arXiv:2303.01756v1 [math.AP] 3 Mar 2023

一类广义 Kirchhoff 型位势系统的诺伊曼问题

NABIL CHEMS EDDINE[1] 以及 DU˘SAN D. REPOV˘S[2,3,4,*]

[1]摩洛哥拉巴特穆罕默德五世大学理学院数学系数学分析与应用实验室，邮政信箱1014。[2]斯洛文尼亚卢布尔雅那卢布尔雅那大学教育学院。[3]斯洛文尼亚卢布尔雅那卢布尔雅那大学数学与物理学院。[4] 斯洛文尼亚卢布尔雅那数学、物理与力学研究所。

摘要：本文研究一类拟线性定常基尔霍夫型势系统的诺伊曼问题，该问题涉及具有临界增长和实正参数的一般变指数椭圆算子。通过结合截断技术、变分方法以及变指数情形下的集中紧性原理，在对非线性项作出适当假设的条件下，我们证明该问题至少存在一个解；当实正参数趋于无穷时，该解在空间范数意义下收敛于零。

关键词：基尔霍夫型问题、诺伊曼边界条件、p(x)-拉普拉斯算子、广义毛细算子、变指数索博列夫空间、临界 Sobolev 指数、集中紧性原理、临界点理论、截断技术。数学主题分类（2020）：35B33、35D30、35J50、35J60、46E35。

1. 引言

本文研究以下一类非局部拟线性椭圆系统非平凡解的存在性与渐近行为

$$\begin{aligned} M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\Big(-\operatorname{div}\Big(\mathscr{B}_{1_i}(\nabla u_i)\Big)+\mathscr{B}_{2_i}(u_i)\Big) &= |u_i|^{s_i(x)-2}u_i+\lambda F_{u_i}(x,u) \quad \text{in } \Omega,\\ M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\mathscr{B}_{1_i}(\nabla u_i).\mathfrak{N}_i &= |u_i|^{\ell_i(x)-2}u_i \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

对 $i=1、2、\ldots、n$（$n\in\mathbb{N}^*$），其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N$（$N\geq 2$）是边界光滑的有界区域，$\partial\Omega$，$\mathfrak{N}_i$是$\partial\Omega$上的外法向量场，$\lambda$ 是正参数，$\nabla F=(F_{u_1}、\ldots、F_{u_2})$ 是 C^1-函数 F：$\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 的梯度，p_i、q_i、w_i、$s_i\in C(\overline{\Omega})$ 以及 $\ell_i\in C(\partial\Omega)$ 满足

$$1<p_i^-\leq p_i(x)\leq p_i^+<q_i^-\leq q_i(x)\leq q_i^+<N, \tag{1.2}$$

$$h_i^-\leq h_i(x)\leq h_i^+\leq w_i^-\leq w_i(x)\leq w_i^+\leq s_i^-\leq s_i(x)\leq s_i^+\leq h_i^*(x)<\infty, \tag{1.3}$$

and

$$h_i^-\leq h_i(x)\leq h_i^+\leq w_i^-\leq w_i(x)\leq w_i^+\leq \ell_i^-\leq \ell_i(x)\leq \ell_i^+\leq h_i^\partial(x)<\infty, \tag{1.4}$$

对所有 $x\in\overline{\Omega}$，其中函数 w_i 由下述条件（F_4）给出，$p_i^-:=\inf_{x\in\overline{\Omega}}p_i(x)$、$p_i^+:=\sup_{x\in\overline{\Omega}}p_i(x)$，并且与 w_i^-、w_i^+、q_i^-、q_i^+、h_i^-、h_i^+、s_i^-、$s_i^+\ell_i^-$以及 ℓ_i^+类似，其中 $h_i(x)=(1-\mathscr{K}(k_i^3))p_i(x)+\mathscr{K}(k_i^3)q_i(x)$，其中 k_i^3由下述条件（A_2）给出，并且

$$h_i^*(x)=\begin{cases}\frac{Nh_i(x)}{N-h_i(x)} & \text{for } h_i(x)<N,\\ +\infty & \text{for } h_i(x)\geq N,\end{cases} \quad \text{and} \quad h_i^\partial(x)=\begin{cases}\frac{(N-1)h_i(x)}{N-h_i(x)} & \text{for } h_i(x)<N,\\ +\infty & \text{for } h_i(x)\geq N,\end{cases}$$

对所有 $x\in\overline{\Omega}$，函数 $\mathscr{K}$：$\mathbb{R}_0^+\to\{0,1\}$ 定义为

$$\mathscr{K}(k_i)=\begin{cases}1 & \text{if } k_i>0,\\ 0 & \text{if } k_i<0.\end{cases}$$

*通讯作者：Du˘san D.Repov˘s 电子邮箱：nab.chemseddine@gmail.com（N. Chems Eddine）、dusan.repovs@guest.arnes.si（D.D. REPOV˘S）

此外 集，我们将 $\mathscr{C}_{h_i}^1$ 和 $\mathscr{C}_{h_i}^2$ 视为两个非空且不相交的集合，分别定义为

$$\mathscr{C}_{h_i}^1 := \{x \in \partial\Omega,\ \ell_i(x) = h_i^{\partial}(x)\} \text{ and } \mathscr{C}_{h_i}^2 := \{x \in \overline{\Omega},\ s_i(x) = h_i^*(x)\}.$$

算子 $\mathscr{A}_{j_i} : X_i \to \mathbb{R}^n$ （j = 1 或 2）以及算子 $\mathscr{B}_i : X_i \to \mathbb{R}$分别定义为

$$\mathscr{B}_{j_i}(u_i) = a_{j_i}(|u_i|^{p_i(x)})|u_i|^{p_i(x)-2}u_i, \text{ and } \mathscr{A}_i(u_i) = \int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}\Big(A_{1_i}(|\nabla u_i|^{p_i(x)}) + A_{2_i}(|u_i|^{p_i(x)})\Big)dx, \tag{1.5}$$

