arXiv:2303.01721v1 [cs.IT] 3 Mar 2023

Zm上的偏序集度量分组码

Wen Ma JinquanLuo*

摘要：本文介绍了配备偏序集分组度量的码。我们得到了偏序集分组码的Singleton型界。本文还研究了达到辛格尔顿界的码，称为最大距离可分码（简称 MDS $(\mathbb{P},\pi)$-码）。我们将 I-完美码和 r-完美码的概念推广到偏序集分组度量。我们还考察了 I-完美码与 MDS $(\mathbb{P},\pi)$-码之间的关系。当所有分组具有相同维数时，我们证明了码的对偶定理，并研究了偏序集为链时 MDS pomset块码的重量分布。

关键词：偏序集、标签、分组、MDS码、完美码。

1 引言

配备不同于汉明度量的度量的码多年来一直受到研究。偏序集度量由 Brualdi（见 [2]）于1995年引入。偏序集度量的概念源于 Niederreiter 对编码理论中一个经典问题的推广（见 [10] 和 [11]）。在 [7], , Hyun 和 Kim 引入了 I-完美码的概念，并用 I-完美码描述了 MDS偏序集码。他们还研究了 MDS偏序集码的重量分布，并证明了对偶定理。Feng、Xu 和 Hickernell（见 [4]）通过将 $\mathbb{F}_q^n$ 的坐标位置集合划分为若干块，引入了分组度量。之后，Alves、Panek 和 Firer 引入了偏序集分组度量（见[1]），并研究了 NRT分组度量（见 [12]）。在此基础上，Dass、Sharma 和 Verma 研究了偏序集分组码，并定义了最大距离可分偏序集分组码。此外，他们将 I-球的概念推广到偏序集分组度量，并描述了 r-完美码和 MDS $(\mathbb{P},\pi)$-码（见[3]）。当所有分组具有相同维数时，他们证明，对于某些理想 I，MDS $(\mathbb{P},\pi)$-码与I-完美码相同。

最近，Irrinki 和 Selvaraj（见 [8]）引入了偏序集度量，并扩展了序理想的概念。构造了偏序集码，并确定了其最小距离和

*作者来自华中师范大学数学与统计学院和湖北省数学科学重点实验室，中国武汉。电子邮箱：mawen95@126.com（W.Ma），luojinquan@mail.ccnu.edu.cn（J.Luo）

覆盖半径等度量性质。在 [9], 中，Irrinki 和 Selvaraj 通过扩展偏序集度量中 I-球的概念，研究了偏序集度量下的 I-完美码。此外，他们为具有偏序集度量的码建立了Singleton型界，并考察了MDS码与 I-完美码之间的联系。当偏序集为一条链时，他们证明了对偶定理，并确定了MDS偏序集码的重量分布。

线性错误块码是经典纠错码的一种自然推广，在试验设计、高维数值积分和密码学中有应用。构造具有最大码率 k/n 和最小距离 d 的线性错误块码，是编码理论中的一个重要问题。由 $supp(x) = \{i$ 给出的 $x \in \mathbb{F}_q^n$ 的支撑 $x_i \neq 0\}$ 是一个集合。 x 的偏序集重量 $w_p(x)$ 定义为 $w_p(x) = | < supp(x) > |$，且 $d_p(x, y) = w_p(x - y)$ 是 $\mathbb{F}_q^n$ 上一个定义良好的度量。通过改变偏序集，可以在 $\mathbb{F}_q^n$ 上得到不同的度量，例如，当 P 是链时得到 Rosenbloom-Tsfasman（RT）度量，当 P 是反链时得到汉明度量，等等。2008年，Firer、Paneck 和 Alves（[1]）提出了一类称为 poset-分组度量的度量，它推广了所有先前的度量。但对于任何特定的偏序集，poset度量都无法容纳Lee度量。对于元素 $l \in \mathbb{Z}_m$， l 的Lee重量定义为 $w_L(l) = \min\{l, m - l\}$，而任意 $l \neq 0$ 的汉明重量均为1。此外， $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{Z}_m^n$ 的汉明重量是所有非零坐标的汉明重量之和，因此它计数的是非零位置的个数；而Lee重量则将 x 中非零坐标的Lee重量相加。因此，关于Lee重量的 $x \in \mathbb{Z}_m^n$ 的支撑应定义为$supp_L(x) = \{k/i : k = w_L(x_i)$ $k \neq 0\}$，它是一个多重集。当偏序集为反链时，偏序集度量是Lee度量的一种推广。本文结合偏序集与分组结构，得到一种称为偏序集分组度量的进一步推广。当 $\pi = [1]^n$ 时，偏序集分组码退化为偏序集码，进而在链偏序集下退化为Lee度量。从某种意义上说，它是poset-分组度量的一种推广。通过研究偏序集分组码，我们给出了一种更通用的方法来处理 $\mathbb{Z}_m$ 上的Lee度量和错误块码。本文旨在引入偏序集分组码，并将 I-完美码的概念扩展到偏序集分组度量的情形。我们建立了偏序集分组码的Singleton型界，并研究了MDS码与 I-完美码之间的关系。我们还证明了当所有分组具有相同维数时， I-完美码的对偶性结果。当偏序集为链且所有分组具有相同维数时，我们确定了MDS（$\mathbb{P}, \pi$）码的重量分布。

2 预备知识

在本文中 本节介绍 pomset 分组度量的一些基本符号和有用结果 .

可能包含重复元素的元素集合称为多重集（简称 mset）。Girish 和 John 定义了多重集关系，并探讨了其一些基本性质（参见 [5] 和 [6]）。他们还将满足自反、反对称和传递性质的多重集关系定义为偏序多重集，并讨论了偏序多重集的链和反链。

形式上，如果 X 是一个元素集合，那么从集合 X 中取出的多重集 M 可表示为函数 countC_M：$X \to \mathbb{Z}_+$，其中 $\mathbb{Z}_+$ 表示非负整数集合。对于每个 $a \in X$， $C_M(a)$ 表示元素 a 在 M 中的出现次数。

元素 $a \in X$ 在 M 中出现 p 次，记作 $p/a \in M$，因此 $C_M(a) = p$。若考虑 $k/a \in M$，则 k 的值满足 $k \leq p$。从集合 $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ 中取出的多重集表示为 $M = \{p_1/a_1, p_2/a_2, \ldots, p_n/a_n\}$。如果一个多重集中的所有对象都以相同的重数出现，则称其为正则多重集，该共同重数称为其高度。从 X 中取出的多重集 M 的基数为 $|M| = \sum_{a \in X} C_M(a)$。 M 的根集记作 M^*，定义为$M^* = \{a \in X : C_M(a) > 0\}$。

设 M_1 和 M_2 是从集合 X中取出的两个多重集。若对所有 $a \in X$，$C_{M_1}(a) \leq C_{M_2}(a)$，则称 M_1 是 M_2 ($M_1 \subseteq M_2$)的子多重集。若存在至少一个 $a \in M_2^*$使得 $C_{M_1}(a) < C_{M_2}(a)$，则称 M_1是 M_2 ($M_1 \subset M_2$)的真子多重集。当且仅当 $M_1 \subseteq M_2$且 $M_2 \subseteq M_1$时，两个多重集 M_1和 M_2相等（$M_1 = M_2$）。

设 M'是 M的子多重集。若 $C_{M'}(a) = C_M(a)$，则称元素 $a \in M'^*$相对于 M具有满计数。若对所有 $a \in M'^*$，都有 $C_{M'}(a) = C_M(a)$，则称 M'具有满计数；否则，称 M' 具有部分计数。

设 M_1 和 M_2 是取自集合 X的两个多重集。 M_1 与 M_2 的加法（和）记作$M = M_1 \oplus M_2$，定义为：对于所有 $a \in X$， $C_M(a) = C_{M_1}(a) + C_{M_2}(a)$。 M_2与 M_1的减法（差）记作 $M = M_1 \ominus M_2$，定义为：对于所有$a \in X$， $C_M(a) = \max\{C_{M_1}(a) - C_{M_2}(a)\ 0\}$。 M_1 与 M_2 的并集是一个多重集，记作 $M = M_1 \cup M_2$，满足对于所有 $a \in X$，$C_M(a) = \max\{C_{M_1}(a)\ C_{M_2}(a)\}$。

多重集空间 $[X]^l$ 是由取自 X 的所有多重集构成的集合，其中每个多重集中的任一元素出现次数都不超过 l。若 $M_1, M_2 \in [X]^l$，则多重集和将修改为

$$C_{M_1 \oplus M_2}(a) = \min\{l, C_{M_1}(a) + C_{M_2}(a)\} \text{ for all } a \in X.$$

设 $M \in [X]^l$是一个多重集，补集 M^c是 $[X]^l$的一个元素，使得对于所有 $a \in X$，均有 $C_{M^c}(a) = l - C_M(a)$。

设 M_1 和 M_2 是取自 X的两个多重集， M_1 和 M_2 的笛卡尔积也是一个多重集

定义为

$$M_1 \times M_2 = \{pq/(p/a, q/b) : p/a \in M_1, q/b \in M_2\}.$$

用 $C_1(a,b)$ 表示有序对 (a,b) 中第一坐标的计数，用 $C_2(a,b)$ 表示有序对 (a,b) 中第二坐标的计数。

若子多重集 R 是 $M \times M$ 的子多重集，且对于 R 的每个元素 $(p/a, q/b)$，其计数满足 $C_1(a,b) \cdot C_2(a,b)$，则称 R 为 M 上的多重集关系。若多重集 M 上的多重集关系 R 满足：对于所有 $m/a \in M$， $m/a\ R\ m/a$，则称其为自反的；若 $m/a\ R\ n/b$ 和 $n/b\ R\ m/a$ 蕴含 $m = n$ 和 $a = b$，则称其为反对称的；若 $m/a\ R\ n/b$ 和 $n/b\ R\ k/c$ 蕴含 $m/a\ R\ k/c$，则称其为传递的。若多重集关系 R 是自反的、反对称的且传递的，则称其为偏序多重集关系（或 pomset关系）。有序对 (M, R) 称为偏序多重集（偏序集），记作 $\mathbb{P}$。

设 $\mathbb{P} = (M, R)$ 且 $m/a \in M$。若不存在 $n/b \in M$ $(b \neq a)$ 使得 $m/a\ R\ n/b$，则称 m/a 为 $\mathbb{P}$ 的极大元；若不存在 $n/b \in M$ $(b \neq a)$ 使得 $n/b\ R\ m/a$，则称 m/a 为极小元。若 $\mathbb{P}$ 中的任意两个不同点在 $\mathbb{P}$中均可比较，则称 $\mathbb{P}$ 为链。若 $n/b\ R\ m/a$ 蕴含 $a = b$，则称 $\mathbb{P}$ 为反链。

若子多重集 I 满足：对于 $\mathbb{P}$，若 $k/a \in I$ 且 $q/b\ R\ k/a$ $(b \neq a)$，则 $q/b \in I$，则称 I 为 M 的序理想（或简称理想）。由元素 $k/a \in M$ 生成的理想定义为

$$\langle k/a \rangle = \{k/a\} \cup \{q/b \in M : q/b\ R\ k/a \text{ and } b \neq a\}.$$

