arXiv:2303.01731v1 [math.DG] 3 Mar 2023

双层的布里林斯基贝塔函数

POOJA RANI 和 M. K. VEMURI

Abstract. 为紧支撑的（施瓦茨）分布 T 在 d 维欧几里得空间上定义了布里林斯基纽结贝塔函数的一种类比。这是一个定义在右半平面上的全纯函数。如果 T 是紧致光滑超曲面上的一个（均匀）双层，那么贝塔函数可解析延拓为整个复平面上的亚纯函数，其留数是第二基本形式不变量的积分。当 $d = 2$ 和 $d = 3$时，计算了前几个留数。

1. 引言

在 [1], 中，Brylinski 在 $\mathbb{R}^3$引入了几何纽结的贝塔函数。他部分是出于这样的动机：希望给出一种不依赖于任意“重整化”的 M¨obius 能量定义（见 [3, 6]）。不过，他还给出了其贝塔函数前几个留数的一些优美公式。这些留数原来是曲率、挠率及其导数的多项式的积分。

Brylinski 贝塔函数背后的基本思想具有更广泛的适用性。例如，[4], Fuller 和 Vemuri 定义并研究了欧几里得空间中紧致子流形的贝塔函数（另见 [7, 8]）。更一般地，可以定义欧几里得空间上紧支撑（Schwartz）分布的贝塔函数（当 $\operatorname{Re} s >> 0$ 时）。一般而言，该函数在整个 s-平面上未必具有有意义的解析延拓。如果该分布是（均匀）单层，即紧致子流形的曲面测度，那么其贝塔函数就与 [4], 中研究的贝塔函数一致，而后者确实具有有意义的解析延拓。本文研究（均匀）双层的贝塔函数，即沿超曲面分布的单位法向偶极子的均匀分布。

2. The Brylinski beta function

设 T 是 $\mathbb{R}^d$上的一个紧支集分布。由于 T 具有有限阶，存在$k \in \mathbb{N}$ 使得 T 可延拓为 $C^k(\mathbb{R}^d)$上的连续线性泛函。注意，若 $\operatorname{Re} s > 2k$ 且 $N_s(u) = \|u\|^s$，则 $N_s \in C^{2k}(\mathbb{R}^d)$，因此 $N_s * T \in C^k(\mathbb{R}^d)$。

日期：2023年3月1日。2010年数学主题分类。32A99（57M27）。关键词与短语：解析延拓；分布；子流形的能量；不变理论；第二基本形式。POOJA RANI 获 DST-INSPIRE Fellowship/2019/IF190300 资助。1

定义 2.1。 T的 Brylinski β 函数是函数 $B_T(s)$，当 Re $s > 2k$ 时定义如下：

$$B_T(s) = T(N_s * T).$$

例 2.2. 设 $M \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个紧致光滑子流形， dA 是 M 上的曲面测度，且 $T_1\varphi = \int_M \varphi \, dA$。那么 T_1 是一个阶为 0 的紧支集分布。若 Re $s > 0$，则

$$(N_s * T_1)(u) = T_1(\tau_{-u} N_s) = \int_M N_s(v-u)\, dA(v),$$

其中 τ_{-u} 是平移，因此

$$B_{T_1}(s) = T_1(N_s * T_1) = \int_M \int_M N_s(v-u)\, dA(v)\, dA(u) = B_M(s),$$

其中 B_M 是 [4]的布里林斯基贝塔函数，定义见定义 2.1。注意，在此情形下，右端的积分在 Re $s > -\dim(M)$ 时有意义。

现在设 $M \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个紧致光滑超曲面， dA 是M上的曲面测度，且 ν是 M的外向单位法向量场。定义 $T_2\varphi = \int_M \partial_\nu \varphi \, dA$。那么 T_2是一个阶为 1 的紧支集分布。若 Re $s > 1$，则

$$(N_s * T_2)(u) = T_2(\tau_{-u} N_s) = \int_M \partial_{\nu_v} N_s(v-u)\, dA(v),$$

因此

$$B_{T_2}(s) = T_2(N_s * T_2) = \int_M \int_M \partial_{\nu_u}\partial_{\nu_v} N_s(v-u)\, dA(v)\, dA(u)$$

注意，积分

$$\int_M \partial_{\nu_v} N_s(v-u)\, dA(v)$$

在 Re $s > 2-d$ 时有定义。事实上，即使在 $s = 2-d$ 时也有定义，但在 u 处不连续；在这种情况下，它与著名的双层位势 [2] 成正比。由于这种联系，我们将B_{T_2} 称为M上的双层布里林斯基贝塔函数，并采用如下记号

$$B_{\overline{\overline{M}}} = B_{T_2}.$$

注 2.3. 在计算中，将 N_s 视为两个变量的函数会很方便：

$$N_s(u,v) = N_s(u-v).$$

例 2.4. 设 $M = S^{d-1}(R) := \{u \in \mathbb{R}^d \mid \|u\| = R\}$ 为 $\mathbb{R}^d$ 中半径为 R 的球面。那么

$$B_{\overline{\overline{S^{d-1}(R)}}}(s) = \pi^{\frac{d-1}{2}} \omega_{d-1} \left[\frac{2^{s+d-5} R^{s+2d-4} s(s-2)\,(s+d-2)\Gamma\left(\frac{s+d-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+d-1\right)} \right]$$

