时间分数阶多孔介质方程：Erd´elyi-Kober 积分方程、紧支撑解与数值方法

Belen L´opez*、Hanna Okrasi´nska-P-lociniczak†、
-Lukasz P-lociniczak‡、Juan Rocha*

arXiv:2303.01725v1 [math.NA] 3 Mar 2023

摘要

时间分数阶多孔介质方程是许多水文、物理和化学流动的重要模型。我们研究其自相似解，这些解构成了许多重要实验测量情形的剖面。我们证明，在一维情形下，一般初边值问题存在唯一解。当结合物理模型给出的边界条件时，该问题呈现出一个可利用 Erd´elyi-Kober 分数阶算子描述的自相似解。通过反向射击法，我们证明该问题存在唯一解。

打靶法不仅有助于推导理论结果。我们利用它设计了一种高效数值格式，用于求解控制问题，并采用两种方式对 Erd´elyi-Kober 分数阶导数进行离散化。由于后者是一个非局部算子，其数值实现必须包含某种截断。我们确定了正确的截断范围，并证明了若干误差估计。此外，反向射击法还可用于求解主问题，我们给出了收敛性证明。主要困难在于扩散率退化。我们通过某种正则化克服了这一困难。最后，我们通过数值模拟验证了理论结果。

关键词：时间分数阶多孔介质方程、Erd´elyi-Kober分数阶算子、数值方法。

AMS分类：34A08、65M12、76S05。

1 引言

我们的主要结果 我们关注的是半直线上的以下时间分数阶多孔介质问题

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u = \left(D(u)u_x\right)_x, & x \in \mathbb{R}_+,\ t \in (0,T),\ \alpha \in (0,1) \\ u(x,0) = 0, & x \in \mathbb{R}_+, \\ u(0,t) = M, & t \in (0,T), \end{cases} \tag{1}$$

*大加那利岛拉斯帕尔马斯大学数学系，Tafira Baja校区，35017大加那利岛拉斯帕尔马斯，西班牙。

†数学系，弗罗茨瓦夫环境与生命科学大学，ul. C.K. Norwida 25，50-275弗罗茨瓦夫，波兰

‡波兰弗罗茨瓦夫科技大学纯粹与应用数学学院，通讯作者：lukasz.plociniczak@pwr.edu.pl

其中， $T > 0$ 是终止时间， $M > 0$ 是初始值，而 Caputo分数阶导数借助分数阶积分 I_t^α 定义

$$\partial_t^\alpha u(x,t) := I_t^{1-\alpha} u_t(x,t), \quad I_t^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(x,s) ds, \quad \alpha \in (0,1). \tag{2}$$

对于扩散率 D ，我们假设它是一个 $C^1(\mathbb{R}_+)$ 函数，且满足

$$D(0) = 0, \quad D(u) > 0, \quad D'(u) > 0, \quad u > 0. \tag{3}$$

最重要的例子是典型的幂函数型扩散率（或称 Brookes-Correy模型，水文学中也称为 [4]），其满足 $D(u) \propto u^m$ ，其中 $m > 0$。注意，我们假设存在退化性，即允许出现 $D(0) = 0$ 的情形。这对解有深远影响，也是有限传播速度的主要原因（全面论述请参见 [49, 50]）。近年来，人们对所研究的偏微分方程 (1) 的数学处理给予了一些关注，尤其是时间分数阶情形。例如，在狄利克雷数据为零且有界区域 $x \in \Omega \subset \mathbb{R}$ 上的问题中，退化和非退化情形的有界弱解已在 [52] 中得到证明。[1]中也对相关问题进行了非常一般的抽象研究。此外， [7] 研究了全空间 $x \in \mathbb{R}^d$ 中的一个类似问题，作者证明，只要初始数据具有紧支撑，便存在唯一的紧支撑解。就时间分数阶情形而言，半直线上的问题似乎尚未得到充分研究。本文进一步给出了一些分析和数值结果，超越了我们先前的工作 [41, 36, 34]。我们的主要观察基于这样一个事实：所研究的初始数据和边界数据具有自相似性，因此可以将控制方程的偏微分方程转化为常微分积分方程。此时，主要的演化算子便成为 Erd´elyi-Kober (EK) 分数阶算子，该算子此前已在复分析和特殊函数中出现过 [17, 45]。此外，在分析由分数布朗运动导出的随机过程时，EK算子成为驱动扩散动力学演化的主要力量 [33]。

问题 (1) 描述了具有边界的本质上一维多孔介质中的水分吸渗过程。起初干燥的定义域突然在边界处暴露于恒定浓度的水分中。这是测量介质性质的典型情形 [51]。在这种情况下，显而易见的待求解类型是自相似剖面，它是自相似变量 $x/t^{1/2}$的函数。然而，现代材料的一些新实验表明，扩散可能呈现较慢（亚扩散）或较快（超扩散）的动力学 [9, 19, 28, 42, 53, 47, 8, 55]。其他例子还见于生物学 [22, 48], 物理学 [44, 5], 及其他科学领域。在 [12] 中，有人提出时间分数阶 Caputo导数适用于描述这类现象。这种方法取得了成功，因为模型结果能够以较高精度再现实验数据。水文环境下该模型的物理推导见[35]。

目前已有大量针对含时间分数阶导数的扩散问题的数值方法（综述见 [6, 11, 23]）。我们想强调的是，大多数研究考虑的是线性情形，且扩散率仅依赖于空间 $D = D(x)$。这些方法基于不同类型的 Caputo离散化方法和空间格式。例如，读者可参阅 [18, 21] 中有关所谓 L1 Caputo离散化格式和卷积求积 [43, 13]的几种方法。 [46], 研究了有限差分方法，[25, 10], 研究了有限元，而 [26, 24]研究了谱方法。对于非光滑初始数据，求得误差估计需要格外谨慎；这对许多应用至关重要。对于时间依赖扩散率 [15, 29, 37]，这一点尤其重要。至于偏离线性的情形， [14, 2, 16]近期提出了一些关于半线性扩散的方法。拟线性情形才刚开始受到研究，读者可参阅我们此前关于这一重要问题的工作

[39, 38]。我们想强调的是，这些研究大多只考虑了非退化情形，即 $D \geq D_0 > 0$。我们在此前的一些工作中，为时间分数阶退化情形开发了几种数值方法。例如，[36] 设计了一种快速求积方法来求解 1。随后，该结果得到进一步改进，形成了一个二阶格式 [31, 32]。由于 Caputo（或 EK）算子的非局部性增加了所有用于近似求解这类算子的数值方法的计算成本，我们认为有必要开发快速且精确的格式，以求解由这些算子支配的方程，尤其是在退化情形下。

本文结构如下。下一节中，我们将简要证明在 $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ 上一个一般时间分数阶多孔介质问题的唯一性，其中 Ω 可以是有界域，也可以是无界域。证明思路是将经典方法改造为适用于 Caputo 导数的情形。得到唯一性后，我们将在第 3 节研究主问题 (1) 的自相似解。我们采用反向射击法证明此类解的存在性，并将其与前述唯一性结果结合起来。在第 4 节中，我们根据分析推理所得的启示，设计高效的数值方法，以近似 Erd´elyi-Kober 分数阶算子以及 (1) 的精确解。我们还将在该节给出若干误差估计和收敛性证明。最后，我们通过若干数值算例展示理论结果。

2 弱解的唯一性

尽管我们主要关注将 (1) 作为多孔介质中水分吸渗的模型，但本节将考虑一个一般问题，并证明其唯一性。为此，考虑

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u = \left(D(u)u_x\right)_x, & x \in (a,b),\ t \in (0,T),\ \alpha \in (0,1) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (a,b), \\ u(a,t) = \mu(t),\ u(b,t) = \nu(t), & t \in (0,T), \end{cases} \tag{4}$$

其中我们允许一般的初始条件和边界条件。定义 $\Omega_T := (a,\ b) \times (0,\ T)$ 为解的定义域。此外，令

$$K(z) := \int_0^z D(s)ds, \tag{5}$$

则偏微分方程可写为 $\partial_t^\alpha u = (K(u))_{xx}$。与经典情形一样，我们不能期望上述方程具有经典解，而只能有弱解（尽管还有其他选择 [50, 52]）。令 $\chi \in C^1(\Omega_T)$ 为任意检验函数。将偏微分方程乘以检验函数并积分，可得

$$\int_a^b \int_0^T \partial_t^\alpha u\ \chi dtdx - \int_a^b \int_0^T (K(u))_{xx}\chi dtdx = 0. \tag{6}$$