由 M 的子多重集 S 生成的理想定义为 $\langle S \rangle = \bigcup \langle k/a \rangle$。我们用 $\mathcal{I}(\mathbb{P})$（分别用 $\mathcal{I}^r(\mathbb{P})$）表示 $\mathbb{P}$ 的全体理想的集合（分别表示基数为 r的理想集合）。若对所有 $a \in I^*$，理想 I 满足 $C_I(a) = C_M(a)$，则称其为全计数理想；否则，称 I为部分计数理想。我们用 $M(I)$ 表示理想 I 中所有极大元构成的集合。

例2.1. 考虑 $M = \{2/1, 2/2, 2/3\}$ 和 R 为一个 V形偏序集的情形，即 $1 < 2$、$1 < 3$ 以及 2、3 不可比。于是，偏序集 $\mathbb{P} = (M, R)$ 的极大元为 $2/2$ 和 $2/3$，极小元为 $2/1$。 $\mathbb{P}$的基数为 1 的理想是 $I_1 = \{1/1\}$，基数为 2 的理想是 $I_2 = \{2/1\}$，基数为 3 的理想是 $I_3 = \{2/1, 1/2\}$ 和 $I_4 = \{2/1, 1/3\}$，基数为 4 的理想是$I_5 = \{2/1, 2/2\}$、$I_6 = \{2/1, 2/3\}$ 和 $I_7 = \{2/1, 1/2, 1/3\}$，基数为 5 的理想是 $I_8 = \{2/1, 2/2, 1/3\}$ 和$I_9 = \{2/1, 1/2, 2/3\}$，基数为 6 的理想是 $I_{10} = \{2/1, 2/2, 2/3\}$。

命题 2.1。（*[8]*）设 $\mathbb{P} = (M, R)$ 是一个偏序集。则

(1) 对任意 $I \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$ 和 $0 \leq s \leq r \leq |M|$，存在 $J \in \mathcal{I}^s(\mathbb{P})$，使得 $J \subseteq I$。

(2) 对任意 $I \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$ 和 $0 \le r \le s \le |M|$，存在 $J \in \mathcal{I}^s(\mathbb{P})$，使得 $I \subseteq J$。

对于给定的偏序集 $\mathbb{P} = (M, R)$，我们将对偶偏序集 $\tilde{\mathbb{P}} = (M, R)$ 定义如下：

$\tilde{\mathbb{P}}$ 当且仅当 $q/b \; R \; p/a$ 中的 $\mathbb{P}$。

命题 2.2。（[9]）设 $M \in [X]^l$ 为高度为 l的正则多重集。设 $\mathbb{P}$ 为定义在 M 上的偏序集，且 $\tilde{\mathbb{P}}$ 为其对偶偏序集。则 $\mathbb{P}$ 的序理想恰好是 $\mathbb{P}$的序理想的补集，也就是说，$\mathcal{I}(\mathbb{P}) = \{I^c : I \in \mathcal{I}(\mathbb{P})\}$。

考虑 $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$，即模 m的整数环，其中 $m \ge 4$。我们考虑定义在多重集 $M = \left\{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor /1, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor /2, \ldots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor /s\right\} \in [X]^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}$ 上的偏序集 $\mathbb{P}$，其中 $X = [s]$。

设 $\pi : [s] \to \mathbb{N}$ 是一个映射，使得 $n = \sum_{i=1}^{s} \pi(i)$。称映射 π 为偏序集$\mathbb{P}$的标记，并称有序对 $(\mathbb{P}, \pi)$ 为 $[s]$ 上的偏序集分块结构。记 $\pi(i)$ 为 k_i，并对所有 $1 \le i \le s$，取 V_i 为自由 $\mathbb{Z}_m$-模 $\mathbb{Z}_m^{k_i}$。定义 V 为

$$V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$$

它与 $\mathbb{Z}_m^n$ 同构。每个 $u \in \mathbb{Z}_m^n$ 都可以写成 $u = (u_1, u_2, \ldots, u_s)$，其中 $u_i \in \mathbb{Z}_m^{k_i}, 1 \le i \le s$。$u \in \mathbb{Z}_m^n$ 的 Lee 分块支撑定义为

$$supp_{(L,\pi)}(u) = \left\{s_i/i : s_i = w_{(L,\pi)}(u_i), s_i \ne 0\right\},$$

其中

$$w_{(L,\pi)}(u_i) = \max\left\{\min\left\{u_{i_t}, m - u_{i_t}\right\} : 1 \le t \le \pi(i)\right\}.$$

$u \in \mathbb{Z}_m^n$ 的 $(\mathbb{P}, \pi)$-权重定义为由 $supp_{(L,\pi)}(u)$ 生成的理想的基数，即

$$w_{(\mathbb{P},\pi)}(u) = \left|\langle supp_{(L,\pi)}(u)\rangle\right|.$$

两个向量 $u, v \in \mathbb{Z}_m^n$ 之间的偏序多重集块距离定义为

$$d_{(\mathbb{P},\pi)}(u, v) = w_{(\mathbb{P},\pi)}(u - v).$$

现在我们证明，上述偏序多重集块距离是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的一个度量。

定理 1. 设 $\mathbb{P}$是正则多重集 $M = \left\{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor /1, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor /2, \ldots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor /s\right\}$上的偏序集，且 π: $[s] \to \mathbb{N}$使得 $n = \sum_{i=1} \pi(i)$ 是 $\mathbb{P}$的一个标记。那么，偏序多重集块距离 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(.,.)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$上的一个度量。

证明. 显然， $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,v) \geq 0$ 且 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,v) = 0$ 当且仅当 $u = v$。设 $u, v, w \in \mathbb{Z}_m^n$。由于 $supp_{(L,\pi)}(u-v) = supp_{(L,\pi)}(v-u)$，我们有 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(v,u) = d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,v)$。接下来只需证明 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,v) \leq d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,w) + d_{(\mathbb{P},\pi)}(w,v)$。由于 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,v) = w_{(\mathbb{P},\pi)}(u-v) = w_{(\mathbb{P},\pi)}(u-w+w-v)$，只需证明 $(\mathbb{P},\pi)$-权重满足不等式 $w_{(\mathbb{P},\pi)}(x+y) \leq w_{(\mathbb{P},\pi)}(x) + w_{(\mathbb{P},\pi)}(y)$，对所有 $x, y \in \mathbb{Z}_m^n$ 均成立。我们只需证明，对所有 $i \in [s]$，$w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) \leq w_{(L,\pi)}(x_i) + w_{(L,\pi)}(y_i)$。注意到

$$w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) = \max\left\{\min\{x_{i_t} + y_{i_t}, m - x_{i_t} - y_{i_t}\} : 1 \leq t \leq \pi(i)\right\}.$$

假设 $w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) = \min\{x_{i_1} + y_{i_1}, m - x_{i_1} - y_{i_1}\}$。

- 情形 1：假设 $x_{i_1}, y_{i_1} \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 和 $x_{i_1} + y_{i_1} \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。我们有 $w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) = x_{i_1} + y_{i_1}$。另一方面，有 $\min\{x_{i_1}, m - x_{i_1}\} = x_{i_1} \leq w_{(L,\pi)}(x_i)$ 和 $\min\{y_{i_1}, m - y_{i_1}\} = y_{i_1} \leq w_{(L,\pi)}(y_i)$。因此，$w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) = x_{i_1} + y_{i_1} \leq w_{(L,\pi)}(x_i) + w_{(L,\pi)}(y_i)$。

- 情形 2：假设 $x_{i_1}, y_{i_1} \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 和 $x_{i_1} + y_{i_1} > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。那么 $w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) = m - x_{i_1} - y_{i_1} \leq x_{i_1} + y_{i_1} \leq w_{(L,\pi)}(x_i) + w_{(L,\pi)}(y_i)$。

- 情形 3：假设 $x_{i_1}, y_{i_1} > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 和 $x_{i_1} + y_{i_1} \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。我们有 $w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) = x_{i_1} + y_{i_1} - m \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。另一方面，有 $\min\{x_{i_1}, m - x_{i_1}\} = m - x_{i_1} \leq w_{(L,\pi)}(x_i)$ 和 $\min\{y_{i_1}, m - y_{i_1}\} = m - y_{i_1} \leq w_{(L,\pi)}(y_i)$。因此，$w_{(L,\pi)}(x_i) + w_{(L,\pi)}(y_i) \geq m - x_{i_1} + m - y_{i_1} \geq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$，从而 $w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor = w_{(L,\pi)}(x_i) + w_{(L,\pi)}(y_i)$。

- 情形4：假设 $x_{i_1}, y_{i_1} > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 和 $x_{i_1} + y_{i_1} > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。那么 $w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) = 2m - x_{i_1} - y_{i_1} \leq w_{(L,\pi)}(x_i) + w_{(L,\pi)}(y_i)$。

- 情形5：假设 $x_{i_1} \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, y_{i_1} > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 和 $x_{i_1} + y_{i_1} > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。我们有 $w_{(L,\pi)}(x_i + y_i) = m - x_{i_1} - y_{i_1}$。另一方面，有 $\min\{x_{i_1}, m - x_{i_1}\} = x_{i_1} \leq w_{(L,\pi)}(x_i)$ 和 $\min\{y_{i_1}, m - y_{i_1}\} = m - y_{i_1} \leq w_{(L,\pi)}(y_i)$。因此，$w_{(L,\pi)}(x_i) + w_{(L,\pi)}(y_i) \geq x_{i_1} + m - y_{i_1} \geq m - x_{i_1} - y_{i_1} = w_{(L,\pi)}(x_i + y_i)$。

- 情形6：假设 $x_{i_1} \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor, y_{i_1} > \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$ 和 $x_{i_1} + y_{i_1} \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。则 $w_{(L,\ \pi)}(x_i + y_i) = x_{i_1} + y_{i_1} - m \leq x_{i_1} + m - y_{i_1} \leq w_{(L,\ \pi)}(x_i) + w_{(L,\ \pi)}(y_i)$。

证明至此完成。 □

$d_{(\mathbb{P},\pi)}(.,.)$ 上的度量 $\mathbb{Z}_m^n$ 称为 pomset 分组度量。数对 $(\mathbb{Z}_m^n, d_{(\mathbb{P},\pi)})$ 称为 pomset 分组空间。基数为 K 的 (n, K, d) $(\mathbb{P},\pi)$-码，是 $(\mathbb{Z}_m^n, d_{(\mathbb{P},\pi)})$ 的一个子集 $\mathcal{C}$，其中 $\mathbb{Z}_m^n$ 配备了 pomset 分组度量 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(.,.)$，且

$$d = d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}) = \min\left\{w_{(\mathbb{P},\pi)}(c - c') : c, c' \in \mathcal{C}\right\}$$

是 $\mathcal{C}$的 $(\mathbb{P},\pi)$-最小距离。如果 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 的一个子模，且基数为 m^k，则称 $\mathcal{C}$ 为线性 (n,m^k,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码。(n,K,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}$的对偶码定义为

$$\mathcal{C}^{\perp}=\{v\in\mathbb{Z}_m^n : c\cdot v=c_1v_1+\cdots+c_nv_n=0 \text{ for all } c\in\mathcal{C}\}.$$

3 Pomset球与最大距离可分（$\mathbb{P}$，π）-码

3.1 r-球

设 $\mathbb{P}$是$M=\left\{\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/1,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/2,\ldots,\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor/s\right\}$上的一个偏序集，$\pi$是 $\mathbb{P}$上的一个标记。对于 $u\in\mathbb{Z}_m^n$和非负整数 r，以 u 为中心、半径为 r 的（$\mathbb{P}$，π）-球定义为集合

$$B_r(u)=\left\{v\in\mathbb{Z}_m^n : d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,v)\le r\right\}.$$

以$u\in\mathbb{Z}_m^n$ 为中心、半径为 r 的（$\mathbb{P}$，π）-球面记为 S_r（u），定义为 $\mathbb{Z}_m^n$ 中所有其偏序多重集块距离等于 r的向量所组成的集合，即

$$S_r(u)=\left\{v\in\mathbb{Z}_m^n : d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,v)=r\right\}.$$

对于 si B_r（u）和 S_r（u）也分别称为以 u 为中心的 r-球和 r-球面 ly.