其中 ω_n 表示 n维的“面积” $S^n(1)$。

证明。假设在 $S^{d-1}(R)$上有均匀分布的单位偶极子，且它们沿法向方向排列。为了计算其贝塔函数，我们需要对每一对偶极子的贡献进行积分。我们将其中一个偶极子固定在 $v=(R,0,\ldots,0)$，并对另一个偶极子的位置 $u=(u_1,u_2,\ldots,u_d)\in S^{d-1}(R)$ 进行积分。由对称性可知，总的贝塔函数只是前一个数的 $\omega_{d-1}R^{d-1}$ 倍。

令 ν_u 和 ν_v 分别表示 $S^{d-1}(R)$在 u 和 v 处的法向量。则

$$\begin{aligned}\nu_u &= \frac{u}{\|u\|} = (u_1/R, u_2/R, \ldots, u_d/R), \qquad \text{and}\\ \nu_v &= (1,0,0,\ldots,0).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}(\partial_{\nu_u}\partial_{\nu_v}N_s)(u,(R,0,0,\ldots,0)) &= (\nabla_u\partial_{\nu_v}N_s)(u,(R,0,0,\ldots,0))\cdot\nu_u\\ &= -s((u_1-R)^2+u_2^2+\cdots+u_d^2)^{\frac{s-2}{2}}\,\frac{u_1}{R}\\ &\quad + s(s-2)((u_1-R)^2+u_2^2+\cdots+u_d^2)^{\frac{s-4}{2}}(u_1-R)^2.\end{aligned}$$

利用欧拉贝塔积分以及这一事实

$$\int_{-1}^{1} x(1-x)^a(1-x^2)^{\frac{b}{2}}\,dx = \frac{-2^{a+b+1}\,a\,\Gamma\left(a+\frac{b}{2}+1\right)\,\Gamma\left(1+\frac{b}{2}\right)}{\Gamma(a+b+3)},$$

我们计算得

$$\begin{aligned}&\int_{S^{d-1}(R)}(\partial_{\nu_u}\partial_{\nu_v}N_s)(u,(R,0,0,\ldots,0))\,dA(u)\\ &= \begin{bmatrix}\displaystyle\int_{-R}^{R} -s((u_1-R)^2+R^2-u_1^2)^{\frac{s-2}{2}}\,\frac{u_1}{R}\left(\omega_{d-2}\,R\,\left(R^2-u_1^2\right)^{\frac{d-3}{2}}\,du_1\right)\\ \displaystyle+\int_{-R}^{R} s(s-2)((u_1-R)^2+R^2-u_1^2)^{\frac{s-4}{2}}(u_1-R)^2\left(\omega_{d-2}\,R\,\left(R^2-u_1^2\right)^{\frac{d-3}{2}}\,du_1\right)\end{bmatrix}\\ &= 2^{\frac{s-4}{2}}R^{s+d-3}\omega_{d-2}\left[s(s-2)\frac{2^{\frac{s}{2}+d-2}\Gamma(\frac{s+d-1}{2})\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+d-1)}+2s\frac{\left(\frac{s-2}{2}\right)\,2^{\frac{s}{2}+d-3}\,\Gamma\left(\frac{s+d-3}{2}\right)\Gamma(\frac{d-1}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+d-1)}\right]\\ &= \pi^{\frac{d-1}{2}}\left[\frac{2^{s+d-4}R^{s+d-3}s(s-2)(s+d-2)\Gamma\left(\frac{s+d-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+d-1\right)}\right].\end{aligned}$$

因此

$$B_{\overline{\overline{S^{d-1}(R)}}}(s) = \pi^{\frac{d-1}{2}}\omega_{d-1}\left[\frac{2^{s+d-5}R^{s+2d-4}s(s-2)\,(s+d-2)\Gamma\left(\frac{s+d-3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+d-1\right)}\right]. \qquad \square$$

3. The analytic continuation

定理 3.1。函数 $B_{\overline{\overline{M}}}$可以解析延拓为定义在 $\mathbb{C}$上的亚纯函数，并且在 $1-d-j$、$j=-2$、0、2、4、.....处具有简单极点。此外，留数是对 M 上的多项式进行积分所得，这些多项式由第二基本形式的协变导数的完全缩并构成。

证明。证明类似于 [4, 定理 3.3], 的证明，但细节更为复杂；为完整起见，我们在此给出证明。我们求出 $B^v_{\overline{M}}$的解析延拓；对 M 进行积分即可得到所述结果。如果 $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ 在 v 的邻域内恒等于 1，那么局部化贝塔函数

$$B^{\psi}_{\overline{M}}(s) = \int_M \partial_{\nu_u}\partial_{\nu_v} \|v-u\|^s \, \psi(u)\, dA(u)$$

