的一个线性等距变换 T 是一个线性变换 $T: V \to V$，满足

$$d_{w,(P,\pi)}\left(T(u), T(v)\right) = d_{w,(P,\pi)}(u, v)$$

对所有的 $u, v \in V$。我们也将线性等距变换称为 (P, π, w)-等距变换。

注 3.1. 线性变换 $T: V \to V$ 是向量空间 V $\left(V, d_{w,(P,\pi)}\right)$ 的线性等距变换，当且仅当$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(u)) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u)$ 对所有 $u \in V$ 均成立。

注 3.2. 我们声称，向量空间 V $\left(V, d_{w,(P,\pi)}\right)$ 的 (P, π, w)-等距变换是双射，且其逆映射也是 (P, π, w)-等距变换。事实上，若 T 是一个 (P, π, w)-等距变换，且对于 $u, v \in V$，有 $T(u) = T(v)$，其中 $u \neq v$，那么

$$d_{w,(P,\pi)}(u, v) = d_{w,(P,\pi)}(T(u), T(v)) = 0,$$

矛盾。因此 T 是单射。由于 V 是有限集，我们可知 T 是双射。令 T^{-1} 为 T 的逆映射。对于所有的 $u, v \in V$，我们有

$$d_{w,(P,\pi)}\left(T^{-1}(u), T^{-1}(v)\right) = d_{w,(P,\pi)}\left(TT^{-1}(u), TT^{-1}(v)\right) = d_{w,(P,\pi)}(u, v).$$

由上述讨论可知，加权偏序块空间 $\left(V, d_{w,(P,\pi)}\right)$ 的所有 (P, π)-等距变换构成一个群。我们将其记为 $GL_{w,(P,\pi)}(V)$，并称其为 $\left(V, d_{w,(P,\pi)}\right)$ 的线性等距变换群。

我们将 $B = \{e_{11}, \ldots, e_{1k_1}, e_{21}, \ldots, e_{2k_2}, \ldots, e_{s1}, \ldots, e_{sk_s}\}$ 记为 V 的典范基，其中 V 是一个维数为 n 的 $\mathbb{F}_q$-线性空间。注意，集合 $B_i = \{e_{i_1}, \ldots, e_{ik_i}\}$ 构成了 V_i 的典范基。

给定 $Q \subseteq P$，定义:

$$V_Q = \{v \in V : supp_\pi(v) \subseteq Q\}.$$

定义 4. 设 $\pi: [s] \to \mathbb{N}$ 是一个标记，且 $P = ([s], \preceq)$ 是一个偏序集。若对所有 $i \in [s]$，自同构 $\varphi \in Aut(P)$ 满足以下条件，则称其为 (P, π)-自同构:

$$k_{\varphi(i)} = \pi(\varphi(i)) = \pi(i) = k_i.$$

我们用 $Aut(P, \pi)$ 表示 (P, π)-自同构群。

定理 2. 设 φ 是向量空间 P 上的一个 (P, π)-自同构。那么，由下式给出的线性映射 $T_\varphi: V \to V$

$$T_\varphi(e_{ij}) = e_{\varphi(i)j}$$

是 $\left(V,d_{w,\ (P,\pi)}\right)$的一个 (P,π,w)-等距映射。此外，该映射

$$\Psi : Aut(P,\pi) \to GL_{w,(P,\pi)}(V)$$

由 $\varphi \to T_\varphi$ 定义的是一个单射群同态。

$s \quad k_i$证明。取 $v = \sum \sum a_{ij}e_{ij} \in V$。
于是$i=1\ j=1$

$$T_\varphi(v) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}T_\varphi(e_{ij}) = \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{k_i} a_{ij}e_{\varphi(i)j},$$

这意味着

$$supp_\pi(T_\varphi(v)) = \{\varphi(i) \in P : a_{ij} \neq 0 \text{ for some } 1 \le j \le k_i\} = \{\varphi(i) \in P : i \in supp_\pi(v)\}.$$

因此 $I^P_{T_\varphi\ (v)} = \varphi(I^P_v)$。由 φ是一个序自同构这一事实可知，$M^P_{T_\varphi\ (v)} = \varphi(M^P_v)$。于是

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T_\varphi(v)) &= \sum_{i\in M^P_{T_\varphi(v)}} W_i(T_\varphi(v)) + \sum_{i\in I^p_{T_\varphi(v)}\setminus M^P_{T_\varphi(v)}} M_w \\
&= \sum_{i=\varphi(r),r\in M^P_v} W_i(T_\varphi(v)) + \sum_{i\in I^p_{T_\varphi(v)}\setminus M^P_{T_\varphi(v)}} M_w \\
&= \sum_{i=\varphi(r),r\in M^P_v} \max\{w(a_{rj}) : 1 \le j \le k_r\} + \sum_{i\in T^P_v\setminus M^p_v} M_w \\
&= \sum_{r\in M^P_v} W_r(v) + \sum_{i\in T^P_v\setminus M^p_v} M_w \\
&= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v).
\end{aligned}$$

因此，T_φ 是一个（P,π,w）-等距映射。接下来我们证明 Ψ 是一个群同态。设 φ、ψ 是 P上的两个（P,π）-自同构。则有

$$T_{\varphi\psi}(e_{ij}) = e_{\varphi\psi(i)j} = T_\varphi(e_{\psi(i)j}) = T_\varphi T_\psi(e_{ij})$$

由其定义可容易得到映射 Ψ 是单射。 □

命题 3.1. 设 $T:\ V \to V$ 是一个线性同构，使得对于每个 $i \in [s]$ 和 $v_i \in V_i$ ，

$$T(v_i) = u_i + \gamma_i$$

其中 $u_i \in V_i$, $\gamma_i \in V_{\langle i\rangle^*}$和 $W_i(v_i) = W_i(u_i)$。那么 T是 $\left(V,d_{w,\ (P,\pi)}\right)$的 (P,π,w)-等距映射 .

证明。设 $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_s \in V$，其中 $v_i \in V_i$。那么

$$T(v) = (u_1 + \gamma_1) + \cdots + (u_s + \gamma_s)$$

其中 $\gamma_i \in V_{\langle i \rangle^*}$ 和 $u_i \in V_i$ 满足 $W_i(u_i) = W_i(v_i)$。注意，每当 $v_i \neq \mathbf{0}$时，我们都有 $u_i \neq \mathbf{0}$。将 γ_i 分解为

$$\gamma_i = \gamma_i^1 + \cdots + \gamma_i^s$$

其中 $\gamma_i^l \in V_l$。由于 $\gamma_i \in V_{\langle i \rangle^*}$， $\gamma_i^l \neq \mathbf{0}$意味着 $l < i$属于 P。于是

$$T(v) = \sum_{i=1}^{s} (u_i + (\gamma_1^i + \cdots + \gamma_s^i)).$$

假设对于某个 $k \in [s]$，有 $i \in M_v^P \subseteq supp_\pi(v)$ 且 $\gamma_k^i \neq \mathbf{0}$。则 $k \in supp_\pi(v)$，因此 $i < k$属于 P，这与 i 是 $supp_\pi(v)$ 的极大元这一事实矛盾。因此，对所有 $k \in [s]$，都有 $\gamma_k^i = \mathbf{0}$，而 $T(v)$ 的第 i 个分量为

$$u_i + (\gamma_1^i + \cdots + \gamma_s^i) = u_i.$$

若 $i \notin supp_\pi(T(v))$，则 $u_i = \mathbf{0}$。但 $W_i(u_i) = W_i(v_i) = 0$ 意味着 $v_i = \mathbf{0}$，矛盾。因此$i \in M_{T\ (v)}^P \subseteq supp_\pi(T(v))$。