对所有 $1 \le i \le n$，其中 $X_i := W^{1,h_i(x)}(\Omega) \cap W^{1,p_i(x)}(\Omega)$ 是一个 Banach 空间，函数 A_{j_i}定义为 $A_{j_i}(t) = \int_t$

0 $a_{j_i}(k)dk$，其中函数 a_{j_i} 在条件 (A_1) 中描述。

下文中，我们将考虑满足以下假设的函数 a_{j_i}，其中对所有 $i \in \{1,2,\dots,n\}$、$j \in \{1,2\}$：

(A_1) a_{j_i}: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 属于 C^1 类。

(A_2) 存在正常数 $k_{j_i}^0$、$k_{j_i}^1$、$k_{j_i}^2$和 k_i^3，对所有 $i \in \{1,2,\dots,n\}$、$j \in \{1,2\}$均成立，使得

$$k_{j_i}^0 + \mathscr{K}(k_i^3)k_{j_i}^2\xi^{\frac{q_i(x)-p_i(x)}{p_i(x)}} \le a_{j_i}(\xi) \le k_{j_i}^1 + k_i^3\xi^{\frac{q_i(x)-p_i(x)}{p_i(x)}}, \text{ for all } \xi \ge 0 \text{ and a.e. } x \in \overline{\Omega}.$$

(A_3) 存在 $c_i > 0$，对所有 $1 \le i \le n$ 均成立，使得

$$\min\left\{a_{j_i}(\xi^{p_i(x)})\xi^{p_i(x)-2}, a_{j_i}(\xi^{p_i(x)})\xi^{p_i(x)-2} + \xi\frac{\partial(a_{j_i}(\xi^{p_i(x)})\xi^{p_i(x)-2})}{\partial\xi}\right\} \ge c_i\xi^{p_i(x)-2}, \text{ for a.e. } x \in \overline{\Omega} \text{ and all } \xi \ge 0.$$

(A_4) 存在正常数 β_{j_i}和 γ_i，对所有 $i \in \{1,2,\dots,n\}$、$j \in \{1,2\}$均成立，使得

$$A_{j_i}(\xi) \ge \frac{1}{\beta_{j_i}}a_{j_i}(\xi)\xi \text{ with } h_i^+ < \gamma_i < s_i^- \text{ and } \frac{q_i^+}{p_i^+} \le \beta_{j_i} < \frac{\gamma_i}{p_i^+}, \text{ for all } \xi \ge 0.$$

(M) M_i： $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ 是连续且递增的函数，满足 $M_i(t) \ge M_i(0) = \mathfrak{M}_i^0 > 0$，对所有 $t \ge 0$、$i \in \{1,2,\cdots,n\}$均成立。

众所周知，有许多满足假设 (M) 的函数 M_i，例如

$$M_1(\xi) = \mathfrak{M}_1^0 + \mathfrak{B}_1\xi^{\theta_1}, \text{ with } \mathfrak{M}_1^0, \mathfrak{B}_1 \ge 0, \mathfrak{M}_1^0 + \mathfrak{B}_1 > 0 \text{ and } \theta_1 \ge 1.$$

特别地，当 $\mathfrak{M}_1^0 = 0$ 和 $\mathfrak{B}_1 > 0$时，与 M_1 相关的基尔霍夫方程称为退化方程。另一方面，当 $\mathfrak{M}_1^0 > 0$ 和 $\mathfrak{B}_1 \ge 0$ 时，与 M_1 相关的基尔霍夫方程称为非退化方程。在这种情况下，当 $\mathfrak{B}_1 = 0$ 时，与 M_1 相关的基尔霍夫方程（为常数）化为一个局部拟线性椭圆问题。

由非齐次微分算子驱动的微分方程和变分问题受到了广泛关注，并得到了深入研究，参见例如 Papageorgiou 等人 [42]。这是因为它们能够对许多物理现象进行建模。值得注意的是，p(x)-拉普拉斯算子是散度型算子 $\operatorname{div}\left(\mathscr{B}_{j_i}(\nabla u_i)\right)$ 的一个特例。该算子的自然泛函框架由变指数索伯列夫空间 $W^{1,p(x)}$ 描述。

近几十年来，变指数勒贝格空间与索伯列夫空间 $L^{p(x)}$ 和 $W^{1,p(x)}$受到了特别关注，其中 p 是一个实值函数，例如 R˘adulescu 和 Repov˘s [45]。在应用科学和工程学中，具有常指数的传统勒贝格空间 L^p 和索伯列夫空间 $W^{1,p}$ 已被证明不足以应对非线性问题的复杂性。为克服这些局限，近年来变指数勒贝格空间与索伯列夫空间的应用日益增多。

这一研究领域体现了一类新型物理现象，例如电流变流体或“智能流体”。这类流体在电磁场作用下，其力学性质可能发生显著变化。这些非均质材料以及其他类似材料需要使用变指数 Lebesgue 空间与 Sobolev 空间，其中指数 p 可以发生变化。此外，变指数 Lebesgue 空间与 Sobolev 空间已广泛应用于图像复原与处理，以及热流变流体、数学生物学、多孔介质流动、多晶塑性、非均质沙堆生长和流体动力学等领域。关于这些应用及其他应用的全面综述，参见例如 Chen 等人 [15], Diening 等人 [20, 21], Halsey[28], R˘adulescu [44], Ru˘zi˘cka [46, 47], 及其中的参考文献）。

此外，系统（1.1）中的每一个方程都是 Kirchhoff 于 [33] 1883 年提出的第一模型中平稳问题的推广，其形式如下：

$$\rho\partial_{tt}^2 u-\left(\frac{\rho_0}{h}+\frac{E}{2L}\int_0^L|\partial_x u(x)|^2\,dx\right)\partial_{xx}^2 u=0, \tag{1.6}$$

