arXiv:2303.01746v1 [cs.DM] 3 Mar 2023

图中全支配染色的复杂性

Michael A. Henning[1], *、Kusum[2], †、Arti Pandey[2], ‡、Kaustav Paul[2], §

[1]数学与应用数学系，约翰内斯堡大学，奥克兰公园2006，
南非。[2]数学系，印度理工学院罗帕尔分校，旁遮普，印度。

摘要

设 $G = (V, E)$是一个没有孤立顶点的图。如果 v 与 w相邻，则称顶点 v 全支配顶点 w $(w \neq v)$。若 D中的每个顶点 $v \in V$ 都被 D中的某个顶点全支配，则称集合 $D \subseteq V$ 为 G 的一个全支配集。全支配集的最小基数称为 G 的全支配数，记为 $\gamma_t(G)$。图 G 的一个全支配染色是对 G的顶点进行正常着色，使得每个顶点都全支配某个色类。 G 的全支配染色数 $\chi_{\rm td}(G)$是 G的全支配染色所需的最少颜色数。 G 问题是使用最少的颜色为 G 找到一个全支配染色。已知，对于一般图，该问题的判定版本是NP完全的。我们证明，即使将其限制在二部图、平面图和分裂图中，该问题仍然是NP完全的。我们进一步研究各种图类上的 Total Dominator Coloring问题，包括树、余图和链图。首先，我们刻画满足 $\chi_{\rm td}(T) = \gamma_t(T) + 1$的树，这完成了对取得 $\chi_{\rm td}(T)$所有可能值的树的刻画。此外，我们证明，对于余图 G，可以在线性时间内计算 $\chi_{\rm td}(G)$。另外，我们证明链图 G 的 $2 \leq \chi_{\rm td}(G) \leq 4$ ，并在线性时间内给出 $\chi_{\rm td}(G)$每个可能取值对应的链图刻画。

关键词：全支配染色。二部图。平面图。弦图。余图

*mahenning@uj.ac.z
†2018maz0011@iitrpr.ac.in
‡
a
r
t
i
@
iitrpr.ac.in§kaustav.20
maz0010@iitrpr.ac.in

1 引言

设 $G=(V,E)$ 是一个图，其中 $V=V(G)$ 和 $E=E(G)$ 分别表示 G 中的顶点集合和边集合。若 $uv\in E$，则称顶点 $v\in V$ 与顶点 $u\in V$ 相邻。对于 $u,v\in V$，若 $uv\in E$，则 u 和 v 是邻点。顶点 $v\in V$ 的开邻域是 v 的邻点集合，记作 $N_G(v)=\{u\mid uv\in E\}$；顶点 v 的闭邻域是集合 $N_G[v]=N_G(v)\cup\{v\}$。v 在 G 中的度 $d_G(v)$ 是 v 的邻点数，因此 $d_G(v)=|N_G(v)|$。不含孤立顶点的图称为无孤立点图。顶点 $v\in V$ 支配其闭邻域 $N_G[v]$ 中的所有顶点。

图中的支配概念已经得到了深入研究。若集合 $D\subseteq V$ 是 G 的支配集，则 V 中的每个顶点都受到 D 中某个顶点的支配。G 的支配数 $\gamma(G)$ 是 G 的支配集的最小基数。在无孤立点图 G 中，若 u 全支配 顶点 v，$v\neq u$，则 $uv\in E$。因此，v 全支配其开邻域 $N_G(v)$ 中的所有顶点。注意，每个顶点都支配自身，但不会全支配自身。G 的全支配集（简称 TD-set）是 V 的子集 D^t，满足 V 中的每个顶点都受到 D^t 中某个顶点的全支配。G 的全支配数 $\gamma^t(G)$ 是 G 的全支配集的最小基数。基数为 $\gamma_t(G)$ 的 TD-set 称为 G 的 γ_t-集。关于图的支配与全支配方面的最新著作，读者可参阅 [9, 10, 11, 17]。

G 的正常着色是指为 G 的顶点分配颜色，使得任意两个相邻顶点都被分配不同的颜色。对 G 进行正常着色所需的最少颜色数称为 G 的色数，记作 $\chi(G)$。正常着色中被分配相同颜色的顶点子集称为该着色的色类。如果 G 的正常着色还满足以下性质，则称为支配着色：G 的每个顶点都支配至少一个色类中的所有顶点。换言之，G 的每个顶点要么属于一个单元素色类，要么与某个其他色类中的所有顶点都相邻。对 G 进行支配着色所需的最少颜色数称为 G的支配者色数，记作 $\chi_d(G)$。如果 G 的一个支配着色恰好使用 $\chi_d(G)$种颜色，则称其为 G的 χ_d-着色。Dominator Coloring问题要求使用 $\chi_d(G)$种颜色对 G 进行支配着色。Dominator Coloring问题的判定版本，简称 DCD 问题，以一个无孤立点图 G 和一个正整数 k 为输入，询问 G 是否存在一种至多使用 k 种颜色的支配着色。

全支配着色的版本在文献中也得到了广泛研究。无孤立点图 G 的一个全支配着色，简称 TD-着色，是 G 的一种正常着色，并具有以下附加性质：G 的每个顶点都与某个不同于其自身色类的色类中的每个顶点相邻。G的全支配染色数记为 $\chi_{\rm td}(G)$，它是满足 G 具有使用 k种颜色的 TD-着色的最小正整数 k。我们采用了关于图中的支配和全支配着色的书籍章节 [16]中的记号，但需要指出的是，文献中也将 $\chi_{\rm td}(G)$记为 $\chi_d^t(G)$（例如参见 [20]）。使用恰好 $\chi_{\rm td}(G)$种颜色的 G 的 TD-着色称为 $\chi_{\rm td}$-着色 of G。Total Dominator Coloring 问题是寻找一个使用最少颜色的 G 的 TD-着色，即寻找一个 $\chi_{\rm td}$-着色 of$G$。

我们注意到，TD-着色仅对无孤立点图有定义。因此，本文通篇考虑的图都是无孤立点图。Total Dominator Coloring 问题的判定版本简称为 TDCD问题，它以一个无孤立点图 G 和一个正整数 k 作为输入，并询问 G 是否具有至多使用 k 种颜色的 TD-着色。在 2009 [13], 中首次引入了 TD-着色的概念，此后在过去十年中得到了广泛研究，参见 [1, 7, 8, 12, 15, 18, 19, 20, 21, 24, 25, 26] 及其他文献。已知对于一般图 [20]，TDCD问题是 NP完全的。下面给出了关于 $\chi_{\rm td}(G)$ 的界的一个已知结果。

定理1。 [20, 24] 对于一个无孤立点图 G,

$$\max\{\gamma_t(G), \chi(G)\} \leq \chi_{\rm td}(G) \leq \gamma_t(G) + \chi(G).$$

在定理1中，若 G 是二部图，则 $\gamma_t(G) \leq \chi_{\rm td}(G) \leq \gamma_t(G) + 2$。对于二部图、树和路径 [15]，这两个界都是紧的。文献 [20, 24, 25, 26]研究了多种图类的全支配染色，包括路径、轮图、树和毛毛虫图。文献 [19, 21]还研究了积图和 Mycielski图上的全支配染色问题。此外，文献 [1, 7, 8, 12,18]针对某些图类和图运算，研究了 $\chi_{\rm td}(G)$ 的界和精确值。文献 [15]刻画了任意树 T中满足 $\gamma_t(T) \leq \chi_{\rm td}(T) \leq \gamma_t(T)+2$的情形，以及满足 $\chi_{\rm td}(T) = \gamma_t(T)$ 的树。文献 [15]将刻画满足 $\chi_{\rm td}(T) = \gamma_t(T) + 1$ 的树作为一个开放问题提出。

本文研究了若干图类中 Total Dominator Coloring问题的复杂性，包括链图、余图、二部图、平面图和分裂图。首先，我们给出了满足 $\chi_{\rm td}(T) = \gamma_t(T)+1$的树的刻画，从而补全了所有可能的 $\chi_{\rm td}(T)$取值下树的刻画。我们指出，这一刻画中给出的条件无法在多项式时间内检验。随后，我们在线性时间内计算了连通余图和非连通余图的全支配染色数。接着，我们证明，对于链图 G， $2 \leq \chi_{\rm td}(G) \leq 4$，并在线性时间内刻画了所有可能的 $\chi_{\rm td}(G)$取值对应的链图类。另一方面，据我们所知，目前关于TDCD问题仅有一个已知的困难性结果，即TDCD问题在一般图上是NP完全的 [20]。我们沿此方向拓展了对 TotalDominator Coloring问题的研究，证明即使将图限制为平面图、连通二部图和分裂图，TDCD问题仍然是NP完全的。这也表明，TDCD问题在弦图上仍然是NP完全的，因为分裂图是弦图的子类。