另一方面，$M_{T\ (v)}^P \subseteq M_v^P$。事实上，如果 $j \in M_{T\ (v)}^P$，那么 $T(v)$ 的 j 个分量为

$$u_j + (\gamma_1^j + \cdots + \gamma_s^j).$$

如果 $\gamma_l^j \neq \mathbf{0}$，那么 $l \in supp_\pi(v)$，并且对于某个 $i \in M_v^P \subseteq supp_\pi(T(v))$ 有 $j < l \leq i$，矛盾。因此，对于所有 $1 \leq l \leq s$ 和 $u_j \neq \mathbf{0}$，均有 $\gamma_l^j = \mathbf{0}$。注意到，$W_j(v_j) = W_j(u_j) \neq 0$ 意味着 $v_j \neq \mathbf{0}$。因此，$j \in supp_\pi(v)$。如果 $j \notin M_v^P$，那么对于某个 $i \in M_v^P \subseteq supp_\pi(T(v))$ 有 $j < i$，矛盾。因此，$M_{T\ (v)}^P = M_v^P$，从而 $I_{T(v)}^P = I_v^P$。

由于 $T(v)$ 的 i 个分量是 u_i，且对于所有$i \in M_{T\ (v)}^P$，都有 $W_i(v_i) = W_i(u_i)$，因此有

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(v)) &= \sum_{i \in M_{T(v)}^P} W_i(T(v)) + \sum_{i \in I_{T(v)}^P \setminus M_{T(v)}^P} M_w \\
&= \sum_{i \in M_{T(v)}^P} W_i(u_i) + \sum_{i \in I_{T(v)}^P \setminus M_{T(v)}^P} M_w \\
&= \sum_{i \in M_v^P} W_i(v_i) + \sum_{i \in I_v^P \setminus M_v^P} M_w \\
&= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v).
\end{aligned}$$

我们的证明至此完成。 □

设 $B_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{ik_i}\}$ 是 V_i 的典范基。则 $\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(e_{i1}) = \cdots = \overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(e_{ik_i}) = w(1) + M_w \cdot |\langle i \rangle^*|$。我们令 $\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(B_i) = w(1) + M_w \cdot |\langle i \rangle^*|$。设 $B = (B_{i_1}, B_{i_2}, \ldots\ldots, B_{i_s})$ 是 V 的基的全序，使得对于所有 $i_r, i_l \in [s]$，只要 $\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(B_{i_r}) \leq \overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(B_{i_l})$，$B_{i_r}$ 就排在 B_{i_l} 之前。不妨设 $B = \{B_1, B_2, \ldots, B_s\}$ 是 V 的一个全序基。于是 $|\langle r \rangle| < |\langle l \rangle|$ 可知，B_r 的所有元素都排在 B_l 之前。

令 $\mathcal{T}$ 为命题 3.1 中定义的映射集合。

推论 3.1. 令 $B = (B_1, B_2, \ldots, B_s)$ 为如上定义的 V 的一组典范基。给定 $T \in \mathcal{T}$，我们有

$$T(e_{ij}) = \sum_{r \leq i} \sum_{t=1}^{k_r} a_{ij}^{rt} e_{st}.$$

此外，关于 B，T 可以表示为一个 $n \times n$ 上三角分块矩阵，如下所示

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T]_{B_1}^1 & [T]_{B_2}^1 & [T]_{B_3}^1 & \cdots & [T]_{B_s}^1 \\ O & [T]_{B_2}^2 & [T]_{B_3}^2 & \cdots & [T]_{B_s}^2 \\ O & O & [T]_{B_3}^3 & \cdots & [T]_{B_s}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & [T]_{B_s}^s \end{bmatrix}$$

其中

$$[T]_{B_r}^t = \begin{bmatrix} a_{r1}^{t1} & a_{r2}^{t1} & \cdots & a_{rk_r}^{t1} \\ a_{r1}^{t2} & a_{r2}^{t2} & \cdots & a_{rk_r}^{t2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1}^{tk_t} & a_{r2}^{tk_t} & \ldots & a_{rk_r}^{tk_t} \end{bmatrix}$$

且元素 $v_{rl} = (a_{rl}^{r_1}, a_{rl}^{r_2}, \ldots, a_{rl}^{rk_r}) \in V_r$ 满足：对所有 $1 \leq l \leq k_r$，$W_r(\beta_1 v_{r1} + \cdots + \beta_{k_r} v_{rk_r}) = W_r(\beta)$，其中 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{k_r}) \in V_r$。

对于每个 $i \in P$，集合 $\langle i \rangle$ 是一个理想，称为由 i 生成的主理想。

定理 3. 设 T 是向量空间 V $\big(V$ 上的一个 (P, π, w)-等距映射，$d_{w,\ (P,\pi)}\big)$。那么对于任意 $i \in [s]$ 和 $\boldsymbol{0} \neq v_i \in V_i$，都有 $\langle supp_\pi(T(v_i)) \rangle$ 是一个主理想。

证明。我们分三个步骤给出证明。

- 步骤 1

  我们首先证明 $\langle supp_\pi(T(e_{ij})) \rangle$ 是一个主理想。设 $\alpha \in \mathbb{F}_q$ 使得 $w(\alpha) = m_w$。假设

$$T(\alpha e_{ij}) = v_{r1} + \cdots + v_{rt}$$

其中 $\mathbf{0} \neq v_{rl} \in V_{rl}$ 对所有 $l \in [t]$ 都成立。那么 $supp_\pi(T(\alpha e_{ij})) = \{r1, \ldots, rt\}$。现在我们证明存在 $k \in [t]$，使得 $\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(v_{rk}) = \overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(T(\alpha e_{ij}))$。反设对所有$l \in [t]$，都有

$$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v_{rl}) < \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}\left(T(\alpha e_{ij})\right) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\alpha e_{ij}).$$

由 T^{-1} 是 $\left(V\right.$的（P、 π、 w）-等距映射 $\left.d_{w,\ (P,\pi)}\right)$ 可知

$$i = supp_\pi(\alpha e_{ij}) \subseteq \bigcup_{l=1}^{t} supp_\pi\left(T^{-1}(v_{rl})\right),$$

这意味着，对于某个 $k \in [t]$，有 $i \in supp_\pi\left(T^{-1}\left(v_{rk}\right)\right)$。假设对于某个 $\beta \in \mathbb{F}_q$， $W_i\left(T^{-1}\left(v_{rk}\right)\right) = w\left(\beta\right)$，则

$$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\beta e_{ij}) \leq \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}\left(T^{-1}(v_{rk})\right) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v_{rk}) < \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\alpha e_{ij}).$$

由此可得 $w\left(\beta\right) + M_w \cdot |\langle i\rangle^*| < m_w + M_w \cdot |\langle i\rangle^*|$，矛盾。因此，存在$l \in [t]$使得$\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}\left(v_{rl}\right) = \overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}\left(T\left(\alpha e_{ij}\right)\right)$ 且$I^P_{T\ (\alpha e_{ij})} = \langle rl\rangle$是一个主理想。由于$supp_\pi\left(T\left(\alpha e_{ij}\right)\right) = supp_\pi\left(\alpha T\left(e_{ij}\right)\right) = supp_\pi\left(T\left(e_{ij}\right)\right)$，结论得证。