与 $B^v_{\overline{M}}$具有相同的主部，因为它们的差可以延拓为 $\mathbb{C}$上的全纯函数。因此，只需证明将 $B^v_{\overline{M}}$ 替换为适当的 $B^{\psi}_{\overline{M}}$ 即可，其中 ψ。通过旋转和平移 M，我们可以假设 $v = 0$，且 M 的切空间为 $\mathbb{R}^{d-1} \subseteq \mathbb{R}^d$ （显然，这一过程不会影响贝塔函数）。于是，在 0 的某个邻域内， M 是函数 $f\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}^1$ 的图像，该函数在 0 处二阶消失。缩小邻域后，我们可以假设 $\|f(w)\| < \|w\|$。取一个支撑集包含在此邻域内的 ψ。于是

$$\partial_{\nu_u}\partial_{\nu_v} N_s(u,0) = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^{d-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)^2}} \begin{bmatrix} -s(s-2)f(u_1,\dots,u_{d-1})\left(\sum_{i=1}^{d-1} u_i^2 + f(u_1,\dots,u_{d-1})^2\right)^{\frac{s-4}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^{d-1} -\frac{\partial f}{\partial u_i}u_i + f(u_1,\dots,u_{d-1})\right) \\ -s\left(\sum_{i=1}^{d-1} u_i^2 + f(u_1,\dots,u_{d-1})^2\right)^{\frac{s-2}{2}} \end{bmatrix}$$

and

$$dA = \sqrt{1+\sum_{i=1}^{d-1}\left(\frac{\partial f}{\partial u_i}\right)^2}\, du_1 \cdots du_{d-1}.$$

因此

$$B^{\psi}_{\overline{M}}(s) = \begin{bmatrix} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} s(s-2)f(w)\left(\|w\|^2+\|f(w)\|^2\right)^{\frac{s-4}{2}}\left(-f(w)+\sum_{i=1}^{d-1}\frac{\partial f}{\partial u_i}u_i\right)\,\varphi(w)\,dw \\ -\int_{\mathbb{R}^{d-1}} s\left(\|w\|^2+\|f(w)\|^2\right)^{\frac{s-2}{2}}\,\varphi(w)\,dw \end{bmatrix}$$

其中 $\varphi(w) = \psi(w, f(w))$。

Now,

$$B^{\psi}_{\overline{\overline{M}}}(s) = \begin{bmatrix} -s(s-2)\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \|w\|^s \left(1+\frac{f(w)^2}{\|w\|^2}\right)^{\frac{s-4}{2}} f(w)\frac{(f(w)-\sum_{i=1}^{d-1}\frac{\partial f}{\partial u_i}u_i)}{\|w\|^4}\,\varphi(w)\,dw \\ -s\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \|w\|^{s-2}\left(1+\frac{f(w)^2}{\|w\|^2}\right)^{\frac{s-2}{2}}\,\varphi(w)\,dw \end{bmatrix}$$

$$= -s(s-2)\int_0^\infty r^{s+d-2}S_1(r,s)\,dr - s\int_0^\infty r^{s+d-4}S_2(r,s)\,dr$$

其中

$$S_1(r,s) = \int_{S^{d-2}(1)} \left(1+\frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-4}{2}} f(rw)\frac{(f(rw)-r\sum_{i=1}^{d-1}\frac{\partial f}{\partial u_i}(rw)\ u_i)}{r^4}\,\varphi(w)\,d\sigma(w),$$

$$S_2(r,s) = \int_{S^{d-2}(1)} \left(1+\frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-2}{2}}\,\varphi(w)\,d\sigma(w),$$

并且 σ 是 $S^{d-2}(1)$ 上的曲面测度。注意，$S_1(r,s)\,\omega_{d-2}$ 和 $S_2(r,s)\,\omega_{d-2}$ 是函数 $\left(1+\frac{\|f(rw\|^2}{r^2}\right)^{\frac{s-4}{2}}\varphi\right)(w)$ 和 $\left(1+\frac{\|f(rw\|^2}{r^2}\right)^{\frac{s-2}{2}}\varphi\right)(w)$ 在半径为 $r>0$ 的球面上的平均值。定义 $P:\mathbb{R}\times S^{d-2}(1)\to\mathbb{R}^{d-1}$ 为 $P(r,w)=rw$。我们可以将 $S_1(r,s)$ 和 $S_2(r,s)$ 的定义扩展到 r 的所有实数值，方法是写成

$$S_1(r,s) = \int_{S^{d-2}(1)} G_1(r,w,s)\,d\sigma(w)$$

and

$$S_2(r,s) = \int_{S^{d-2}(1)} G_2(r,w,s)\,d\sigma(w),$$

其中

$$G_1(r,w,s) = \left(1+\frac{\|(f\circ P)(r,w)\|^2}{r^2}\right)^{\frac{s-4}{2}} \frac{f\circ P(r,w)g\circ P(r,w)}{r^4}\,(\varphi\circ P)(r,w),$$

$$g(rw) = f(rw) - r\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial u_i}(rw)\ u_i, \qquad \text{and}$$

$$G_2(r,w,s) = \left(1+\frac{\|(f\circ P)(r,w)\|^2}{r^2}\right)^{\frac{s-2}{2}}\,(\varphi\circ P)(r,w), \quad r\in\mathbb{R},\ s\in\mathbb{C}.$$