本文组织如下。第2节中，我们定义必要的图论记号，并介绍本文将用到的一些已知结果。第3节中，我们聚焦于树的 TD-着色，并刻画满足 T having$\chi_{\rm td}(T) = \gamma_t(T) + 1$ 的树。第4节中，我们计算任意余图 G 的 $\chi_{\rm td}(G)$。第5节中，我们研究链图的支配着色和 TD-着色。第6节中，我们证明，即使对于平面图、连通二部图和分裂图，TDCD问题也是 NP完全的。最后，第7节总结全文。

2 预备知识

设 $G=(V,\ E)$ 是一个图。我们假设本文讨论的所有图都是简单、非平凡、无孤立顶点的无向图。连通无环图称为树。在树 T 中，度为1的顶点称为**叶子**，其邻点称为**支撑顶点**。用 P_n 表示以 n 个顶点构成的路。如果图 G 不含 P_4 作为其导出子图，则称其为余图，也就是说，G 是 G P_4-自由的。等价地 [23], ，阶至少为2的图 G 是余图，当且仅当 G 或其补图 G 不连通。

若 D 是 G 的极小全支配集，则顶点 $u\in D$ 的**私有邻点集**是仅被 u 全支配的顶点集合，记作 $\mathrm{pn}(u,\ D)$。因此，若 $w\in \mathrm{pn}(u,\ D)$，则 $N(w)\cap D=\{u\}$。若 $\mathrm{pn}(u,\ D)=\{w\}$，则 w 是 u 的私有邻点集中唯一的顶点。我们定义集合 $D_I=\{u\in D\colon\ |\mathrm{pn}(u,\ D)|=1\}$ 和 $D_R=D\setminus D_I$。因此，$D=D_I\cup D_R$。

G 的**最优全支配染色**是 χ_{td} 的一种着色。设 $\mathcal{H}$ 是 G 的一种 χ_{td} 着色。色类 $V_i^{\mathcal{H}}$ 是在 $\mathcal{H}$ 中获得颜色 i 的顶点集合，其中 $1\le i\le \chi_{\mathrm{td}}(G)$。设 $C^{\mathcal{H}}=\{V_1^{\mathcal{H}},V_2^{\mathcal{H}},\ldots,V_{\chi_{\mathrm{td}}(G)}^{\mathcal{H}}\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的色类集合。若某个色类 $V_i^{\mathcal{H}}$ 满足 $|V_i^{\mathcal{H}}|=1$，则 $V_i^{\mathcal{H}}$ 称为**孤立色类**，顶点 $v\in V_i^{\mathcal{H}}$ 称为**孤立顶点**。若色类 $V_i^{\mathcal{H}}$ 中的每个顶点都全支配一个不同于 $V_i^{\mathcal{H}}$ 的色类，则称色类 $V_i^{\mathcal{H}}$ 为**自由色类**。令

- $C_0^{\mathcal{H}}$是 $C^{\mathcal{H}}$ 的一个最小基数子集，使得每个 $u\in V$ 都全支配 $C_0^{\mathcal{H}}$的某个色类，

- $C_P^{\mathcal{H}}$是 $C^{\mathcal{H}}$ 的一个子集，其中每个色类 $R\in C_P^{\mathcal{H}}$都是孤立色类，
- $C_S^{\mathcal{H}}$是 $C^{\mathcal{H}}$ 的一个子集，其中每个色类 $R\in C_S^{\mathcal{H}}$都包含多个顶点，且被 G的某个顶点全支配，并且
- $C_G^{\mathcal{H}}$ 是 $C^{\mathcal{H}}$ 的一个子集，其中每个色类 $R\in C_G^{\mathcal{H}}$ 都包含多个顶点，且不被 G的任何顶点全支配。

集合 $C_P^{\mathcal{H}}$、 $C_S^{\mathcal{H}}$和 $C_G^{\mathcal{H}}$ 构成 $\mathcal{H}$ 的颜色类的一个划分，因此，$C^{\mathcal{H}}=C_P^{\mathcal{H}}\cup C_S^{\mathcal{H}}\cup C_G^{\mathcal{H}}$。令 $A^{\mathcal{H}}$ 为着色 $\mathcal{H}$中的孤立顶点集合，并令 $B^{\mathcal{H}}$ 为 $C_G^{\mathcal{H}}$的颜色类中所有顶点构成的集合。因此，

- $A^{\mathcal{H}}=\{u\in R\colon\ R\in C_P^{\mathcal{H}}\}$，并且
- $B^{\mathcal{H}}=\{u\in R\colon\ R\in C_G^{\mathcal{H}}\}$。

令 $D_0^{\mathcal{H}}$为从$C_0^{\mathcal{H}}$的每个色类中恰好选取一个顶点所构成的集合。另外，令 $D_S^{\mathcal{H}}$ 为从$C_S^{\mathcal{H}}$的每个色类中选取一个顶点所构成的集合。注意到$|C_S^{\mathcal{H}}|=|D_S^{\mathcal{H}}|$。

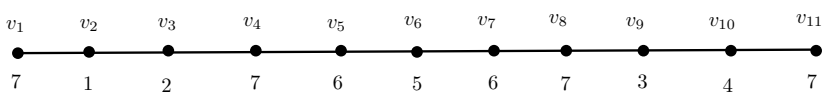


图 1：一棵树 $T=P_{11}$ 和一个 χ_{td}-着色 $\mathcal{H}$ 的 T

下面通过一个例子说明上述定义。令 $T = P_{11}$ 为阶为 11 的路$v_1v_2\ldots v_{11}$，令 $\mathcal{H}$ 为图1所示的 T的 χ_{td}-着色。在此例中，树 T具有以下性质。

- χ总支配染色$(T) = 7$,
- $V_1^{\mathcal{H}} = \{v_2\}$, $V_2^{\mathcal{H}} = \{v_3\}$, $V_3^{\mathcal{H}} = \{v_9\}$, $V_4^{\mathcal{H}} = \{v_{10}\}$, $V_5^{\mathcal{H}} = \{v_6\}$, $V_6^{\mathcal{H}} = \{v_5, v_7\}$和 $V_7^{\mathcal{H}} = \{v_1, v_4, v_8, v_{11}\}$ 是颜色类,
- $C^{\mathcal{H}} = \{V_1^{\mathcal{H}}, V_2^{\mathcal{H}}, V_3^{\mathcal{H}}, V_4^{\mathcal{H}}, V_5^{\mathcal{H}}, V_6^{\mathcal{H}}, V_7^{\mathcal{H}}\}$,
- $C_0^{\mathcal{H}} = \{V_1^{\mathcal{H}}, V_2^{\mathcal{H}}, V_3^{\mathcal{H}}, V_4^{\mathcal{H}}, V_5^{\mathcal{H}}, V_6^{\mathcal{H}}\}$,
- 孤立顶点为 v_2， v_3， v_6， v_9， v_{10},
- $C_P^{\mathcal{H}} = \{V_1^{\mathcal{H}}, V_2^{\mathcal{H}}, V_3^{\mathcal{H}}, V_4^{\mathcal{H}}, V_5^{\mathcal{H}}\}$,
- $C_S^{\mathcal{H}} = \{V_6^{\mathcal{H}}\}$,
- $C_G^{\mathcal{H}} = \{V_7^{\mathcal{H}}\}$,
- $A^{\mathcal{H}} = \{v_2, v_3, v_6, v_9, v_{10}\}$,
- $B^{\mathcal{H}} = \{v_1, v_4, v_8, v_{11}\}$,
- $D_S^{\mathcal{H}} = \{v_5\}$,
- $D_0^{\mathcal{H}} = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_9, v_{10}\}$,
- 对于支配集 $D_0^{\mathcal{H}}$、 $D_I = \{v_3, v_5\}$和 $D_R = \{v_2, v_6, v_9, v_{10}\}$。

对于平面图 G， $\chi(G) = 4$。根据定理1，我们有 $\gamma_t(G) \leq \chi_{\mathrm{td}}(G) \leq \gamma_t(G)+4$。现在，我们正式陈述关于二部图和平面图的 $\chi_{\mathrm{td}}(G)$界的结果。

推论1。 以下性质成立。

(a) 如果 G 是二部图，则 $\gamma_t(G) \leq \chi_{\mathrm{td}}(G) \leq \gamma_t(G) + 2$。(b) 如果 G 是平面图，则 $\gamma_t(G) \leq \chi_{\mathrm{td}}(G) \leq \gamma_t(G) + 4$。

由于树是二部图的一个子类，因此当 G是树时，推论 1(a)中的界也成立。我们注意到，推论 1(a)中的两个界对于二部图以及树都是可达到的。

对于具有 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T)$ 的树的刻画， [15], 构造了一个树族$\mathcal{T}$： $\mathcal{T} = P_2 \cup \{$通过连接 $k \geq 1$ 个阶至少为三的不相交星图而得到的树，连接边（$k-1$ 条）连接叶顶点，且每个原始星图的中心均保持为茎$\}$。以下是关于树的已知结果。