- 步骤 2

接下来我们证明 $I^P_{T(e_{i1})} = I^P_{T(e_{i2})} = \cdots = I^P_{T(e_{ik_i})}$。只需证明 $I^P_{T(e_{i1})} = I^P_{T(e_{i2})}$。假设 $I^P_{T(e_{i1})} = \langle k\rangle$ 且 $I^P_{T(e_{i2})} = \langle l\rangle$。那么

$$\begin{cases} T(e_{i1}) = u_k + \gamma_k & u_k \in V_k, \gamma_k \in V_{\langle k\rangle^*}, \\ T(e_{i2}) = u_l + \gamma_l & u_l \in V_l, \gamma_l \in V_{\langle l\rangle^*}. \end{cases}$$

由于 T保持 (P, π, w)-权重不变，我们有

$$w(1) + M_w \cdot |\langle i\rangle^*| = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(e_{i1}) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(e_{i1})) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_k + \gamma_k) = W_k(u_k) + M_w \cdot |\langle k\rangle^*|.$$

由此可知，$(W_k(u_k) - w(1))$ 可被 M_w 整除。由于 $0 < w(1)\ W_k(u_k) \leq M_w$，我们有 $w(1) = W_k(u_k)$ 和 $|\langle i\rangle| = |\langle k\rangle|$。类似地，可以证明 $W_l(u_l) = w(1)$ 和 $|\langle i\rangle| = |\langle l\rangle|$。根据 T 的 (P, π, w)-权保持性和线性，

$$\begin{aligned} w(1) + M_w \cdot |\langle i\rangle^*| &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(e_{i1} + e_{i2}) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(e_{i1}) + T(e_{i2})) \\ &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_k + \gamma_k + u_l + \gamma_l) \\ &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_k + u_l). \end{aligned}$$

若 $k \not\leq l,$ ，则

$$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_k + u_l) \geq W_l(u_l) + M_w \cdot |\langle l \rangle^*| + W_k(u_k) = 2w(1) + M_w \cdot |\langle i \rangle^*|,$$

矛盾。因此 $k \leq l$。由 $|\langle k \rangle| = |\langle l \rangle|$ 可得 $k = l$。

- 步骤 3

  设 $\mathbf{0} \neq v_i = a_{i1}e_{i1} + \cdots + a_{ik_i}e_{ik_i} \in V_i$。由步骤 2，我们知道 $I^P_{T(e_{i1})} = I^P_{T(e_{i2})} = \cdots = I^P_{T(e_{ik_i})} = \langle j \rangle$，其中存在某个 j，使得 $|\langle i \rangle| = |\langle j \rangle|$。假设

  $$T(e_{il}) = u_l + \gamma_l,\ 1 \leq l \leq k_i$$

  其中 $\gamma_l \in V_{\langle j \rangle^*}$ 且 $u_l \in V_j$，满足 $W_j(u_l) = w(1)$。于是

  $$\begin{aligned} T(v_i) &= a_{i1}T(e_{i1}) + \cdots + a_{ik_i}T(e_{ik_i}) \\ &= a_{i1}(u_1 + \gamma_1) + \cdots + a_{ik_i}(u_{k_i} + \gamma_{k_i}) \\ &= (a_{i1}u_1 + \cdots + a_{ik_i}u_{k_i}) + (a_{i1}\gamma_1 + \cdots + a_{ik_i}\gamma_{k_i}). \end{aligned}$$

  如果 $a_{i1}u_1 + \cdots + a_{ik_i}u_{k_i} = \mathbf{0} \in V_j$，那么 $\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(v_i)) \leq M_w \cdot |\langle j \rangle^*|$。另一方面 d,

  $$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(v_i)) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v_i) = W_i(v) + M_w \cdot |\langle i \rangle^*| > M_w \cdot |\langle i \rangle^*| = M_w \cdot |\langle j \rangle^*|,$$

  矛盾。因此 $a_{i1}u_1 + \cdots + a_{ik_i}u_{k_i} \neq \mathbf{0}$，从而 $I^P_{T(v_i)} = \langle j \rangle$。证明至此完成。

□

由定理 3 的证明可得以下推论。

推论 3.2。设 T 是 $\left(V, d_{w,\ (P,\pi)}\right)$ 的一个 (P, π, w)-等距映射。则对每个 $i \in [s]$，存在唯一的$j \in [s]$，使得 $T(V_i) \subseteq V_{\langle j \rangle}$ 且 $|\langle i \rangle| = |\langle j \rangle|$。此外，对于 $\boldsymbol{0} \neq v_i \in V_i$，存在一个非零向量$u_j \in V_j$和一个向量 $\gamma_j \in V_{\langle j \rangle^*}$，使得 $T(v_i) = u_j + \gamma_j$ 且 $W_i(v_i) = W_j(u_j)$。

定理 4。设 $T \in GL_{w,\ (P,\pi)}(V)$ 且 $i \leq j \in P$。设 $\boldsymbol{0} \neq v_i \in V_i$，并设 $\boldsymbol{0} \neq v_j \in V_j$。该 n

$$I^P_{T(v_i)} \subseteq I^P_{T(v_j)}.$$

证明。根据定理 3，$T^P_{T\,(v_i)}$和 $I^P_{T(v_j)}$是主理想。根据推论 3.2，只需证明 $I^P_{T(e_{i1})} \subseteq I^P_{T(e_{j1})}$。假设存在元素 k和 l属于 P，使得$I^P_{T(e_{i1})} = \langle k \rangle$ 以及 $I^P_{T(e_{j1})} = \langle l \rangle$。那么

$$T(e_{i1}) = u_k + \gamma_k \ \text{ and } \ T(e_{j1}) = u_l + \gamma_l$$

其中 $\gamma_t \in V_{\langle t\rangle^*}$ 和 $\mathbf{0} \neq u_t \in V_t$ 分别满足 $W_t(u_t) = w(1)$，对于 $t = l$、k。

注意到 $|\langle i\rangle| = |\langle k\rangle|$ 和 $|\langle j\rangle| = |\langle l\rangle|$。若 $k = l$，则无需证明。因此我们假设 $k \neq l$。这意味着

$$\text{either } \ k \in supp_\pi(T(e_{i1}) - T(e_{j1})) \ \text{ or } \ l \in supp_\pi(T(e_{i1}) - T(e_{j1})).$$

- 情况1： $k \notin supp_\pi(T(e_{i1}) - T(e_{j1}))$。由此可得 $k \in supp_\pi(T(e_{j1}))$，因此 $I^P_{T(e_{i1})} = \langle k\rangle \subseteq I^P_{T(e_{j1})}$。

- 情况2： $l \notin supp_\pi(T(e_{i1}) - T(e_{j1}))$。于是 $l \in supp_\pi(T(e_{i1}))$，这意味着 $l < k$。因此 $I^P_{T(e_{j1})} = \langle l\rangle \subsetneq \langle k\rangle = I^P_{T(e_{i1})}$。由此

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(e_{j1}) &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(e_{j1})) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_l + \gamma_l) \\
&= W_l(u_l) + M_w \cdot |\langle l\rangle^*| = w(1) + M_w \cdot |\langle l\rangle^*| \\
&< w(1) + M_w \cdot |\langle k\rangle^*| = W_k(u_k) + M_w \cdot |\langle k\rangle^*| \\
&= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_k) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(e_{i1})) \\
&= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(e_{i1}),
\end{aligned}$$

这意味着 $|\langle j\rangle| < |\langle i\rangle|$，这与假设 $i \leq j$ 矛盾。

- 情况3：$k, l \in supp_\pi(T(e_{i1}) - T(e_{j1}))$。对于 $1 \leq t \leq s$，存在 α_t, β_t 和 $\zeta_t \in \mathbb{F}_q$，使得

$$w(\alpha_t) = W_t(T(e_{i1})),\ w(\beta_t) = W_t(T(e_{j1})) \text{ and } w(\zeta_t) = W_t(T(e_{i1}) - T(e_{j1})).$$