定义 1. 若 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}$的码字为中心的 $(\mathbb{P},\pi)$-球两两不相交，则称其为 r-错误纠正 $(\mathbb{P},\pi)$-码。

定义 2. 若以 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}$ 的码字为中心、半径为 r 的 $(\mathbb{P},\pi)$-球两两不相交，且其并集覆盖整个空间 $\mathbb{Z}_m^n$，则称 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}$为 r-完美 $(\mathbb{P},\pi)$-码。

现在考虑以 $u\in\mathbb{Z}_m^n$ 为中心的 r-球 $B_r(u)$ 的基数。由定义r可得 $|B_r(u)|=1+\sum|S_i(u)|$。设 I 是偏序集 $\mathbb{P}$ 中的一个理想，其基数为 i，且恰有 $j_{i=1}$个极大元 $M(I)=\{C_I(a_1)/a_1,C_I(a_2)/a_2,\ldots,C_I(a_j)/a_j\}$。那么，集合

$$\begin{aligned}A_I \;=\; &\{v=(v_1,v_2,\ldots,v_s)\in\mathbb{Z}_m^n : v_t=\bar{0} \text{ if } t\notin I^*;\\ &v_{t_i}=\pm a,-a\le v_{t_l}\le a,1\le i\ne l\le k_t \text{ if } t\in M(I)^*,a=C_I(t);\\ &v_{t_i}\in\mathbb{Z}_m,1\le i\le k_t, \text{ if } t\in I^*\setminus M(I)^*\}\end{aligned}$$

给出了 $\mathbb{Z}_m^n$ 中所有满足 $\langle supp_{(L,\pi)}(v)\rangle=I$ 的向量 v。根据 A_I 的定义，我们有 $|A_I|=\Sigma_{l=1}^{k_t}\ j\ m^{t\in I^*\setminus M(I)^*}\prod N_{a_l}$，其中 N_{a_l} 定义如下：

- If m is odd, $N_{a_l}=(2C_I(a_l)+1)^{k_{a_l}}-(2C_I(a_l)-1)^{k_{a_l}}$;

- If m is even, $N_{a_l} = \begin{cases} \dfrac{(2C_I(a_l)+1)^{k_{a_l}} - (2C_I(a_l)-1)^{k_{a_l}}}{2}, & \text{if } C_I(a_l) = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor; \\ (2C_I(a_l)+1)^{k_{a_l}} - (2C_I(a_l)-1)^{k_{a_l}}, & \text{otherwise.} \end{cases}$

注意，对于两个不同的理想 I_1 和 I_2，$A_{I_1} \cap A_{I_2} = \varnothing$。用 $\mathcal{I}_j^i$ 表示 $\mathbb{P}$ 中基数为 i 且恰有 j 个极大元的所有理想的集合，则 $\bigcup_{j=1}^{\text{最小值}\{i,n\}} \mathcal{I}_j^i = \mathcal{I}^i(\mathbb{P})$ 且 $\bigcup_{j=1}^{\text{最小值}\{i,n\}} \bigcup_{I \in \mathcal{I}_j^i} A_I$ 给出了所有 $(\mathbb{P}, \pi)$-权重为 i 的向量。

因此

$$|B_r(u)| = 1 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\min\{i,n\}} \sum_{I \in \mathcal{I}_j^i \neq \varnothing} |A_I| = 1 + \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\min\{i,n\}} \sum_{I \in \mathcal{I}_j^i \neq \varnothing} m^{\sum_{t \in I^* \setminus M(I)^*} k_t} \prod_{l=1}^{j} N_{a_l}.$$

3.2 I-球

设 $(\mathbb{P}, \pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，且 I 是 M 的子多重集。对于 $u \in \mathbb{Z}_m^n$，以 u 为中心的 I-球定义为

$$B_I(u) = \left\{ v \in \mathbb{Z}_m^n : supp_{(L,\pi)}(u - v) \subseteq I \right\}.$$

对于 $I \in \mathcal{I}(\mathbb{P})$，以 u 为中心的 I-球等于集合

$$B_I(u) = \left\{ v \in \mathbb{Z}_m^n : \langle supp_{(L,\pi)}(u - v) \rangle \subseteq I \right\}.$$

类似地，以 u 为中心的 I-球面定义为

$$S_I(u) = \left\{ v \in \mathbb{Z}_m^n : \langle supp_{(L,\pi)}(u - v) \rangle = I \right\}.$$

我们用 B_I 表示以 $\bar{0}$ 为中心的 I-球（分别地，I-球面）。必要时，我们将使用记号 $B_{I,(\mathbb{P},\pi)}(u)$（分别地，$S_{I,(\mathbb{P},\pi)}(u)$），而不使用 $B_I(u)$（分别地，$S_I(u)$）。

定义 3. 设 $(\mathbb{P}, \pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，且 I 是 $\mathbb{P}$ 的一个理想。若 $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_m^n$ 的码字为中心的 I-球两两不相交，且它们的并集为 $\mathbb{Z}_m^n$，则称该码为 I-完美码，即

$$\mathbb{Z}_m^n = \bigsqcup_{u \in \mathcal{C}} B_I(u).$$

下面的命题是对 [9, 命题 3] 的推广，其中考虑的度量是偏序集度量。证明思路类似，因此省略。

命题 3.1. 设 $(\mathbb{P}, \pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构。若 I 是 $\mathbb{P}$ 中的全计数理想，则

(1) B_I 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 的子模，其维数为 $\sum_{i\in I^*} k_i$。

(2) 对于 $u \in \mathbb{Z}_m^n$，$B_I(u)$ 是包含 u 的 B_I 的陪集，即 $B_I(u) = u + B_I$。

(3) 对于 u，$v \in \mathbb{Z}_m^n$，$B_I(u)$ 和 $B_I(v)$ 要么不相交，要么相同。此外

$$B_I(u) = B_I(v) \text{ if and only if } supp_{(L,\pi)}(u - v) \subseteq I.$$

(4) $B_{I^c,\ \widetilde{\mathbb{P}}} = B_{I,\ \mathbb{P}}^{\perp}$ 其中 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 是 $\mathbb{P}$ 的对偶偏序集。

注 3.1. (a) 以 $u \in \mathbb{Z}_m^n$ 为中心、半径为 r 的 $(\mathbb{P}, \pi)$-球是以 u 为中心且具有 $I \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$ 的 I-球的并集，即

$$B_r(u) = \bigcup_{I\in\mathcal{I}^r(\mathbb{P})} B_I(u).$$

(b) 设 u，v 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 中的两个向量。若对于某个具有满计数的 $I \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$，$u$ 和 v 属于同一个 I-球，则 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u, v) \leq r$。

(c) 设 u，v 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 中的两个向量，并设 I 是具有部分计数的 $\mathbb{P}$ 的理想。若 $B_I(u) \cap B_I(v) = \emptyset$，则不等式 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u, v) > |I|$ 不一定成立。

根据 I-完美码的定义，可以很容易得到以下结果，这与偏序块度量的情形类似（见 [3], 引理 4.1）。

引理 3.1. 设 $(\mathbb{P}, \pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构。设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_m^n$ 是一个线性 (n, m^k, d) $(\mathbb{P}, \pi)$-码，且 I 是 $\mathbb{P}$ 的一个满计数理想。那么以下命题等价：

(1) $\mathcal{C}$ 是一个 I-完美码；

(2) $\sum_{i\in I^*} k_i = n - k$ 和 $|\mathcal{C} \cap B_I| = 1$；

(3) 对所有 $u \in \mathbb{Z}_m^n$，$|\mathcal{C} \cap B_I(u)| = 1$。

将 $u \in \mathbb{Z}_m^n$ 写作 (u_1, u_2)，其中 $u_1 \in \bigoplus_{j\notin I^*} V_j$ 且 $u_2 \in \bigoplus_{i\in I^*} V_i$，可得以下结果。

命题 3.2. 设 $(\mathbb{P}, \pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，且 I 是具有满计数的 $\mathbb{P}$ 的理想。那么，一个 (n, m^k, d) $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C}$ 是 I-完全的，当且仅当存在一个函数

$$f : \bigoplus_{j\notin I^*} V_j \to \bigoplus_{i\in I^*} V_i$$

使得

$$\mathcal{C} = \left\{ (v, f(v)) : v \in \bigoplus_{j\notin I^*} V_j \right\}.$$

证明。设 $\mathcal{C}$ 是一个 I-完美 (n, m^k, d)-码。那么，对于任意 $v \in \underset{j\notin I^*}{\oplus} V_j$，存在 $c \in \mathcal{C}$ 使得 $(v, \bar{0}) \in B_I(c)$，这意味着 $c-(v, \bar{0}) = (\bar{0}, u)$，因此 $c = (v, u)$。假设还存在另一个元素 $c' = (v, w) \in \mathcal{C}$。那么 $c - c' = (\bar{0}, u-w) \in B_I$，这意味着 $c \in B_I(c')$，与 $\mathcal{C}$ 是 I-完美的事实矛盾。因此，将 $v \in \underset{j\notin I^*}{\oplus} V_j$ 映射到满足 $c = (v, u)$ 的唯一 $u \in \underset{i\in I^*}{\oplus} V_i$ 的函数 $f: \underset{j\notin I^*}{\oplus} V_j \to \underset{i\in I^*}{\oplus} V_i$ 是定义良好的。此外，$\left|\underset{j\notin I^*}{\oplus} V_j\right| = m^k = |\mathcal{C}|$。我们有 $\mathcal{C} = \left\{(v, f(v)) : v \in \underset{j\notin I^*}{\oplus} V_j\right\}$。

另一方面，如果存在这样的函数，那么对于任意 $(u, v) \in \mathbb{Z}_m^n$，$\mathcal{C} \cap B_I(v, u) = \{(v, f(v)\}$。由引理 3.1 可得，$\mathcal{C}$ 是 I-完美的。 □

定理 2. 设 $(\mathbb{P}, \pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，且 I 是 $\mathbb{P}$中的一个全计数理想。线性 (n, m^k, d) $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C}$ 是 I- 完美的，当且仅当 $\mathcal{C}^\perp$ 是一个 I^c- 完美的 $(\widetilde{\mathbb{P}}, \pi)$- 码，其中 $\widetilde{\mathbb{P}}$ 是 $\mathbb{P}$ 的对偶偏序集。