定理 2. [15] 对于一棵树 T， $\gamma_t(T) = \chi_{\mathrm{td}}(T)$ </style>当且仅当 $T \in \mathcal{T}$。

定理 3. [15] 对于一棵树 $T \notin \mathcal{T}$，以下陈述成立：

(a) 如果 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$，则 T具有一个使用 $\chi_d^t(T)$ 种颜色的 TDC，且其中有一个自由色类。(b) 如果 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 2$，则 T具有一个使用 $\chi_d^t(T)$ 种颜色的 TDC，且其中有两个自由色类。

3 Char满足 T 的树的刻画 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma^t(T) + 1$

在本节中，我们假设 $T = (V, E)$ 是一棵非平凡树。根据推论 1(a)，$\chi_{\mathrm{td}}(T)$ 取三个值中的一个，即 $\gamma^t(T)$、$\gamma^t(T) + 1$ 或 $\gamma^t(T) + 2$。此外，[15] 表明，对于 $\chi_{\mathrm{td}}(T)$ 的每个值，都存在无穷多棵树。还请注意，定理 2 给出了满足 $\gamma_t(T) = \chi_{\mathrm{td}}(T)$ 的树 T的刻画。在本节中，我们刻画满足 $\gamma_t(T) = \chi_{\mathrm{td}}(T) + 1$ 的树 T，从而完成对 T 具有 $\chi_{\mathrm{td}}(T)$ 每个可能值的树的刻画。

我们首先证明树的 χ_{td}-着色的性质。

命题 1. 树的任意 χ_{td}-着色中，每个支撑顶点都是孤立的。

证明。设 $\mathcal{H}$ 是树 T 的一个 TD-着色，使用了 $\chi_d^t(T)$ 种颜色。反设存在一个不孤立的茎 v。由于 v 是一个茎，因此必有一个叶顶点 x 与该茎相邻，且它不与 T 的任何其他顶点相邻。在 T 的任意 TD-着色中，每个 T 顶点都被适当着色，并全支配某个色类。设 v 属于色类 R，且该色类不是孤立的。那么，顶点 x 不全支配任何色类，这与 $\mathcal{H}$ 是使用 χ_{td} 种颜色的 T 的 TD-着色这一事实矛盾。因此，结论成立。

□

在下一个结果中，我们考虑至少有三个顶点的树，并证明存在一种最优 TD-着色，使得与同一支撑顶点相邻的叶子可以被赋予相同的颜色。

命题 2. 如果 T 是一个 $n \geq 3$ 阶的树，那么存在一种 χ_{td} 着色，使得支撑顶点的所有叶邻点都属于同一个色类。

证明。在树 T 的所有 χ_{td} 着色中，选取 $\mathcal{H}$，使得 T 中其叶邻点并非全部使用同一种颜色着色的支撑顶点数目最少。令 u 为 T 的任意一个支撑顶点，并令 u 在着色 $\mathcal{H}$ 中使用颜色 1。此外，令 $\mathcal{H}_1$ 为包含 u 的色类。假设 u 的叶邻点不属于同一个色类。根据命题 1，$\mathcal{H}_1$ 是一个孤立色类，因此 $\mathcal{H}_1 = \{u\}$。顶点 u 必然全支配某个色类，记为 $\mathcal{H}_2$，并令 $\mathcal{H}_2$ 中的每个顶点都使用颜色 2 着色。如果 u 的某个叶邻点使用颜色 2 着色，则将 u 的所有叶邻点重新着为颜色 2。如果 u 的叶邻点均未使用颜色 2 着色，则将 u 的所有叶邻点重新着为一种现有颜色，该颜色用于 u 的某个叶邻点。令 $\mathcal{H}'$ 为对 T 的顶点进行上述处理后得到的着色。这产生了 T 的一种 χ_{td} 着色，其中其叶邻点并非全部使用同一种颜色着色的支撑顶点更少，这与我们对 χ_{td} 着色 $\mathcal{H}$ 的选择相矛盾。因此，$\mathcal{H}$ 这一 χ_{td} 着色将支撑顶点的所有叶邻点都着为同一种颜色。

□

我们注意到，若 T 是一棵具有 $n \geq 3$的树，并不一定存在一种 χ_{td}-着色，使得 T 的所有叶子都着成同一种颜色。例如，若 T 是一条路P_6，且 $\mathcal{C}$ 是一种将两片叶子着成同一种颜色的 TD-着色，则还需要另外四种颜色才能使 $\mathcal{C}$ 成为一种 TD-着色。因此，这样的 TD-着色使用五种颜色。然而，$\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) = 4$，所以 $\mathcal{C}$不是 χ_{td}-着色的 T。不过，我们指出，P_6 属于前面定义的树族 $\mathcal{T}$，并且根据定理 2，一棵树

T属于该族 $\mathcal{T}$当且仅当 $\gamma_t(T) = \chi_{\mathrm{td}}(T)$。接下来我们将证明，若 T是一棵不属于族 $\mathcal{T}$ 的树，则确实存在一种 χ_{td}-着色，使得 T 的所有叶子都着成同一种颜色。

命题 3. 若 T 是一棵树且 $T \notin \mathcal{T}$，则存在 χ_{td} 的一个 χ_{td}-着色，使 T 的所有叶子均着同一种颜色。

证明. 设 T 是一棵不属于族 $\mathcal{T}$ 的树。由定理 2， $\gamma_t(T) \neq \chi_{\mathrm{td}}(T)$，由推论1可知，这意味着要么 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$，要么 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 2$。由定理 3， T 存在一个 χ_{td}-着色 $\mathcal{H}$，其中包含一个自由色类，记为 R，其中 R 中的顶点均着颜色 r。

现按如下方式构造 T 的一个 χ_{td}-着色。由于 $T \notin \mathcal{T}$，注意到树 T 不是一颗星，这意味着 T 的每个支撑顶点都有某个非叶邻点。对 T 中的每个支撑顶点 u，进行如下操作。若 u 的所有叶邻点均着颜色 r，则不改变这些叶邻点的颜色，它们均仍着颜色 r。然而，设 u 的某个叶邻点未着颜色 r。顶点 u 全支配某个色类，记为 S，其中 S 的顶点均着颜色 s。

现在，如果 u 的一个非叶邻点被着成颜色 s，那么就用颜色 r重新着色 u 的所有叶邻点。否则，如果 u 没有非叶邻点被着成颜色 s，那么 u 的一些（但并非全部）叶邻点被着成颜色 s。此时，我们任意选取 u 的一个非叶邻点，将其重新着成颜色 s，并将 u 的所有叶邻点重新着成颜色 r。我们对 T中的每个支撑顶点都这样做。所得的 χ_{td}-着色将 T 的所有叶子着成相同的颜色。 □

推论2。 如果 T是满足 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$的树，那么存在一种 χ_{td}-着色$\mathcal{H}$，使 T 的所有叶子都着成相同的颜色，并且满足 $|C_G^{\mathcal{H}}| = 1$。

证明。 设 T是满足 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$的树。根据命题 3，存在一种$\chi_{\mathrm{td}}$-着色 $\mathcal{H}$，使 T 的所有叶子都着成相同的颜色。设色类R 包含 T的所有叶子。由于 $T \notin \mathcal{T}$，树 T不是星。因此， T 中不存在与 T的所有叶子都相邻的顶点，这意味着 R 是 $\mathcal{H}$ 的自由色类，因此色类 R 属于集合 $C_G^{\mathcal{H}}$。我们证明$C_G^{\mathcal{H}} = \{R\}$。反之，假设 $|C_G^{\mathcal{H}}| \geq 2$。此时，每个$Q \in C_P^{\mathcal{H}} \cup C_S^{\mathcal{H}}$中各选取一个顶点所组成的集合构成 T的一个全支配集，其基数为 $|C_P^{\mathcal{H}}| + |C_S^{\mathcal{H}}| \leq |\mathcal{H}| - |C_G^{\mathcal{H}}| \leq \chi_{\mathrm{td}}(T) - 2 = \gamma_t(T) - 1$，这与假设矛盾。因此， $C_G^{\mathcal{H}} = \{R\}$，从而 $|C_G^{\mathcal{H}}| = 1$。

□

接下来，我们将证明一些关键引理，以便证明满足 $\gamma_t(T) = \chi_{\mathrm{td}}(T) + 1$ 的树 T 的刻画。

引理1. 如果 $\mathcal{H}$ 是树 T 中的一个 χ_{td}-着色，则以下性质成立。

(a) 每个 $R \in C_S^{\mathcal{H}}$都恰好被一个顶点全支配。(b) $A^{\mathcal{H}} \cup D_S^{\mathcal{H}}$ 是 T的全支配集。