由 [4] 的引理 3.2 可知，$G_1, G_2 \in C^\infty(\mathbb{R}\times S^{d-2}(1)\times\mathbb{C})$。此外，对于每个 $r\in\mathbb{R}$ 和 $w\in S^{d-2}(1)$，函数 $G_1(r,w,\cdot)$ 和 $G_2(r,w,\cdot)$ 均为整函数，因此由 [4],$S_1, S_2 \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{C})$ 的引理 3.1 可知，对于每个 $r\in\mathbb{R}$，$S_1(r,\cdot)$ 和 $S_2(r,\cdot)$ 均为整函数。注意，由混合偏导数相等性，函数 $\frac{\partial^j S_1}{\partial r^j}(r,\cdot)$ 和 $\frac{\partial^j S_2}{\partial r^j}(r,\cdot)$ 也均为整函数。由于 $G_1(-r,-w,s) = G_1(r,w,s)$ 且 $G_2(-r,-w,s) = G_2(r,w,s)$，可知 $S_1(\cdot,s)$ 和 $S_2(\cdot,s)$ 为偶函数，因此对于奇数 j，$\frac{\partial^j S_1}{\partial r^j}(0,\cdot) = 0$ 且 $\frac{\partial^j S_2}{\partial r^j}(0,\cdot) = 0$。

现固定一个正整数 k。对于 $\operatorname{Re} s > 1-d$，我们有

$$\begin{aligned} B^{\psi}_{\overline{\overline{M}}}(s) = & -s(s-2)\int_0^1 r^{s+d-2}\left[S_1(r,s) - S_1(0,s) - r\frac{\partial S_1}{\partial r}(0,s) - \cdots - \frac{r^{k-1}}{(k-1)!}\frac{\partial^{k-1}S_1}{\partial r^{k-1}}(0,s)\right] dr \\ & - s(s-2)\int_1^{\infty} r^{s+d-2}S_1(r,s)\,dr - s(s-2)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{j!(s+d+j-1)}\frac{\partial^j S_1}{\partial r^j}(0,s) \\ & - s\int_0^1 r^{s+d-4}\left[S_2(r,s) - S_2(0,s) - r\frac{\partial S_2}{\partial r}(0,s) - \cdots - \frac{r^{k+1}}{(k+1)!}\frac{\partial^{k+1}S_1}{\partial r^{k+1}}(0,s)\right] dr \\ & - s\int_1^{\infty} r^{s+d-4}S_2(r,s)\,dr - s\sum_{j=0}^{k+1}\frac{1}{j!(s+d+j-3)}\frac{\partial^j S_2}{\partial r^j}(0,s). \end{aligned}$$

由泰勒定理，右侧的第一个积分作为 s 的函数，在 $\operatorname{Re} s > 1-d-k$ 时有定义且全纯，因此右侧是一个亚纯函数，在半平面 $\operatorname{Re} s > 1-d-k$ 上仅在 $3-d$ 和 $1-d-j$ 处有简单极点。由于对于奇数 j，$\frac{\partial^j S_i}{\partial r^j}(0,\cdot) = 0 (i = 1, 2)$，可知对于奇数 j，$B^{\psi}_{\overline{\overline{M}}}$ 在 $1-d-j$ 处实际上没有极点。由于 k 是任意的，这就给出了将 $B^{\psi}_{\overline{\overline{M}}}$ 解析延拓至 $\mathbb{C}$ 所需的结果。注意

$$\operatorname{Res}_{s=3-d} B^{v}_{\overline{\overline{M}}} = -sS_2(0,s), \qquad \text{and}$$
$$\operatorname{Res}_{s=1-d-j} B^{v}_{\overline{\overline{M}}} = -s(s-2)\frac{1}{j!}\frac{\partial^j S_1}{\partial r^j}(0,1-d-j) - s\frac{1}{j+2!}\frac{\partial^{j+2}S_2}{\partial r^{j+2}}(0,1-d-j).$$

令 I 和 II 分别表示 M 的第一基本形式和第二基本形式。利用 M 的局部参数化 $(w, f(w))$，可得

$$\mathrm{I}_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i f \partial_j f, \quad \text{and} \quad \mathrm{II}_{ij} = \frac{\partial_i\partial_j f}{(1+\|\nabla f\|^2)^{1/2}}.$$

若 α 是一个多重指标，令 $\mathrm{II}_{ij;\alpha}$ 表示第二基本形式的 α 阶协变导数。于是

$$(\mathrm{II}_{ij;\alpha})(0) = (\partial^\alpha\partial_i\partial_j f)(0) + Q$$

其中，Q 是 f 在 0 处的泰勒系数的多项式，其阶数小于或等于$|\alpha|+1$。这种“三角形”关系可以反解，从而将f 的泰勒系数表示为 $(\mathrm{II}_{ij;\alpha})(0)$ 的多项式。

由此可知，$\operatorname{Res}_{s=1-d-j} B^{v}_{\overline{\overline{M}}}$ 可以表示为 $(\mathrm{II}_{ij;\alpha})(0)$ 的多项式。令

$$\mathcal{M} = \left\{ M \subseteq \mathbb{R}^d \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ is an oriented hypersurface such that } 0 \in M \text{ and} \\ T_0M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{d-1}, 0) |\ x_i \in \mathbb{R}\} \end{array} \right\}$$

于是，$\mathrm{O}(d-2)$作用于 $\mathcal{M}$。此外，由 $\mathcal{M} \to \mathbb{C}$ 给出的函数 $M \mapsto \operatorname{Res}_{s=1-d-j} B^{v}_{\overline{\overline{M}}}$在此作用下保持不变。根据正交群的不变量的韦伊不变量定理可知，这个多项式可以重新表示为 $\mathrm{II}_{ij;\alpha}(0)$ 的完全缩并所构成的多项式（参见 [5, 10]）。□