~证明. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 I-完美的 $(\mathbb{P}, \pi)$-码。由引理 3.1，I^c 是 $\mathbb{P}$ 中的一个全计数理想，并满足 $\sum k_i = k$。考虑以 $\bar{0} \in \mathcal{C}^\perp$为中心的 I^c-球。如果在 B_{I^c}中存在另一个元素 $\bar{0} \neq c \in \mathcal{C}^\perp{}_{i\in I^{c*}}$，$(\widetilde{\mathbb{P}}, \pi)$，那么由命题 3.1 可得 $c \in B_{I,(\mathbb{P},\pi)}^\perp$。令 $v \in \mathbb{Z}_m^n$。由于 $\mathcal{C}$ 是一个 I-完美码，存在唯一的 $c' \in \mathcal{C}$ 使得 $v \in B_{I,(\mathbb{P},\pi)}(c')$，这意味着对于某些 $u \in B_{I,(\mathbb{P},\pi)}$，有 $v = c' + u$。因此，$c \cdot v = c \cdot c' + c \cdot u = 0$。由于 v 是任意的，我们有 $c = \bar{0}$。因此，$\left|\mathcal{C}^\perp \cap B_{I^c,(\widetilde{\mathbb{P}},\pi)}\right| = 1$，故由引理 3.1 可知 $\mathcal{C}^\perp$ 是 I^c- 完美的。

□

定理 3. 设 $\mathcal{C}$ 是一个 r 纠错 $(\mathbb{P}, \pi)$-码，其中 $r \in \mathbb{N}$ 是 $\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$的倍数。那么对于任意的 $c, c' \in \mathcal{C}$, $c \neq c'$ 以及具有满计数的 $I, I' \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$，有 $c - c' \notin B_{I\oplus I'}$。

证明. 假设存在具有满计数的 $c, c' \in \mathcal{C}$, $c \neq c'$ 以及 $I, I' \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$，满足 $c - c' \in B_{I\oplus I'}$。记 $p_{B_{I^*}}$ 为 $\mathbb{Z}_m^n$ 在与 I^* 对应的块上的投影，并取 $u = c - p_{B_{I^*}}(c - c') \in \mathbb{Z}_m^n$。那么

$$d_{(\mathbb{P},\pi)}(u, c) = w_{(\mathbb{P},\pi)}(p_{B_{I^*}}(c - c')) \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot |I^*| = |I| = r.$$

同理，我们有

$$d_{(\mathbb{P},\pi)}(u, c') = w_{(\mathbb{P},\pi)}\left((c - c') - p_{B_{I^*}}(c - c')\right) \leq w_{(\mathbb{P},\pi)}\left(p_{B_{I'^*}}(c - c')\right) \leq |I'^*| \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = |I'| = r.$$

这意味着 $u \in B_r(c) \cap B_r(c')$，这与 $\mathcal{C}$ 是 r 纠错的事实矛盾。 □

定理 4. 设 $\mathcal{C}$是一个 $(\mathbb{P}, \pi)$-码。若对任意 $c, c' \in \mathcal{C}$, $c \neq c'$和 $I, I' \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$，都有 $c - c' \notin B_{I\oplus I'}$。则 $\mathcal{C}$ 是 r-纠错的。

证明. 假设 $\mathcal{C}$ 不是一个 r-纠错码。那么存在 $c, c' \in \mathcal{C}$, $c \neq c'$ 和 $u \in \mathbb{Z}_m^n$，使得 $u \in B_r(c) \cap B_r(c')$。由于 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u, c) \leq r$ 且 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u, c') \leq r$，我们有 $|\langle supp_{(L,\pi)}(u-c)\rangle| \leq r$且 $|\langle supp_{(L,\pi)}(u-c')\rangle| \leq r$。因此，根据命题 8，存在 $I, I' \in I^r(\mathbb{P})$，使得 $\langle supp_{(L,\pi)}(u-c)\rangle \subseteq I$ 且$\langle supp_{(L,\pi)}(u-c')\rangle \subseteq I'$。于是

$$supp_{(L,\pi)}(c-c') = supp_{(L,\pi)}(c-u+u-c') \subseteq supp_{(L,\pi)}(c-u) \oplus supp_{(L,\pi)}(u-c') \subseteq I \oplus I'.$$

这意味着 $c - c' \in B_{I\oplus I'}$，矛盾。 □

根据 r-球和 I-球的定义，可以很容易地得到以下结论。

命题 3.3. 设 $\mathbb{P}$ 是 $M = \left\{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor /1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor /2, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor /s\right\}$ 上的一个偏序集，且 $(\mathbb{P}, \pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的一个偏序集分块结构，使得 $\mathcal{I}^r(\mathbb{P}) = \{I\}$。设 $\mathcal{C}$ 是一个 $(\mathbb{P}, \pi)$-码。那么，$\mathcal{C}$ 是一个 r-完美 $(\mathbb{P}, \pi)$-码，当且仅当 $\mathcal{C}$ 是一个 I-完美 $(\mathbb{P}, \pi)$-码。

本节余下部分中，我们考虑 $\mathbb{P}$ 的一个具有部分计数的理想。在此之前，我们先给出 t 为正整数时 $\mathbb{Z}_m^t$ 的划分的一些基本事实。

设 $\epsilon \in \left[\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1\right]$。设 $E = [-\epsilon, \epsilon]$ 和 $E' = \{\epsilon+1, \epsilon+2, \ldots, m-\epsilon-1\}$。令

$$S = \left\{v = (v_1, \ldots, v_t) \in \mathbb{Z}_m^t : v_i \in E \text{ for } 1 \leq i \leq t\right\}.$$

设 $u = (u_1, \ldots, u_t) \in S \setminus \{\bar{0}\}$。取满足条件的 $w = (w_1, \ldots, w_t) \in S$

$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{if } u_i = 0, \\ \epsilon - (u_i - 1), & \text{if } 1 \leq u_i \leq \epsilon, \\ -\epsilon - (u_i + 1), & \text{if } -\epsilon \leq u_i \leq -1. \end{cases}$$

那么至少存在一个 $j \in [t]$，使得 $u_j + w_j \in E'$。因此 $u + w \notin S$。另一方面，我们有 $u + w \in u + S$ 和 $u \in u + S$。由此得到以下结果。

命题 3.4. 设 $u \in S \setminus \{\bar{0}\}$。那么 $S \cap (u + S) \neq \emptyset$ 和 $S \neq u + S$。

假设 m 可被 $2\epsilon + 1$整除。令

$$T = \left\{v = (v_1, \ldots, v_t) \in \mathbb{Z}_m^t : v_i = t_i(2\varepsilon+1),\ 0 \leq t_i \leq \frac{m}{2\epsilon+1} - 1 \text{ for } 1 \leq i \leq t\right\}.$$

已知当 $1 \leq i \leq \frac{m}{2\varepsilon+1} - 1$时，对于所有 $\beta \in E$， $i(2\epsilon+1) + \beta \notin E$。另已知$i(2\epsilon+1) + E$与 $j(2\epsilon+1) + E$ 不相交，其中 $0 \leq i \neq j \leq \frac{m}{2\varepsilon+1} - 1$ （见 [9]）。

引理 3.2. 假设 m 能被 $2\epsilon + 1$ 整除。那么我们有以下结论：

(1) 对任意 $v \in S$ 和 $\bar{0} \neq u \in T$，我们有 $v+u \notin S$。
(2) 设 $u \neq w \in T$，我们有 $u+S$ 与 $w+S$ 不相交。此外，$\bigsqcup (u+S) = \mathbb{Z}_m^t$.$u \in T$

证明。(1) 设 $v = (v_1, \ldots, v_t) \in S$，且 $\bar{0} \neq u = (u_1, \ldots, u_t) \in T$。那么存在 $i \in [t]$，使得$u_i = t_i(2\epsilon+1) \neq 0$。注意到$1 \leq t_i \leq \frac{m}{2\varepsilon+1} - 1$。由 $v_i + u_i = v_i + t_i(2\epsilon+1) \notin E$ 可得$u+v \notin S$。

(2) 设 $u = (u_1, \ldots, u_t)$ $w = (w_1, \ldots, w_t) \in T$。假设 $(u+S) \cap (w+S) \neq \emptyset$。那么存在$v = (v_1, \ldots, v_t) \in S$ 和 $v' = (v'_1, \ldots, v'_t) \in S$，使得 $u+v = w+v'$。由于 $u \neq w$，存在$i \in [t]$ 使得 $u_i \neq w_i$。因此 $u_i + v_i = w_i + v'_i$，这与 $u_i + E$ 和$w_i + E$ 不相交的事实矛盾。于是结论成立。

□

推论 3.1。如果 m 不能被 $2\epsilon+1$ 整除，那么 S 的平移集不能构成 $\mathbb{Z}_m^t$ 的划分。

现在令 $I \in \mathcal{I}(\mathbb{P})$ 为一个部分计数理想。假设 $I_p = \{l_1, l_2, \ldots, l_\lambda\} \subseteq I^*$ 是 I^* 中在 I 中具有部分计数的元素的集合，并假设 $I_f = \{r_1, r_2, \ldots, r_\delta\}$ 是 I^* 中在 I 中具有满计数的元素的集合。那么 $\lambda + \delta = |I^*|$。由于 pomset块度量是平移不变的，也就是说，对于所有 u、v、$w \in \mathbb{Z}_m^n$、$d_{(\mathbb{P},\pi)}(u$、$v) = d_{(\mathbb{P},\pi)}(u+w$、$v+w)$，我们有 $B_I(u) = u + B_I$。注意，

$$\begin{aligned} B_I \quad = \quad & \{v = (v_1, v_2, \ldots, v_s) \in \mathbb{Z}_m^n : v_t = \bar{0} \text{ if } t \notin I^*; \\ & -a \leq v_{t_j} \leq a, a = C_I(t), 1 \leq j \leq k_t \text{ if } t \in I_p; \\ & v_{t_j} \in \mathbb{Z}_m, 1 \leq j \leq k_t, \text{ if } t \in I_f \big\} \end{aligned} \tag{3.1}$$

因此

$$|B_I| = (1+2C_I(l_1))^{k_{l_1}} (1+2C_I(l_2))^{k_{l_2}} \cdots (1+2C_I(l_\lambda))^{k_{l_\lambda}} m^{\sum\limits_{j \in I_f} k_j}.$$

注 3.2. 由 (3.1) 可知，B_I 不是 $\mathbb{Z}_m^n$ 的子群。

采用上述记号，我们有如下结果，该结果可通过计数论证轻松得到。

定理 5. 如果 m 可被 $2C_I(l_i)+1$ 整除，对于所有 $l_i \in I_p$，那么以.....中的元素为中心的 I-球

$$\begin{aligned} D \quad = \quad & \{v = (v_1, v_2, \ldots, v_s) \in \mathbb{Z}_m^n : v_t = \bar{0} \text{ if } t \in I_f; \\ & v_{t_i} = j(2C_I(t)+1), 0 \leq j \leq \frac{m}{2C_I(t)+1} - 1, 1 \leq i \leq k_t \text{ if } t \in I_p; \\ & v_{t_i} \in \mathbb{Z}_m, 1 \leq i \leq k_t, \text{ if } t \in [s] \setminus I^* \} \end{aligned}$$

将空间 $\mathbb{Z}_m^n$划分。此外，我们有 $|D| = \prod_{t\in I_p} \left(\binom{m}{t()+1}_{2C_I}\right)^{k_t} m^{\sum_{i\in[s]\setminus I^*} k_i}$。

推论 3.2. 若对于某个 $j \in I_p$， m 不被 $2C_I(j) + 1$ 整除，则不存在任何一族 I-球能够划分 $\mathbb{Z}_m^n$。

注 3.3. 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_m^n$ 是一个 (n, K, d) $(\mathbb{P}, \pi)$-码。