证明。设 $\mathcal{H}$ 是 T的一个 χ_{td}-着色。设$R \in C_S^{\mathcal{H}}$。如果 R 被两个或更多顶点全支配，那么任取其中两个顶点，再任取 R中的两个顶点，它们所诱导出的树 T 的子图包含一个4-圈，这与假设矛盾。因此， R 恰好被一个顶点全支配。这证明了(a)部分。

为证明第（b）部分，我们假设 v 是 T 的任意顶点。由于 $\mathcal{H}$ 是 T 的 χ_{td}-着色，存在一个色类，记为 R，使得 v 全支配 R。因此，$R \in C_P^{\mathcal{H}} \cup C_S^{\mathcal{H}}$。如果 $R \in C_P^{\mathcal{H}}$，那么 v 被 $A^{\mathcal{H}}$ 中的某个顶点全支配。否则，如果 $R \in C_S^{\mathcal{H}}$，那么 v 被 $D_S^{\mathcal{H}}$ 中的某个顶点全支配。因此，$A^{\mathcal{H}} \cup D_S^{\mathcal{H}}$ 是 T 的一个全支配集。这证明了第（b）部分。 □

引理2。如果 T 是一棵满足 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$ 的树，那么存在一个 χ_{td}-着色$\mathcal{H}$ 的 T，使得 $A^{\mathcal{H}} \cup D_S^{\mathcal{H}}$ 是 T 的一个 γ_t-集合。

证明。设 T 是一棵树，且 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$。根据推论2，存在一个满足 $|C_G^{\mathcal{H}}| = 1$ 的 χ_{td}-着色$\mathcal{H}$ 的 T。注意到 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = |C_P^{\mathcal{H}}| + |C_S^{\mathcal{H}}| + |C_G^{\mathcal{H}}|$。此外，根据定义，我们有 $|C_P^{\mathcal{H}}| = |A^{\mathcal{H}}|$ 和 $|C_S^{\mathcal{H}}| = |D_S^{\mathcal{H}}|$。因此，

$$\begin{aligned}\gamma_t(T) &= \chi_{\mathrm{td}}(T) - 1 \\ &= (|C_P^{\mathcal{H}}| + |C_S^{\mathcal{H}}| + |C_G^{\mathcal{H}}|) - 1 \\ &= (1 + |A^{\mathcal{H}}| + |D_S^{\mathcal{H}}|) - 1 \\ &= |A^{\mathcal{H}}| + |D_S^{\mathcal{H}}|.\end{aligned}$$

根据引理1(b)，我们推知， T 的全支配集 $A^{\mathcal{H}} \cup D_S^{\mathcal{H}}$ 因此是一个最小全支配集，也就是说， T的 γ_t-集合是 $A^{\mathcal{H}} \cup D_S^{\mathcal{H}}$。 □

在给出本节的主要结果之前，我们先介绍一些额外的记号。设 T 是一棵满足 $T \notin \mathcal{T}$的非平凡树，且 D 是树T和 $S \subseteq D$的一个 γ_t-集合，那么，如果 $|N_T(v) \cap D| \geq 2$且$N_T(v) \cap D \subseteq S$，则称 $v \in V(T)$为(D, S)-坏顶点。现在我们可以给出满足 $\gamma_t(T) = \chi_{\mathrm{td}}(T) + 1$的树 T的刻画。

定理 4。若 T是一棵非平凡树且 $T \notin \mathcal{T}$，则 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$ 当且仅当存在 T 的一个 γ_t-集合 D 以及 D 的一个划分(D_1, D_2) 满足以下性质：

(a) $D_2 \subseteq D_1$，(b) T 不包含(D_2, D)-坏顶点，且(c) 集合 $V(T) \setminus (D_1 \cup N[S])$ 是独立的，其中 $S = \bigcup_{v \in D_2} \mathrm{pn}(v, D)$。

证明。设 T 为一棵满足 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$的树。由推论2可知，存在$\chi_{\mathrm{td}}$-着色 $\mathcal{H}$，它对 T 进行着色，使所有叶子具有相同的颜色，并且满足$|C_G^{\mathcal{H}}| = 1$。设 R 为 T的所有叶子组成的集合，则$C_G^{\mathcal{H}} = \{R\}$。设$D_1^{\mathcal{H}} \subseteq V$ 包含 $C_P^{\mathcal{H}}$的颜色类中的所有孤立顶点，并设 $D_2^{\mathcal{H}} \subseteq V$恰好包含每个 $Q \in C_S^{\mathcal{H}}$中的一个顶点。因此， $|D_1^{\mathcal{H}}| = |C_P^{\mathcal{H}}| = |A^{\mathcal{H}}|$ 且 $|D_2^{\mathcal{H}}| = |C_S^{\mathcal{H}}| = |D_S^{\mathcal{H}}|$。由引理2及其证明，集合 $D^{\mathcal{H}} = D_1^{\mathcal{H}} \cup D_2^{\mathcal{H}}$是 T的一个 γ_t-集合。因此，对每个 $x \in D^{\mathcal{H}}$，有 $|D^{\mathcal{H}}| = \gamma_t(T)$且$\mathrm{pn}(x, D^{\mathcal{H}}) \neq \emptyset$。

设 $x \in D_2^{\mathcal{H}}$，并设 X 为 $\mathcal{H}$ 的一个色类，满足 $x \in X$。因此， $x \in X$ 且$|X| \geq 2$。我们证明 x 有唯一的 $D^{\mathcal{H}}$-私有邻点，即 $|\mathbf{pn}(x,\ D^{\mathcal{H}})| = 1$。如前所述，$\mathbf{pn}(x,\ D^{\mathcal{H}}) \neq \emptyset$。设 $y \in \mathbf{pn}(x,\ D^{\mathcal{H}})$，因此，$y$ 在 $D^{\mathcal{H}}$ 中的唯一邻点是 x。由于 $\mathcal{H}$ 是 T的一个TD-着色， y 全支配某个色类，记为$Y \in C_P^{\mathcal{H}} \cup C_S^{\mathcal{H}}$。若 Y不同于 X，且由于 R 是一个自由色类，则顶点 y 将与 $D^{\mathcal{H}}$中的至少两个顶点相邻，这与$y \in \mathbf{pn}(x,\ D^{\mathcal{H}})$的假设矛盾。因此， y 全支配色类 X，且 $x \in X$。

反之，假设 $|\mathbf{pn}(x,\ D^{\mathcal{H}})| \geq 2$，并设 z 为 $\mathbf{pn}(x,\ D^{\mathcal{H}})$ 中一个不同于 y 的顶点。对顶点 y 所作的类似论证表明， z 全支配色类 X。然而， $|X| \geq 2$。因此，色类X 中的任意两个顶点与顶点 y 和 z 一起，诱导出树 T 的一个包含 4-圈的子图，矛盾。故 $\mathbf{pn}(x,\ D^{\mathcal{H}}) = \{y\}$，即顶点 x 有唯一的$D^{\mathcal{H}}$-私有邻点，其中 x 是 $D_2^{\mathcal{H}}$ 中的任意顶点。现在，回想一下 $D_I = \{v \in D\colon\ |\mathbf{pn}(v,\ D)| = 1\}$，因此 $D_2^{\mathcal{H}} \subseteq D_I$。令

$$S = \bigcup_{x \in D_2^{\mathcal{H}}} \mathrm{pn}(x, D^{\mathcal{H}}).$$

根据我们先前的观察，对于每个顶点 $x \in D_2^{\mathcal{H}}$，都有 $|\mathbf{pn}(x,\ D^{\mathcal{H}})| = 1$，且 $\mathbf{pn}(x,\ D^{\mathcal{H}})$ 中的顶点全支配包含 x 的色类。因此， $N_T[S]$ 包含属于集合 $C_S^{\mathcal{H}}$ 的所有顶点。这意味着 $V(T) \setminus (D_1^{\mathcal{H}} \cup N[S]) \subseteq B^{\mathcal{H}}$，其中$B^{\mathcal{H}} = R$。现在，由于 R 是独立的，集合 $V(T) \setminus (D_1^{\mathcal{H}} \cup N[S])$ 也独立。