现在，我们通过分部积分将导数转移到检验函数上。首先，对于时间导数，根据 (2) 和 Fubini 定理，有

$$\begin{aligned} \int_0^T \partial_t^\alpha u\ \chi dt &= \int_0^T (I_t^{1-\alpha}u_t)\chi dt = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \left(\int_0^t (t-s)^{-\alpha} u_s(x,s)ds \right) \chi(x,t)dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^T \left(\int_s^T (t-s)^{-\alpha} \chi(x,t)dt \right) u_s(x,s)ds = \int_0^T u_s(J_s^{1-\alpha}\chi)ds, \end{aligned} \tag{7}$$

其中，我们定义右侧分数阶积分，

$$J_t^\alpha u(x,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^T (s-t)^{\alpha-1} u(x,s)ds, \quad \alpha > 0. \tag{8}$$

Now，通过分部积分并重新命名积分变量，我们可以得到

$$\int_0^T \partial_t^\alpha u\ \chi dt = u_0(x) J_t^{1-\alpha}\chi(x,0) - \int_0^T u\frac{\partial}{\partial t}(J_t^{1-\alpha}\chi)dt. \tag{9}$$

对于空间导数，结合边界条件进行分部积分，可得

$$\int_a^b (K(u))_{xx}\chi dx = D(\nu(t))\chi(b,t) - D(\mu(t))\chi(a,t) - \int_a^b (K(u))_x\chi_x dx. \tag{10}$$

因此，我们将式 (4) 的弱解 定义为满足下列条件的 $H^1(\Omega_T)$ 函数

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^T &\left[(K(u))_x\chi_x - u\frac{\partial}{\partial t}(J_t^{1-\alpha}\chi)\right]dtdx \\ &= \int_0^T \left[D(\mu(t))\chi(a,t) - D(\nu(t))\chi(b,t)\right]dt - \int_a^b u_0(x)J_t^{1-\alpha}\chi(x,0)dx, \quad \chi \in C^1(\Omega_T).\end{aligned} \tag{11}$$

这种弱解定义方法仿照了带有 $\alpha = 1$ 的经典情形。 [50] 中给出了一些相关的存在性结果。

现在我们转向唯一性证明。这是对 Ladyzenskaya [20] 最初提出、后来常用于许多情形 [50] 的一种简单而优雅的论证方法的推广。

定理 1. 式 *(11)* 至多有一个解。

证明. 假设 u_1 和 u_2 是式 (11) 的某些解。作差后，初始条件和边界条件相互抵消，得到

$$\int_a^b \int_0^T \left[\left((K(u_1))_x - (K(u_2))_x\right)\chi_x - (u_1 - u_2)\frac{\partial}{\partial t}(J_t^{1-\alpha}\chi)\right]dtdx = 0 \tag{12}$$

对于每个 $\chi \in C^1(\Omega_T)$。现在，取一个如下形式的检验函数

$$\chi = J_t^\alpha(K(u_1) - K(u_2)). \tag{13}$$

当然，上述选择可能必须具备足够的正则性，才能使其成为检验函数；不过，通过标准的磨光化论证，我们可以确认它是可接受的。此过程的详细步骤在 [50]中有详细描述，因此我们在此略去。

含梯度的积分是非负的。这可以通过像（7）中那样使用 Fubini 定理，将右侧分数阶积分 J^α 移入通常的（左侧）积分 I^α ，并调用 [30]中的引理3.1（ii）来证明。

$$\begin{aligned}&\int_a^b \int_0^T (K(u_1) - K(u_2))_x J_t^\alpha (K(u_1) - K(u_2))_x dtdx = \\ &\int_a^b \int_0^T (K(u_1) - K(u_2))_x I_t^\alpha (K(u_1) - K(u_2))_x dtdx = \int_a^b \int_0^T |I^{\alpha/2}(K(u_1) - K(u_2))_x|^2 dtdx \geq 0.\end{aligned} \tag{14}$$

现在，在另一个积分中，我们利用分数阶积分的半群性质，即 $J^\mu J^\nu = J^{\nu+\mu} = J^\nu J^\nu$，得到下式

$$\begin{aligned}&-\int_a^b \int_0^T (u_1 - u_2)\frac{\partial}{\partial t}(J_t^{1-\alpha}J_t^\alpha(K(u_1) - K(u_2)))dtdx \\ &= -\int_a^b \int_0^T (u_1 - u_2)\frac{\partial}{\partial t}(J^1(K(u_1) - K(u_2)))dtdx = \int_a^b \int_0^T (u_1 - u_2)(K(u_1) - K(u_2))dtdx \geq 0\end{aligned} \tag{15}$$

由于 K 递增，因此 $K(u_1) - K(u_2)$ 与 $u_1 - u_2$符号相同。因此，变换为 (12)

$$\int_a^b \int_0^T \left[|I^{\alpha/2}(K(u_1) - K(u_2))_x|^2 + (u_1 - u_2)(K(u_1) - K(u_2)) \right] dtdx = 0. \tag{16}$$

Bec由于被积函数非负，我们必有 $u_1 = u_2$。证明至此结束 . □

3 自相似解

现在我们可以回到原问题 (1)，并寻找其自相似形式的解 [41, 36]

$$u(x,t) = U(\eta), \quad \eta := xt^{-\frac{\alpha}{2}}. \tag{17}$$

标准计算（例如参见 [36]）可得关于未知剖面$U = U(\eta)$的常微分方程

$$(D(U)U')' = \left[A - B\eta \frac{d}{d\eta} \right] F_\alpha U, \quad 0 < \eta < \infty, \tag{18}$$

其中 $A = 1 - \alpha$ 和 $B = \alpha/2$。请注意，对于不同类型的边界条件，我们会得到常数 A 和 B的不同取值，但上述方程的结构保持不变。因此，我们决定在控制方程中保留一般常数。算子 F_α 是 Erdélyi-Kober 分数阶算子 [45]的一个特定形式

$$F_\alpha U(\eta) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{-\alpha} U(s^{-B}\eta) ds, \quad 0 < \alpha < 1. \tag{19}$$

边界条件为

$$U(0) = M, \quad U(\infty) = 0. \tag{20}$$

由定理 1 可知，原问题 (1) 有唯一解，且具有自相似形式。在 [41] 中已证明，对于多孔介质的扩散率，即当 $m \geq 1$时， $D(U) \propto U^m$，存在一个支撑集紧的解。现在我们知道，这恰好是 (1) 的唯一解。接下来需要考虑满足 (3) 的一般情形 $D = D(U)$。下文将介绍这一主题的一些初步结果。

没有直接的方法可以求解 (18)。在 [41]中，我们针对幂型扩散率采用了一种变换，从而得到一个已有成熟理论的 Volterra 积分方程。由于一般情形下无法进行这种变换，我们采用另一种思路。其核心是使用反向射击法——这一思路曾用于经典情形 [3]。然而，在这个非局部版本中，它的内涵和意义要丰富得多。具体来说，我们假设要寻找一个支撑集为 $[0, \eta^*]$ 的完全支撑解，其中 $\eta^* > 0$ 固定。也就是说，当 $\eta \geq \eta^*$ 时，有 $U(\eta) = 0$ 。然后，我们考虑从 $\eta = \eta^*$ 开始、向后推进至 $\eta = 0$的初值问题。最后，通过改变 η^* ，我们可以调整解在 $\eta = 0$ 处的值，使得 $U(0) = M$。这正是下一节所介绍的数值方法的思路。关键在于注意到，在 EK 算子 (19) 的定义中，对于固定的 $\eta > 0$，被算子作用的函数是在 $s^{-\alpha/2}\eta$ 处取值的。然而，由于对于 $s \in (0,1)$，我们总有 $s^{-\alpha/2} > 1$，因此，指定初值似乎无法得到一个易于处理的问题。也就是说，为了计算接近 0 的 η 处的 $F_\alpha U(\eta)$，我们需要知道几乎整个半直线上的 U ，这显然不适用于逐步计算。换言之，我们无法从 $\eta = 0$ 开始向前推进解。

首先，让我们观察该问题的解可能呈现的行为。下面的结果陈述了解的许多先验性质。

命题1。 固定 $\eta^* > 0$。令 $U = U(\eta)$ 为方程（*18*）在（*3*）左邻域内的一个解，满足η^* 使得 $U(\eta) = 0$ 对于 $\eta \geq \eta^*$ 成立。则该解为正的、递减的，并且满足以下结论

$$\int_0^1 \frac{D(s)}{s} ds < \infty, \tag{21}$$

以及

$$\lim_{\eta \to \eta^*} -D(U)U'(\eta) = 0. \tag{22}$$

证明。 由于 $U(\eta) = 0$ 对于 $\eta \geq \eta^*$ 成立，我们可以将（18）从 η 积分到 η^*，得到

$$-D(U)U'(\eta) = A\int_\eta^{\eta^*} F_\alpha U(z)dz - B\int_\eta^{\eta^*} z\left(F_\alpha U\right)'(z)dz = (A+B)\int_\eta^{\eta^*} F_\alpha U(z)dz + B\eta F_\alpha U(\eta), \tag{23}$$