如果 $T(e_{i1})$ 的第 l 个分量和 $T(e_{j1})$ 的第 k 个分量都非零，那么 $l \leq k$and $k \leq l$，这与假设 $k \neq l$ 矛盾。因此，要么 $(T(e_{i1}))_l = \mathbf{0}$，要么 $(T(e_{j1}))_k = \mathbf{0}$（这里 $(T(e_{i1}))_l$ 表示 $T(e_{i1})$ 的第 l 个分量，而 $(T(e_{j1}))_k$ 表示 $T(e_{j1})$ 的第 k 个分量）。根据 (P, π, w)-权保持以及 T 的线性，

$$\begin{aligned}
\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\zeta_k e_{k1} - \zeta_l e_{l1}) &\leq \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(e_{i1}) - T(e_{j1})) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(e_{i1} - e_{j1}) \\
&\leq \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(e_{j1}) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(e_{j1})) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_l) \\
&= w(1) + M_w \cdot |\langle l\rangle^*|.
\end{aligned}$$

– $(T(e_{i1}))_l = \mathbf{0}$。那么 $w(\zeta_l) = w(\beta_l) = W_l(T(e_{j1})) = W_l(u_l + \gamma_l) = W_l(u_l) = w(1)$，这意味着 $k \leq l$，从而 $I^P_{T(e_{i1})} = \langle k\rangle \subseteq \langle l\rangle = I^P_{T(e_{j1})}$。

– $(T(e_{j1}))_k = \mathbf{0}$. Then $w(\zeta_k) = w(\alpha_k) = w(1)$. If $k \not\leq l$, then

$$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\zeta_k e_{k1} - \zeta_l e_{l1}) \geq w(\zeta_k) + w(\zeta_l) + M_w \cdot |\langle l \rangle^*| = w(\zeta_l) + w(1) + M_w \cdot |\langle l \rangle^*| > w(1) + M_w \cdot |\langle l \rangle^*|,$$

a contradiction.

□

推论 3.3。给定 $T \in Gl_{w,\ (P,\pi)}\ (V)$ 和 $i \in [s]$，存在唯一的 $j \in [s]$ 使得 $|\langle i \rangle| = |\langle j \rangle|$ 且 $T\left(V_{\langle i \rangle}\right) \subseteq V_{\langle j \rangle}$。

证明。取 $v \in V_{\langle i \rangle}$，于是 $v = v_{i_1} + \cdots + v_{i_t}$，其中 $i_l \leq i$ 对每个 $l \in [t]$ 都成立。由推论 3.2 可知，存在 $j \in [s]$，使得 $T(V_i) \subseteq V_{\langle j \rangle}$ 且 $I^P_{T(v_i)} = \langle j \rangle$ 对 $\mathbf{0} \neq v_i \in V_i$ 成立。由定理 4，得

$$I^P_{T(v_{i_l})} \subseteq I^P_{T(e_{i1})} = \langle j \rangle.$$

因此

$$I^P_{T(v)} \subseteq \bigcup_{l=1}^{t} I^P_{T(v_{i_l})} \subseteq \langle j \rangle.$$

□

引理 3.1。给定 $T \in GL_{w,\ (P,\pi)}(V)$。令 $i \in P$ 和 j 为由 $T(V_{\langle i \rangle}) \subseteq V_{\langle j \rangle}$ 确定的 P 中唯一元素。则 $dim(V_i) = dim(V_j)$。

证明。考虑一列线性映射:

$$V_i \xrightarrow{T_i} V_{\langle j \rangle} \xrightarrow{f} V_{\langle j \rangle}/V_{\langle j \rangle^*} \xrightarrow{g} V_j$$

其中 T_i 是一个 T 在 V_i 上的限制映射，f 是典范投影，而 g 是由下式给出的同构

$$u + V_{\langle j \rangle^*} = u_j.$$

由于 $ker(g \circ f \circ T_i) = \{\mathbf{0}\}$，我们有 $g \circ f \circ T_i$ 是单射，因此 $dim(V_i) \leq dim(\quad V_j)$.

接下来我们证明 $dim(V_j) \leq dim(V_i)$。只需证明存在 $T' \in GL_{w,\ (P,\pi)}(V)$，使得 $T'(V_j) \subseteq V_{\langle i \rangle}$。令 $\mathbf{0} \neq v_i \in V_i$。则 $T(v_i) = v_j + \gamma_j$ 其中 $\mathbf{0} \neq v_j \in V_j$ 使得 $W_i(v_i) = W_j(v_j)$ 且 $\gamma_j \in V_{\langle j \rangle^*}$。由 T^{-1} 的线性性可得 $T^{-1}(v_j) = v_i - T^{-1}(\gamma_j)$。注意到 $i \notin T^{-1}(\gamma_j)$，否则

$$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\gamma_j) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}\left(T^{-1}(\gamma_j)\right) \geq m_w + M_w \cdot |\langle i \rangle^*| = m_w + M_w \cdot |\langle j \rangle^*| > M_w \cdot |\langle j \rangle^*|,$$

这与 $\gamma_j \in V_{\langle j\rangle^*}$ 矛盾。因此 $i \in supp_\pi\left(T^{-1}(v_j)\right)$。由于

$$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}\left(T^{-1}(v_j)\right) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v_j) = W_j(v_j) + M_w \cdot |\langle j\rangle^*| = W_i(v_i) + M_w \cdot |\langle i\rangle^*|,$$

这意味着 $\left\langle supp_\pi\left(T^{-1}(v_j)\right)\right\rangle = \langle i\rangle$。由推论 3.2，得 $T^{-1}(V_j) \subseteq V_{\langle i\rangle}$。证明完毕。

□

引理 3.2。设 T是 $\left(V, d_{w,(P,\pi)}\right)$的 (P,π,w)-等距映射。定义映射 η_T: $P \to P$如下:

$$\eta_T(i) = \max I^P_{T(v_i)},$$

其中 $\mathbf{0} \neq v_i \in V_i$。那么 η_T是 P 的 (P,π)-自同构。

证明。由推论 3.2， η_T 是良定义的。定理 4 保证 η_T 是保序映射。

尚需证明 η_T 是单射。假设 $\eta_T(i) = \eta_T(j) = l$。由引理 3.1 可知$k_i = k_l = k_j$。设 $\alpha \in \mathbb{F}_q$ 满足 $w(\alpha) = M_w$。由推论 3.2，得

$$\begin{cases} T(\alpha e_{i1}) = u_l + \gamma_l & u_l \in V_l, \gamma_l \in V_{\langle l\rangle^*}, \\ T(\alpha e_{j1}) = u_l^{'} + \gamma_l^{'} & u_l^{'} \in V_l, \gamma_l^{'} \in V_{\langle l\rangle^*}, \end{cases}$$

且 $|\langle i\rangle| = |\langle l\rangle| = |\langle j\rangle|$。此外， $W_l(u_l) = W_l(u_l^{'}) = w(\alpha) = M_w$。那么

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\alpha e_{i1} + \alpha e_{j1}) &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}\left(T(\alpha e_{i1}) + T(\alpha e_{j1})\right) \\ &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_l + u_l^{'}) = W_l(u_l + u_l^{'}) + M_w \cdot |\langle l\rangle^*| \\ &\leq M_w + M_w \cdot |\langle l\rangle^*| = W_l(u_l) + M_w \cdot |\langle l\rangle^*| \\ &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_l) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(\alpha e_{i1})) \\ &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\alpha e_{i1}) \end{aligned}$$