接下来，我们证明不存在（$D_2^{\mathcal{H}}$， $D^{\mathcal{H}}$）-坏顶点。反之，假设存在一个（$D_2^{\mathcal{H}}$， $D^{\mathcal{H}}$）-坏顶点，记为 $v \in V$（T）。因此， $|N_T$（v）$\cap D^{\mathcal{H}}| \geq 2$ 以及 N_T（v）$\cap D^{\mathcal{H}} \subseteq D_2^{\mathcal{H}}$。因此， v 无法全支配任何 $K \in C_P^{\mathcal{H}}$。此外， v 不是任何 $w \in D^{\mathcal{H}}$的 $D^{\mathcal{H}}$-私有邻点。设 v 全支配 $Q \in C_P^{\mathcal{H}} \cup C_S^{\mathcal{H}}$。则必然有 Q 属于 $C_S^{\mathcal{H}}$。令 $u \in Q \cap D^{\mathcal{H}}$，并令 $u' \in Q$ 使得 $u' \neq u$。根据我们先前的观察，|的私有邻点集 pn（u， $D^{\mathcal{H}}$）| = 1。令 $x \in$的私有邻点集 pn（u， $D^{\mathcal{H}}$）。现在，集合 $\{u, u', v, x\}$ 在 T中诱导出一个 4-圈，矛盾。由于 Q 是任意的，且 v 不全支配任何 $Q \in C_S^{\mathcal{H}}$，这与 $\mathcal{H}$是 T的一个 TD-着色相矛盾。因此，不存在（$D_2^{\mathcal{H}}$， $D^{\mathcal{H}}$）-坏顶点。于是，性质 (a)、(b) 和 (c) 均成立，其中 $D_1 = D_1^{\mathcal{H}}$以及 $D_2 = D_2^{\mathcal{H}}$。

反之，设 T 是一棵非平凡树，且 $T \notin \mathcal{T}$，并设存在一个 γ_t-集合 D，它属于T，且存在一个划分 $(D_1,\ D_2)$，属于 D，满足性质 (a)、(b) 和 (c)，即 (a) $D_2 \subseteq D_I$，(b) T 不包含 $(D_2,\ D)$-坏顶点，并且 (c) 集合 $V(T) \setminus (D_1 \cup N[S])$ 是独立的，其中

$$S = \bigcup_{v \in D_2} \mathrm{pn}(v, D).$$

设 $\mathcal{C}$ 为 T 的顶点着色，定义如下。给 D中的每个顶点赋予一种唯一的颜色。此外，对于每个顶点 $x \in D_2$ 及其唯一的 D-私有邻点$y \in \mathbf{pn}(x, D)$，我们将 $N_T(y)$中的所有顶点着为与 x相同的颜色。最后，将所有其余未着色的顶点着为一种新的颜色。由于 $V(T) \setminus (D_1 \cup N[S])$是独立的，且 T不含有(D_2, D)-坏顶点，我们推知 $\mathcal{C}$ 是 T的一个TD-着色，这意味着 $\chi_{\mathrm{td}}(T) \leq |\mathcal{C}| = |D| + 1 = \gamma_t(T) + 1$。然而， $\chi_{\mathrm{td}}(T) \geq \gamma_t(T) + 1$，因为根据假设 $T \notin \mathcal{T}$。因此， $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$。 □

由定理 2和定理 4可知，我们得到了关于全支配染色数所有三种可能取值的树的刻画。

4 余图的全支配染色数

在本节中，我们根据余图的色数，计算连通余图和非连通余图的全支配染色数。在 TD-着色$\mathcal{H}$ 中，对于 G，我们将一个颜色类 $R \in C_0^{\mathcal{H}}$称为独占色类，并将相应的颜色称为独占颜色。着色 $\mathcal{H}$ 中的其余颜色称为非独占颜色。对于给定的 TD-着色 $\mathcal{H}$ ，独占颜色的数量对于 G是唯一的；但如果改变 TD-着色，该数量也可能随之改变。

首先，我们证明，对于连通余图，全支配染色数与色数相等。此外，我们证明，在连通余图的任意最优全支配染色中，至少存在两个独占色类。

定理 5。 若 G 是一个连通余图，则 $\chi_{\mathrm{td}}(G) = \chi(G)$。此外，若 $\mathcal{H}$ 是 χ_{td}-着色 $\mathcal{H}$ 的 G，则 $|C_0^{\mathcal{H}}| = 2$。

证明。设 G 是一个连通余图。因此，图 G 不连通，这意味着$V(G)$可以划分为两个非空且不相交的子集 P 和 Q ，使得图 G中的每个$x \in P$ 都与每个 $y \in Q$ 相邻。假设 $\mathcal{H}$ 是G的正常着色。显然，对于任意色类 $A \in C^{\mathcal{H}}$， $A \subseteq P$ 或 $A \subseteq Q$ 成立，但不能同时成立。设 a 和 b分别是用于为 P和 Q中的顶点着色的颜色。假设 $V_a^{\mathcal{H}}$和 $V_b^{\mathcal{H}}$分别是颜色 a 和 b的颜色类。注意到， $V_a^{\mathcal{H}} \subseteq P$和 $V_b^{\mathcal{H}} \subseteq Q$。因此，每个 $x \in P$ 全支配 $V_b^{\mathcal{H}}$，且 Q 中的每个顶点全支配 $V_a^{\mathcal{H}}$，这意味着 $\mathcal{H}$ 是 G的 TD-着色。因此， $\chi(G) \leq \chi_{\mathrm{td}}(G) \leq |\mathcal{H}| = \chi(\mathcal{G})$。所以，$\chi_{\mathrm{td}}(G) = \chi(G)$。此外，由于每个 $v \in V$要么全支配 $V_a^{\mathcal{H}}$，要么全支配 $V_b^{\mathcal{H}}$，集合 $C_0^{\mathcal{H}} = \{V_a^{\mathcal{H}}, V_b^{\mathcal{H}}\}$。因此， $|C_0^{\mathcal{H}}| = 2$，且 G的最优全支配染色需要两个独占颜色。 □

接下来，我们考虑非连通余图 G。利用 G 的每个连通分量本身都是连通余图这一性质，我们给出一个用 $\chi(G)$ 和 G的连通分量数来计算 $\chi_{\mathrm{td}}(G)$ 的表达式。

定理 6。 如果 G 是一个具有 k 个连通分量的非连通余图，则

$$\chi_{\mathrm{td}}(G) = \chi(G) + 2(k-1).$$

证明。 设 G 是一个非连通图，它有 $k \geq 2$ 个连通分量 G_1，.....， G_k，并设 $\mathcal{H}$ 是 χ_{td}-着色。令 $\mathcal{H}_i$ 表示将 G 的着色 $\mathcal{H}$ 限制到连通分量 G_i 上的结果，其中 $i \in [k]$。所得着色 $\mathcal{H}_i$ 本身是 G_i 的 TD-着色，其中 $i \in [k]$。由于 G 的每个连通分量本身都是一个连通余图，对 G 的每个连通分量应用定理 5，我们可知$|C_0^{\mathcal{H}_i}| = 2$，因此对所有 $i \in [k]$，每个 G_i 都有两个独占颜色。由于共有 k 个这样的连通分量，因此 G 的 χ_{td}-着色 $\mathcal{H}$ 至少有 $2k$ 个独占颜色。令 $r_{\mathcal{H}}$ 表示着色 $\mathcal{H}$ 中非独占颜色的最大数量。因此， χ_{td}（G）$= |\mathcal{H}| = 2k + r_{\mathcal{H}}$。

对每个 $i \in [k]$ 的连通分量 G_i 应用定理 5，可得 $\chi_{\mathrm{td}}(C_i) = \chi(C_i)$。如果对于每个 $i \in [k]$ 都有 $\chi(C_i) < \chi(G)$，那么就存在一种使用少于 $\chi(G)$ 种颜色的 G 正常着色，这与矛盾相矛盾。因此，G 至少存在一个连通分量，设为 C_j，使得 $\chi(C_j) = \chi(G)$。因此，着色 $\mathcal{H}_j$ 使用 $\chi(G)$ 种颜色。在这 $\chi(G)$ 种颜色中，有两种颜色对于 C_j 是独占颜色，而剩余的 $\chi(G) - 2$ 种颜色对于 C_j 是非独占颜色，因此 $r_{\mathcal{H}} \geq \chi(G) - 2$。然而，$\chi(G) - 2$ 是 G 的任一连通分量可能具有的非独占颜色的最大数量，因此 $r_{\mathcal{H}} \leq \chi(G) - 2$。consequently，$r_{\mathcal{H}} = \chi(G) - 2$。因此，$\chi_{\mathrm{td}}(G) = 2k + (\chi(G) - 2) = \chi(G) + 2(k-1)$。

□

对于余图 G，其色数 $\chi(G)$ 可在线性时间内计算 [22]。因此，余图的 $\chi_{\mathrm{td}}(G)$ 也可在线性时间内计算。

5 链图

本节将证明，对于任意链图 G，$2 \leq \chi_{\mathrm{td}}(G) \leq 4$；并刻画满足对每个 $i, 2 \leq i \leq 4$ 都有 $\chi_{\mathrm{td}}(G) = i$ 的链图。下面回顾链图的定义及其一些性质。