(1) 若 $\mathcal{C}$ 是一个 r-完美码，则对于任意 $I \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$，以 $\mathcal{C}$ 的码字为中心的 I-球彼此不相交。

(2) 若一个 $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C}$ 对于某个具有部分计数的 $I \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$ 是 I-完美码，我们不能保证 $\mathcal{C}$ 是 r-完美码，因为可能存在一个具有部分计数的理想 $I' \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$，以及 $u, v \in \mathcal{C}$，使得 $B_{I'}(u) \cap B_{I'}(v) \neq \emptyset$（例 3.1 将说明一个反例）。

(3) 设 m 是素数，且 I 是 $\mathbb{P}$ 中具有部分计数的理想，则对于任意具有部分计数的 $I \in \mathcal{I}(\mathbb{P})$， $\mathcal{C}$ 都不可能是 I-完美的 $(\mathbb{P}, \pi)$。

例 3.1. 设 $\mathbb{P} = (M, R)$ 是一个偏序集，其中 $M = \{3/1, 3/2\}$ 和

$$R = \{(9/(3/1, 3/1), 9/(3/2, 3/2)\}.$$

设 π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1) = 2$ 和 $\pi(2) = 1$。对于 $I = \{1/1, 3/2\}$，根据上述讨论，我们可以找到一个 I-完美的 $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C} = \{(0, 0, 0), (3, 0, 0), (0, 3, 0), (3, 3, 0)\} \subseteq \mathbb{Z}_6^2$。考虑 $I' = \{2/1, 2/2\} \in \mathcal{I}^4(\mathbb{P})$。我们注意到 $(2, 1, 0) \in B_{I'}((3, 0, 0)) \cup B_{I'}((0, 3, 0))$。由于$B_r(u) = \bigcup B_I(u)$， $\mathcal{C}$ 不是 4-完美的。如果 $\mathbb{P}$ 是一个序关系为 $3/2\ R\ 3/1$的链偏序集，那么$_{I\in\mathcal{I}^r(\mathbb{P})}\mathcal{I}^4(\mathbb{P}) = \{I\}$，并且 $\mathcal{C}$ 现在是一个 4- 完美的 $(\mathbb{P}, \pi)$- 码。

Here 是一个 r-完美码的例子，但对于任何具有偏序 cou 的 I，它都不是 I-完美码 nt.

例 3.2. 设 $\mathbb{P} = (M, R)$ 是一个偏序集，其中 $M = \{2/1, 2/2\}$ 和

$$R = \{(4/(2/1, 2/1), 4/(2/2, 2/2)\}.$$

设 π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1) = \pi(2) = 1$。设 $r = 1$。我们有 $\mathcal{I}^1(\mathbb{P}) = \{I_1, I_2\}$，其中 $I_1 = \{1/1\}$, $I_2 = \{1/2\}$。于是 $B_1(\bar{0}) = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (0, 4), (4, 0)\}$。考虑 $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C} = \{(0, 0), (1,2),(2,4),(3,1),(4,3)\} \subseteq \mathbb{Z}_5^2$。容易验证， $\mathcal{C}$ 是 1-完美码。另一方面，根据上述关于部分计数的讨论，对于任意 $I \in \mathcal{I}(\mathbb{P})$， $\mathcal{C}$ 都不可能是 I-完美的。

3.3 最大距离可分 $(\mathbb{P},\pi)$-码

定理 6。（辛格尔顿界）设 $(\mathbb{P},\pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，且 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_m^n$ 是一个 (n,K,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码。记 $r=\left\lfloor\frac{d-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor$。则

$$n-\lceil\log_m K\rceil\geq\max_{I\in\mathcal{I}(\mathbb{P}),|I^*|=r}\sum_{i\in I^*}k_i. \tag{3.2}$$

证明。设 $I\in\mathcal{I}(\mathbb{P})$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个理想，且满足 $|I^*|=r$。我们可以假设 I 是满计数；否则，可以将 I 中部分计数的极大元的计数增加至$\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$。取 $u,v\in\mathcal{C}$。若对所有 $i\in[s]\setminus I^*$ 都有 $u_i=v_i$，则 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,v)\leq|I|\leq d-1$，这就产生了矛盾。这意味着 $\mathcal{C}$ 中任意两个不同的码字至少在 I^* 之外的一个位置上不同。因此，存在一个从$n-\sum_{i\in I^*}k_i\mathcal{C}$到$\mathbb{Z}_m$的单射，这意味着$\log_m K\leq n-\sum_{i\in I^*}k_i$。因此$\lceil\log_m K\rceil\leq n-\sum_{i\in I^*}k_i$。由此，我们得到不等式 (3.2)。

□

注 3.4. 注意，当 $k_i=1$ 对所有 $1\leq i\leq s$成立时，不等式 (3.2) 将变为

$$n-\lceil\log_m K\rceil\geq\left\lfloor\frac{d-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor.$$

这就是偏序集码的辛格尔顿界，参见 *[9, 定理 2]*。

定义 4. 设 $(\mathbb{P},\pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构。如果一个 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}$ 达到了辛格尔顿界，则称其为最大距离可分（MDS）$(\mathbb{P},\pi)$-码。

例 3.3. 设 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是 $M=\{2/1,2/2,2/3,2/4\}$ 上的偏序集，并且

$$R=\{4/(2/1,2/1),4/(2/2,2/2),4/(2/3,2/3),4/(2/4,2/4),4/(2/1,2/2),4/(2/3,2/4)\}.$$

设 π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1)=\pi(3)=1$ 以及 $\pi(2)=\pi(4)=2$。考虑由以下矩阵生成的 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_5^6$：

$$\begin{pmatrix}1&0&2&2&0&1\\0&2&4&1&1&0\end{pmatrix}.$$

那么，码 $\mathcal{C}$是一个长度为 6 的线性 $(\mathbb{P},\pi)$-码，具有 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C})=7$。我们有 $\left\lfloor\frac{d-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor=3$。满足 $|I^*|=3$ 的 $\mathbb{P}$ 中的理想为

$$\Big\{\{2/1,1/2,1/3\},\{2/1,1/2,2/3\},\{2/1,2/2,1/3\},\{2/1,2/2,2/3\},$$
$$\{1/1,2/3,1/4\},\{1/1,2/3,2/4\},\{2/1,2/3,1/4\},\{2/1,2/3,2/4\}\Big\}.$$

Thus

$$\max_{I\in\mathcal{I}(\mathbb{P}),|I^*|=3}\sum_{i\in I^*}k_i=4=n-k.$$

因此， $\mathcal{C}$ 是一个 MDS码。

注 3.5. 设 $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分 (n,K,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码。注意，总存在一个基数为 $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\cdot\left\lfloor\frac{d-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor$、满足 $\sum_{i\in I^*}k_i=n-\lceil\log_m K\rceil$ 且计数满的理想 $I\in\mathcal{I}(\mathbb{P})$。否则，假设 $I\in\mathcal{I}(\mathbb{P})$ 是一个部分计数理想，且满足 $\sum k_i=n-\lceil\log_m K\rceil$。通过增加 I 中具有部分计数的极大元的计数，可以得到一个计数满的理想 J，其基数为 $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\cdot\left\lfloor\frac{d-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor$，并满足 $\sum_{i\in I^*}k_i=n-\lceil\log_m K\rceil$。

设 m 为素数，即 $\mathbb{Z}_m$ 是一个域。设 $\mathcal{C}$ 为一个线性 (n,m^k,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码。 $\mathcal{C}$ 的生成矩阵 G 和校验矩阵 H 的定义与经典情形相同。校验矩阵 H 可视为 $H=[H_1\ H_2\ \cdots\ H_s]$，其中 H_i 是一个 $(n-k)\times k_i$ 矩阵。若对于 $\alpha_i\in V_{l_i}$，集合 $H_{l_1},H_{l_2},\ldots,H_{l_r}$ 中的各块满足

$$H_{l_1}\alpha_1+H_{l_2}\alpha_2+\cdots+H_{l_r}\alpha_r=\bar{0}$$

可推出对所有 $i\in[r]$ 均有 $\alpha_i=\bar{0}$。否则，块集合 $H_{l_1},H_{l_2},\ldots,H_{l_r}$ 称为线性相关。

设 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是定义在多重集 $M=\left\{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/2,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/s\right\}$ 上的偏序集。我们可以定义一个相应的偏序集 P，其底集为 $\{1,\ldots,s\}$，序关系由下式给出

$$a\le b\text{ in }P\text{ if and only if }p/a\ R\ q/b\text{ in }\mathbb{P}.$$

给定子集 $Q\subseteq[s]$，我们用 $<Q>_P$ 表示包含 Q的 P的最小理想。采用这些记号，我们有以下结论。

定理7. 设 m为素数。设 $\mathcal{C}$为线性 (n,m^k,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码，且 H为 $\mathcal{C}$的校验矩阵。那么， $\mathcal{C}$ 有一个码字 c，使得 $\left|\langle supp_{(L,\pi)}(c)\rangle^*\right|=t$，当且仅当存在 $\mathbb{P}$ 的一个理想I，满足 $|I^*|=t$，且 H 中对应于 I^* 的块线性相关。

证明. 设 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_s)\in\mathcal{C}$满足 $\left|\langle supp_{(L,\pi)}(c)\rangle^*\right|=t$。设 $I=\langle supp_{(L,\pi)}(c)\rangle$。那么，对于 $i\in M(I)^*$，有 $c_i\neq\bar{0}$；对于 $i\notin I^*$，有 $c_i=\bar{0}$。由此可得

$$H_1c_1+H_2c_2+\cdots+H_sc_s=\bar{0}$$

H 对应于 I^* 的块是线性相关的。

另一方面，我们假设块集 H_{l_1}、H_{l_2}、...、H_{l_λ} 是线性相关的，并且假设存在 $0 \neq \alpha_{l_i} \in V_{l_i}$ 使得

$$H_{l_1}\alpha_{l_1} + H_{l_2}\alpha_{l_2} + \cdots + H_{l_j}\alpha_{l_\lambda} = \bar{0}.$$

令 I 为一个理想l，其根集为 $I^* =< \{l_1, \ldots, l_\lambda\} >_P$。取 $c = (c_1, c_2, \ldots, c_s) \in \mathbb{Z}_m^n$ 使得

$$c_{l_i} = \begin{cases} \alpha_{l_i}, & \text{if } i \in [\lambda], \\ \bar{0}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

于是 $Hc = \bar{0}$，这意味着 $c \in \mathcal{C}$。此外，$\langle supp_{(L,\pi)}(c)\rangle^* = I^*$。证明至此完成。 □

推论 3.3. 设 m 为一个素数。设 $\mathcal{C}$ 为一个线性 $(\mathbb{P}, \pi)$-码，并设 H 为 $\mathcal{C}$的校验矩阵。那么

$$\min\left\{\left|\langle supp_{(L,\pi)}(c)\rangle^*\right|,\ c \in \mathcal{C}\right\} = t$$

当且仅当

$$t = \min\left\{j : I \in \mathcal{I}(\mathbb{P})\ satisfies\ |I^*| = \{l_1, \ldots, l_j\},\ rank\{H_{l_1}, \ldots, H_{l_j}\} < \sum_{i=1}^{j} k_{l_i}\right\}.$$

由于

$$\left\lfloor \frac{d}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\rfloor \leq \min\left\{\left|\langle supp_{(L,\pi)}(c)\rangle^*\right|,\ c \in \mathcal{C}\right\},$$