其中，参数 ρ、h、ρ_0、t、L、E均为具有一定物理意义的常数。该方程通过考虑振动弦长度变化的影响，扩展了经典的达朗贝尔波动方程。近一个世纪后，1978年，Jacques-Louis Lions [35] 重新研究了这一方程，并提出了适用于任意维数、带外力项的一般基尔霍夫方程，其形式为

$$\begin{aligned}\partial_{tt}^2 u-\left(a+b\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\right)\Delta u=f(x,u)\quad &\text{in }\Omega,\\ u=0\quad &\text{on }\partial\Omega.\end{aligned}$$

此后，人们取得了许多有趣的研究成果，参见 Caristi 等人 [9], Dai 和 Hao [19], Ma [37] 以及其中的参考文献。研究这些方程的主要困难在于，它们不再满足逐点恒等式。这是因为方程中含有 M_i 这一项，使得（1.1）成为一个非局部问题。非局部问题模型可用于描述生物系统以及各种物理现象，其中 u 描述的是依赖于其自身平均值的过程，例如种群密度。关于这一主题的更多参考文献，请参阅 Ambrosio 等人 [3], Arosio 和 Pannizi [5], Cavalcanti 等人 [10], Chipot 和 Lovat [17], He 等人 [31], Corrˆea 和 Nascimento [18], Yang 和 Zhou [50], Wang 等人[48] 及其中的参考文献。另一方面，近年来，有界区域或无界区域中具有常数或变临界指数的微分方程日益受到关注。Brezis 和 Nirenberg 于1983年在开创性论文中首次讨论了这类方程 [8]，研究对象为拉普拉斯方程。此后，相关研究在许多方向上得到了拓展 [8]。

涉及临界增长的椭圆方程，其主要特征之一是与变分方法相关的紧性缺失。为克服紧性缺失，Lions [36] 建立了一种方法，利用所谓的集中紧性原理（简称 CCP）证明极小化序列或 Palais-Smale 序列（简称（PS）序列）是预紧的。此后，Bonder 等人 [6, 7],、Fu[26], 分别独立得到了有界区域上的 Lions 集中紧性原理的变指数版本；Fu [27]则得到了该原理在无界区域上的版本。从那时起，许多作者将这些结果用于研究涉及变指数的临界椭圆问题，例如 Alves 等人 [2, 1],、Chems Eddine 等人 [14, 12, 13],、Fang 和 Zhang [24],、Hurtado 等人 [32],、Mingqi 等人 [39], 以及 Zhang 和 Fu [51]。

当 M_i 满足条件 $a_{1_i}\equiv 1$（其中 $k_i^1=1$，且 $k_i^2>0$ 和 $k_i^3=0$），并且 $a_{2_i}\equiv 0$时，Chems Eddine [12] 证明了以下一类具有狄利克雷边界条件的 Kirchhoff 型位势系统存在非平凡弱解

$$\begin{aligned}-M_i\left(\int_\Omega\frac{1}{p_i(x)}|\nabla u_i|^{p_i(x)}\right)\Delta_{p_i(x)}u_i=|u_i|^{q_i(x)-2}u_i+\lambda F_{u_i}(x,u)\quad &\text{in }\Omega,\\ u_i=0\quad &\text{on }\partial\Omega.\end{aligned}$$

$1\le i\le n(n\in\mathbb{N}^*)$，其中 p_i、$q_i:\overline{\Omega}\to\mathbb{R}$ 是 Lipschitz 连续函数，满足对所有 $x\in\Omega$，均有 $1\le q_i(x)\le p_i^*(x)$，且位势函数 F 满足混合次临界增长条件。此后，Chems Eddine[11] 证明了以下系统存在无穷多个解

$$\begin{aligned}-M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\operatorname{div}\Big(\mathscr{B}_i(\nabla u_i)\Big)=|u_i|^{s_i(x)-2}u_i+\lambda F_{u_i}(x,u)\ \text{in }\Omega,\\ u=0\quad\text{on }\partial\Omega,\end{aligned}$$

当 $i=1、2,\ldots,n\ (n\in\mathbb{N})$ 时，其中 $\{x\in\Omega,\ s_i(x)=p_i^*(x)\}$ 非空，且 $F\in C^1(\Omega\times\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ 满足某些混合次临界增长条件。随后，Chems Eddine 和 Ragusa [14] 研究了上述一类具有诺伊曼边界条件且包含两个临界指数的 Kirchhoff 型位势系统，并建立了解的存在性与多重性。

本文旨在证明非局部问题（1.1）存在非平凡解。正如本文将要说明的，我们所研究的情形存在一些主要困难，可归纳为三个主要问题。首先，假设$(\boldsymbol{M})$ 仅为零附近的 Kirchhoff 函数M_i 提供正的下界，由此造成了严重的数学技术困难。为了克服这些困难，我们需要对 Kirchhoff 函数M_i 进行截断，以获得其上有界性的先验估计，从而构造一个新的辅助问题；随后，我们再次进行截断，以控制与该辅助问题相对应的能量泛函

。求解问题（1.1）的第二个困难是紧性缺失，这可由以下事实说明：嵌入 $W^{1,h(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{h^*}(x)(\Omega)$ 和 $W^{1,h(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{h^\partial}(x)(\partial\Omega)$ 不再是紧的。为克服这一困难，我们采用 Bonder 等人 [6, 7]针对变指数推广的两个版本的 Lions 原理。随后，结合变分方法与山路定理，我们证明辅助问题至少存在一个非平凡解，见定理 3.1；通过截断函数 M_i，我们进一步证明问题（1.1）至少存在一个非平凡解，见定理1.2。