二部图 $G = (V, E)$ 可表示为 $G = (X, Y, E)$，其中 (X, Y) 是图 G 的顶点集 V 的一个划分，且集合 X 和 Y 均为独立集。设 $n_1 = |X|$ 且 $n_2 = |Y|$。考虑二部图 $G = (X, Y, E)$，其中 $X = \{x_1, \ldots, x_{n_1}\}$ 且 $Y = \{y_1, \ldots, y_{n_2}\}$。“如果存在 X 的一个排列，记作 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1})$，使得 $N(x_1) \subseteq N(x_2) \subseteq \cdots \subseteq N(x_{n_1})$，则二部图 $G = (X, Y, E)$ 是链图。”此外，如果 $G = (X, Y, E)$ 是链图，那么 Y 也存在一个排列，记作 $(y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$，使得 $N(y_1) \supseteq N(y_2) \supseteq \cdots \supseteq N(y_{n_2})$。“对于链图 $G = (X, Y, E)$，如果排列 $(x_1, x_2, \ldots, x_{n_1}, y_1, y_2, \ldots, y_{n_2})$ 满足 $N(x_1) \subseteq N(x_2) \subseteq \cdots \subseteq N(x_{n_1})$ 且 $N(y_1) \supseteq N(y_2) \supseteq \cdots \supseteq N(y_{n_2})$，则称其为链序。”给定链图 G 的链序可在线性时间内求得 [14]。

现在，我们在 X 上定义关系 R：若 X 中的两个顶点 x_i 和 x_j 满足 $N(x_i) = N(x_j)$，则它们相关。令 $X_1, \ldots, X_k$ 为基于关系 R 对 X 所作的划分。现在定义 $Y_1 = N(X_1)$ 和

$$Y_i = N(X_i) \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} N(X_j)$$

对于 $i \in [k] \setminus \{1\}$。由此得到的集合 $Y_1, \ldots, Y_k$ 构成 Y 的一个划分。这样的划分 $X_1, \ldots, X_k$ 和 $Y_1, \ldots, Y_k$ 分别属于 X 和 Y，称为 X 的长度为 k 的链划分。若对于某个 $i \in [k]$，有 $x \in X_i$ 和 $y \in Y_i$，则 X 的划分 $X_1, \ldots, X_k$ 与 Y 的划分 $Y_1, \ldots, Y_k$ 定义如下：

$$N(x) = \bigcup_{j=1}^{i} Y_j \quad \text{and} \quad N(y) = \bigcup_{j=i}^{k} X_j.$$

在本节中，我们将考虑一个无孤立点链图 G，其链划分分别为 X_1、.....、X_k 和 X，以及 Y_1、.....、Y_k 和 Y。注意，X（或 Y）的划分中的集合数量为 k。

在下面的结果中，我们给出了链图 G 的 $\chi_{\mathrm{td}}(G)$ 界，并介绍了无孤立点链图的一些性质。

引理 3。若 G 是链图，且其链划分长度为 k，则有以下性质。

(a) $\gamma_t(G)=2$。(b) $2\le\chi_{\mathrm{td}}(G)\le 4$。(c) 若 $k\ge 2$，则 $\chi_{\mathrm{td}}(G)\ge 3$。(d) 若 $k\ge 3$，则 $\chi_{\mathrm{td}}(G)=4$。

证明。设 $G=(X,\ Y,\ E)$ 是链图，且其链划分长度为 k。设集合 $S=\{x,y\}$，其中 $x\in X_k$ 且 $y\in Y_1$。那么，S 是 G的全支配集，因为顶点 $x'\in X$全支配 y，而 $y'\in Y$ 全支配 x。因此，$\gamma_t(G)\le 2$。由于对于所有无孤立点图 F，均有 $\gamma_t(F)\ge 2$，所以得到 $\gamma_t(G)=2$。这就证明了 (a) 部分。

由推论 1(a)，我们有 $\gamma_t(G)\le\chi_{\mathrm{td}}(G)\le\gamma_t(G)+2$。由于根据第（a）部分，$\gamma_t(G)=2$，因此得到 $2\le\chi_{\mathrm{td}}(G)\le 4$，这就证明了第（b）部分。

为证明第（c）部分，设 $k\ge 2$，并令 $\mathcal{H}$ 为 G的一个 χ_{td}-着色。设 $x\in X_1$。令 $V_1^{\mathcal{H}}$ 为一个被 x 全支配的色类，并将 $V_1^{\mathcal{H}}$中的顶点染成颜色1。由于 $N(x)=Y_1$，色类 $V_1^{\mathcal{H}}\subseteq Y_1$，因此 Y_1 中存在一个颜色为1的顶点。令 y_1 为 Y_1 中这样一个颜色为1的顶点。注意到，y_1 与X的所有顶点相邻。令 $y\in Y_k$，并令 $V_2^{\mathcal{H}}$为一个被顶点 y 全支配的色类，再将 $V_2^{\mathcal{H}}$中的顶点染成颜色2。由于 $N(y)=X_k$，色类 $V_2^{\mathcal{H}}\subseteq X_k$，因此 X_k 中存在一个颜色为2的顶点。令 x_k 为 X_k 中这样一个颜色为2的顶点。注意到，x_k 与 Y中的所有顶点相邻。由于 y 全支配色类$V_2^{\mathcal{H}}\subseteq X_k$，$X_1$ 中没有顶点染成颜色2。特别地，顶点 $x\in X_1$ 没有染成颜色2。此外，由于顶点 x 与 Y_1 中一个颜色为1的顶点相邻，顶点 x 不能染成颜色1。因此，给 x着色需要第三种颜色，这意味着 $\chi_{\mathrm{td}}(G)=|\mathcal{H}|\ge 3$。至此，第（c）部分的证明完成。

为证明第（d）部分，设 $k\ge 3$，并设 G的一个 χ_{td}-着色为 $\mathcal{H}$。我们完全按照第（c）部分证明中的方法进行。沿用第（c）部分证明中的记号，顶点 $y_1\in Y_1$ 着颜色1，顶点 $x_k\in X_k$ 着颜色 2。如前所述，顶点 y_1 与 X 中的每个顶点都相邻，因此 $X\setminus X_k$中没有顶点着颜色 1。此外，由于顶点 $y\in Y_k$ 全支配色类$V_2^{\mathcal{H}}\subseteq X_k$，$X\setminus X_k$ 中没有顶点着颜色 2。如前所述，顶点x_k 与 Y中的每个顶点都相邻，因此 $Y\setminus Y_1$ 中没有顶点着颜色 2。此外，由于顶点 $x\in X_1$ 全支配色类 $V_1^{\mathcal{H}}\subseteq Y_1$，$Y\setminus Y_1$ 中没有顶点着颜色 1。因此，$(X\setminus X_k)\cup(Y\setminus Y_1)$中没有顶点着颜色 1 或颜色 2。设 $x_2\in X_2$，并设 $y_2\in Y_2$。由于 x_2 和 y_2 是相邻顶点，因此还需要两种额外的颜色来为顶点 x_2 和 y_2 着色，从而 $\chi_{\mathrm{td}}(G)\ge 4$。根据第（b）部分，$\chi_{\mathrm{td}}(G)\le 4$。因此，在 $k\ge 3$的情况下，我们有 $\chi_{\mathrm{td}}(G)=4$。这就证明了第（d）部分。

□

现在，我们可以在线性时间内刻画每个可能的 $\chi_{\mathrm{td}}(G)$ 值对应的链图类。

定理 7. 如果 G 是一个具有长度为 k 的链划分的链图，则以下性质成立。

（a） $\chi_{\mathrm{td}}(G) = 2$ 当且仅当 $k = 1$。
（b） $\chi_{\mathrm{td}}(G) = 3$ 当且仅当 $k = 2$。
（c） $\chi_{\mathrm{td}}(G) = 4$ 当且仅当 $k \geq 3$。

证明。设 $G = (X, Y, E)$ 是一个无孤立点链图，且 G 具有长度为 k 的链划分。根据引理 3(b)，有 $2 \leq \chi_{\mathrm{td}}(G) \leq 4$。根据引理 3(c)，如果 $\chi_{\mathrm{td}}(G) = 2$，则 $k = 1$。反之，设 $k = 1$。那么， G 是一个完全二部图，并且 G 的每个正常着色都是 G的 TD-着色。因此， $\chi_{\mathrm{td}}(G) = 2$。这证明了第（a）部分。

为证明第（b）部分，设 $\chi_{\mathrm{td}}(G) = 3$。利用引理 3(d)和上述第（a）部分，我们推得 $k = 2$。为证明其逆命题，假设 $k = 2$。根据引理 3(c)，有 $\chi_{\mathrm{td}}(G) \geq 3$。设 $\mathcal{H}$ 是 G 的顶点的一个着色，定义如下：将 Y_1 中的每个顶点着为颜色 1，将 X_2 中的每个顶点着为颜色 2，并将 $X_1 \cup Y_2$ 中的顶点着为颜色 3。由于所得着色 $\mathcal{H}$ 是 G 的使用 3 种颜色的 TD-着色，因此 $\chi_{\mathrm{td}}(G) \leq 3$。所以， $\chi_{\mathrm{td}}(G) = 3$。这证明了第（b）部分。