其中，在第二个等式中，我们采用分部积分，并使用了 EK 算子（19）的定义。由此立即可得 $U'(\eta) < 0$ 且 $U(\eta) \geq 0$，根据（19），这意味着

$$F_\alpha U(\eta) \leq \frac{U(\eta)}{\Gamma(2-\alpha)}. \tag{24}$$

此外，令 $\eta \to \eta^*$，即可得到无通量条件（22）。因此，利用单调性并回到积分方程，可得

$$\begin{aligned} -D(U)U'(\eta) &\leq \frac{A}{\Gamma(2-\alpha)}\eta^* U(\eta) - B\eta^* \int_\eta^{\eta^*} \left(F_\alpha U\right)'(z)dz \\ &= \frac{A}{\Gamma(2-\alpha)}\eta^* U(\eta) + B\eta^* F_\alpha U(\eta) \leq \frac{A+B}{\Gamma(2-\alpha)}\eta^* U(\eta). \end{aligned} \tag{25}$$

现在，若将两边除以 $U(\eta)$，并从任意的 η_1 积分到 η_2，则得到

$$-\int_{\eta_1}^{\eta_2} \frac{D(U(z))U'(z)}{U(z)} dz \leq \frac{A+B}{\Gamma(2-\alpha)}\eta^*\left(\eta_2 - \eta_1\right) \leq \frac{A+B}{\Gamma(2-\alpha)}(\eta^*)^2. \tag{26}$$

作变量代换 $s = U(z)$，并利用 U 的单调性，可得

$$\int_{U(\eta_2)}^{U(\eta_1)} \frac{D(s)}{s} ds < \frac{A+B}{\Gamma(2-\alpha)}(\eta^*)^2. \tag{27}$$

令 $\eta_2 \to \eta^*$，则 $U(\eta_2) \to 0$，由此完成证明。 □

从上述证明可知，我们的紧支集解符合所有物理直觉：它是一个正的有界函数，具有有限传播速度，且在界面处通量消失。条件 (21) 是紧支集存在的必要条件。例如，对于幂型扩散，我们有

$$\int_0^1 \frac{s^m}{s} ds < \infty \quad \text{iff} \quad m > 0, \tag{28}$$

这证实了我们先前的结果。

为进一步推导，我们从 η 到 η^* 对 (18) 积分两次，利用 $\eta = \eta^*$ 处通量消失的边界条件，并通过分部积分得到积分方程

$$K(U(\eta)) = \int_\eta^{\eta^*} \left((A+B)(z-\eta) + Bz\right) F_\alpha U(z)dz =: \int_\eta^{\eta^*} G(\eta, z) F_\alpha U(z)dz, \tag{29}$$

下面我们给出主要的存在性结果。

定理 2. 固定 $\eta^* > 0$。存在一个满足 *(18)* 的解，其中 $U(\eta) = 0$ 对于 $\eta \geq \eta^*$ 以及 *(22)* 均成立。

证明。 我们将应用 Leray-Schauder 不动点定理。首先，由于 D 是递增的，式 (5) 中定义的函数 K 是凸函数。因此，对于任意 $\lambda > 0$，方程 $K(x) = \lambda x$ 存在唯一的正解 x_λ 。令 $X = C[0, \eta^*]$ 为定义在 $[0, \eta^*]$ 上、范数为 $\|U\| := \max_{0 \leq \eta \leq \eta^*} |U(\eta)|$ 的连续函数所构成的巴拿赫空间。由式 (29) 可得解的先验界。首先，根据 Erd´elyi-Kober 算子的基本估计式 (24)，有如下结果

$$K(U(\eta)) \leq (A + 2B)\eta^* \int_0^{\eta^*} F_\alpha U(z)dz \leq \frac{A + 2B}{\Gamma(2 - \alpha)}(\eta^*)^2 \|U\|. \tag{30}$$

对左端取最大值，并利用 U 的连续性，可进一步得到如下结果

$$K(\|U\|) \leq \frac{A + 2B}{\Gamma(2 - \alpha)}(\eta^*)^2 \|U\|. \tag{31}$$

由于 K 是凸函数，根据简单的几何推理，必有 $\|U\| \leq x_\lambda$ ，其中 $\lambda := (A + 2B)/\Gamma(2 - \alpha)(\eta^*)^2$。因此，对于式 (18) 的任意解，我们都有先验上界。

有了解的界后，我们定义算子 $N \colon X \mapsto X$ ，其定义公式为

$$N(y)(\eta) = \int_\eta^{\eta^*} G(\eta, z) F_\alpha K^{-1} y(z)dz, \tag{32}$$

由于 K 单调，因此 K^{-1} 存在，故其定义良好。若 y 是 N 的不动点，则 $U = K^{-1}y$ 将是方程 (18) 的解。由于定义 N 时的被积函数是关于 η 、 z 和 y 的连续函数，且这些变量取值于一个有界闭集内（y 有界），因此算子 N 是紧算子。因此，根据 Leray–Schauder 定理的标准版本（例如， [54] 中的定理 6.A），即先验有界的紧算子存在不动点，我们得出问题 (18) 有解。

□

现在我们知道，对每个 η^* ，我们的问题都存在一个支撑集紧的解，且该解是有界递减函数。下面我们将证明，至少对于较小的 $U(0) = M$，可以确定存在一个 η^* ，使得当 $\eta = 0$ 时，解达到 M 。

命题 2. 假设 *(3)* 和 *(21)* 成立。当 $M > 0$ 充分小时，方程 *(18)* 存在唯一解，且满足 $U(0) = M$ 以及 $U(\eta) = 0$ ，其中 $\eta \geq \eta^*$。

证明。 定义连续函数 $f(\eta^*) := U(0; \eta^*)$。我们的目标是证明函数$\eta^* \mapsto f(\eta^*) - M$ 恰有一个零点。若在 (27) 中取 $\eta_1 \to 0$ 和 $\eta_2 \to \eta^*$ ，可得

$$\int_0^{f(\eta^*)} \frac{D(s)}{s} ds \leq \frac{A + B}{\Gamma(2 - \alpha)}(\eta^*)^2. \tag{33}$$

因此，根据假设，对于 $\eta^* \to 0$，有 $f(\eta^*) \to 0$ 。若 M 足够小，则存在 η^*使得 $f(\eta*) = M$ ，从而证明了解的存在性。

为确定唯一性，我们将证明 f 是递增函数。为此，反设存在 $\eta_1 < \eta_2$ 使得 $f(\eta_1) \geq f(\eta_2)$。根据解 U 的单调性，可知存在 η_0 使得 $U_1(\eta_0) = U_2(\eta_0)$，且 $U_1(\eta) < U_2(\eta)$，其中$\eta_0 < \eta \leq \eta_1$。这里，我们将支撑集为 $[0, \eta_i]$的问题的解记为 U_i 。我们发现，每个 U_i 都满足 (29)。将相应的方程从 $\eta = \eta_0$ 中相减，得到

$$0 = \int_{\eta_0}^{\eta_1} G(\eta_0, z) \left(F_\alpha U_2(z) - F_\alpha U_1(z)\right) dz + \int_{\eta_1}^{\eta_2} G(\eta_0, z) F_\alpha U_2(z)dz. \tag{34}$$

然而，上述两项均严格为正，因此我们得出了矛盾。函数f 严格递增。

□

因此，假设（3）和（27）成立，我们证明了问题（1）存在一个自相似解；根据定理 1，我们知道该解是唯一的。

4 数值方法

本节将开发一种高效的数值方法，用于近似 Erd´elyi-Kober 分数阶算子 (19)，并求解主要的时间分数阶多孔介质方程 (1)。

4.1 Erdelyi-Kober 算子

我们首先对作用于任意有界函数 $U:[0,\infty) \mapsto \mathbb{R}_+$的 EK 算子 (19) 进行数值近似。请注意，此处暂不假设 U 满足 (29)，也不假设其具有紧支集。文献 [40] 分析了 EK 算子的一些一般求积公式，并对误差进行了全面分析。这里我们仅关注与所引文献的主要区别：我们的算子涉及在 $s^{-B}\eta$处取值的解。文献 [40] 只考虑了正指数情形。这使数值分析发生了根本性变化。为给出具体示例，我们设计了两种格式：一阶（矩形）格式和二阶（梯形）格式。首先，引入步长为 $h>0$ 的均匀网格

$$\eta_n = nh, \quad n \geq 0. \tag{35}$$

若 $n=0$，我们立即由式（19）得出

$$F_\alpha U(0) = \frac{U(0)}{\Gamma(2-\alpha)}, \tag{36}$$

因此，我们必须关注 $n \geq 1$ 的情形。为此，按照 $z = s^{-B}\eta$ 对定义（19）中的积分变量进行替换，得到

$$F_\alpha U(\eta_n) = \frac{\eta^{\frac{1-\alpha}{B}}}{B\Gamma(1-\alpha)} \int_{\eta_n}^{\infty} (\eta^{-\frac{1}{B}} - z^{-\frac{1}{B}})^{-\alpha} z^{-\frac{1}{B}-1} U(z)dz, \tag{37}$$