本文中，我们始终假设 F 满足以下条件：

(F_1) $F \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ 和 $F(x\ 0_{\mathbb{R}^n}) = 0$。

(F_2) 对所有 $(i, j) \in \{1,2,\dots,n\}^2$，存在正函数 b^{i_j}，使得

$$\left|F_{\xi_i}(x,\xi_1,\dots,\xi_n)\right| \le \sum_{j=1}^{n} b_{i_j}(x)|\xi_j|^{r_{i_j}(x)-1},$$

其中 $1 < r^{i_j}(x) < \inf_{x\in\Omega} h_i(x)$，对所有 $x \in \Omega$均成立。权函数 b_{ii}（若 $i \neq j$，则为 b^{i_j}）属于广义勒贝格空间 $L^{\alpha_{ii}}(\Omega)$（若 $i \neq j$，则属于 $L^{\alpha_{i_j}}(\Omega)$），且

$$\alpha_{ii}(x) = \frac{h_i(x)}{h_i(x)-1}, \quad \alpha_{i_j}(x) = \frac{h_i^*(x)h_j^*(x)}{h_i^*(x)h_j^*(x) - h_i^*(x) - h_j^*(x)}.$$

(F_3) 存在 $K > 0$，且对所有 $(x\xi_1,\dots,\xi_n) \in \Omega \times \mathbb{R}^n$，都有 $\gamma_i \in (h_i^+, \inf\{s_i^-, \ell_i^-\})$，其中 $|u_i|^{\gamma_i} \ge K$

$$0 < F(x,\xi_1,\dots,\xi_n) < \sum_{i=1}^{n} \frac{\xi_i}{\gamma_i} F_{\xi_i}(x,\xi_1,\dots,\xi_n).$$

(F_4) 存在一个正常数 c，使得

$$|F(x,\xi_1,\dots,\xi_n)| \le c\Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^{w_i(x)}\Big), \text{ for all } (x,\xi_1,\dots,\xi_n) \in \Omega \times \mathbb{R}^n,$$

其中 $w_i \in C_+(\overline{\Omega})$，且对于所有 $1 \le i \le n$，有 $q_i^+ < w_i^- \le w_i^+ < \inf\{s_i^-, \ell_i^-\} \le \inf\{s_i^+, \ell_i^+\}$。

例 1.1. 存在许多满足假设 (F_1) 和 (F_2) 的势函数 F。例如，当 $n = 2$ 时，取 $F(x,u_1,u_2) = b_{12}(x)|u_1|^{r_1}(x)|u_2|^{r_2}(x)$，其中 $r1(x)\ h1(x) + r2(x)\ h2(x) < 1$，且正~~常函数~~ ~~$b_{12}$~~ $\in L^{\alpha(x)}(\Omega)$ 满足

$$\alpha(x) = \frac{h_2^*(x)h_1^*(x)}{h_2^*(x)h_1^*(x) - h_2^*(x)r_1(x) - h_2^*(x)r_2(x),} \text{ for all } x \in \Omega.$$

通过标准微积分，我们可以验证 F 满足假设 (F_1)。此外，利用杨不等式，我们可以检验假设 (F_2)。

本文的主要结果如下。

定理1.2. 假设条件 (A_1) –(A_4)、(M) 以及 (F_1) –(F_4) 成立。那么存在 $\lambda^* > 0$，使得对于所有 $\lambda \ge \lambda_*$，问题（1.1）在 X 中至少有一个非平凡解。此外，如果 u_λ 是问题（1.1）的弱解，则 $\lim_{\lambda\to+\infty} \|u_\lambda\| = 0$.

本文结构安排如下：第2 节给出变指数空间的一些预备结果。第3 节引入辅助问题，并求得该辅助问题的一个非平凡解。第4 节用于证明主要结果。最后，在第5节中，我们说明本文所研究问题的一般性程度。

2. 预备知识与基本记号

本节中，我们介绍下一节将用到的一些定义和结果。在全文中，设 Ω 是 $\mathbb{R}^N$（$N \ge 2$）上的一个有界区域，具有 Lipschitz边界$\partial\Omega$，并记 $\mathscr{D}$ 为 Ω 或其边界 $\partial\Omega$。记

$$\mathscr{M}_+(\mathscr{D}) := \Big\{p : \mathscr{D} \to \mathbb{R} \text{ measurable real-valued function} : p(x) > 1 \text{ for a.a. } x \in \mathscr{D}\Big\},$$

$$C_+(\mathscr{D}) := \Big\{p \in C(\mathscr{D}) : p(x) > 1 \quad \text{for a.a. } x \in \mathscr{D}\Big\}.$$

对于所有 $p\in\mathscr{M}_+(\mathscr{D})$，记 $p^+:=\sup_{x\in\mathscr{D}}p(x)$ 和 $p^-:=\inf_{x\in\mathscr{D}}p(x)$；对于所有 $p\in\mathscr{M}_+(\mathscr{D})$ 以及 $\mathscr{D}$ 上的测度 η，我们将变指数勒贝格空间定义为

$$L^{p(x)}(\mathscr{D}):=L^{p(x)}(\mathscr{D},d\eta):=\left\{u \text{ measurable real-valued function}: \rho_{p,\mathscr{D}}(u)<\infty\right\},$$

其中，泛函 $\rho_{p,\mathscr{D}}: L^{p(x)}(\mathscr{D})\to\mathbb{R}$ 定义为

$$\rho_{p,\mathscr{D}}(u):=\int_\Omega |u(x)|^{p(x)}d\eta.$$

泛函$\rho_{p,\mathscr{D}}$ 称为 $L^{p(x)}(\mathscr{D})$ 空间的 $p(x)$-模，在处理广义勒贝格-索博列夫空间时发挥了重要作用。我们在空间 $L^{p(x)}(\mathscr{D})$ 上赋予 Luxemburg范数