4. Curves in $\mathbb{R}^2$

本节假设 $M \subseteq \mathbb{R}^2$ 是光滑曲线。我们将针对$k = 1$、 -1、 -3 和 -5 ，用曲率及其关于单位速参数化的导数来计算 $\operatorname{Res}_{s=k} B^{\overline{\overline{M}}}$ 。在这种情况下，第二基本形式只有一个分量，即曲率；第二基本形式的协变导数则是曲率关于单位速参数化的导数。

定理 4.1。

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{s=1} B^{\overline{\overline{M}}} &= -2\operatorname{Length}(M)\\
\operatorname{Res}_{s=-1} B^{\overline{\overline{M}}} &= \int_M \frac{3}{4}\kappa_0^2\, dA\\
\operatorname{Res}_{s=-3} B^{\overline{\overline{M}}} &= \int_M \left(\frac{45}{64}\kappa_0^4 + \frac{5}{4}\kappa_1^2 + \frac{15}{8}\kappa_0\kappa_2\right) dA\\
\operatorname{Res}_{s=-5} B^{\overline{\overline{M}}} &= \int_M \left(\frac{175}{512}\kappa_0^6 + \frac{1295}{288}\kappa_0^2\kappa_1^2 + \frac{1085}{576}\kappa_0^3\kappa_2 + \frac{175}{576}\kappa_2^2 + \frac{35}{72}\kappa_1\kappa_3 + \frac{35}{144}\kappa_0\kappa_4\right) dA
\end{aligned}$$

其中， κ_0 是曲率， κ_n 是关于单位速参数化的 κ_0 的第 n阶导数。

证明。与定理 3.1 的证明一样，我们对每个 $v \in M$计算$B^{v}_{\overline{\overline{M}}}$ 的留数；对 M 积分即可得到所述结果。此外，我们可以假设 $v = 0$，并且局部而言， M 是函数 $u_2 = f(u_1)$的图像，该函数在 0 处二阶消失。根据定理 3.1 的证明，

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{s=1} B^{v}_{\overline{\overline{M}}} &= -sS_2(0,s), \qquad \text{and}\\
\operatorname{Res}_{s=-1-j} B^{v}_{\overline{\overline{M}}} &= -s(s-2)\frac{1}{j!}\frac{\partial^j S_1}{\partial r^j}(0,-1-j) - s\frac{1}{j+2!}\frac{\partial^{j+2} S_2}{\partial r^{j+2}}(0,-1-j),
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
S_1(r,s) &= \sum_{w=\pm 1}\left(1+\frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-4}{2}} f(rw)\frac{f(rw)-rwf'(rw)}{r^4}\,\varphi(rw), \qquad \text{and}\\
S_2(r,s) &= \sum_{w=\pm 1}\left(1+\frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-2}{2}} \varphi(rw)
\end{aligned}$$

当 r 较小时。

如果我们写成

$$f(u_1) = a_2u_1^2 + a_3u_1^3 + a_4u_1^4 + a_5u_1^5 + a_6u_1^6 + a_7u_1^7 + a_8u_1^8 + O(u_1^9),$$

$$\left(1+\frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-4}{2}} f(rw)\frac{f(rw)-rwf'(rw)}{r^4}$$

$$= \left(1+\frac{(s-4)}{2}\frac{f^2}{r^2}+\frac{(s-4)(s-6)}{8}\frac{f^4}{r^4}+\frac{(s-4)(s-6)(s-8)}{48}\frac{f^6}{r^6}\right) f(rw)\frac{f(rw)-rwf'(rw)}{r^4}+O(r^8),$$

and

$$\left(1+\frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-2}{2}} = 1+\frac{(s-2)}{2}\frac{f^2}{r^2}+\frac{(s-2)(s-4)}{8}\frac{f^4}{r^4}+\frac{(s-2)(s-4)(s-6)}{48}\frac{f^6}{r^6}+O(r^8),$$

代入 $S_1(r,s)$ 和 $S_2(r,s)$ 的定义，并执行所示的求导运算（使用计算机代数软件包 Maxima [9]），我们得到

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{s=1} B^v_{\overline{M}} &= -2\\
\operatorname{Res}_{s=-1} B^v_{\overline{M}} &= 3\,a_2^2\\
\operatorname{Res}_{s=-3} B^v_{\overline{M}} &= \frac{360\,a_2\,a_4+180\,a_3^2-315\,a_2^4}{4} \qquad (1)\\
\operatorname{Res}_{s=-5} B^v_{\overline{M}} &= \frac{2800\,a_2\,a_6+2800\,a_3\,a_5+1400\,a_4^2-12600\,a_2^3\,a_4-18900\,a_2^2\,a_3^2+5775\,a_2^6}{8}
\end{aligned}$$