此时，EK算子的向前非局部性质显而易见。也就是说，值$F_\alpha U(\eta_n)$取决于 $z \geq \eta_n$ 时的 $U(z)$。由于该积分是反常积分，为了进行数值计算，我们必须在某一点截断它，例如 η_N。稍后我们将选取这一截断的最优值。因此，

$$F_\alpha U(\eta_n) = \frac{\eta^{\frac{1-\alpha}{B}}}{B\Gamma(1-\alpha)} \int_{\eta_n}^{\eta_N} (\eta^{-\frac{1}{B}} - z^{-\frac{1}{B}})^{-\alpha} z^{-\frac{1}{B}-1} U(z)dz + R_N(\eta_n), \tag{38}$$

余项为

$$R_N(\eta_n) = \frac{\eta^{\frac{1-\alpha}{B}}}{B\Gamma(1-\alpha)} \int_{\eta_N}^{\infty} (\eta^{-\frac{1}{B}} - z^{-\frac{1}{B}})^{-\alpha} z^{-\frac{1}{B}-1} U(z)dz. \tag{39}$$

现在，我们可以写成

$$F_\alpha U(\eta_n) = \frac{\eta^{\frac{1-\alpha}{B}}}{B\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=n}^{N-1} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} (\eta^{-\frac{1}{B}} - z^{-\frac{1}{B}})^{-\alpha} z^{-\frac{1}{B}-1} U(z)dz + R_N(\eta_n), \tag{40}$$

并在小区间 $[\eta_i, \eta_{i+1})$ 内近似函数 U 。最简单的两种选择分别是矩形近似和梯形近似，其中

$$U(z) \approx U(\eta_{i+1}), \quad z \in [\eta_i, \eta_{i+1}), \tag{41}$$

and

$$U(z) \approx U(\eta_i) + \frac{U(\eta_{i+1}) - U(\eta_i)}{h}(z - \eta_i), \quad z \in [\eta_i, \eta_{i+1}), \tag{42}$$

分别如此。将上述内容代入 EK积分可得

$$F_\alpha U(\eta_n) \approx \widehat{F}_{\alpha,N} U(\eta_n) := \sum_{i=n}^{N} a_{in}^{(r,t)} U(\eta_i), \tag{43}$$

其中的正权重可通过直接计算得到

$$a_{in}^{(r)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)}, & i = n = 0, \\ 0, & n = 0,\ 0 < i \le N, \\ 0, & i = n > 0, \\ \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \left[\left(1 - \left(\dfrac{i}{n}\right)^{-\frac{1}{B}}\right)^{1-\alpha} - \left(1 - \left(\dfrac{i-1}{n}\right)^{-\frac{1}{B}}\right)^{1-\alpha} \right], & n < i \le N,\ n > 0. \end{cases} \tag{44}$$

and

$$a_{in}^{(t)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(2-\alpha)}, & i = n = 0, \\ 0, & n = 0,\ 0 < i \le N, \\ a_{(n+1)n}^{(r)} - d_{nn}, & i = n > 0, \\ d_{(i-1)n} - d_{in} + a_{(i+1)n}^{(r)}, & n < i \le N-1,\ n > 0, \\ d_{(M-1)n}, & i = N,\ n > 0, \end{cases} \tag{45}$$

$$d_{in} = \frac{n}{\Gamma(1-\alpha)} \left[\beta\left(\left(\frac{i}{n}\right)^{-\frac{1}{B}}; 1-B, 1-\alpha \right) - \beta\left(\left(\frac{i+1}{n}\right)^{-\frac{1}{B}}; 1-B, 1-\alpha \right) \right] - i a_{(i+1)n}^{(r)},$$

其中，上标（r）和（t）分别表示矩形法则和梯形法则。此处，$\beta(z; a,\ b)$ 是欧拉不完全贝塔函数。以下结果给出了$\widehat{\ }$离散化算子 $F_{\alpha,\ N}$的误差界。

定理3。 设 $U:\ [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}_+$ 是一个有界且足够光滑的函数。此外，令$N = \gamma n$，其中

$$\gamma = \begin{cases} [h^{-B}] + 1, & \textit{rectangle quadrature}, \\ [h^{-2B}] + 1, & \textit{trapezoid quadrature}. \end{cases} \tag{46}$$

则有以下误差界

$$\|F_\alpha U(\eta_n) - \widehat{F}_{\alpha,N} U(\eta_n)\|_\infty \le \begin{cases} \left(\max_{z \ge \eta_N} |U(z)| + \max_{0 \le z \le \eta_N} |U'(z)|\right) \dfrac{h}{\Gamma(2-\alpha)}, & \text{矩形求积}, \\ \left(\max_{z \ge \eta_N} |U(z)| + \frac{1}{2} \max_{0 \le z \le \eta_N} |U''(z)|\right) \dfrac{h^2}{\Gamma(2-\alpha)}, & \text{梯形求积}。 \end{cases} \tag{47}$$

证明。 我们仅证明矩形情形，另一种情形完全类似。由泰勒级数可立即得到

$$U(z) = U(\eta_{i+1}) + U'(\zeta_i)(\eta_{i+1} - z), \quad z \in [\eta_i, \eta_{i+1}), \tag{48}$$

将其代入（40）可得

$$F_\alpha U(\eta_n) = \widehat{F}_{\alpha,N} U(\eta_n) + P_{N,h}(\eta_n) + R_N(\eta_n), \tag{49}$$

其中

$$|P_{N,h}(\eta_n)| \le \max_{0\le z\le \eta_N} |U'(z)| \frac{\eta^{\frac{1-\alpha}{B}}}{B\Gamma(1-\alpha)} \sum_{i=n}^{N-1} \int_{\eta_i}^{\eta_{i+1}} (\eta^{-\frac{1}{B}} - z^{-\frac{1}{B}})^{-\alpha} z^{-\frac{1}{B}-1} (\eta_{i+1} - z) dz. \tag{50}$$

但由于 $|\eta_{i+1} - z| \le h$，我们可以显式计算该和，并将积分变量换回$s^{-B}\eta_n = z$，从而得到

$$\begin{aligned} |P_{N,h}(\eta_n)| &\le h \max_{0\le z\le \eta_N} |U'(z)| \frac{\eta^{\frac{1-\alpha}{B}}}{B\Gamma(1-\alpha)} \int_{\eta_n}^{\eta_N} (\eta^{-\frac{1}{B}} - z^{-\frac{1}{B}})^{-\alpha} z^{-\frac{1}{B}-1} (\eta_{i+1} - z) dz \\ &= h \max_{0\le z\le \eta_N} |U'(z)| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{(\frac{n}{N})^{1/B}}^{1} (1-s)^{-\alpha} ds = \frac{h}{\Gamma(2-\alpha)} \max_{0\le z\le \eta_N} |U'(z)| \left(1 - \gamma^{-\frac{1}{B}}\right)^{1-\alpha}. \end{aligned} \tag{51}$$

对于截断余项 (39)，我们只需估计

$$\begin{aligned} |R_N(\eta_n)| &\le \max_{z\ge \eta_N} |U(z)| \frac{\eta^{\frac{1-\alpha}{B}}}{B\Gamma(1-\alpha)} \int_{\eta_N}^{\infty} (\eta^{-\frac{1}{B}} - z^{-\frac{1}{B}})^{-\alpha} z^{-\frac{1}{B}-1} dz \\ &= \max_{z\ge \eta_N} |U(z)| \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{0}^{\left(\frac{n}{N}\right)^{1/B}} (1-s)^{-\alpha} ds = \frac{\max_{z\ge\eta_N} |U(z)|}{\Gamma(2-\alpha)} \left(1 - \left(1 - \gamma^{-\frac{1}{B}}\right)^{1-\alpha}\right). \end{aligned} \tag{52}$$

由于

$$\left(1 - \gamma^{-\frac{1}{B}}\right)^{1-\alpha} \le 1, \quad \left(1 - \left(1 - \gamma^{-\frac{1}{B}}\right)^{1-\alpha}\right) \le \gamma^{-\frac{1}{B}}, \tag{53}$$

其中第二个不等式由凸性得出；根据我们关于 γ 的假设 (46)，可得

$$|P_{N,h}(\eta_n)| + |R_N(\eta_n)| \le \left(\max_{z\ge\eta_N} |U(z)| + \max_{0\le z\le\eta_N} |U'(z)|\right) \frac{h}{\Gamma(2-\alpha)}, \tag{54}$$