因此 $j \leq i$。类似地，可以证明 $i \leq j$，从而 $i = j$。因此 $\eta_T \in Aut(P,\pi)$。 □

回顾一下， $\mathcal{T}$是命题 3.1 中定义的映射集合。接下来，我们将证明 $\mathcal{T}$是$GL_{w,\ (P,\pi)}(V)$的正规子群。

引理 3.3。考虑映射 $\Lambda : GL_{w,\ (P,\pi)}(V) \to Aut(P,\pi)$，其定义如下

$$\Lambda(T) = \eta_T.$$

那么 Λ 是一个满群同态，且 $ker(\Lambda) = \mathcal{T}$。

证明。设 $T, T^{'} \in GL_{w,(P,\pi)}(V)$、 $i \in [s]$ 和 $\mathbf{0} \neq v_i \in V_i$。假设 $\eta_T(i) = j$ 且 $\eta_{T'}(j) = k$。取 $v_i \in V_i$ 使得 $W_i(v_i) = m_w$。那么 $T(v_i) = v_j + \gamma_j$，其中 $\gamma_j \in V_{\langle j \rangle^*}$ 和 $v_j \in V_j$ 满足 $W_j(v_j) = m_w$。同时，$T^{'}(v_j) = v_k + \gamma_k$，其中 $\gamma_k \in V_{\langle k \rangle^*}$ 和 $v_k \in V_k$ 满足 $W_k(v_k) = W_j(v_j) = m_w$。我们可以看到

$$T^{'}T(v_i) = T^{'}(v_j + \gamma_j) = v_k + \gamma_k + T^{'}(\gamma_j).$$

由于 T 和 $T^{'}$ 保持 (P, π)-权重，我们有

$$\begin{aligned} \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}\left(T^{'}(\gamma_j)\right) &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(\gamma_j) < \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v_j) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}\left(T^{'}(v_j)\right) \\ &= \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v_k + \gamma_k) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v_k) \\ &= m_w + M_w \cdot |\langle k \rangle^*|, \end{aligned}$$

这意味着 $T^{'}(\gamma_j) \in V_{\langle k \rangle^*}$。因此 $T^{'}T(v_i) = v_k + u_k$，其中 $u_k \in V_{\langle k \rangle^*}$。由此可得 $\eta_{T'}\eta_T(i) = k = \eta_{T'T}(i)$。

考虑定理 2 中定义的映射 $\Psi: Aut(P, \pi) \to GL_{w,\ (P,\pi)}(V)$，可知 $\Lambda \circ \Psi = Id_P$，这意味着 Λ 是满射。

尚需证明 $ker(\Lambda) = \mathcal{T}$。显然，$\mathcal{T} \subseteq ker(\Lambda)$。另一方面，若 $T \in ker(\Lambda)$，则对于每个 $i \in [s]$，都有 $T(V_i) \subseteq V_{\langle i \rangle}$。令 $\mathbf{0} \neq v_i \in V_i$。假设 $T(v_i) = u_i + \gamma_i$，其中 $u_i \in V_i$ 和 $\gamma_i \in V_{\langle i \rangle^*}$，则

$$\overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(v_i) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(T(v_i)) = \overline{\omega}_{w,(P,\pi)}(u_i + \gamma_i) > M_w \cdot |\langle i \rangle^*|$$

这意味着 $u_i \neq \mathbf{0}$。此外，我们有 $W_i(v_i) = W_i(u_i)$。 □

记作 $\mathcal{A} = \Psi(Aut(P, \pi))$。由定理 2 可得 $\mathcal{A} \cong Aut(P, \pi)$。

令 $M_{n\times n}(\mathbb{F}_q)$ 表示所有 $n \times n$ 矩阵构成的集合，其中矩阵取自 $\mathbb{F}_q$，并且

$$U_{w,(P,\pi)} = \left\{ (A_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_q) : \begin{array}{l} A_{ij} \in M_{k_i \times k_j}(\mathbb{F}_q); A_{ij} = O \text{ if } i \not\leq j; \\ W_r(v_{rl}) = w(1) \text{ where } v_{rl} \text{ is the } l\text{-th column in } A_{rr}, \text{ and} \\ W_r(\beta_1 v_{r1} + \cdots + \beta_{kr} v_{rk_r}) = W_r(\beta) \text{ where } \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{kr}) \in V_r \end{array} \right\}.$$

定理 5。使用上述记号，我们有

$$GL_{w,(P,\pi)}(V) \cong \mathcal{T} \rtimes \mathcal{A} \cong U_{w,(P,\pi)} \rtimes Aut(P, \pi).$$

证明。设 T 是 $\left(V \text{ 上的一个 } (P, \pi, w)\text{-等距映射，} d_{w,\ (P,\pi)}\right)$。设 $\eta = \eta_T$，则 $S \circ (T_\eta)^{-1} = S \circ T_{\eta^{-1}} \in \mathcal{T}$，并且

$$S = (S \circ (T_{\eta^{-1}}) \circ T_\eta.$$

还需证明 $\mathcal{T} \cap \mathcal{A} = \{Id\}$，其中 Id 是 $(V, d_{w,(P,\pi)})$ 上的恒等映射。假设 $T \in \mathcal{T} \cap \mathcal{A}$。由于 $T \in \mathcal{T} = ker(\Lambda)$，我们有 $\Lambda(T) = Id_P$。另一方面，对于某个 $\varphi \in Aut(P, \pi)$，有 $T = \Psi(\varphi)$，且 $\Lambda\Psi(\varphi) = \varphi = Id_P$。因此 $T = \Psi(Id_P) = Id$。 □

4 例子

这里我们将通过一些例子阐释我们的结论。

例 4.1. 当标记 π 满足对所有 $i \in [s]$均有 $\pi(i) = 1$ 时，加权偏序块度量会诱导出文献 *[19]*中引入的加权偏序度量 $d_{(P,w)}$。直接代入可得

$$U_{w,(P,\pi)} = \left\{ (a_{ij}) \in M_{s\times s}(\mathbb{F}_q) : \begin{array}{l} a_{ij} = 0 \ if \ i \not\leq j \ and \\ w(a_{ii}) = w(1) \ such \ that \ w(\alpha a_{ii}) = w(\alpha) \ where \ \alpha \in \mathbb{F}_q \end{array} \right\}.$$

于是，文献 *[19,* 中给出的 $\left(\mathbb{F}_q^s, d_{w,(P,\pi)}\right)$ 的刻画可由定理 5 作为一个特例推出：

$$GL_{w,(P,\pi)}(\mathbb{F}_q^s) \cong U_{w,(P,\pi)} \rtimes Aut(P).$$

例 4.2. 当 $\mathbb{F}_q$ 上的权重 w 为汉明重量 w_H时，加权偏序块度量会诱导出文献 *[1]*中引入的偏序块度量。直接代入可得

$$U_{w_H,(P,\pi)} = \left\{ (A_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{F}_q) : \begin{array}{l} A_{ij} \in M_{k_i\times k_j}(\mathbb{F}_q); \\ A_{ij} = O \ if \ i \not\leq j; \\ A_{ii} \ is \ invertible \end{array} \right\}.$$