为证明第（c）部分，假设 $\chi_{\mathrm{td}}(G) = 4$。根据上述第（a）和第（b）部分， $k \geq 3$。反之，若 $k \geq 3$，则利用引理 3(d)，可得 $\chi_{\mathrm{td}}(G) = 4$。这就证明了第（c）部分。

□

链图的链序可以在线性时间内得到 [14]。链图的链划分也可以在线性时间内计算得到。因此，对于链图 G，$\chi_{\mathrm{td}}(G)$也可以在线性时间内计算得到。

如果 G是一个二部图，那么如 [6]中所示， $\gamma(G) \leq \chi_d(G) \leq \gamma(G) + 2$。此外， G 是完全二部图，当且仅当 $\chi_d(G) = 2$ [6]。注意，如果 G 是一个星图$K_{1,\ k}$，对于某个 $k \geq 1$，那么 $\gamma(G) = 1$ 以及 $\chi_d(G) = 2$。现在，如果 G 是一个不同于星图的连通链图，那么采用引理 3和定理 7的证明中所使用的类似论证，我们注意到，对于二部图 G 的 $\chi_d(G)$，同样成立类似的界和刻画。

6 NP 完全性结果

本节研究 Total Dominator Coloring问题的判定版本，简称 TDCD问题，并证明 TDCD 问题对于平面图、连通二部图和分裂图是 NP 完全的。以下是关于 DCD 问题的已知结果。

定理 8。 [3]*DCD* 问题对于分裂图是 *NP*完全的。

对于分裂图 $G = (K, I, E)$，其中 $|K| = \omega(G)$ 表示 G 的团数，这是已知的（见 [2]）：$\omega(G) \leq \chi_d(G) \leq \omega(G) + 1$。我们证明，对于分裂图 G 的 $\chi_{\mathrm{td}}(G)$，类似的界也成立。

引理 4. 若 $G = (K, I, E)$ 是一个连通分裂图，且 $|K| = \omega(G)$，则 $\omega(G) \leq \chi_{\mathrm{td}}(G) \leq \omega(G) + 1$。

证明。设 $G=(K,I,E)$ 是一个连通分裂图，且 $|K|=\omega(G)$。注意到$\chi_{\mathrm{td}}(G)\geq\chi(G)\geq\omega(G)$。因此，只需证明 $\chi_{\mathrm{td}}(G)\leq\omega(G)+1$。为此，我们给出一种使用 $\omega(G)+1$ 种颜色的 TD-着色。令 $\mathcal{H}$ 为 G 的顶点着色，如下所示：为 K 中的每个顶点赋予一种独有的颜色，并用一种新颜色为 I 中的其余顶点着色。由于 I 是一个独立集，$\mathcal{H}$ 确实是 $K\cup I$的正常着色。此外，$|\mathcal{H}|=\omega(G)+1$。若 $|K|=1$，则 G 是一个星图，团 K 中的顶点全支配包含 I的色类，而集合 I 中的每个顶点都全支配一个包含 K的色类。若 $|K|\geq 2$，则 G 中的每个顶点都全支配一个包含于 K中的色类。在这两种情况下，$\mathcal{H}$ 都是 G 的 TD-着色，且使用 $\omega(G)+1$ 种颜色。因此，$\chi_{\mathrm{td}}(G)\leq|\mathcal{H}|=\omega(G)+1$，结论得证。 □

以下推论可由引理 4 直接推出。

推论3. 设 $G=(K,I,E)$ 是一个连通分裂图，且满足 $|K|=\omega(G)$。若 $\chi_d(G)=\omega(G)+1$，则 $\chi_{\mathrm{td}}(G)=\omega(G)+1$。

注意，对于星图 G，$\chi_d(G)=\chi_{\mathrm{td}}(G)=2$。接下来，我们证明对于任意分裂图 G，$\chi_d(G)$ 和 $\chi_{\mathrm{td}}(G)$ 相等。

引理5. 若 G 是一个连通分裂图，其裂分划分为(K,I)，其中 $|K|=\omega(G)\geq 2$，则 $\chi_d(G)=\chi_{\mathrm{td}}(G)$。

证明. 设 $G=(K,I,E)$ 是一个连通分裂图，且 $|K|=\omega(G)\geq 2$。设 $\mathcal{H}$ 是 G 的一个 χ_d-着色。若 $\mathcal{H}$ 是 G 的一个 TD-着色，则所需结论显然成立。现在，若 $\mathcal{H}$ 不是 G 的 TD- 着色。令集合 S 包含 G 的支配着色 $\mathcal{H}$ 中不完全控制任何色类的所有 G 顶点。

首先，我们证明 $K\cap S=\emptyset$。设 $v\in K\cap S$。由于 $|K|\geq 2$，存在 $u\in K$和 $u\neq v$。设 $V_1^{\mathcal{H}}$是 $\mathcal{H}$ 的色类，使得 $u\in V_1^{\mathcal{H}}$。由于 $v\in S$，v并未全支配 $V_1^{\mathcal{H}}$，这意味着存在一个顶点 $u'\in I$，使得 $u'\in V_1^{\mathcal{H}}$和$vu'\notin E(G)$。现在，u'必然支配某个不同于 $V_1^{\mathcal{H}}$的色类，记为 $V_2^{\mathcal{H}}$。由于$N(u')\subseteq K$且 $u'v\notin E(G)$，可得 $V_2^{\mathcal{H}}\subset K\setminus\{v\}$，且 $V_2^{\mathcal{H}}$是一个孤立色类。因此，v 全支配 $V_2^{\mathcal{H}}$，这与我们的假设 $v\notin S$矛盾。因此，$K\cap S=\emptyset$。于是，$S\subseteq I$。

现在，令 $v\in S\cap I$。由于 $\mathcal{H}$ 是 G 和 $v\in S$的支配着色，顶点v 控制其自身的色类，记为 $V_1^{\mathcal{H}}$。必然地，$V_1^{\mathcal{H}}$是一个孤立色类，且该色类包含于 I中。为了给 K的顶点着色，在着色 $\mathcal{H}$中还需要额外的 $\omega(G)$种颜色。因此，$\chi_d(G)=|\mathcal{H}|\geq\omega(G)+1$，并且由于 $\chi_d(G)\leq\omega(G)+1$，我们得到 $\chi_d(G)=\omega(G)+1$。因此，根据推论3，$\chi_{\mathrm{td}}(G)=\omega(G)+1$。 □

根据引理5，对于一个连通的分裂图 G，计算 $\chi_{\mathrm{td}}(G)$ 和 $\chi_d(G)$ 的问题是等价的。显然，TDCD问题属于 NP。现在，根据定理 8和引理5，我们得到以下结果。

定理9。 *TDCD*问题对于分裂图而言是*NP*完全的。

接下来，我们证明二部图情形下 TDCD问题的 NP完全性。为此，我们需要以下结果。

定理10。 [5] 对于任意图 G，确定 G 的一个 γ_t-集合的问题无法在多项式时间内以优于 $c\ln(n)$ 的因子进行近似，其中 $c < 1$ 是任意常数，除非 $P = NP$。这一结论对二部图同样成立。

由定理10可知，无法以低于 $\ln(n)$ 的因子近似 $\gamma_t(G)$。当 $n \geq 8$ 时，我们注意到 $\ln(n) > 2$，因此 $\gamma_t(G)$ 无法在近似比为 2 的范围内得到近似。

推论4. 如果 $n \geq 8$，那么除非 $P = NP$，否则无法在多项式时间内以小于 2 的因子近似确定 G 的 γ_t 全支配集的问题。二部图的情形也成立。

定理11. 对于连通二部图，*TDCD*问题是*NP*完全的。

证明. 设 G 是一个连通二部图。显然，TDCD问题属于 NP。接下来只需证明 TDCD 是 NP困难的。反设，对于连通二部图， Total DominatorColoring 问题可在多项式时间内求解。设 $\mathcal{H}$ 是 G 的一个 χ_{td}-着色，且 $C^{\mathcal{H}} = \{V_1^{\mathcal{H}}, V_2^{\mathcal{H}}, \ldots, V_{\chi_{\text{td}}(G)}^{\mathcal{H}}\}$ 是 $\mathcal{H}$的颜色类集合。现在，考虑以下近似算法，用于寻找连通二部图 G 的全支配集：

算法1：APPROX TDS（G， $\mathcal{H}$， $\mathcal{C}^{\mathcal{H}}$）

输入： 一个连通二部图 G。**输出：** G 的一个全支配集。计算 G 的一个 χ_{td}-着色 $\mathcal{H}$。令 $C^{\mathcal{H}} = \{V_1^{\mathcal{H}}, V_2^{\mathcal{H}}, \ldots, V_{\chi_{\text{td}}(G)}^{\mathcal{H}}\}$ 为 $\mathcal{H}$ 的颜色类集合。**对于** ($i = 1$ 到 $\chi_{\text{td}}(G)$) **执行**更新 $D \leftarrow D \cup \{u_i\}$，其中 u_i 是 $V_i^{\mathcal{H}}$ 的某个顶点；返回 D;