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}:=\inf\left\{\tau>0;\rho_{p,\mathscr{D}}\left(\frac{u(x)}{\tau}\right)\le 1\right\}.$$

那么，$(L^{p(x)}(\mathscr{D})\ \|u\|_{L^{p(x)}(\mathscr{D})})$ 是一个可分自反巴拿赫空间（参见 Kov´aˇcik 和 R´akosn´ık 的[34, 定理 2.5, 推论 2.7]）。在后续章节中，所考虑的 $L^{p(x)}$-空间为 $L^{p(x)}(\Omega):=L^{p(x)}(\Omega,dx)$ 和 $L^{p(x)}(\partial\Omega):=L^{p(x)}(\partial\Omega,d\sigma)$，其中测度 σ 适当地定义在 $\partial\Omega$ 上。现在让我们回顾勒贝格空间的其他基本性质。

命题2.1（Kov´aˇcik 和 R´akosn´ık [34, 定理 2.8]）。设 p 和 q 是 $\mathscr{M}_+(\mathscr{D})$ 上的变指数，满足在 $\mathscr{D}$ 中 $p\le q$，其中 $0<\text{meas}(\mathscr{D})<\infty$。则嵌入 $L^{q(x)}(\mathscr{D})\hookrightarrow L^{p(x)}(\mathscr{D})$ 是连续的。

此外，以下 Hölder 型不等式

$$\left|\int_{\mathscr{D}}u(x)v(x)dx\right|\le\left(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{(p')^-}\right)\|u\|_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}\|v\|_{L^{p'(x)}(\mathscr{D})}\le 2\|u\|_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}\|v\|_{L^{p'(x)}(\mathscr{D})} \tag{2.1}$$

对所有 $u\in L^{p(x)}(\mathscr{D})$ 和 $v\in L^{p'(x)}(\mathscr{D})$ 均成立（例如参见 Kov´aˇcik 和 R´akosn´ık [34, 定理 2.1]）。这里，我们将 $L^{p'(x)}(\mathscr{D})$ 记为 $L^{p(x)}(\mathscr{D})$ 的拓扑对偶空间（或共轭空间），它由逐点取指数的共轭得到，即 $1/p(x)+1/p'(x)=1$（例如参见 Kov´aˇcik 和 R´akosn´ık [34,推论 2.7]）。此外，若 $h_1,h_2,h_3:\mathscr{D}\to(1,\infty)$ 是 Lipschitz 连续函数，且满足

$$\frac{1}{h_1(x)}+\frac{1}{h_2(x)}+\frac{1}{h_3(x)}=1,$$

那么，对所有满足 $u\in L^{h_1(x)}(\mathscr{D})$、$v\in L^{h_2(x)}(\mathscr{D})$、$w\in L^{h_3(x)}(\mathscr{D})$ 的函数，以下不等式成立

$$\int_{\mathscr{D}}|u(x)v(x)w(x)|dx\le\left(\frac{1}{h_1^-}+\frac{1}{h_2^-}+\frac{1}{h_3^-}\right)\|u\|_{L^{h_1(x)}(\mathscr{D})}\|v\|_{L^{h_2(x)}(\mathscr{D})}\|w\|_{L^{h_3(x)}(\mathscr{D})}.$$

若 $u\in L^{p(x)}(\mathscr{D})$ 且 $p<\infty$，则有以下性质（例如参见 Fan 和 Zhao [23, 定理1.3、定理1.4]）：

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}<1\ (=1;>1)\quad\text{if and only if}\quad\rho_{p,\mathscr{D}}(u)<1\ (=1;>1), \tag{2.2}$$

$$\text{if}\quad\|u\|_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}>1\quad\text{then}\quad\|u\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}\le\rho_{p,\mathscr{D}}(u)\le\|u\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}, \tag{2.3}$$

$$\text{if}\quad\|u\|_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}<1\quad\text{then}\quad\|u\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}\le\rho_{p,\mathscr{D}}(u)\le\|u\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}. \tag{2.4}$$

因此，模函数收敛与范数收敛等价

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\mathscr{D})}\to 0\ (\to\infty)\quad\text{if and only if}\quad\rho_{p,\mathscr{D}}(u)\to 0\ (\to\infty). \tag{2.5}$$

命题2.2（Edmunds 和 Rakosnik [22]）。设 h 和 ℓ 为 $\mathscr{M}_+(\mathscr{D})$ 中的变指数，且 $1\le h(x)\ \ell(x)\le\infty$ a.e. x in Ω，并且 $p\in L^\infty(\Omega)$。那么，若 $u\in L^{\ell(x)}(\Omega)$，$u\neq 0$，则可得

$$\|u\|_{L^{h(x)\ell(x)}(\Omega)}\le 1\Rightarrow\|u\|^{h^-}_{L^{h(x)\ell(x)}(\Omega)}\le\left\||u|^{h(x)}\right\|_{L^{\ell(x)}(\Omega)}\le\|u\|^{h^+}_{L^{h(x)\ell(x)}(\Omega)},$$

$$\|u\|_{L^{h(x)\ell(x)}(\Omega)}\ge 1\Rightarrow\|u\|^{p^+}_{L^{h(x)\ell(x)}(\Omega)}\le\left\||u|^{h(x)}\right\|_{L^{\ell(x)}(\Omega)}\le\|u\|^{h^-}_{L^{h(x)\ell(x)}(\Omega)}.$$

当 $h(x)=h$ 为常数时，我们得到 $\left\||u|^h\right\|_{L^{\ell(x)}(\Omega)}=\|u\|^h_{L^{h\ell(x)}(\Omega)}$.