由此证明得证。 □

由此可见，为了获得最优误差，截断值必须根据网格间距 h来选取。从这个意义上说，最优性与$h \to 0^+$的两个余项具有相同的阶有关。还要注意，求积的阶越高，我们需要进行积分的区间就越大。可以选取一个 EK 算子已知显式表达式的函数，来给出上述定理的数值示例。令 $B = \alpha/2$

$$U(\eta) = \min\left\{1, \eta^\mu\right\}, \quad \mu > 0, \tag{55}$$

对此

$$F_\alpha U(\eta) = \begin{cases} \frac{1-(1-\eta^{\frac{2}{\alpha}})^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \eta^\mu \left(\frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha\mu}{2}\right)}{\Gamma\left(2-\frac{\alpha(2+\mu)}{2}\right)} - \frac{\beta\left(\eta^{\frac{2}{\alpha}}; 1-\frac{\alpha\mu}{2}, 1-\alpha\right)}{\Gamma(1-\alpha)}\right), & 0 \le \eta < 1, \\ \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}, & \eta \ge 1. \end{cases} \tag{56}$$

现在我们可以轻松计算离散化误差。在图 1 中，我们绘出了 ^使用 $F_{\alpha,\ N}$ 近似 EK 算子的最大误差，其中 N 按照最优选择（46）确定。误差以网格间距 h为横坐标绘制，相应的近似阶清晰可见。可以看出，曲线以与求积阶相对应的斜率递增。不过需要注意的是，由于梯形格式在函数求值方面计算复杂度更高，且所需的 γ更大，因此与简单的矩形求积相比，在相同的 h 下，该方法的计算成本更高。

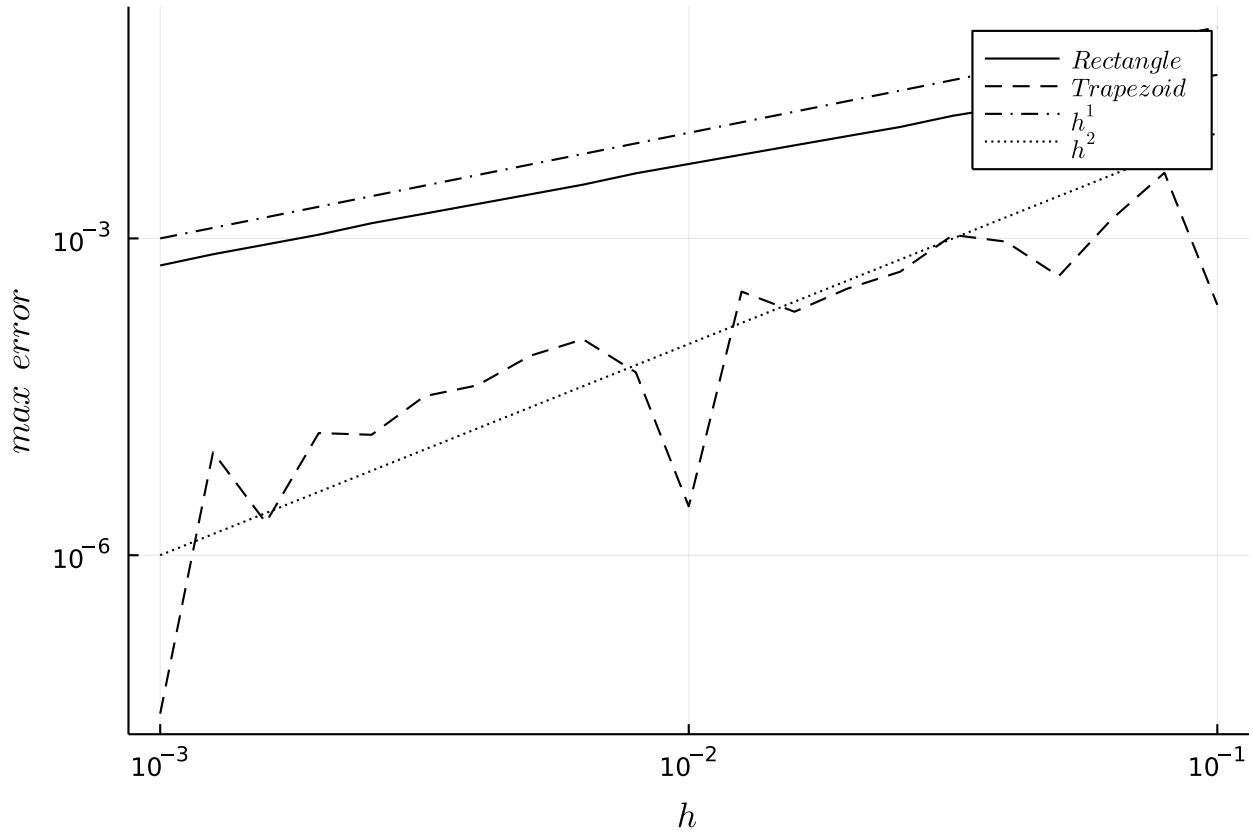


图1：最大离散化误差随网格间距 h和 $\alpha = 0.5$的变化。添加参考线以供比较。

4.2 积分微分方程

现在我们可以着手对主方程（18）进行离散化。我们的策略是考虑积分形式（29），而不是原方程，并反向求解问题。如果给定某个初始值，例如 $U(0) = M$，我们可以使用打靶法，寻找函数 $\eta^* \mapsto M - U(0,\ \eta^*)$的零点。

在下文中，我们固定润湿前沿的值 η^*。由于我们已经知道如何对 EK 算子进行离散化，接下来只需为式（29）中的积分选择合适的求积方法。与之前类似，我们选择矩形法或梯形法。为此，我们自然地 $\widehat{\ }$选择将积分区间上限设为 η^*，也就是说，我们按照以下方式选择 N in $F_{\alpha,\ N}$

$$\eta^* = \eta_N = Nh, \tag{57}$$

通过可能调整 h，使得 N 为整数。因此，将积分拆分为若干部分，即可得到积分方程（29）的离散化

$$K(U(\eta_n)) = \sum_{j=n}^{N-1} \int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} G(\eta_n, z) F_\alpha U(z) dz. \tag{58}$$

现在，在每个子区间上用常数函数或线性函数近似 EK算子，可得到如下离散化

$$K(U_n) = \sum_{j=n}^{N} b_{jn}^{(r,t)} \sum_{i=n}^{N} a_{ij}^{(r,t)} U_i = \sum_{i=n}^{N} \left(\sum_{j=n}^{i} a_{ij}^{(r,t)} b_{jn}^{(r,t)} \right) U_j =: \sum_{i=n}^{N} c_{in}^{(r,t)} U_i, \tag{59}$$

其中， U_i 表示精确解 $U(\eta_i)$ 的数值近似。权重 $b_{jn}^{(r,t)}$ 对应于积分的常用矩形（r）和梯形（t）乘积求积公式。注意，我们不对核函数 G 进行近似，因为它可以直接计算。更具体地说，

$$b_{nn}^{(r)} = 0, \quad b_{jn}^{(r)} = \frac{h^2}{2}\left((A+2B)(2j-1) - 2(A+B)n\right), \quad n < j \le N, \tag{60}$$

and

$$\begin{aligned} b_{jn}^{(t)} &= \begin{cases} b_{(n+1)n}^{(r)} - \widehat{d}_{nn}, & j = n, \\ \widehat{d}_{(j-1)n} - \widehat{d}_{jn} + b_{(j+1)n}^{(r)}, & n < i \le N-1, \\ \widehat{d}_{(M-1)n}, & j = N, \end{cases} \\ \widehat{d}_{jn} &= \frac{h^2}{6}\left((A+2B)(3j-1) - 3(A+B)n\right), \end{aligned} \tag{61}$$

分别对应矩形求积和梯形求积。随后，格式的系数 c_{in} 可计算为 a_{ij} 与 b_{jn}的卷积，利用快速傅里叶变换即可高效完成。由 (44) 和 (60) 可知，当 $i = j = n$时，两个矩形权重均为零。这意味着数值格式 (59) 是显式 的，因此该方法简单且快速。也就是说，要计算 U_n ，我们必须知道 U_i 在 $n < i \le N$ 处的值。由于 D 为正，其积分 K 单调递增，因此存在定义良好的逆函数。因此，我们可以写成

$$U_n = K^{-1}\left(\sum_{i=n+1}^{N} c_{in}^{(r)} U_i\right). \tag{62}$$

这对于幂律扩散率 $K(u) = u^{m+1}/(m+1)$这一重要情形尤其有意义。当然，如果无法得到 K^{-1} 的解析形式，采用求根算法求解 (59) 可能更好，尤其是在隐式梯形情形下。整体过程现在是按 η步进，并反向计算 U_n的值，对应于 $n = N-1$、$N-2$、$N-3$、$\cdots$、1、0。