在 $u_1 = 0$ 处，我们计算（使用 Maxima）

$$\begin{aligned}
\kappa_0 &= 2\,a_2\\
\kappa_1 &= 6\,a_3\\
\kappa_2 &= 24\,a_4-24\,a_2^3\\
\kappa_3 &= 120\,a_5-456\,a_2^2\,a_3\\
\kappa_4 &= 720\,a_6-16\,a_2^2\left(24\,a_4-24\,a_2^3\right)-2880\,a_2^2\,a_4-3456\,a_2\,a_3^2+1440\,a_2^5\\
\kappa_5 &= 5040\,a_7-24\,a_2^2\left(120\,a_5-432\,a_2^2\,a_3\right)-16\,a_2^2\left(120\,a_5-456\,a_2^2\,a_3\right)-21600\,a_2^2\,a_5\\
&\quad -180\,a_2\,a_3\left(24\,a_4-24\,a_2^3\right)-52992\,a_2\,a_3\,a_4-10368\,a_3^3+65664\,a_2^4\,a_3. \quad \square
\end{aligned}$$

将 a_k 用 κ_0、.....、κ_{k-2} 表示并代入方程 (1)，即可得到所述结果。

5. Surfaces in $\mathbb{R}^3$

在本节中，假设 $M \subseteq \mathbb{R}^3$ 是一张光滑曲面。我们将用 I、II 以及 II 的前两阶协变导数来计算 $k = 0$、-2 和 -4 的 $\operatorname{Res}_{s=k} B_{\overline{M}}$。

固定 $v \in M$ 并选取坐标，使得 $\mathrm{I}_{ij} = \delta_{ij}$ 在 v 处成立。令 $\mathrm{II}^{ij;k}$ 和 $\mathrm{II}^{ij;kl}$ 表示 II 的一阶和二阶协变导数的分量。定义于 v 处：

$$\begin{aligned} H_0 &= \mathrm{II}_{ii} \\ H_1 &= \mathrm{II}_{ij}\mathrm{II}_{ij} \\ H_2 &= \mathrm{II}_{ij;k}\mathrm{II}_{ij;k} \\ H_3 &= \mathrm{II}_{ii;jj} \\ H_4 &= \mathrm{II}_{ij}\mathrm{II}_{ij;kk} \\ H_5 &= \mathrm{II}_{ij}\mathrm{II}_{kk;ij} \\ H_6 &= \mathrm{II}_{ii;k}\mathrm{II}_{jj;k}. \end{aligned}$$

这里我们采用扩展的爱因斯坦求和约定，对重复指标求和，即使它们都是协变指标也如此。这是合理的，因为我们所用的坐标系在 v 处是正交的。先升高一个重复指标，即可在一般坐标系中得到 H_α 的公式。

由于 H_α、 $\alpha = 0$、.....、6 是张量的完全缩并，因此它们是 M 上与坐标选择无关的光滑函数。注意， H_0 就是平均曲率。

定理 5.1。

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=0} B^{}_{\overline{\overline{M}}} &= 0 \\ \operatorname{Res}_{s=-2} B^{}_{\overline{\overline{M}}} &= \frac{\pi}{4}\int_M (H_0^2 + 2H_1)\, dA \\ \operatorname{Res}_{s=-4} B^{}_{\overline{\overline{M}}} &= \frac{\pi}{8}\int_M \left(-\frac{15}{16}H_0^4 + \frac{15}{4}H_1^2 + 2H_2 + \frac{3}{2}H_0H_3 + \frac{9}{2}H_4 + \frac{3}{2}H_5 + 3H_6 \right) dA \end{aligned}$$

证明。与定理 3.1 的证明一样，我们对每个 $v \in M$ 计算 $B^v_{\overline{\overline{M}}}$ 的留数；在 M 上积分即可得到所述结果。假设 $v = 0$ 和 u_1u_2-平面在 0 处与 M 相切。因此，局部而言， M 是函数 $u_3 = f(w)$ 的图像，其中 $w = (u_1, u_2)$ 在 0 处二阶消失。根据定理 3.1 的证明，

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=0} B^v_{\overline{\overline{M}}} &= -sS_2(0,s), \qquad \text{and} \\ \operatorname{Res}_{s=-2-j} B^v_{\overline{\overline{M}}} &= -s(s-2)\frac{1}{j!}\frac{\partial^j S_1}{\partial r^j}(0,-2-j) - s\frac{1}{(j+2)!}\frac{\partial^{j+2} S_2}{\partial r^{j+2}}(0,-2-j), \end{aligned}$$

其中

$$S_1(r,s) = \int_{S^1(1)} \left(1 + \frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-4}{2}} f(rw)\frac{(f(rw) - r\sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial u_i}(rw)\ u_i)}{r^4}\,\varphi(w)\, d\sigma(w),$$

and

$$S_2(r,s) = \int_{S^1(1)} \left(1 + \frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-2}{2}}\ \varphi(w)\, d\sigma(w)$$

当 r 较小时。

如果我们写作

$$\begin{gathered} f(u_1,u_2) = \\ b_1u_1^2 + b_2u_1u_2 + b_3u_2^2 + \\ c_1u_1^3 + c_2u_1^2u_2 + c_3u_1u_2^2 + c_4u_2^3 + \\ d_1u_1^4 + d_2u_1^3u_2 + d_3u_1^2u_2^2 + d_4u_1u_2^3 + d_5u_2^4 + O(\|w\|^5), \\ \left(1+\frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-4}{2}} f(rw)\frac{(f(rw) - r\sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial u_i}(rw)\ u_i)}{r^4} \\ = \left(1 + \frac{(s-4)}{2}\frac{f^2}{r^2} + \frac{(s-4)(s-6)}{8}\frac{f^4}{r^4}\right) f\frac{(f - r\sum_{i=1}^2 \frac{\partial f}{\partial u_i}(rw)\ u_i)}{r^4} + O(r^6), \end{gathered} \tag{2}$$

and

$$\begin{gathered} \left(1+\frac{f(rw)^2}{r^2}\right)^{\frac{s-2}{2}} \\ = 1 + \frac{(s-2)}{2}\frac{f^2}{r^2} + \frac{(s-2)(s-4)}{8}\frac{f^4}{r^4} + O(r^6), \end{gathered}$$