于是，$\left(\mathbb{F}_q^n, d_{w,(P,\pi)}\right)$ 的线性等距变换群的刻画可由定理 5 作为一个特例推出：

$$GL_{w_H,(P,\pi)}(V) \cong U_{w_H,(P,\pi)} \rtimes Aut(P, \pi).$$

我们指出，当我们考虑李重量 w_L over $\mathbb{Z}_m$而非 $\mathbb{F}_q$时，第 3 节中的结果同样成立。

例 4.3. 当 w on $\mathbb{Z}_m$ 上的权重为李重量 w_L 时，加权偏序块度量诱导出偏序多重集分块度量。直接代入可得

$$U_{w_L,(P,\pi)} = \left\{ (A_{ij}) \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}_m) \ \begin{array}{l} A_{ij} \in M_{k_i\times k_j}(\mathbb{Z}_m); A_{ij} = O \ if \ i \not\leq j; \\ W_r(v_{rl}) = \pm 1 \ where \ v_{rl} \ is \ the \ l\text{-}th \ column \ in \ A_{rr}, \ and \\ W_r(\beta_1 v_{r1} + \cdots + \beta_{kr} v_{rk_r}) = W_r(\beta) \ where \ \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_{kr}) \in V_r \end{array} \right\}.$$

于是，$\left(\mathbb{Z}_m^n, d_{w_L,(P,\pi)}\right)$ 的线性等距变换群的刻画可由定理 5 作为一个特例得出：

$$GL_{w_L,(P,\pi)}(V) \cong U_{w_L,(P,\pi)} \rtimes Aut(P,\pi).$$

例 4.4. 当 P 是反链且标记 π 满足

$$\begin{aligned} k_1 = \ldots k_{t_1} &= m_1 \\ k_{t_1+1} = \ldots = k_{t_1+t_2} &= m_2 \\ &\vdots \\ k_{t_1+t_2+\cdots+t_{l-1}+1} = \ldots = k_n &= m_l, \end{aligned}$$

我们有

$$Aut(P,\pi) \cong S_{t_1} \times S_{t_2} \times \cdots \times S_{t_l}.$$

在这种情况下 $\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(v) = \sum_{i \in supp_\pi(v)} W_i(v)$。将满足以下条件的线性变换 $T : \mathbb{F}_q^{k_i} \to \mathbb{F}_q^{k_i}$ 的群记为 $GL(k_i, w)$：$\overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(T(v_i)) = \overline{\omega}_{w,\ (P,\pi)}(v_i)$。那么我们有

$$\mathcal{T} \cong GL(k_1,w) \times GL(k_2,w) \times \cdots \times GL(k_n,w).$$

由定理 5 可知

$$GL_{w,(P,\pi)}(V) \cong \left(\prod_{i=1}^{n} GL(k_i,w)\right) \rtimes \left(\prod_{i=1}^{l} S_{t_i}\right).$$

注意，当 $\pi(i) = 1$ 时，$Aut(P,\pi) \cong S_n$，且 $GL(k_i, w)$ 是保持权重 w 的线性变换 $T : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q$ 的群。那么我们有

$$GL_{w,(P,\pi)}(V) \cong \left(\prod_{i=1}^{n} GL(1,w)\right) \rtimes S_n.$$

5 加权偏序块度量中的 MDS 码与完美码

5.1 基本定义

本节中，P、π、w 和 V 的记号与第 3 节相同。基数为 K 的子集 $C \subseteq V$ 称为 $(n, K, d_w(C))$ (P, π, w)-码，其中 V 赋予加权偏序块度量 $d_{w,\ (P,\pi)}(.,.)$，并且

$$d_w(C) = \min\{d_{w,(P,\pi)}(u,v) : u \neq v \in C\}$$

是 C的最小(P,π,w)-距离。当 $\mathbb{F}_q$ 上的权重 w 被视为汉明重量w_H时，我们用 $d_H(C) = d_{w_H}(C)$表示。线性(P,π,w)-码是 V的一个子空间。

记 $\mathcal{I}(P)$ 为 P 的所有理想的集合。现在我们给出加权偏序块度量情形下 $\mathbb{F}_q^n$ 上的 Singleton界。

定理 6。（Singleton界）设 C 是一个（n， K， $d_w(C)$）（P， π， w）-码。设 $\lambda = \left\lfloor \frac{d_w(C) - m_w}{M_w} \right\rfloor$，且$\mu = \max_{I\in\mathcal{I}(P),\ |I|=\lambda} \sum_{i\in I} k_i$。则

$$K \le q^{n-\mu}.$$

证明。设 $I \in \mathcal{I}(P)$，其中 $|I| = \lambda$。设 u 和 v 是 C 中的两个不同元素。如果 u 和 v 在 I 之外的所有位置上都相同，则

$$d_{w,(P,\pi)}(u,v) = \overline{w}_{w,(P,\pi)}(u-v) \le |I| \cdot M_w = \left\lfloor \frac{d_w(C) - m_w}{M_w} \right\rfloor \cdot M_w < d_w(C),$$

矛盾。这意味着， C 中任意两个不同的码字至少会在 I 之外的一个位置上不同。因此，存在一个从 C 到 $\mathbb{F}_q^{n-\sum_{i\in I} k_i}$ 的单射，这意味着 $K \le q^{n-\sum_{i\in I} k_i}$。因此，对于任意满足 $|I| = \lambda$ 的 $I \in \mathcal{I}(P)$，都有 $K \le q^{n-\sum_{i\in I} k_i}$。 □

注5.1. 设 P 是一个带有通常序 $1 < 2 < \cdots < s$ 的链，且对所有 $i \in [s]$， $\pi(i) = 1$。对于线性 $(n, q^k, d_w(C))$ (P,π,w)-码 C，定理 6 推出

$$d_w(C) \le M_w(n-k) + m_w,$$

这与加权偏序度量情形下的 Singleton 界相同，其中 C 是线性码， P 是链 *[19,* 推论 *24]*。

注5.2. 设 C 是一个满足 $K = q^k$ 的 $(n, K, d_w(C))$ (P,π,w)-码。当权重 w 取为 $\mathbb{F}_q$ 上的汉明重量时，定理 6 推出

$$n - k \ge \max_{I\in\mathcal{I}(P),|I|=d_H(C)-1} \sum_{i\in I} k_i,$$

这与偏序块度量情形下的 Singleton 界相同，其中 C 是线性码 *[5,* 定理 3。*2]*。请注意，我们的结果对非线性码也成立。

注5.3. 设 P 为一条链。不失一般性，我们可以假设 P 具有链序$1 < 2 < \cdots < s$。对于一个$(n, K, d_w(C))$ (P,π,w)-码 C。定理 6 推出

$$K \le q^{n-(k_1+k_2+\cdots+k_\lambda)}.$$

现在定义一个最大距离可分的 (P,π,w)-码。

定义 5. 如果一个$(n,K,d_w(C))$ (P,π,w)-码 $C\subseteq V$达到了Singleton界，则称其为最大距离可分（MDS）的(P,π,w)-码。

设 $P=([s],\leq_P)$ 和 $Q=([s],\leq_Q)$ 是两个偏序集。若 $i\leq_P j$ 属于 P 意味着 $i\leq_Q j$ 属于 Q，则称 Q 比 P 更细。

引理 5.1. 设 $P=([s],\leq_P)$ 和 $Q=([s],\leq_Q)$ 是两个偏序集，且 Q 比 P 更细。设 π 是一个标记，使得 $\pi(1)=\pi(2)=\cdots=\pi(s)=t$。若 C 是一个最大距离可分的 (P,π,w)-码，则 C 是一个最大距离可分的 (Q,π,w)-码。