注意到，由于解的紧支集在 $\eta = \eta^* = \eta_N$ 处终止，因此我们始终有

$$U_N = 0. \tag{63}$$

问题在于，如何启动阶 而不 获得平凡解 $U_i \equiv 0$ 的格式（59）。对于梯形法，答案很直接，因为我们有

$$K(U_{N-1}) = c_{(N-1)(N-1)}^{(t)} U_{N-1} = a_{(N-1)(N-1)}^{(t)} b_{(N-1)(N-1)}^{(t)} U_{N-1}, \tag{64}$$

这是一个需要求解 U_{N-1} 的非线性代数方程。显式矩形法不具有这种形式，因此我们必须以不同的方式指定初始值。为此，让我们回到在 $n = N-1$ 处取值的积分方程（29）。如果在区间（η_{N-1}，η_N）的左 端点处采用常函数近似，则得到

$$K(U(\eta_{N-1})) = \int_{\eta_{N-1}}^{\eta_N} G(\eta_{N-1}, z) F_\alpha U(z) dz \approx F_\alpha U(\eta_{N-1}) \int_{\eta_{N-1}}^{\eta_N} G(\eta_{N-1}, z) dz = F_\alpha U(\eta_{N-1}) b_{N(N-1)}^{(r)} \tag{65}$$

在 EK算子（43）的矩形求积中进行相同的左端点近似，可得到需要求解初始值 U_{N-1}的方程

$$K(U_{N-1}) = a_{N(N-1)}^{(r)} b_{N(N-1)}^{(r)} U(\eta_{N-1}). \tag{66}$$

请注意这与 (64) 的相似性。为便于实现，整个 η 步进方案总结于算法 1 中。

算法 1 主 η步进方案：采用矩形 (r) 或梯形 (t) 求积法，利用 (??) 求解 (18)。绝对容差由固定的 $0 < \epsilon < 1$ 给出。

要求： $N \in \mathbb{N}$

定义权重 $a^{(r,t)}$、$b^{(r,t)}$ 和 $c^{(r,t)}$（使用快速傅里叶变换）(44)、(45)、(59)、(60)、(61)

根据 (5) 定义函数 $K = K(z)$

$U_{0:N} \leftarrow 0$

当 $|U_0 - 1| \geq \epsilon$ **时执行**

固定 $\eta^* > 0$ ▷ 求根求解器可以完成此操作。

$h \leftarrow \eta^*/N$

求解 $K(U_{N-1}) = a^{(r,t)}_{N(N-1)}\, b^{(r,t)}_{N(N-1)}\, U_{N-1}$ 对于 U_{N-1}

对于 $n = N-2 : -1 : 0$ **执行**

求解 $K(U_n) = \sum_{i=n}^{N-1} c^{(r,t)}_{in} U_i$，对于 U_n

结束循环

结束循环

在介绍了数值格式之后，我们可以着手证明它是收敛的。主要困难在于方程的退化性，也就是说，$D(0) = 0$。为克服这一困难，我们考虑一族扩散率正则化 D_h，它们在 $h \to 0$时收敛到 D。对于每个 D_h，我们都能得到一个解$U_{h,\ n}$，当网格逐渐细化时，该解收敛到 U。设 D_h 为一族满足以下条件的函数

$$0 < \epsilon(h) \leq D_h(z), \quad \epsilon(h) \to 0 \quad \text{as} \quad h \to 0, \tag{67}$$

and

$$\|D_h - D\|_\infty \leq \epsilon(h). \tag{68}$$

以下结果给出了收敛性证明。

定理 4. 设 D_h 为满足（*67*）的 D 正则化族。假设求积（*59*）的权重满足 $0 < c_{in} \leq Ch$，且（*5*）中积分的求积阶为 $p > 0$。那么，存在一个 $\epsilon(h)$，使得当$U_{h,n}$ 是满足 D_h的（*59*）的一个解，且U 是（*18*）的精确解时，我们有

$$|U_{h,n} - U(\eta)| = O(h^{p-\delta}|\ln h|) \quad when \quad h \to 0, \quad nh \to \eta \in [0, \eta^*], \tag{69}$$

其中 $0 < \delta < 1$ 是任意的。

证明。 将误差记为 $e_n := U(\eta_n) - U_{h,n}$，并将积分 (29) 的求积误差记为 $\rho_n(h)$，即

$$\int_{\eta_n}^{\eta^*} G(\eta_n, z) F_\alpha U(z) dz = \sum_{i=n}^{N-1} c_{in} U_i + \rho_n(h) \quad \text{where} \quad |\rho_n(h)| \leq \rho(h) \to 0, \quad h \to 0. \tag{70}$$

由此以及 (59) 可得

$$K_h(U(\eta_n)) - K_h(U_{h,n}) = \sum_{i=n}^{N-1} c_{in} e_i + \rho_n(h), \tag{71}$$

其中，K_h 是与 D_h对应的积分。现在，根据中值定理，我们可以写成$K_h(U(\eta_n)) - K_h(U_{n,h}) = K'(V_n)\, e_n = D_h(V_n) e_n$，其中 V_n是某个中间值，因此

$$D_h(V_n)|e_n| \leq \sum_{i=n}^{N-1} c_{in}|e_i| + \rho(h). \tag{72}$$

现在，根据 D_h 的构造，我们可以写成

$$\epsilon(h)|e_n| \le \sum_{i=n}^{N-1} c_{in}|e_i| + \rho(h), \tag{73}$$

这是由于以下事实： $c_{in} \le Ch$

$$|e_n| \le Ch\epsilon(h)^{-1} \sum_{i=n}^{N-1} |e_i| + \epsilon(h)^{-1}\rho(h), \tag{74}$$

这种形式适用于离散版本的 Gr¨onwall 不等式（例如，[27] 针对 $f_i := e_{N-i}$ 的定理 7.1）。因此，

$$|e_n| \le \epsilon(h)^{-1}\rho(h)\left(1 + Ch\epsilon(h)^{-1}\right)^n \le \epsilon(h)^{-1}\rho(h)\left(1 + \frac{Cnh\epsilon(h)^{-1}}{n}\right)^n \le \epsilon(h)^{-1}\rho(h)e^{C\eta^*\epsilon(h)^{-1}}, \tag{75}$$

因为 $nh \to \eta \le \eta^*$。现在，若我们选择

$$\epsilon(h) = C\eta^*\left(\delta \ln\frac{1}{h}\right)^{-1} \to 0 \quad \text{as} \quad h \to 0, \tag{76}$$

对于任意的 $0 < \delta < 1$，我们得到

$$|e_n| \le \frac{\delta}{C\eta^*}\rho(h)h^{-\delta}|\ln h|. \tag{77}$$

现在，若 $\rho(h) = O(h^p)$，且 $p > 0$ 和 $h \to 0$，则有

$$|e_n| = O(h^{p-\delta}|\ln h|), \quad h \to 0, \tag{78}$$

由此完成证明。 □

由上述证明可知，正则化解的格式阶几乎为 p，也就是说，式 (29) 的求积阶为 p。实际阶低一个任意小的数 δ 以及一个对数因子。

我们通过一些数值实验来说明我们的理论。下文中，我们始终选择矩形格式来近似求解。我们的模拟表明，尽管梯形法在离散化纯 EK 算子 (19) 时更优，但用于非线性方程 (18) 时计算成本非常高。这一计算成本源于计算梯形法 (45) 的权重需要大量特殊函数，尤其是不完全贝塔函数。实际上，该算法的时间复杂度和空间复杂度可能大到难以接受。此外，该方法是隐式的，却没有显著的稳定性增益，因此每个迭代步都需要求解一个非线性方程。作为基准，我们计算了在不同 α 值下，针对细分数 $N = 2^8$ 、扩散率为 $D(u) = u^2$ 时，求得润湿锋位置所需计算量的时间比。在表 1 中，我们给出如下量

$$\tau = \frac{\text{time of computations for trapezoid method}}{\text{time of computations for the rectangle method}}. \tag{79}$$

我们立即可以看出，使用梯形法进行计算的速度至少比使用矩形法慢一百倍。由此可得出结论，二阶方法带来的精度提升不足以抵消计算成本的大幅增加。因此，我们决定选择精度较低但速度快得多的显式矩形法。一个