我们有如下结论。

注记 3.6. 设 m 是一个素数。设 $\mathcal{C}$ 是一个线性 $(\mathbb{P}, \pi)$-码，且 H 是 $\mathcal{C}$ 的校验矩阵。那么

$$\left\lfloor \frac{d}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\rfloor \leq \min\left\{j : I \in \mathcal{I}(\mathbb{P})\ satisfies\ |I^*| = \{l_1, \ldots, l_j\},\ rank\{H_{l_1}, \ldots, H_{l_j}\} < \sum_{i=1}^{j} k_{l_i}\right\}$$

由推论 3.3 可知。等式成立当且仅当 d 能被 $\lfloor \frac{m}{2} \rfloor$整除。

定理 8. 设 $(\mathbb{P}, \pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，且 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_m^n$ 是一个$\left[\frac{n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}, k, d\right]$ $(\mathbb{P}, \pi)$-码。那么，$\mathcal{C}$ 是最大距离可分 $(\mathbb{P}, \pi)$-码，当且仅当对于某些满计数的理想 $I \in \mathcal{I}^{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\rfloor}$，$\mathcal{C}$ 是 I-完美的。

证明。设 $\mathcal{C}$是一个最大距离可分的 $(\mathbb{P}, \pi)$-码。记为 $r = \left\lfloor \frac{d-1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\rfloor$。则

$$n - k = \max_{I \in \mathcal{I}(\mathbb{P}), |I^*| = r} \sum_{i \in I^*} k_i.$$

设 I 是 $\mathbb{P}$ 的一个具有满计数的理想，其基数为 $r \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$，满足 $n-k = \sum k_i$。假设存在 $i \in I^*$ 两个码字 c、$c' \in \mathcal{C}$，使得以 c 和 c' 为中心的 I-球有非空交集。由命题 3.1 可知，$B_I(c) = B_I(c')$。于是 $c \in B_I(c')$，这意味着 $\langle supp_{(L,\pi)}(c-c') \rangle \subseteq$

I。因此

$$d_{(\mathbb{P},\pi)}(c,c') \leq |I| = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{d-1}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot \frac{d-1}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} = d-1,$$

矛盾。因此，以 $\mathcal{C}$ 中不同码字为中心的任意两个 I 球互不相交。因此，$\bigsqcup B_I(c)$ 是一个不交并，且包含 $|\mathcal{C}| \cdot |B_I| = m^n$ 个元素，这意味着 $\mathcal{C}$ 是 I-完美的。$c \in \mathcal{C}$

反过来，设 $\mathcal{C}$ 是某个具有满计数的 $I \in \mathcal{I}^{r \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ 的 I-完美码。由引理 3.1 可得 $\sum k_i = n-k$，因此 $i \in I^*$

$$\max_{I \in \mathcal{I}(\mathbb{P}), |I^*|=r} \sum_{i \in I^*} k_i = n-k$$

证明完毕。 □

注 3.7. 一个 (n, m^k, d) 最大距离可分 $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C}$ 对所有具有满计数且满足以下条件的 $I \in \mathcal{I}^r(\mathbb{P})$ 都是 I-完美的：$\sum_{i \in I^*} k_i = n-k$，其中 $r = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{d-1}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \right\rfloor$。

由于具有部分计数的 $\mathbb{P}$ 理想总是包含于具有满计数的 $\mathbb{P}$ 理想中，因此有如下结论。

推论 3.4. 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_m^n$ 是一个 (n, K, d) $(\mathbb{P}, \pi)$-码。设 I 是 $\mathbb{P}$ 的一个理想，且满足 $|I^*| = \left\lfloor \frac{d-1}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \right\rfloor$。那么，以 $\mathcal{C}$ 的码字为中心的 I-球两两不相交。

这里给出一个例子，说明存在一个 $(\mathbb{P}, \pi)$-码，它是最大距离可分的，但对于任何具有部分计数的 $I \in \mathcal{I}(\mathbb{P})$，都不是 I-完美的。

例 3.4. 设 $\mathbb{P} = (M, R)$ 是一个偏序集，其中 $M = \{2/1, 2/2\}$ 和

$$R = \{(4/(2/1, 2/1), 4/(2/2, 2/2), 4/(2/2, 2/1)\}.$$

设 π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1) = 2$ 且 $\pi(2) = 1$。考虑由以下矩阵生成的 $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_5^3$：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

那么，码 $\mathcal{C}$ 是定义在 $\mathbb{Z}_5$ 上的长度为 3 的线性 $(\mathbb{P}, \pi)$-码，具有 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}) = 3$。我们有 $\left\lfloor \frac{d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C})-1}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \right\rfloor = 1$。满足条件 $|I^*| = 1$ 的 $\mathbb{P}$ 的理想为 $I_1 = \{1/2\}$和 $I_2 = \{2/2\}$，这意味着 $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分

$(\mathbb{P},\pi)$-码。 $\mathbb{P}$ 中的部分计数理想为 $I_1=\{(1/2)\}$ 和 $I_2=\{1/1,2/2\}$。不难验证，以 $\mathcal{C}$ 中的码字为中心的 I_1-球两两不相交，且 I_1-球的并集包含 75 个元素。取 $u=(0,1,3)$ 和 $v=(1,2,0)\in\mathcal{C}$。显然， $B_{I_2}(u)\cap B_{I_2}(v)\neq\phi$。因此，对于具有部分计数的 $\mathbb{P}$ 的任意理想 I，码 $\mathcal{C}$ 不是 I-完美码。

如果 I 是具有部分计数的 $\mathbb{P}$ 的理想，那么 I-完美码不一定是最大距离可分码，正如我们将在下一个例子中看到的那样。

例3.5. 设 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是一个偏序集，其中 $M=\{3/1,3/2\}$ 和

$$R=\{(9/(3/1,3/1),9/(3/2,3/2)\}.$$

设 π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1)=1$ 且 $\pi(2)=2$。考虑由 $\mathcal{C}=\{(0,0,0),(0,3,0),(0,0,3),(0,3,3)\}$ 定义的 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_6^3$。考虑 $\mathbb{P}$ 的一个具有部分计数的理想 $I=\{3/1,1/2\}$。容易验证， $\mathcal{C}$ 是 I-完美的。另一方面，我们有 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C})=3$。那么 $\left\lfloor \frac{d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}-1)}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor=0$。因此， $\mathcal{C}$不是最大距离可分码。

例3.6. 设 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是一个偏序集，其中 $M=\{3/1,3/2\}$ 和

$$R=\{(9/(3/1,3/1),9/(3/2,3/2),9/(3/1,3/2)\}.$$

设 π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1)=\pi(2)=1$。考虑由 $\mathcal{C}=\{(0,0),(1,3)\}$ 定义的 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_6^2$。考虑具有部分计数的 $\mathbb{P}$ 的 $I=\{3/1,1/2\}$。不难验证，$\mathcal{C}$是 I-完美的。注意， $d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C})=6$。那么 $\left\lfloor \frac{d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}-1)}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor=1$。满足 $|I^*|=1$的 $\mathbb{P}$的理想为$I_1=\{1/1\}$ 和 $I_2=\{2/1\}$。因此， $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分 $(\mathbb{P},\pi)$-码。

通过比较例 3.5 和例 3.6，我们推测，偏序集为链可能是 I-完美码成为 MDS码的必要条件。我们将在后文证明这一猜想（定理11）。

4 对偶与重量分布

本节考虑所有块的维数相同时，(n,K,d) 最大距离可分 $(\mathbb{P},\pi)$-码的情形。设 $(\mathbb{P},\pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，且 $k_1=k_2=\cdots=k_s=t$。那么辛格尔顿界变为

$$n-\lceil\log_m K\rceil\geq t\cdot\left\lfloor\frac{d-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor. \tag{4.1}$$

4.1 对偶

接下来，我们刻画所有块的维数相同时的 (n, K, d) 最大距离可分 $(\mathbb{P}, \pi)$-码。

定理 9. 设 $\mathbb{P}$ 是 $M = \left\{ \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor /1, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor /2, \ldots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor /s \right\}$ 上的偏序集，$\widetilde{\mathbb{P}}$ 是其在 M 上的对偶偏序集。设 π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 上的标记，其中 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = t$，且 $\mathcal{C}$ 是一个线性 (n, m^k, d) $(\mathbb{P}, \pi)$- 码。以下陈述等价:

(1) $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分 $(\mathbb{P}, \pi)$-码;

(2) 对所有具有满计数的 $I \in \mathcal{I}^{\frac{n-k}{t} \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}(\mathbb{P})$，$\mathcal{C}$ 都是一个 I-完美 $(\mathbb{P}, \pi)$-码;

(3) 对所有具有满计数的 $I \in \mathcal{I}^{\frac{k}{t} \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor}(\widetilde{\mathbb{P}})$，$\mathcal{C}^{\perp}$ 都是一个 I-完美 $(\widetilde{\mathbb{P}}, \pi)$-码;

(4) $\mathcal{C}^{\perp}$ 是一个最大距离可分（$\widetilde{\mathbb{P}}, \pi$）码;

(5) 对于任意一个理想 I，其满计数为 $\mathbb{P}$ 和 $x \in \mathbb{Z}_m^n$,

$$|B_I(x) \cap \mathcal{C}| = \begin{cases} m^{tl-n+k}, & \text{if } |I| = l \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \geq \frac{n-k}{t} \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor, \\ 1, & \text{if } |I| = l \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < \frac{n-k}{t} \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \text{ and } x \in \bigcup\limits_{c \in \mathcal{C}} B_I(c), \\ 0, & \text{if } |I| = l \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < \frac{n-k}{t} \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \text{ and } x \notin \bigcup\limits_{c \in \mathcal{C}} B_I(c). \end{cases} \tag{4.2}$$

证明。(1) $\Leftrightarrow$ (2)由定理 8 得出，(2) $\Leftrightarrow$ (3)由定理 2 得出，(3) $\Leftrightarrow$ (4)由定理 8 得出。我们只需证明 (1) 与 (5) 等价。

假设 $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分（$\mathbb{P}, \pi$）码。设 I 是 $\mathbb{P}$ 的一个理想，且其满计数满足 $|I| = l \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ 和 $x \in \mathbb{Z}_m^n$。分两种情形讨论。

- 情形 1：假设 $l \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < \frac{n-k}{t} \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$。注意，$\mathcal{C}$ 中任意两个码字都不属于同一个 I-球。否则，存在 $c, c' \in \mathcal{C}$, $c \neq c'$，使得 $c \in B_I(c')$。这意味着$\langle supp_{(L,\pi)}(c - c') \rangle \subseteq I$，因此

$$d_{(\mathbb{P},\pi)}(c, c') = \left| \langle supp_{(L,\pi)}(c - c') \rangle \right| \leq |I| = l \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor < \frac{n-k}{t} \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{d-1}{\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \leq d - 1,$$

反对　　划分。由命题 3.1 可知，任意两个 I-球要么不相交，要么完全相同，因此

$$|B_I(x) \cap \mathcal{C}| = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in \bigcup\limits_{c \in \mathcal{C}} B_I(c), \\ 0, & \text{if } x \notin \bigcup\limits_{c \in \mathcal{C}} B_I(c). \end{cases}$$