证明。设 C 是一个最大距离可分的 (P,π,w)-码，其直径为 $(n,K,d_w(C))$。则 C 是一个 $(n,K,d'_w(C))$ (Q,π,w)-码（此处 $d'_w(C)$ 是 C 的最小 (Q,π,w)-距离）。由于 Q 比 P 更细，对于 $u,v\in V$，有 $d_{w,(P,\pi)}(u,v)\leq d_{w,(Q,\pi)}(u,v)$，这意味着 $d_w(C)\leq d'_w(C)$。于是

$$\lambda_1=\left\lfloor\frac{d_w(C)-m_w}{M_w}\right\rfloor\leq\left\lfloor\frac{d'_w(C)-m_w}{M_w}\right\rfloor=\lambda_2$$

因此

$$\mu_1=\max_{I\in\mathcal{I}(P),|I|=\lambda_1}\sum_{i\in I}k_i=\lambda_1 t\leq\lambda_2 t=\max_{I\in\mathcal{I}(Q),|I|=\lambda_2}\sum_{i\in I}k_i=\mu_2.$$

因此

$$K=q^{n-\mu_1}\geq q^{n-\mu_2}\geq K.$$

这迫使 $K=q^{n-\mu_2}$。因此，C是一个最大距离可分（Q,π,w）码。 □

设 $P=([s],\leq)$ 是一个反链，$Q=([s],\leq)$ 是一个偏序集。则 Q比 P更细。当 $\mathbb{F}_q$ 上的权重 w 取为汉明重量 w_H时，可得以下结果，该结果发表于 [5]

推论 5.1. 如果配备错误块度量的码是一个最大距离可分码，那么对于集合 $[s]$上定义的每一种偏序，它也是一个最大距离可分偏序块码。

当对于所有 $i\in[s]$，$\pi(i)=1$，且 $\mathbb{Z}_m$ 上的权重取为李重量 w_L时，可得到以下结果，该结果已在 [22]中给出。

推论 5.2. 设 $C\subseteq\mathbb{Z}_m^n$ 是一个（n，K）码。设 $\mathbb{P}=$（M，R）是一个偏序多重集，其中 $M=\left\{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/n\right\}$和 R 是定义在 M 上的偏序多重集关系。如果码 C 是具有李度量的 MDS 码，那么对于定义在 M 上的任意偏序多重集关系，它都是 MDS 偏序多重集码。

定义 6. 设 w 是 $\mathbb{F}_q$ 上的一个权重。对于 $u \in \mathbb{F}_q^n$，以 u 为中心、半径为 r 的（P， π， w）-球定义为集合

$$B_{w,(P,\pi)}(u,r) = \{v \in \mathbb{F}_q^n : d_{w,(P,\pi)}(u,v) \le r\}.$$

当权重 w over $\mathbb{F}_q$ 被视为汉明重量时，我们用 $B_{(P,\pi)}(u,r)$ 表示以 u 为中心、半径为 r的 (P,π,w)-球。

定义 7. 若码 C 的 (P,π,w)-球以 C 中的码字为中心、半径为 r，且这些球两两不相交，其并集为 V，则称该码为 r-完美 (P,π,w)-码。

5.2 链偏序集上的加权偏序块度量

在下文中，我们始终假设 P是由 $1 < 2 < \cdots < s$定义的链。回顾式 (1) 和式 (2) 中给出的记号，可得以下结论。

定理 7. 设 $C \subseteq V$为 (P,π,w)-码，且 $r = t \cdot M_w$。则 C为 r-完美码，当且仅当存在一个函数

$$f : \bigoplus_{j=t+1}^{s} V_j \to \bigoplus_{i=1}^{t} V_i$$

使得

$$C = \left\{ (f(v), v) : v \in \bigoplus_{j=t+1}^{s} V_j \right\}.$$

s证明。假设 C 是 r-完美码。令 $v \in \bigoplus V_j$。由于 C 是一个 r-完美码，因此存在 $c \in C$，使得 $_{j=t+1}(0,v) \in B_{w,\ (P,\pi)}(c,r)$，这意味着 $c-(0,v) \in B_{w,\ (P,\pi)}(0,r)$。由于 P 是一条链，我们有

$$B_{w,(P,\pi)}(0,r) = \{(x_1,\ldots,x_t,0,\ldots,0) : x_i \in V_i\}.$$

$_t$因此，存在 $u \in \bigoplus V_i$ 使得 $c-(0,v) = (u,0)$，从而 $c = (u,v)$。假设存在$_{i=1}c' \ne c \in C$，使得 $(0,v) \in B_{w,\ (P,\pi)}(c')$。那么 $c' = (u',v)$ 且 $c-c' = (u-u',0) \in B_{w,\ (P,\pi)}(0,r)$，这与假设 C 是一个 r-完美码相矛盾。因此，我们可以定义一个函数 f: $\bigoplus V_j \to_{j=t+1}$
t s $_t\bigoplus V_i$，它将 $v \in \bigoplus V_j$ 映射到唯一的 $u \in \bigoplus V_i$，使得 $c = (f(v)\ v)$。$_{i=1}$ $_{j=t+1}$ $_{i=1}$

相反，假设存在一个函数 f，使得 $C = \left\{ (f(v)\ v) : v \in \bigoplus_{j=t+1}^{s} V_j \right\}$。那么

$$B_{w,(P,\pi)}((f(v),v),r) = \left\{ (u,v) : u \in \bigoplus_{i=1}^{t} V_i \right\}$$

因此$|B_{w,\ (P,\pi)}(c,r)| = q^{k_1+k_2+\cdots+k_t}$。此外，对于任意 $(u,v) \in V$，都有 $C \cap B_{w,\ (P,\pi)}((u,v)\ r) = (f(v)\ v)$。因此，$\bigcup\limits_{c\in C} B_{w,\ (P,\pi)}(c,r)$ 是一个不相交并集，其阶为 $|C| \cdot q^{k_1+k_2+\cdots+k_t} = q^n$。因此，$C$是 r-完美的。

□

注记 5.4. 如果 C 是一个线性（P,π,w）-码，那么定理 7 中给出的函数 f 是一个线性映射。

$_s$证明。设 $u,v \in \bigoplus V_j$。则 $(f(u)\ u)$，$(f(v)\ v) \in C$。由于 C是一个线性码，我们有$_{j=t+1}\alpha(f(u)\ u) + \beta(f(v)\ v) = (\alpha f(u) + \beta f(v)\ \alpha u + \beta v) \in C$，对 $\alpha,\beta \in \mathbb{F}_q$均成立，这意味着 $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$。因此，$f$是一个线性映射。

□

定义 8. 码 C 的填充半径 $\rho(C)$ 是以码字为中心、两两不相交的球的最大半径。如果码 C 是 $\rho(C)$-完美的，我们就称其为完美码。

以下命题是对 [19, 引理 21，推论 22] 的推广，其中所考虑的度量是加权偏序度量。证明思路类似，因此略去。

命题 5.1. 设 $r = l + i \cdot M_w$，其中 $l \in [M_w]$，且 $i \geq 0$ 是一个整数。设 $v \in V$和 C 是一个 (P,π,w)-码。则

(1) $B_{w,\ (P,\pi)}(v,r) \subseteq B_{(P,\pi)}(v,i+1)$。此外，$B_{w,\ (P,\pi)}(v,r) = B_{(P,\pi)}(v,i+1)$当且仅当 $l = M_w$。

(2) $\rho(C) \geq M_w \cdot (d_H(C) - 1)$。此外，$\rho(C) = (d_H(C) - 1)\ M_w$当且仅当$d_{w,\ (P,\pi)}(C) = m_w + (d_H(C) - 1)\ M_w$。