代入 $S_1(r,s)$ 和 $S_2(r,s)$ 的定义，并执行所指示的微分运算（使用 Maxima），我们得到

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{s=0} B^v_{\overline{M}} &= 0 \\ \operatorname{Res}_{s=-2} B^v_{\overline{M}} &= \pi(3b_3^2 + 2b_1b_3 + b_2^2 + 3b_1^2) \\ \operatorname{Res}_{s=-4} B^v_{\overline{M}} &= \frac{\pi}{8}\begin{pmatrix} 360\,b_3\,d_5 + 72\,b_1\,d_5 + 72\,b_2\,d_4 + 180\,c_4^2 \\ +72\,c_2\,c_4 + 72\,b_3\,d_3 + 72\,b_1\,d_3 + 36\,c_3^2 \\ +72\,c_1\,c_3 - 315\,b_3^4 - 180\,b_1\,b_3^3 - 270\,b_2^2\,b_3^2 \\ -162\,b_1^2\,b_3^2 - 324\,b_1\,b_2^2\,b_3 + 72\,d_1\,b_3 \\ -180\,b_1^3\,b_3 + 72\,b_2\,d_2 + 36\,c_2^2 - 27\,b_2^4 \\ -270\,b_1^2\,b_2^2 + 360\,b_1\,d_1 + 180\,c_1^2 - 315\,b_1^4 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3}$$

为了将这些式子重新表示为第二基本形式的协变导数的完全缩并，我们引入权的概念。

注意，如果 $\lambda \in \mathbb{R}^+$ 和 $M \in \mathcal{M}$，则集合

$$\lambda^{-1}M = \{\lambda^{-1}u \mid u \in M\}$$

也属于 $\mathcal{M}$，此外映射

$$(\lambda, M) \mapsto \lambda^{-1}M$$

定义了群 $\mathbb{R}^+$ 在 $\mathcal{M}$ 上的作用。

令 $\mathcal{F}$ 为 M 第二基本形式在 u_1u_2坐标系下于 0 处的协变导数分量的多项式。我们将把 $\mathcal{F}$ 视为映射$\mathcal{F}\colon \mathcal{M} \to \mathbb{C}$。

若对于所有 $\lambda \in \mathbb{R}^+$和 $M \in \mathcal{M}$， $\mathcal{F}$都满足 $\mathcal{F}(\lambda^{-1}M) = \lambda^l \mathcal{F}(M)$，则称 $\mathcal{F}$为权为 l的泛函。注意，权为 l 的泛函构成一个有限维复向量空间；此外，若 $\mathcal{F}$ 的权为 l 且 $\mathcal{G}$ 的权为 m ，则 $\mathcal{F}\mathcal{G}$ 的权为 $l+m$。

现在来考察当前各种泛函的权。

(1) $\mathrm{II}_{ij;\alpha}(0)$ 的分量（在 u_1u_2 坐标系中）的权为 $|\alpha|+1$。(2) 当我们按照方程（2）将 M 局部表示为某个函数的图像时，单项式 $b_i^\alpha c_j^\beta d_k^\gamma$ 的权为 $\alpha+2\beta+3\gamma$，所有这类单项式构成权为 $\alpha+2\beta+3\gamma$ 的泛函空间的一组基。(3) 泛函 $M \mapsto \mathrm{Res}_{s=-k} B^v_{\overline{\overline{M}}}$ 的权为 k。

注意，$\mathrm{II}_{ij;\alpha}(0)$ 的完全缩并中的每个单项式都有一个权。根据 Weyl 定理，权为 l 的 O(2) 不变泛函向量空间由 $\mathrm{II}_{ij;\alpha}(0)$ 的完全缩并中权为 l 的单项式张成。对于较小的权值，枚举它们很容易：

权	单项式
0	1
1	H_0
2	H_0^2, H_1
3	H_0^3, H_0H_1, H_3
4	$H_0^4, H_1^2, H_0^2H_1, H_2, H_0H_3, H_4, H_5, H_6$

由此我们得出，$\mathrm{Res}_{s=0} B^v_{\overline{\overline{M}}}$与 M无关，$\mathrm{Res}_{s=-2} B^v_{\overline{\overline{M}}}$是 H_0^2和 H_1的线性组合，而 $\mathrm{Res}_{s=-4} B^v_{\overline{\overline{M}}}$是 H_0^4, H_1^2, $H_0^2H_1$, H_2,H_0H_3, H_4, H_5, H_6的线性组合