现在，我们转向变指数 Sobolev 空间，即

$$W^{1,p(x)}(\Omega) := \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : \partial_{x_i} u \in L^{p(x)}(\Omega) \text{ for } i = 1, \dots, N \right\},$$

其中， $\partial_{x_i} u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 表示 u 关于 x_i 的偏导数（取弱意义）。该空间对应的模函数定义为

$$\rho_{1,p(x)}(u) := \int_\Omega |u|^{p(x)} + |\nabla u|^{p(x)} dx$$

由此得到范数

$$\|u\|_{1,p(x)} := \|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} := \inf \left\{ \tau > 0;\ \rho_{1,p}\left(\frac{u(x)}{\tau} \right) \le 1 \right\}.$$

$W^{1,p(x)}(\Omega)$ 中范数的另一种可能定义为 $\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$。事实证明，这两种范数等价，但为方便起见，我们采用第一种。众所周知，$W^{1,p(x)}(\Omega)$ 是可分的自反巴拿赫空间（参见，例如，Kov´a˘cik 和 R´akosn´ık 的 [34, 定理 3.1]）。通常，我们分别用 $p^*(x)$ 表示临界 Sobolev 指数，用 $p^\partial(x)$ 表示临界 Sobolev 迹指数，其定义如下：

$$p^*(x) := \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)} & \text{for } p(x) < N \\ +\infty & \text{for } p(x) \ge N \end{cases} \quad \text{and } p^\partial(x) := \begin{cases} \frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)} & \text{for } p(x) < N \\ +\infty & \text{for } p(x) \ge N \end{cases}$$

我们回顾 $W^{1,p(x)}(\Omega)$ 上以下重要的嵌入

命题 2.3（Diening 等人 [21], Edmunds 和 Rakosnik [22]）。设 p 为 Lipschitz 连续函数，且满足$1 < p^- \le p(x) \le p^+ < N$，并设 $q \in C(\overline{\Omega})$ 满足 $1 \le q(x) \le p^*(x)$，对所有 $x \in \overline{\Omega}$. 均成立。则存在连续嵌入 $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega)$。若进一步假设对所有 $x \in \overline{\Omega}$，$1 \le q(x) < p^*(x)$，则该嵌入是紧的。

命题 2.4（Diening 等人 [21], Edmunds 和 Rakosnik [22]）。设 $p \in W^{1,h}(\Omega)$，且 $1 \le p_- \le p_+ < N < h$。则对于所有满足 $1 \le q(x) \le p^\partial(x)$ 的 $q \in C(\partial\Omega)$，只要 $x \in \partial\Omega$，就存在连续的边界迹嵌入 $W^{1,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\partial\Omega)$。若进一步假设对所有 $x \in \overline{\Omega}$，$1 \le q(x) < p^*(x)$，则该嵌入是紧的。

关于变指数 Lebesgue-Sobolev 空间的详细性质，读者可参阅 Diening 等人 [21], Kov´a˘cik 和 R´akosn´ık [34]。众所周知，临界点理论的应用需要著名的 Palais–Smale 条件（简称 $(PS)_c$），该条件发挥着核心作用。

定义 2.5。设 $E : X \to \mathbb{R}$ 为 C^1, 类函数，其中 X 是一个实巴拿赫空间。若一个序列$\{u_m\}$ 满足

$$E(u_m) \to c \text{ and } E'(u_m) \to 0 \text{ in } X', \tag{2.6}$$

我们称 $\{u_m\}$ 为具有能量水平 c 的 Palais-Smale 序列（或简称为 (u_m) 是 $(PS)_c$）。此外，如果 E 的每个 $(PS)_c$ 序列在 X 中都有一个强收敛子列，则称 E 在水平 c 处满足 Palais-Smale 条件（或简称 E 是 $(PS)_c$）。

我们的主要工具是下面经典的山路定理。

定理 2.6（Rabinowitz [43]）。设 X 是实的无限维 Banach 空间，且 $E : X \to \mathbb{R}$ be 属于 C^1 类，并满足 ($PS)_c$ 条件，使得 $E(0_X) = 0$。假设

(H_1) 存在正常数 $\rho, \mathscr{R}$，使得对所有 $u \in \partial B_\rho \cap X$，$E(u) \ge \mathscr{R}$；$(H_2)$ 存在 $z \in X$，使得 $\|z\|_X > \rho$，且 $E(z) < 0$。

那么 E 有一个临界值 $c \ge \mathscr{R}$，其可表征为 $c := \inf_{\phi \in \Gamma} \max_{\delta \in [0,1]} E(\phi(\delta))$，其中

$$\Gamma = \left\{ \phi : [0,1] \to X \text{ continuous} : \phi(0) = 0_X, E(\phi(1)) < 0 \right\}.$$

下文中，我们将使用乘积空间 $X := \prod_{i=1}^n \left(W^{1,h_i p_i(x)}(\Omega) \cap W^{1,p_i(x)}(\Omega) \right)$，并赋予其范数$\|u\| := \max_{1 \le i \le n} \{ \|u_i\|_i \}$。对所有 $u = (u_1, u2, \dots, u_n) \in X$，其中 $\|u_i\|_i := \|u_i\|_{1,p_i(x)} + \mathscr{K}(k_i^3)\|u_i\|_{1,q_i(x)}$，表示 $W^{1,h_i p_i(x)}(\Omega) \cap W^{1,p_i(x)}(\Omega)$ 的范数，对所有 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$。

定义 2.7。我们称$u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in X$是系统（1.1）的一个弱解，当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n}M_i(\mathscr{A}_i(u_i))\int_\Omega\left(\mathscr{B}_{1_i}(\nabla u_i)\nabla v_i+\mathscr{B}_{2_i}(u_i)v_i\right)dx-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|u_i|^{s_i(x)-2}u_iv_i\,dx-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}|u_i|^{\ell_i(x)-2}u_iv_i\,d\sigma_x$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\lambda F_{u_i}(x,u)v_i\,dx=0,$$