α	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9
τ	91	230	168	197	380

表 1：利用梯形法和矩形法计算润湿锋位置时，式 (79) 中定义的时间比 τ，其中 $D(u) = u^2$, $N = 2^8$。

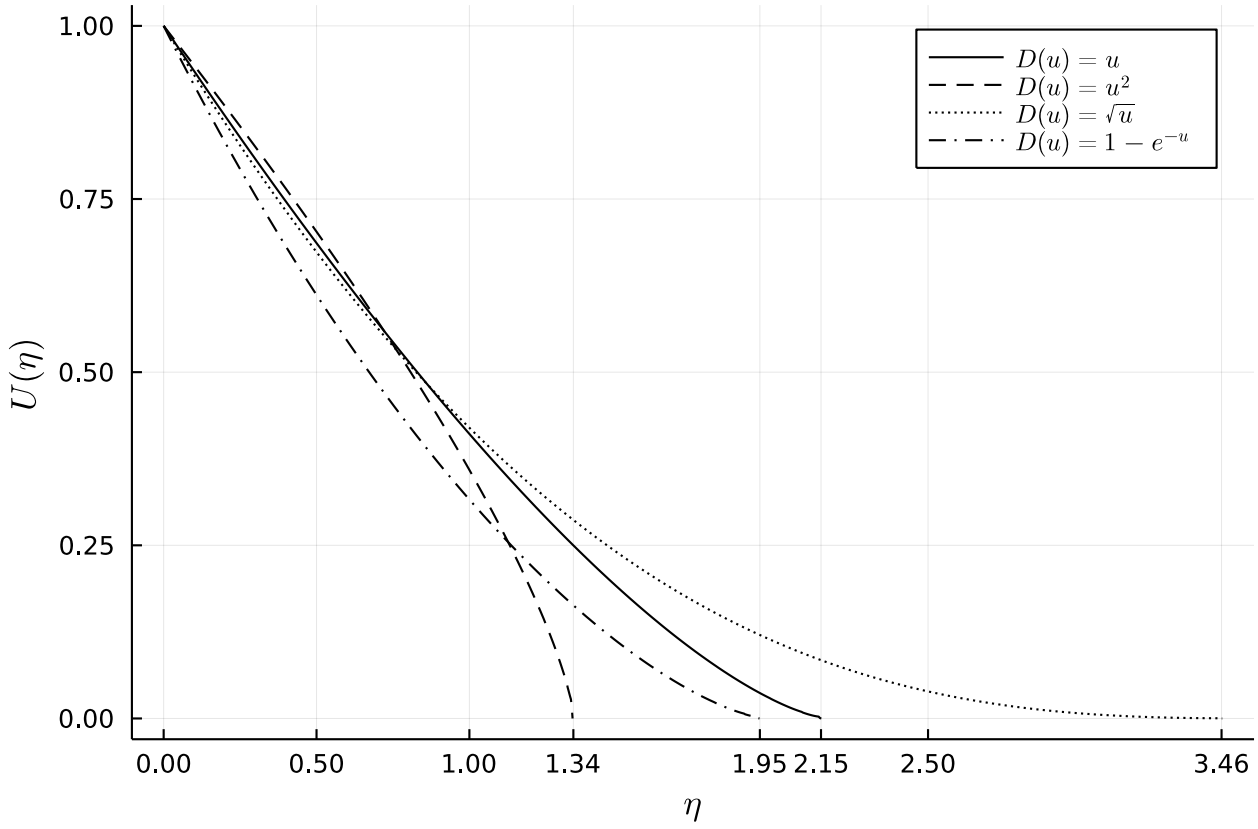


图 2：式 (18) 的解的示例图，其中 $U(0) = 0$，$\alpha = 0.5$ 使用算法 1 计算。图例中标出了不同的扩散率。

α		0.1	0.25	0.5	0.75	0.9
D的阶	$_{BC}$	0.95	0.98	0.99	1.255	0.97
D的阶	$_{exp}$	0.96	0.98	0.99	1.08	0.98

表 2：基于外推（81）计算润湿前沿 η^* 时，格式（59）的求积估计阶。根据（80）选取了两个扩散率： D_{BC} ，其中 $m = 1$ 和 D_{exp}。迭代的基数为 $N = 300$。

N	10	50	100	200	500	1000
误差	5.5×10^{-2}	3.3×10^{-2}	2.2×10^{-2}	1.3×10^{-2}	7.0×10^{-3}	4.0×10^{-3}

表 3：对于 $D_BC\,(u) = u$ 和 $\alpha = 1$，在区间 $[0, \eta^*]$ 的不同细分数量下计算润湿前沿 η^* 的绝对误差。参考精确值取自 [32]。

针对幂律情形，即 $D\,(u) \propto u^m$ ，在 [31] 中通过不同方法构造了一种高效的二阶显式格式，但这些方法无法推广到任意扩散率。

下文中，我们始终采用算法 1 求解 (18)，初始条件为 $U(0) = 1$ ，并使用牛顿迭代求得 η^*。图 2 展示了多孔介质方程的典型解在若干扩散率取值下的一些示例图。

$$D_{BC}(u) = u^m, \quad D_{exp}(u) = 1 - e^{-u}, \quad m \geq 1, \tag{80}$$

其中，第一个取值是典型的多孔介质幂型扩散率（在水文学中称为 Brooks-Correy 模型），第二个则是指数公式。通过简单的极限检验，我们可以验证，对于每种扩散率，紧支集的必要条件 (21) 均成立。

为说明收敛性，我们给出两项测试。第一项是使用外推（艾特肯方法）对收敛阶进行经验计算

$$\text{order} \approx \log_2 \frac{|\eta^*_{(2N)} - \eta^*_{(N)}|}{|\eta^*_{(4N)} - \eta^*_{(2N)}|}, \tag{81}$$

在这项计算中，我们比较了采用不同细分数 N （因此网格间距分别缩小为原来的二分之一或四分之一 h）时计算得到的润湿前沿（最坏情况）。表 2 给出了两种不同扩散率下的结果。可以看出，数值估计与理论预测一致，即矩形求积应保持其阶数。这一点并非显而易见，因为众所周知，即使对于线性扩散，分数阶导数的离散化也可能因解的正则性而以低于 1 阶的速度收敛（详见 [46]。我们可以看到，对于 $\alpha = 0.75$ ，该方法的收敛速度甚至更快。

我们进行的第二项测试同样基于求解润湿前沿，但并非针对经典情形，因为经典情形下可以获得精确值（见 [32]）。结果汇总于表 3。考虑到所采用的步数较少，这些结果相当不错。误差以 $O(N^{-1})$ 的速率衰减，其中 $N \to \infty$。这验证了我们的方法即使在经典情形下也具有收敛性。不过，如果要对幂函数型扩散率下的润湿前沿进行精确计算，建议使用我们的二阶方法 [31]。当前方法的优点在于，在选择扩散率的一般形式时速度快且稳健。

5 结论

时间分数阶多孔介质方程可模拟材料科学、水文学和建筑工程中的若干重要实验情形。我们已证明，对于一般

扩散率，该问题存在唯一的自相似形式的解。Erd´elyi-Kober 分数阶算子及其细致分析在其中发挥了关键作用。在实际应用方面，我们设计了一种稳健的数值方法，从业者可以轻松使用。

在未来的工作中，我们计划放宽对初始值较小的要求，并考虑方程（1）的一个广义版本，在其中允许使用空间非局部算子。这将扩大可能的建模情形范围，并涵盖超扩散情形；许多实验中也已发现这种情形。

致谢

L.P. 获得了波兰国家科学中心（NCN）Sonata Bis 计划的资助，资助编号为 NCN 2020/38/E/ST1/00153。

参考文献

[1] Goro Akagi。希尔伯特空间中由次微分驱动的分数阶流。《以色列数学杂志》，234(2)：809–862，2019年。[2] Mariam Al-Maskari 和 Samir Karaa。具有非光滑初始数据的半线性亚扩散方程的数值近似。《*SIAM*数值分析杂志》，57(3)：1524–1544，2019年。[3] FV Atkinson 和 LA Peletier。穿过多孔介质的流的相似剖面。《理性力学与分析档案》，42(5)：369–379，1971年。[4] Royal Harvard Brooks 和 Arthur Thomas Corey。多孔介质的水力特性及其与排水设计的关系。博士学位论文，科罗拉多州立大学图书馆，1963年。[5] Diego del Castillo-Negrete、BA Carreras 和 VE Lynch。等离子体湍流中的非扩散输运：一种分数阶扩散方法。《物理评论快报》，94(6)：065003，2005年。[6] Kai Diethelm 和 Neville J Ford。分数阶微分方程分析。《数学分析及其应用杂志》，265(2)：229–248，2002年。[7] Jean-Daniel Djida、Juan J Nieto 和 Iv´an Area。时间非局部多孔介质方程：弱解与有限传播速度。离散与连续动力系统*B*辑，2018年。[8] A El Abd、SE Kichanov、M Taman、KM Nazarov、DP Kozlenko 和 Wael M Badawy。利用中子射线照相测定多孔建筑砖中的水分分布。《应用辐射与同位素》，156：108970，2020年。[9] Abd El-Ghany El Abd 和 Jacek J Milczarek。多孔建筑材料吸水的中子射线照相研究：反常扩散分析。《物理学杂志*D*：应用物理》，37(16)：2305，2004年。