定理 8。设 C 是一个 (P,π,w)-码，使得 $d_{w,\ (P,\pi)}(C) = m_w + (d_H(C) - 1)\ M_w$。那么，当且仅当 C 是完美码时，C 是最大距离可分的。

证明。假设 C 是一个最大距离可分码。那么 $|C| = q^{n-(k_1+k_2+\cdots+k_\lambda)}$，其中 $\lambda = \left\lfloor \underline{\frac{d_w(C)}{M_w} - m_w} \right\rfloor$。记作 $d = d_H(C)$。由于 P 是一条链，我们有

$$d_w(C) = m_w + M_w \cdot (d-1).$$

因此

$$\lambda = \left\lfloor \frac{d_w(C) - m_w}{M_w} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m_w + M_w \cdot (d-1) - m_w}{M_w} \right\rfloor = d - 1.$$

由定理 6 的证明可知，存在一个单射

$$g : \mathbb{F}_q^{n-(k_1+k_2+\cdots+k_\lambda)} \to \mathbb{F}_q^{k_1+k_2+\cdots+k_\lambda}$$

and

$$C = \left\{ (g(u), u) : u \in \mathbb{F}_q^{k_{\lambda+1}+\cdots+k_s} \right\}.$$

由此 根据定理 7 和命题 5.1 (2)， C 是 λM_w-完美的，也就是说， C 是 $\rho(C)$-完美的 .

反之，若 C 是完美码，则 $|C| \cdot |B_{w,\ (P,\pi)}(0, \rho(C))| = q^n$。由命题 5.1 (1) 可知

$$|B_{w,(P,\pi)}(0, \rho(C))| = |B_{w,(P,\pi)}(0, M_w \cdot (d-1))| = |B_{(P,\pi)}(0, d-1)| = q^{k_1+\cdots+k_{d-1}}.$$

因此

$$|C| = q^{n-(k_1+\cdots+k_{d-1})} = q^{n-(k_1+\cdots+k_\lambda)}$$

这意味着 C 是一个最大距离可分 (P, π, w)-码。 □

作为一个直接应用，若我们将 $\mathbb{F}_q$ 上的权重 w 选为汉明重量 w_H，便可立即得到出现在 [5]中的以下结果。

推论 5.3. 偏序块码 C 是完美码，当且仅当 C 在偏序块度量下是最大距离可分码。

设 π 是一个标记，满足对每个 $i \in [s]$，都有 $\pi(i) = 1$。应用定理 8，可得到以下结果，该结果已在 [18] 和 [19] 中给出。

推论 5.4. 设 C 是一个具有加权偏序度量的码。那么，当且仅当 C 是完美码时， C 才是最大距离可分码。

注 5.5. 请注意，定理 8 仅适用于将 P 视为链的情形。它不适用于汉明度量和李度量。

6 结论

本文研究了 $\mathbb{F}_q^n$ 上的加权偏序块度量，它是汉明度量、李度量、偏序度量、pomset 度量、偏序块度量和错误块度量等度量的推广。我们用两个子群的半直积完整描述了加权偏序块空间的线性等距群。值得注意的是，如果将 $V = \bigoplus \mathbb{F}_q^{k_i}$ 替换为 $V = \bigoplus R^{k_i}$，且其中 R 是含幺结合环，并且存在一个乘法可逆元 $\alpha \in R$ 使得 $w(\alpha) = m_w$，那么我们的结论仍然s s成立。此外，我们还确立了加权偏序块码的填充半径、最小距离界等基本参数，并立即考察了当偏序集为链时最大距离可分码与完美码之间的关系。

参考文献

[1] M.M.S. Alves, L. Panek, M. Firer, 《错误块码与偏序集度量》, Adv. Math. Commun. 2 (1) (2008) 95-111。[2] R. Brualdi, J.S. Graves, M. Lawrence, 《具有偏序集度量的码》, Discrete Math. 147 (1) (1995) 57-72。[3] S.H. Cho, D.S. Kim, 《冠权空间的自同构群》, European Journal of Combi- natorics. 27 (2006) 90-100。[4] M.M. Deza 和 E. Deza, 《距离百科全书》。德国柏林: Springer-Verlag, 2009。[5] B.K. Dass, Namita Sharma, Rashmi Verma, 《MDS 与 I-完美偏序块码》, Finite Fields Appl. 62 (2020) 101620。[6] K. Feng, L. Xu, F.J. Hickernell, 《线性错误块码》, Finite Fields Appl. 12 (4) (2006) 638-652。[7] E. Gabidulin, 《编码理论中的度量》, 载于《多址信道》, E. Biglieri 和 L. Gyorfi 编。阿姆斯特丹, 荷兰: IOS Press, 2007。[8] J.Y. Hyun, H.K. Kim, 《最大距离可分偏序集码》, Des. Codes Cryptogr. 48 (3) (2008) 247-261。[9] J.Y. Hyun, H.K. Kim, J.R. Park, 《使扩展汉明码成为完美码的加权偏序集与有向图》, IEEE Trans. Inf. Theory 65 (8) (2019) 4664-4672。[10] D.S. Kim, 《广义Rosenbloom-Tsfasman偏序集的关联方案与麦克威廉姆斯对偶性》, Dissertationes Math. 487 (2012), 49 pp。[11] K. Lee, 《Rosenbloom-Tsfasman 空间的自同构群》, European J. Combin. 24 (2003) 607-612。[12] R.A. Machado, M. Firer, 《满足支撑要求且适用于最近邻译码的权》, IEEE Trans. Inf. Theory 66 (6) (2020) 3664-3674。[13] F.J. MacWilliams, N.J. Sloane, 《纠错码理论》, North-Holland, 阿姆斯特丹, 1998。[14] H. Niederreiter, 《有限域上向量空间的一个组合问题》,

[15] Rosenbloom M. Yu, M.A. Tasfasman, m度量的码，Probl. Pereda. Inf. 33 (1) (1997) 45-52. [16] L. Panek, M. Firer, M.M.S. Alves，Niederreiter-Rosenbloom-Tsfasman 分块码的分类，IEEE Trans. Inf. Theory 56 (10) (2010) 5207-5216.[17] L. Panek, M. Firer, H.k. Kim, J.Y. Hyun，偏序集结构上的线性等距群，Discrete Math. 308 (2008) 4116-4123.[18] L. Panek, N. Panek，最优反码、直径完美码、链与权，IEEE Trans. Inf. Theory 67 (7) 4255-4262.[19] L. Panek, J.A. Pinheiro，偏序度量与可加度量的一般方法，IEEE Trans. Inf. Theory 66 (11) (2020) 6823-6834.[20] I. G. Sudha, R.S. Selvaraj，具有 pomset 度量的码及其构造，Des. Codes Cryptogr. 86 (2018) 875-892.[21] I. G. Sudha, R.S. Selvaraj，某些 pomset 上线性码的 MacWilliams 型恒等式：pomset 的链、直和与序数和，Discrete Math. 343 (2020) 111782.[22] I. G. Sudha, R.S. Selvaraj，pomset 度量下的最大距离可分码与 I完美码，IEEE Trans. Inf. Theory 67 (3) (2021) 1622-1629.[23] Y. Xu, H.B. Kan, G. Han，关于加权偏序度量的傅里叶自反划分与线性等距变换群，2022年 IEEE 国际信息论研讨会 (ISIT)，DOI: 10.1109/ISIT50566.2022.9834567，6页.[24] Y. Xu, H.B. Kan, G. Han，加权偏序度量下的等距变换与 MacWilliams 延拓性质，arXiv:2202.01551 [cs.IT], https://doi.org/10.48550/arXiv.2202.01551。