对所有 v $=(v_1,v_2,\dots,v_n)\in X=\prod_{i=1}^{n}(W^{1,h_i(x)}(\Omega)\cap W^{1,p_i(x)}(\Omega))$。

与问题（1.1）相关的能量泛函 $E_\lambda:X\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义如下：$E_\lambda(.):=\Phi(.)-\Psi(.)-\Upsilon(.)-\mathscr{F}_\lambda(.)$，其中 Φ、Ψ和 $\mathscr{F}_\lambda:X\longrightarrow\mathbb{R}$ 定义为

$$\Phi(u)=\sum_{i=1}^{n}\widehat{M_i}(\mathscr{A}_i(u_i(x))),\quad\Psi(u)=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\frac{1}{s_i(x)}|u_i|^{s_i(x)}dx,$$
$$\Upsilon(u)=\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\ell_i(x)}|u_i|^{\ell_i(x)}d\sigma_x\text{ and }\mathscr{F}_\lambda(u)=\int_\Omega\lambda F(x,u)dx,$$

对所有 X 中的 u $=(u1,\dots,u_n)$，其中 $\widehat{M_i}(\tau)=\int_0^\tau M_i(s)ds$。由标准微积分可知，在上述假设下，对应于问题（1.1）的能量泛函 $E_\lambda:X\to\mathbb{R}^N$是良定义的，且 $E_\lambda\in C^1(X\ \mathbb{R})$，并且

$$\langle E'_\lambda(u),v\rangle=\sum_{i=1}^{n}M_i(\mathscr{A}_i(u_i))\int_\Omega\left(\mathscr{B}_{1_i}(\nabla u_i)\nabla v_i+\mathscr{B}_{2_i}(u_i)v_i\right)dx-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|u_i|^{s_i(x)-2}u_iv_i\,dx$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}|u_i|^{t_i(x)-2}u_iv_i\,d\sigma_x-\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\lambda F_{u_i}(x,u)v_i\,dx,$$

对于所有 $v=(v_1,v_2,\dots,v_n)\in X$。因此，泛函 E_λ 的临界点是系统（1.1）的弱解。
为了证明我们的存在性结果，由于嵌入 $W^{1,h_i(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{h_i^*(x)}(\Omega)$ 和 $W^{1,hi(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{h_i^\partial(x)}(\partial\Omega)$ 不再具有紧性，对于所有 i 属于 $\{1,2,\dots,n\}$，我们不能再期待 Palais–Smale 条件成立。尽管如此，我们可以利用变指数索伯列夫空间 $W^{1,h_i(x)}(\Omega)$ 的浓度紧性原理，证明能量泛函 E_λ 在能量低于某个值时满足局部 Palais–Smale条件。为方便读者，我们陈述这一结果以证明定理1.2；其证明见 Bonder 等人[6, 7]。

现在，令 $\mathscr{O}$ 为 $\partial\Omega$ 的另一个子集，且 $\partial\Omega$ 是一个闭集（可以为空）。令

$$W^{1,h(x)}_{\mathscr{O}}(\Omega):=\overline{\{v\in C^\infty(\overline{\Omega}):\ v\text{ vanishes on a neighborhood of }\mathscr{O}\}}$$

其中，闭包是相对于 $\|v\|_{1,h(x)}$ 取的。这是由在 $\mathscr{O}$ 上为零的函数构成的子空间。显然，$W^{1,h(x)}/0(\Omega)=W^{1,h(x)}(\Omega)$。一般而言，$W^{1,h(x)}\mathscr{O}(\Omega)=W^{1,hi(x)}(\Omega)$ 当且仅当 $h_i(x)$-容量为零。更多细节请参阅 Harjulehto等人 [29]。最佳索伯列夫迹常数 $T_i(h_i(x)\ \ell_i(x)\ \mathscr{O})$ 定义为

$$0<T_i(h_i(x),\ell_i(x),\mathscr{O}):=\inf_{v\in W^{1,h_i(x)}_{\mathscr{O}}(\Omega)}\frac{\|v\|_{W^{1,h_i(x)}(\Omega)}}{\|v\|_{L^{\ell_i(x)}(\partial\Omega)}}.$$

定理 2.8（Bonder 等人 [7]）。设 $h_i\in C_+(\overline{\Omega})$、$\ell_i\in C_+(\partial\Omega)$ 满足 $\ell_i(x)\le h_i^\partial(x)$，对所有 $x\in\partial\Omega$ 均成立，并且$\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $W^{1,hi(x)}(\Omega)$ 中的一个序列，满足 $u_{i_m}\rightharpoonup u_i$ 在 $W^{1,h_i(x)}(\Omega)$ 中弱收敛。则存在一个可数指标集 J_i^1、正数 $\{\mu_{i_j}\}_{j\in J^1i}$ 和 $\{\nu_{i_j}\}_{j\in J^1i}$，以及 $\{x^j\}_{j\in J^1i}\subset\mathscr{C}^1hi=\{x\in\partial\Omega:\ \ell_i(x)=h_i^\partial(x)\}$，使得

$$|u_{i_m}|^{\ell_i(x)}\rightharpoonup\nu_i=|u_i|^{\ell_i(x)}+\sum_{j\in J_i^1}\nu_{i_j}\delta_{x_j}\quad\textit{weakly-* in the sense of measures,}\tag{2.7}$$

$$|\nabla u_{i_m}|^{h_i(x)}\rightharpoonup\mu_i\ge|\nabla u_i|^{h_i(x)}+\sum_{j\in I}\mu_{i_j}\delta_{x_j}\quad\textit{weakly-* in the sense of measures,}\tag{2.8}$$

$$\overline{T}_{i_{x_j}}\nu_{i_j}^{1/h_i^\partial(x_j)}\le\mu_{i_j}^{1/h_i(x_j)}\quad\textit{for all } j\in J_i^1,\tag{2.9}$$