[10] Neville J Ford、JingyuXiao 和 Yubin Yan。时间分数阶偏微分方程的有限元法。*Fractional Calculus and Applied Analysis*，14(3):454–474，2011年。

[11] Roberto Garrappa。分数阶微分方程的数值解：综述与软件教程。*Mathematics*，6(2):16，2018年。

[12] DN Gerasimov、VA Kondratieva 和 OA Sinkevich。反常非自相似渗流与分数阶扩散方程。*Physica D: Nonlinear Phenomena*，239(16):1593–1597，2010。

[13] 金邦提、李步扬和周志。分数阶演化方程的高阶BDF卷积求积修正。*SIAM* 科学计算杂志，39(6):A3129–A3152，2017年。[14] 金邦提、李步扬和周志。非线性亚扩散方程的数值分析。《*SIAM*数值分析杂志》，56(1):1–23，2018年。[15] 金邦提、李步扬和周志。时变系数下的亚扩散：分析与数值求解。《计算数学》，88(319):2157–2186，2019年。[16] Samir Karaa。半线性时间分数阶扩散问题的Galerkin型方法。《科学计算杂志》，83(3):1–22，2020年。[17] 弗吉尼娅·S·基里亚科娃和巴德尔·N·萨卡比。求解Erd´elyi–Kober分数阶微分积分方程的变换法。《数学分析及其应用杂志》，211(1):347–364，1997年。[18] 娜塔莉亚·科普特娃。二维和三维分数阶导数问题在分级网格和均匀网格上的L1方法误差分析。《计算数学》，88(319):2135–2155，2019年。[19] Michel K¨untz 和 Paul Lavall´ee。关于多孔建筑材料水分入渗过程中反常扩散的实验依据与理论分析。《物理学杂志*D*：应用物理》，34(16):2547，2001年。[20] 奥尔加·亚历山德罗芙娜·拉迪任斯卡娅。论线性和拟线性抛物方程。微分方程及其应用，第273–279页，1967年。[21] TAM Langlands 和 Bruce I Henry。分数阶扩散方程隐式求解方法的精度和稳定性。《计算物理学杂志》，205(2):719–736，2005年。[22] M Levandowsky、BS White 和 FL Schuster。土壤变形虫的随机运动。*Acta Proto-zoologica*，36:237–248，1997年。[23] 李长平和曾凡海。分数阶微积分数值方法，第24卷。CRC出版社，2015年。[24] 李先娟和徐传举。时间分数阶扩散方程的时空谱方法。《*SIAM*数值分析杂志》，47(3):2108–2131，2009年。[25] 廖红林、威廉·麦克莱恩和张继伟。离散Gronwall不等式及其在亚扩散问题数值格式中的应用。《*SIAM*数值分析杂志》，57(1):218–237，2019年。[26] 林玉敏和徐传举。时间分数阶扩散方程的有限差分/谱逼近。《计算物理学杂志》，225(2):1533–1552，2007年。[27] 彼得·林茨。*Volterra*方程的解析与数值方法。SIAM，1985年。[28] DA Lockington 和 JY Parlange。多孔材料中的反常吸水。《物理学杂志*D*：应用物理》，36(6):760，2003年。[29] Kassem Mustapha。时间分数阶扩散方程的有限元法：新颖的最优误差分析。《计算数学》，87(313):2259–2272，2018年。

[30] Kassem Mustapha 和 Dominik Sch¨otzau。《分数阶扩散波动方程 hp 版间断伽辽金方法的适定性》。《IMA 数值分析杂志》，34(4):1426– 1446，2014年。[31] Hanna Okrasi´nska-P-lociniczak 和 -Lukasz P-lociniczak。《半直线上时间分数阶多孔介质方程自相似解的二阶格式》。《应用数学与计算》，424:127033，2022年。[32] W Okrasi´nski 和 S Vila。《若干非线性扩散问题的幂级数解》。《应用数学与物理杂志 ZAMP》，44(6):988–997，1993年。[33] Gianni Pagnini。《Erd´elyi-Kober 分数阶扩散》。《分数阶微积分与应用分析》，15(1):117–127，2012年。[34] -Lukasz P-lociniczak。《Erd´elyi–Kober 算子的近似及其在时间分数阶多孔介质方程中的应用》。《SIAM 应用数学杂志》，74(4):1219–1237，2014年。[35] -Lukasz P-lociniczak。《时间分数阶多孔介质方程的解析研究：推导、近似与应用》。《非线性科学与数值模拟通讯》，24(1-3):169–183，2015年。[36] -Lukasz P-lociniczak。《时间分数阶多孔介质方程的数值方法》。《SIAM 数值分析杂志》，57(2):638–656，2019年。[37] -Lukasz P-lociniczak。《时变系数、非光滑数据半线性亚扩散方程的伽辽金格式误差》。《计算机与应用数学》，27:181–191，2022年。[38] -Lukasz P-lociniczak。《气候学中一类退化非线性非局部抛物方程的线性伽辽金–勒让德谱格式》。《应用数值数学》，179:105– 124，2022年。[39] -Lukasz P-lociniczak。《拟线性亚扩散方程的线性伽辽金数值方法》。《应用数值数学》，185:203–220，2022年。[40] -Lukasz P-lociniczak 和 Szymon Sobieszek。《采用 Erd´elyi-Kober 分数阶算子的积分微分方程数值格式》。《数值算法》，76(1):125–150，2017年。[41] -Lukasz P-lociniczak 和 Mateusz ´Swita-la。《时间分数阶非线性扩散方程的存在唯一性结果》。《数学分析及其应用杂志》，462(2):1425– 1434，2018年。[42] Fangzhou Ren、Chunsheng Zhou、Qiang Zeng、Zhidong Zhang、Ueli Angst 和 Wei Wang。《从对水的物理敏感性角度量化水泥砂浆的异常吸水行为》。《水泥与混凝土研究》，143:106395，2021年。[43] Achim Sch¨adle、Mar´ıa L´opez-Fern´andez 和 Christian Lubich。《快速无记忆卷积求积》。《SIAM 科学计算杂志》，28(2):421–438，2006年。[44] Stefan Schaufler、WP Schleich 和 VP Yakovlev。《亚反冲激光冷却中的标度律与渐近律》。《EPL（欧洲物理快报）》，39(4):383，1997年。[45] Ian Naismith Sneddon。《Erd´elyi-Kober 算子及其若干推广在数学物理中的应用》。《分数阶微积分及其应用》，第37–79页，1975年。

[46] Martin Stynes、Eugene O’Riordan 和 Jos´e Luis Gracia。《分级网格上时间分数阶扩散方程有限差分法的误差分析》。《style id='3'>《SIAM数值分析杂志》，55(2):1057–1079，2017年。[47] HongGuang Sun、Mark M Meerschaert、Yong Zhang、Jianting Zhu 和 Wen Chen。《一种分形 Richards 方程，用于刻画非饱和介质中水分运移的非玻尔兹曼标度》。《style id='6'>《水资源进展》，52:292–295，2013年。[48] Titiwat Sungkaworn、Marie-Lise Jobin、Krzysztof Burnecki、Aleksander Weron、Martin J Lohse 和 Davide Calebiro。《单分子成像揭示细胞表面热点处的受体–G 蛋白相互作用》。《style id='9'>《自然》，550(7677):543，2017年。[49] Juan Luis V´azquez。《多孔介质方程数学理论导论》。载于《style id='13'>《形状优化与自由边界》，第347–389页。施普林格，1992年。[50] Juan Luis V´azquez。《style id='17'>多孔介质方程：数学理论。牛津大学出版社按需出版，2007年。[51] Licheng Wang 和 Tamon Ueda。《毛细吸收作用下水分渗透至混凝土中的介观尺度建模》。《style id='20'>《海洋工程》，38(4):519–528，2011年。[52] Petra Wittbold、Patryk Wolejko 和 Rico Zacher。《时间分数阶多孔介质型方程及更一般的非线性退化演化积分微分方程的有界弱解》。《style id='23'>《数学分析及其应用杂志》，499(1):125007，2021年。[53] Z Wu、HS Wong、C Chen 和 NR Buenfeld。《干燥收缩诱发微裂纹导致水泥基材料异常吸水》。《style id='26'>《水泥与混凝土研究》，115:90–104，2019年。[54] E Zeidler。《非线性泛函分析及其应用 I（不动点定理）》，1986年。[55] Yixin Zhao、Yang Wu、Chuanlong Dong、Songbai Han、Derek Elsworth 和 Linfeng He。《基于非饱和裂隙砂岩中子射线照相直接测量的水力特征及水分扩散率建模》。《style id='30'>国际传热传质杂志，196:123256，2022年。