• 情形 2：假设 $l \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \geq \frac{n-k}{t} \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。由于 I 是满计数，且 $|I^*| = l$，存在一个 $\mathbb{P}$ 的满计数理想 J，使得 $|J^*| = \frac{n-k}{t}$ 且 $J \subseteq I$。由定理 8 可知，$\mathcal{C}$ 是 J-完美的。注意，B_J 是 B_I 的子模。B_I 中 B_J 的陪集数为 m^{lt-n+k}。由引理 3.1 可知，每个 $B_J(u)$ 都恰好包含 $\mathcal{C}$ 的一个元素。因此，$|B_I(x) \cap \mathcal{C}| = m^{lt-n+k}$。

反过来，假设对于任意具有满计数的 $\mathbb{P}$ 的理想 I，以及 $x \in \mathbb{Z}_m^n$，都有 (4.2)。令 $I \in \mathcal{I}^{\frac{n-k}{t} \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}(\mathbb{P})$ 为 $\mathbb{P}$ 中具有满计数的一个理想，且 $u \in \mathbb{Z}_m^n$。由 (4.2)，我们有 $|B_I(u) \cap \mathcal{C}| = 1$，由此可得，根据引理 3.1，$\mathcal{C}$ 是 I-完美的。因此，对于所有具有满计数的 $I \in \mathcal{I}^{\frac{n-k}{t} \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$，$\mathcal{C}$ 都是 I-完美的。由定理 8 可知，$\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分的 $(\mathbb{P}, \pi)$-码。

□

例 4.1。设 $\mathbb{P} = (M, R)$ 是一个偏序集，其中 $M = \{2/1, 2/2, 2/3\}$ 和

$$R = \{(4/(2/1, 2/1), 4/(2/2, 2/2), 4/(2/3, 2/3), 4/(2/1, 2/2), 4/(2/3, 2/2)\}.$$

设 π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1) = \pi(2) = \pi(3) = 2$。考虑由下列矩阵生成的 $(\mathbb{P}, \pi)$-码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_5^6$:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

则码 $\mathcal{C}$ 是定义在 $\mathbb{Z}_5$ 上的长度为 6 的线性 $(\mathbb{P}, \pi)$-码，具有 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}) = 5$。我们有 $\left\lfloor \frac{d-1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\rfloor = 2$。在 $\mathbb{P}$ 中满足 $|I^*| = 2$ 的满计数理想为 $I = \{2/1, 2/3\}$。由此可得

$$\max_{I \in \mathcal{I}(\mathbb{P}), |I^*|=2} \sum_{i \in I^*} k_i = 4 = n - k.$$

因此，$\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分 $(\mathbb{P}, \pi)$-码。此外，$\mathcal{C}$ 是 I-完美的。

设 $\mathbb{P} = (M, R_1)$ 和 $\mathbb{Q} = (M, R_2)$ 是 M 上的两个偏序集。若 $p/a \; R_1 \; q/b$ 属于 $\mathbb{P}$ 蕴含 $p/a \; R_2 \; q/b$ 属于 $\mathbb{Q}$，则称 $\mathbb{Q}$ 比 $\mathbb{P}$ 更细。

引理 4.1. 设 $\mathbb{P}_1$ 和 $\mathbb{P}_2$ 是 $M = \{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor /1, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor /2, \ldots, \lfloor \frac{m}{2} \rfloor /s\}$ 上的两个偏序集，且 π 是偏序集 $\mathbb{P}_1$ 的一个标记，其标记为 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = t$。若 $\mathbb{P}_2$ 比 $\mathbb{P}_1$ 更细，则每个最大距离可分 $(\mathbb{P}_1, \pi)$-码都是最大距离可分 $(\mathbb{P}_2, \pi)$-码。

证明。假设 $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分 (n, K, d) $(\mathbb{P}_1, \pi)$ 码。那么 $n - \lceil \log_m K \rceil = t \cdot \left\lfloor \frac{d_{(\mathbb{P}_1,\pi)}(\mathcal{C}) - 1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\rfloor$。由于 $\mathbb{P}_2$ 比 $\mathbb{P}_1$ 更细，对于任意 $u, v \in \mathbb{Z}_m^n$，有 $d_{(\mathbb{P}_1,\pi)}(u, v) \leq d_{(\mathbb{P}_2,\pi)}(u, v)$。因此 $d_{(\mathbb{P}_1,\pi)}(\mathcal{C}) \leq d_{(\mathbb{P}_2,\pi)}(\mathcal{C})$，从而

$$d_{(\mathbb{P}_2,\pi)}(\mathcal{C}) - 1 \geq d_{(\mathbb{P}_1,\pi)}(\mathcal{C}) - 1 \geq \frac{n - \lceil \log_m K \rceil}{t} \cdot \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

这意味着 $\left\lfloor \frac{d_{(\mathbb{P}_2,\pi)}(\mathcal{C}) - 1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\rfloor \geq \frac{n - \lceil \log_m K \rceil}{t}$。根据辛格尔顿界，$\mathcal{C}^t$ 是一个 MDS $(\mathbb{P}_2, \pi)$-码。

□

推论 4.1。当所有块具有相同的维数时，MDS 分组码对于在这些块的集合上定义的每个偏序集，也都是 MDS 偏序集分组码。

命题 4.1. 设 $(\mathbb{P},\pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，且 $k_1=k_2=\cdots=k_s=t$ 和 $\mathcal{C}$ 是一个 (n,m^k,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码。若 $\mathcal{C}$ 是 $(\frac{n-k}{t}\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor)$-完美 $(\mathbb{P},\pi)$-码，则 $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分 $(\mathbb{P},\pi)$-码。

证明。根据定理 9，只需证明对于所有具有满计数的 $I\in\mathcal{I}^{\frac{n-k}{t}\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}$，$\mathcal{C}$ 都是一个 I-完美码。设 I 是一个基数为 $\frac{n-k}{t}\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ 且具有满计数的理想。假设存在 $c,c'\in\mathcal{C}, c\neq c'$，使得 $B_I(c)=B_I(c')$。那么 $\langle(supp_{(L,\pi)}(c-c')\rangle\subseteq I$。由于 $\mathcal{C}$ 是 $(\frac{n-k}{t}\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor)$-完美码，$\mathcal{C}$ 中两个码字之间的距离至少为 $\frac{n-k}{t}\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+1$。于是

$$\frac{n-k}{t}\cdot\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor+1\leq d_{(\mathbb{P},\pi)}(c,c')\leq|I|=\frac{n-k}{t}\cdot\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor,$$

矛盾。 □

定理 10. 设 $(\mathbb{P},\pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，其中 $k_1=k_2=\cdots=k_s=t$，且 $\mathcal{C}$ 是一个 (n,K,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码。若对于每个理想 $I\in\mathcal{I}^{n-\lceil\log_{t^m}K\rceil\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}(\mathbb{P})$，$\mathcal{C}$ 都是 I-完美的，则 $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分 $(\mathbb{P},\pi)$-码。

证明. 假设对于任意理想 $I\in\mathcal{I}^{n-\lceil\log_{t^m}K\rceil\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}(\mathbb{P})$，$\mathcal{C}$ 都是 I-完美的。为了证明 $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分 $(\mathbb{P},\pi)$-码，只需证明 $\left\lfloor\frac{d-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor\geq n-\lceil\log_{t^m}K\rceil$。假设存在两个不同的码字 $u,v\in\mathcal{C}$，使得 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(u,v)\leq n-\lceil\log_{t^m}K\rceil\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$。记 $J=\langle supp_{(L,\pi)}(u-v)\rangle$。由命题 8 可知，存在一个基数为 $n-\lceil\log_{t^m}K\rceil\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$ 的理想 I，使得 $J\subseteq I$。于是 $u-v\in B_J\subseteq B_I$，这意味着 $u\in B_I(v)$，这与 $\mathcal{C}$ 是 I-完美的事实矛盾。因此 $d>n-\lceil\log_{t^m}K\rceil\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$，从而 $\left\lfloor\frac{d-1}{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor\geq n-\lceil\log_{t^m}K\rceil$。

□

4.2 重量分布

下文中，我们考虑一个$(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}$，其分组的维数相同，且 t，并且 $\mathbb{P}$ 是定义在 $M=\left\{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/2,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/s\right\}$ 上的链偏序集，满足 $\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1\ R\ \lfloor\frac{m}{2}\rfloor/2\ R\ \ldots R\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/s$。

注意，链偏序集 $\mathbb{P}$中的每个理想 I都具有形式 $I=\left\{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/2,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/(i-1)\ p/i\right\}$，其中 $1\leq p\leq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$，且 p/i是 I中的唯一极大元。此外，对于任意整数 $1\leq r\leq s\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$，$\mathbb{P}$ 中恰有一个基数为 r的理想 I，即 $|\mathcal{I}^r(\mathbb{P})|=1$，因此对于任意 $u\in\mathbb{Z}_m^n$，$B_r(u)=B_I(u)$。

定理11. 设 $(\mathbb{P},\pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的链偏序集分块结构，且 $k_1=k_2=\cdots=k_s=t$。那么，对于任意满足 $\lceil\log_m K\rceil$ 可被 t 整除的 K，每个 I-完美 (n,K,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}$ 都是最大距离可分 $(\mathbb{P},\pi)$-码。

证明. 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_m^n$ 是一个 I-完美 (n, K, d) $(\mathbb{P}, \pi)$-码。那么 $\bigsqcup_{c\in\mathcal{C}} B_I(c) = \mathbb{Z}_m^n$ 且 $d > |I|$。由此，我们得到 $|\mathcal{C}| \cdot |B_I| = m^n$。

- 情形 1：若 I 是一个全计数理想，则 $|I^*| = n - \log_t^m K$ 且 $|I| = n - \log_t^m K \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。由定理 10 可知，$\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分（$\mathbb{P}, \pi$）码。

- 情形 2：若 I 是一个部分计数理想，则对于某个全计数理想 J，有 $|I| = |J| + l$ 且 $1 \le l \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$。由于 $\mathcal{C}$ 是 I-完美的，因此有

$$|\mathcal{C}| \cdot |B_I| = |\mathcal{C}| \cdot (2l+1)^t \cdot |B_J| = K \cdot (2l+1)^t \cdot m^{|J^*|\cdot t} = m^n,$$

从而得到

$$|J^*| = \frac{n}{t} - \frac{\log_m K}{t} - \log_m(2l+1).$$

由于 $1 \le l \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$，我们有 $0 < \log_m(2l+1) < 1$。注意，$\log_t^m K + \log_m(2l+1) \in \mathbb{Z}$。因此，

$$\frac{\log_m K}{t} + \log_m(2l+1) = \left\lfloor \frac{\log_m K}{t} + \log_m(2l+1) \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{\log_m K}{t} \right\rfloor + \lfloor \log_m(2l+1) \rfloor + 1 = \left\lceil \frac{\log_m K}{t} \right\rceil.$$

因此 $|J^*| \ge \frac{n}{t} - \left\lceil \log_t^m K \right\rceil$。另一方面，$d > |I| = |J| + l$ 意味着 $\frac{d-1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} > |J^*| + \frac{l-1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$。于是，

$$\left\lfloor \frac{d-1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\rfloor \ge |J^*| \ge \frac{n}{t} - \left\lceil \frac{\log_m K}{t} \right\rceil.$$

由于 $\lceil \log_m K \rceil$ 可被 t 整除，因此我们有

$$t \cdot \left\lfloor \frac{d-1}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \right\rfloor \ge n - \lceil \log_m K \rceil.$$