使用 Maxima，我们计算了坐标u_1、 u_2 在 M 上靠近 0 处 I 和 II 的分量，精确到二阶，并由此确定了协变导数和二阶协变导数

II 在 0 处的协变导数。利用这一点，我们发现，在 0 处有

$$
\begin{aligned}
H_0^2 &= 4b_3^2 + 8b_1b_3 + 4b_1^2 \\
H_1 &= 4b_3^2 + 2b_2^2 + 4b_1^2 \\
H_0^4 &= 16b_3^4 + 64b_1b_3^3 + 96b_1^2b_3^2 + 64b_1^3b_3 + 16b_1^4 \\
H_1^2 &= 16b_3^4 + 16b_2^2b_3^2 + 32b_1^2b_3^2 + 4b_2^4 + 16b_1^2b_2^2 + 16b_1^4 \\
H_0^2H_1 &= 16b_3^4 + 32b_1b_3^3 + 8b_2^2b_3^2 + 32b_1^2b_3^2 + 16b_1b_2^2b_3 + 32b_1^3b_3 + 8b_1^2b_2^2 + 16b_1^4 \\
H_2 &= 36c_4^2 + 12c_3^2 + 12c_2^2 + 36c_1^2 \\
H_0H_3 &= 48b_3d_5 + 48b_1d_5 + 16b_3d_3 + 16b_1d_3 - 48b_3^4 \\
&\quad - 64b_1b_3^3 - 32b_2^2b_3^2 - 32b_1^2b_3^2 - 64b_1b_2^2b_3 \\
&\quad + 48d_1b_3 - 64b_1^3b_3 - 32b_1^2b_2^2 + 48b_1d_1 - 48b_1^4 \\
H_4 &= 48b_3d_5 + 12b_2d_4 + 8b_3d_3 + 8b_1d_3 - 48b_3^4 \\
&\quad - 48b_2^2b_3^2 - 32b_1^2b_3^2 - 32b_1b_2^2b_3 + 12b_2d_2 \\
&\quad - 8b_2^4 - 48b_1^2b_2^2 + 48b_1d_1 - 48b_1^4 \\
H_5 &= 48b_3d_5 + 12b_2d_4 + 8b_3d_3 + 8b_1d_3 - 48b_3^4 \\
&\quad - 16b_1b_3^3 - 44b_2^2b_3^2 - 56b_1b_2^2b_3 - 16b_1^3b_3 \\
&\quad + 12b_2d_2 - 4b_2^4 - 44b_1^2b_2^2 + 48b_1d_1 - 48b_1^4 \\
H_6 &= 36c_4^2 + 24c_2c_4 + 4c_3^2 + 24c_1c_3 + 4c_2^2 + 36c_1^2
\end{aligned}
$$

书写

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Res}_{s=-2}\, B^v_{\overline{\overline{M}}} = \beta_1 H_0^2 + \beta_2 H_1, \qquad \text{and} \\
&\mathrm{Res}_{s=-4}\, B^v_{\overline{\overline{M}}} = \gamma_1 H_0^4 + \gamma_2 H_1^2 + \gamma_3 H_0^2 H_1 + \gamma_4 H_2 + \gamma_5 H_0 H_3 + \gamma_6 H_4 + \gamma_7 H_5 + \gamma_8 H_6
\end{aligned}
$$

并与方程 (3) 比较，可得到关于 β_i、 $i = 1$、2 和 γ_i、 $i = 1$、.....、8 的超定线性方程组。根据 Weyl 定理，该方程组有解。求解后即可得到定理陈述中的系数。□

References

1. 让-吕克·布里林斯基，结的贝塔函数，《国际数学杂志》10 (1999)，第 4 期，415–423。MR 1697615 (2000f:58026) 2. 杰拉尔德·B·福兰德，《偏微分方程导论》，第二版，普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，1995。MR 1357411 3. 迈克尔·H·弗里德曼、何正旭和王正汉，结与平凡结的莫比乌斯能量，《数学年刊》（第 2 辑）139 (1994)，第 1 期，1–50。MR 1259363 (94j:58038) 4. E. J. Fuller 和 M. K. Vemuri，曲面的布里林斯基贝塔函数，《几何奉献》179 (2015)，153–160。MR 3424661 5. 阿尔弗雷德·格雷，《管状邻域》，第二版，《数学进展》第 221 卷，Birkhäuser Verlag，巴塞尔，2004，附维森特·米格尔撰写的序言。MR 2024928 (2004j:53001) 6. Jun O'Hara，结的能量，《拓扑学》30 (1991)，第 2 期，241–247。MR 1098918 (92c:58017)

7. Jun O'Hara 和 Gil Solanes，子流形的正则化黎曼能量，《数学新消息》291 (2018)，第 8–9 期，1356–1373。MR 3817322 8. ，论文《子流形的正则化黎曼能量》（发表于《数学新消息》291 (2018)，第 8–9 期，1356–1373）的勘误，《数学新消息》293 (2020)，第 5 期，1014–1019。MR 4100552 9. William Schelter，Maxima，一种计算机代数系统，https://maxima.sourceforge.io/，2022。10. 赫尔曼·外尔，《经典群》，《普林斯顿数学里程碑丛书》，普林斯顿大学出版社，美国新泽西州普林斯顿，1997；《它们的不变量与表示》，第十五次印刷，普林斯顿平装本。MR 1488158 (98k:01049)

Department of Mathematical Sciences, IIT (BHU), Varanasi 221 005.