注意，**算法1** 的时间复杂度是多项式级的，因为对于 G， Total Dominator Coloring 问题可以在多项式时间内求解，并且每一步都需要多项式时间。根据推论 1(a)， $\chi_{\text{td}}(G) \leq \gamma_t(G) + 2$。由**算法1** 得到的集合 D 是一个基数为 $\chi_{\text{td}}(G) \leq \gamma_t(G) + 2$ 的全支配集。由于 $\gamma_t(G) \geq 2$，我们观察到 $\gamma_t(G) + 2 \leq 2\gamma_t(G)$。因此， D 是一个基数至多为 $2\gamma_t(G)$ 的全支配集。由此，我们得到一个用于寻找 G 的全支配集的 2-近似算法，这与推论4矛盾。因此，结论成立。 □

最后，我们研究平面图，并利用另一个已知的 NP 完全问题——全支配集问题，证明平面图的 TD-着色问题的判定版本是 NP 完全的。现在，我们将正式定义全支配集问题的判定版本。全支配集问题的判定版本简称为 TDD 问题，其输入为一个图 G 和一个正整数 k，要求判断是否存在一个大小至多为 k 的全支配集。关于平面图的 TDD 问题，已有如下结论。

定理12。 [4]对于平面图，*TDD* 问题是 *NP* 完全的。

定理13. 对于平面图，*TDCD*问题是*NP*完全的。

证明. 显然，TDCD问题属于NP。接下来，我们需要证明TDCD问题是NP困难的。反过来，假设对于平面图，TD着色问题可以在多项式时间内求解。那么，我们声称全支配问题可以在多项式时间内求解平面图，这将与定理12矛盾。

设 G 为一个平面图。由推论1(b)，我们有 $\chi_{\mathrm{td}}(G) \leq \gamma_t(G) + 4$。考虑图 G的五个副本 G_1，G_2，.....，G_5，并令 G' 为这五个 G副本的不交并。将推论1应用于图 G'，得 $\chi_{\mathrm{td}}(G') \leq \gamma_t(G') + 4$。由于 G' 也可以在多项式时间内求解TDCD问题，令 $\mathcal{H}$ 为 χ_{td} 的一个着色，且 G' 为$C^{\mathcal{H}} = \{C_1, C_2, \ldots, C_{\chi_{\mathrm{td}}(G')}\}$。

现在，我们定义 $D' = \{u_1, u_2, \ldots, u_{\chi_{\mathrm{td}}(G')}\}$，其中 $u_i \in C_i$ 适用于 $1 \leq i \leq \chi_{\mathrm{td}}(G')$。这是 G' 的一个全支配集，其基数至多为 $\gamma_t(G') + 4$。由于 G' 是 G的五个副本的并，$\gamma_t(G') = 5\gamma_t(G)$。因此，$D'$是一个全支配集，其基数至多为 $5\gamma_t(G) + 4$。令 $D_i = D' \cap V(G_i)$，其中 $i \in [5]$，于是 $|D'| = \sum_{i=1}^{5} |D_i|$。选取 $j \in [5]$，使得对所有 $i \in [5]$都有 $|D_j| \leq |D_i|$。则 $5|D_j| \leq \sum_{i=1}^{5} |D_i| = |D'| \leq 5\gamma_t(G) + 4$，这意味着 $|D_j| \leq \gamma_t(G) + \frac{4}{5}$。因此，我们得到 G 的一个全支配集 D_j，其基数为 $\gamma_t(G)$。这可以在多项式时间内得到 G 的一个 γ_t-集，与定理12矛盾。

□

7 结论

本文研究了若干重要图类中的 Total Dominator Coloring问题，包括树、余图、链图、分裂图、平面图和连通二部图。我们确定了连通余图和非连通余图的全支配染色数。我们证明，对于链图，G $\chi_{\mathrm{td}}(G)$取以下三个值之一：2、3或4，并且刻画了 $\chi_{\mathrm{td}}(G)$取每个可能值时的链图。在否定方面，我们证明了当限制在平面图、分裂图和连通二部图上时，TDCD问题仍然是NP完全的，从而加强了目前关于一般图中TDCD问题的唯一已知困难性结果。由此，我们确立了对于弦图，TDCD问题无法在多项式时间内求解。具有 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$ 的树的刻画在 [15] 中被提出作为一个开放问题，而我们通过刻画满足 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$的树 T回答了该问题。然而，我们指出，我们的刻画中给出的条件无法在多项式时间内检验。因此，给出满足 $\chi_{\mathrm{td}}(T) = \gamma_t(T) + 1$的树 T的多项式时间刻画仍然是一个开放问题。由于许多图类的全支配染色数仍然未知，研究其他重要图类的 Total Dominator Coloring问题的复杂性状态将会很有意义。

参考文献

[1] S. Alikhani 和 N. Ghanbari。《特定构造图的全支配染色数》。开放离散应用数学杂志，3(2):1–7，2020年。

[2] S. A鲁穆甘 J. B阿加, an d K. R. Chandrasekar. On domination colorings in graphs.印度科学院数学科学辑刊, 122(4):561–571, 2012.[3] S. Arumugam、K. R. Chandrasekar、N. Misra、G. Philip 和 S. Saurabh。图中支配者着色的算法方面。载于组合算法，计算机科学讲义第7056卷，第19–30页。施普林格，海德堡，2011年。[4] R. V. Book。书评：计算机与难解性：NP-完备性理论指南。美国数学会通报 *(*新系列*)*，3(2):898–904，1980年。[5] M. Chleb´ık 和 J. Chleb´ıkov´a。有界度图中支配集问题的近似难度。信息与计算，206(11):1264–1275，2008年。[6] R. Gera。二部图中的支配者着色。载于第四届国际信息技术会议 *(ITNG'07)*，第947–952页。IEEE，2007年。[7] N. Ghanbari 和 S. Alikhani。关于图的全支配染色数的进一步研究。信息与优化科学杂志，40(1):157–169，2019年。[8] N. Ghanbari 和 S. Alikhani。关于图的全支配染色数的进一步研究。信息与优化科学杂志，40(1):157–169，2019年。[9] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 M. A. Henning，编。图支配专题，数学进展第64卷。施普林格，沙姆，2020年。[10] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 M. A. Henning，编。图支配结构，数学进展第66卷。施普林格，沙姆，2021年。[11] T. W. Haynes、S. T. Hedetniemi 和 M. A. Henning。图的支配：核心概念。手稿（施普林格，纽约，*2020*年），2022年。[12] J. T. Hedetniemi、S. M. Hedetniemi、S. T. Hedetniemi、A. A. McRae 和 D. F. Rall。图的全支配者划分与着色，2011年2月18日。未发表手稿，2011年。[13] S. M. Hedetniemi、S. T. Hedetniemi、A. A. McRae、D. F. Rall 和 J. T. Hedetniemi。图的支配者着色，2009年7月9日。未发表手稿，2009年。[14] P. Heggernes 和 D. Kratsch。线性时间可验证识别算法与禁用诱导子图。北欧计算机杂志，14(1-2):87–108（2008），2007年。[15] M. A. Henning。图的全支配者着色与全支配。图与组合，31(4):953–974，2015年。[16] M. A. Henning。图的支配着色与全支配者着色。载于图支配结构，第101–133页。施普林格，2021年。[17] M. A. Henning 和 A. Yeo。图的全支配。《施普林格数学专著》。施普林格，纽约，2013年。

[18] P. Jalilolghadr、A. P. Kazemi 和 A. Khodkar。循环图的全支配者着色 $C_n(a, b)$。《实用数学》，115:105–117，2020年。[19] A. P. Kazemi。积图的全支配者着色。《实用数学》，94:329–345，2014年。[20] A. P. Kazemi。图的全支配染色数。组合汇刊，4(2):57– 68，2015年。[21] A. P. Kazemi。Mycieleskian 图的全支配染色数。《实用数学》，103:129–137，2017年。[22] D. Kr´aˇl、J. Kratochv´ıl、Z. Tuza 和 G. J. Woeginger。无禁用诱导子图图的着色复杂性。载于图论计算机科学概念（博尔滕哈根，*2001*年），计算机科学讲义第2204卷，第254–262页。施普林格，柏林，2001年。[23] D. Seinsche。关于 n-可着色图类的一个性质。《组合理论杂志》*B*辑，16:191–193，1974年。[24] A. Vijayalekshmi。图的全支配者着色。《国际研究与技术进展期刊》，4:1–6，2012年。[25] A. Vijayalekshmi。路径的全支配者着色。《国际数学组合学杂志》，2:89–95，2012年。[26] A. Vijayalekshmi。毛毛虫图的全支配者着色。《数学组合学》，2:116–121，2014年。