根据辛格尔顿界，$\mathcal{C}$ 是一个 MDS 码。

□

注 4.1. 无论 I 是满计数还是部分计数，上述定理对任意理想 $I \in \mathcal{I}(\mathbb{P})$ 都成立。

设 I 是 $\mathbb{P}$ 的理想。我们用 I_p （分别用 I_f ）表示 I^* 中在 I 中具有部分计数（分别为满计数）的元素集合。由定理11的证明可得一个推论。

推论 4.2. 设 $(\mathbb{P},\pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上具有 $k_1=k_2=\cdots=k_s=t$ 的偏序集分块结构。设 I 是 $\mathbb{P}$ 的一个具有部分计数的λ理想。假设 $I_p=\{l_1,l_2,\ldots,l_\lambda\}\subseteq I^*$ 和 $1<\sum \log_m(2C_I(l_i)+1)<1$。$i=1$设 $\mathcal{C}$ 是一个 (n,K,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码，使得 $\lceil \log_m K\rceil$ 被 t 和 $\left\lfloor \frac{d-1}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor \geq |I_f|$ 整除。如果 $\mathcal{C}$ 是 I-完美的，则 $\mathcal{C}$ 是最大距离可分。

设 $I\in\mathcal{I}(\mathbb{P})$ 是一个部分计数理想。下面的例子说明， I-完美的 $(\mathbb{P},\pi)$-码不一定是 MDS 码。但是，当我们对 I施加一些限制时， I-完美码可能是 MDS 码。

例 4.2. 设 $\mathbb{P}=(M,R)$ 是一个偏序集，其中 $M=\{4/1,4/2\}$ 和

$$R=\{(16/(4/1,4/1),16/(4/2,4/2)\}.$$

设 π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 的一个标记，使得 $\pi(1)=\pi(2)=1$。考虑由 $\mathcal{C}=\{(0,0),(0,3),(0,6)\}$定义的 $(\mathbb{P},\pi)$-码 $\mathcal{C}\subseteq\mathbb{Z}_9^2$。那么 $d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C})=3$且 $\left\lfloor \frac{d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}-1}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor=0$。因此 $\mathcal{C}$不是 MDS 码。设$I=\{4/1,1/2\}$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个部分计数理想。容易看出， $\mathcal{C}$ 是 I-完美的。

若定义 $\mathcal{C}'=\{(0,0)、(2,3)、(4,6)\}$。容易验证， $\mathcal{C}'$ 是一个 I-完美码。根据推论 4.2， $\mathcal{C}'$是一个最大距离可分（$\mathbb{P}$， π）-码。事实上， $d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}')=5$且 $\left\lfloor \frac{d_{(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}'-1}{\lfloor \frac{m}{2}\rfloor}\right\rfloor=1$。 $\mathbb{P}$的理想使得$|I^*|=1$ 的根集为 $\{1\}$ 或 $\{2\}$。由 $k_1=k_2=1$ 可知， $\mathcal{C}'$ 是一个最大距离可分（$\mathbb{P}$， π）-码。

此外，当 $\mathbb{P}$ 是满足 $4/1\ R\ 4/2$的链偏序集时，我们可以看到 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}'$ 都是最大距离可分（$\mathbb{P}$， π）-码。

用 $A_{r,\ (\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C})$ 表示 $\mathcal{C}$中（$\mathbb{P}$， π）-重量为 r 的码字数量，即

$$A_{r,(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C})=\left|\left\{c\in\mathcal{C}:w_{(\mathbb{P},\pi)}(c)=r\right\}\right|.$$

注意，当且仅当 $|I|=l\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$时， $\mathbb{P}$ 的一个理想 I 是满计数的。

引理 4.2。设 $(\mathbb{P},\pi)$ 是 $\mathbb{Z}_m^n$ 上的偏序集分块结构，其中 $\mathbb{P}$ 是 $M=\left\{\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/1,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/2,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor/s\right\}$ 上的链偏序集， π 是偏序集 $\mathbb{P}$ 的标记，且满足 $k_1=k_2=\cdots=k_s=t$。设 $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分线性 (n,m^k,d) $(\mathbb{P},\pi)$-码，且 $I\in\mathcal{I}(\mathbb{P})$ 是 $\mathbb{P}$ 的一个理想。那么

$$|B_I\cap\mathcal{C}|=\begin{cases}1, & if\ |I|\leq\frac{(n-k)}{t}\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor,\\ m^{tl-n+k}, & if\ |I|=l\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\geq\frac{(n-k)}{t}\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor,\\ (2p+1)^t m^{tl-n+k}, & if\ |I|=l\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor+p>\frac{(n-k)}{t}\cdot\lfloor\frac{m}{2}\rfloor,\ 1\leq p\leq\lfloor\frac{m}{2}\rfloor-1.\end{cases}$$

证明。设 I 是一个基数为$_{(n-k)_t} \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$的理想，其中 $1 \le p \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$。那么 I 是满足 $|I^*| = l+1$ 的部分计数。由命题 2.1，存在一个基数为 $\frac{n-k}{t} \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$的理想 J，使得 $J \subseteq I$。由定理 9 可知， $\mathcal{C}$ 是 J-完美的，并且对任意 $x \in \mathbb{Z}_m^n$， $|B_J(x) \cap \mathcal{C}| = 1$。令 $K = I \ominus J$。平移集 $x + B_J$、 $x \in B_K$ 两两不相交，且其并集覆盖 B_I。因此，

$$|B_I \cap \mathcal{C}| = |B_K| = (2p+1)^t m^{(|I^*|-|J^*|-1)t} = (2p+1)^t m^{(l+1-\frac{n-k}{t}-1)t} = (2p+1)^t m^{tl-n+k}.$$

证明至此完成。 □

定理 12. 设 $(\mathbb{P}, \pi)$ 是链偏序集分块结构，且 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = t$ 和 $\mathcal{C}$ 是一个最大距离可分线性 (n, m^k, d) $(\mathbb{P}, \pi)$-码。那么

$$A_{r,(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}) = \begin{cases} 1, & if\ r = 0, \\ 0, & if\ 1 \le r \le d-1, \\ \left(m^t - \left(2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1\right)^t\right) m^{tl-n+k-t}, & if\ r = l \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor \ge d, \\ (3^t - 1) m^{tl-n+k}, & if\ r = l \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \ge d, \\ \left((2p+1)^t - (2p-1)^t\right) m^{tl-n+k}, & if\ r = l \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + p \ge d\ and\ 2 \le p \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1. \end{cases}$$

证明. 若 $r \le d-1$，则结论显然成立。因此我们假设 $r \ge d$。设 $I^r(\mathbb{P}) = \{I\}$ 且$I^{r-1}(\mathbb{P}) = \{J\}$。那么

$$A_{r,(\mathbb{P},\pi)}(\mathcal{C}) = |B_r \cap \mathcal{C}| - |B_{r-1} \cap \mathcal{C}| = |B_I \cap \mathcal{C}| - |B_J \cap \mathcal{C}|.$$

• 情形 1：假设 $r = l \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor$。那么 I 具有满计数， J 具有部分计数，且 $|I^*| = |J^*| = l$。由引理 4.2,

$$|B_I \cap \mathcal{C}| - |B_J \cap \mathcal{C}| = m^{tl-n+k} - \left(2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1\right)^t m^{tl-n+k-t} = m^{tl-n+k-t}\left(m^t - \left(2\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor - 1\right)^t\right).$$

• 情形 2：假设 $r = l \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1$。那么 I 具有部分计数， J 具有满计数，且 $|J^*| = |I^*| - 1 = l$。由引理 4.2,

$$|B_I \cap \mathcal{C}| - |B_J \cap \mathcal{C}| = 3^t m^{tl-n+k} - m^{tl-n+k} = (3^t - 1) m^{tl-n+k}.$$

• 情形 3：假设 $r = l \cdot \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + p$，其中 $2 \le p \le \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$。 I和 J具有部分计数，且$|I^*| = |J^*| = l+1$。根据引理 4.2,

$$|B_I \cap \mathcal{C}| - |B_J \cap \mathcal{C}| = (2p+1)^t m^{tl-n+k} - (2p-1)^t m^{tl-n+k} = \left((2p+1)^t - (2p-1)^t\right) m^{tl-n+k}.$$

□

注 4.2。注意，当在 $\mathbb{Z}_2$ 和 $\mathbb{Z}_3$上定义 pomset 分组度量时，pomset 分组重量与 poset 分组重量相同。所有块维数相同时，MDS（P,π）码的重量分布已确定（见 *[3,* 定理 5.*2]*）。考虑层次 pomset 的两个特殊情形。当层次 pomset 为链偏序集时，定理 12 给出了所有块维数相同时，MDS（$\mathbb{P},\pi$）码的重量分布。当层次 pomset 为反链 pomset 且所有块的维数均为 1 时，pomset 分组重量就是传统的 Lee 重量。据我们所知，一般情况下 MDS 码的 Lee 重量分布尚未得到。

备注 4.3. 当 $t=1$ 时，定理 12 中的情形 2 和情形 3 将重合，这恰好就是 *[9]* 中的定理 9。

5 结论与进一步探讨

偏序集度量是 poset 度量的一种推广；当底层偏序集为反链时，它便导出 Lee度量。本文引入了 MDS 偏序集分块码，并将I-完美码的概念推广到偏序集分块度量的情形。

引入偏序集块码之后，为具有链块pomset的任意线性码构造 MacWilliams型恒等式，并为积码的覆盖半径给出界，将是很有趣的研究方向。通过仔细考察有关偏序集码和 poset块码的相关结果，我们或许有机会进一步探索偏序集块码的性质。

参考文献

[1] M.M.S. Alves, L. Panek, M. Firer，《错误块码与偏序集度量》，Adv. Math. Commun. 2 (1) (2008) 95-111。[2] R. Brualdi, J.S. Graves, M. Lawrence，《具有偏序集度量的码》，Discrete Math. 147 (1) (1995) 57-72。[3] B.K. Dass, Namita Sharma, Rashmi Verma，《MDS 与 I-完美偏序集块码》，Finite Fields and Their Appl. 62 (2020) 101620。[4] K. Feng, L. Xu, F.J. Hickernell,《线性错误块码》，Finite Fields and Their Appl. 12 (4) (2006) 638-652。

[5] K.P. Girish, S.J. John：《偏序多重集及其链与反链之间的一般关系》，Math. Commun. 14 (2009) 193-205。[6] K.P. Girish, S.J. John，《由多重集关系诱导的多重集拓扑》，Inf. Sci. 188, 298-313 (2012)。[7] J.Y. Hyun, H.K. Kim，《最大距离可分偏序集码》，Designs, Codes and Cryptography 48 (3) (2008) 247-261。[8] G.S. Irrinki, R.S. Selvaraj，《具有偏序集度量的码及其构造》，Designs, Codes and Cryptography 86 (2018) 875-892。[9] G.S. Irrinki, R.S. Selvaraj，《偏序集度量中的 MDS 与 I-完美码》，IEEE Transactions on Information Theory. 67 (3) (2021) 1622-1629。[10] H. Niederreiter，《低差异度点集与序列》，Monatshefte für Mathematik 104 (4) (1987) 273-337。[11] H. Niederreiter，《有限域上向量空间的一个组合问题》，Discrete Math. 96 (3) (1991) 221-228。[12] L. Panek, M. Firer, M.M.S. Alves，《Niederreiter-Rosenbloom-Tsfasman 分组码的分类》，IEEE Transactions on Information Theory. 56 (10) (2010) 5207-5216。