其中

$$\overline{T}_{i_{x_j}}:=\sup_{\varepsilon>0}T(h_i(x),\ell_i(x),\Omega_{\varepsilon,j},\Lambda_{\varepsilon,j}),\tag{2.10}$$

是局部化 Sobolev 迹常数，其中 $\Omega_{\varepsilon,j}=\Omega\cap B_\varepsilon(x\ j)$ 和 $\Lambda_{\varepsilon,j}=\Omega\cap\partial B_\varepsilon(x\ j)$。

定理 2.9（Bonder 和 Silva [6]）。设 h_i 和 s_i 为变指数 $\in C_+(\overline{\Omega})$，满足对所有 $x \in \overline{\Omega}$，均有 $s_i(x) \le h_i^*(x)$，并设 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $W^{1,h_i(x)}(\Omega)$ 中的一个序列，且 $u_{i_m} \rightharpoonup u_i$ 在 $W^{1,h_i(x)}(\Omega)$ 中弱收敛。那么存在一个可数集 J_i^2、正数 $\{\mu_{i_j}\}_{j\in J_i^2}$ 和 $\{\nu_{i_j}\}_{j\in J_i^2}$，以及 $\{x_j\}_{j\in J_i^2} \subset \mathscr{C}^2 h_i = \{x \in \Omega : s_i(x) = h_i^*(x)\}$，使得

$$|u_{i_m}|^{s_i(x)} \rightharpoonup \nu_i = |u_i|^{s_i(x)} + \sum_{j\in I} \nu_{i_j}\delta_{x_j} \quad \textit{weakly-* in the sense of measures}, \tag{2.11}$$

$$|\nabla u_{i_m}|^{h_i(x)} \rightharpoonup \mu_i \ge |\nabla u_i|^{h_i(x)} + \sum_{j\in I} \mu_{i_j}\delta_{x_j} \quad \textit{weakly-* in the sense of measures}, \tag{2.12}$$

$$S_i \nu_{i_j}^{1/h_i^*(x_j)} \le \mu_{i_j}^{1/h_i(x_j)} \quad \textit{for all } j \in J_i^2, \tag{2.13}$$

其中

$$S_i = S_{i_{q_i}}(\Omega) := \inf_{\phi\in C_0^\infty(\Omega)} \frac{\||\nabla v|\|_{L^{p_i(x)}(\Omega)}}{\|v\|_{L^{s_i(x)}(\Omega)}}, \tag{2.14}$$

是变指数情形下 Gagliardo–Nirenberg–Sobolev 不等式中的最佳常数

记号。弱（分别为强）收敛记为 $\rightharpoonup$（分别为 $\to$），C_i、C^{i_j}、c_j 和 c^{i_j} 表示正常数，它们可能随行变化，并可在具体条件下确定。这里，X^* 表示 X 的对偶空间，δ_{x_j} 是位于 x_j 处的狄拉克质量，对所有 $\rho > 0$，$x \in \Omega$ 均成立；其中 $B(x,\rho)$ 表示以 x 为中心、半径为 ρ 的球。

3. 辅助问题与变分框架

为了证明定理1.2，我们将通过定义辅助泛函来引入辅助问题$E_{\theta,\lambda}$ 并证明能量泛函 $E_{\theta,\lambda}$ 具有山路定理 2.6所需的几何结构。根据假设 $(\boldsymbol{M})$，我们看到函数 M_i 仅有下界，无法为我们提供关于 M_i 在无穷远处行为的充分信息，因此难以证明泛函 E_λ 具有山路定理所需的几何结构，且 Palais–Smale 序列在 X中有界。因此，我们截断函数M_i 并研究相应的截断问题。

取假设 (F_3) 中的 γ_i 和 $\theta_i \in \mathbb{R}$，对所有满足 $\mathfrak{M}_i^0 < \theta_i < {}_{+}{}^{\gamma_i}\mathfrak{M}^0{}_{ipi}\max\{\beta_{1i}, \beta_{2_i}\}$ 的 $i \in \{1,\dots,N\}$。由假设 (M)，存在 $\tau_i^0 > 0$ 使得 $M_i(\tau_i^0) = \theta_i$。因此，令

$$M_{\theta_i}(\tau_i) = \begin{cases} M_i(\tau_i) & \text{for } 0 \le \tau_i \le \tau_i^0, \\ \theta_i & \text{for } \tau_i \ge \tau_i^0, \end{cases}$$

我们可以引入以下辅助问题

$$\begin{cases} M_{\theta_i}\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\Big(-\operatorname{div}\big(\mathscr{B}_{1_i}(\nabla u_i)\big) + \mathscr{B}_{2_i}(u_i)\Big) = |u_i|^{s_i(x)-2}u_i + \lambda F_{u_i}(x,u) & \text{in } \Omega, \\ \mathfrak{N}.M_{\theta_i}\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\mathscr{B}_{1_i}(\nabla u_i) = |u_i|^{\ell_i(x)-2}u_i & \text{on } \partial\Omega; \end{cases} \tag{3.1}$$

对 $(1 \le i \le n)$，其中 $\mathscr{A}_i$，$\mathscr{B}_i$，F_{u_i} 和 λ 如第 1节所述。由假设 $(\boldsymbol{M})$，我们还知道

$$\mathfrak{M}_i^0 \le M_{\theta_i}(\tau_i) \le \theta_i < \frac{\gamma_i \mathfrak{M}_i^0}{p_i^+ \max\{\beta_{1_i}, \beta_{2_i}\}}, \text{ for all } \tau_i \ge 0, 1 \le i \le n. \tag{3.2}$$

现在，下一步是证明辅助问题 (3.1) 存在一个非平凡弱解。我们得到以下结果。

定理 3.1. 假设条件 $(\boldsymbol{A}_1)$–$(\boldsymbol{A}_4)$、$(\boldsymbol{M})$，以及 $(\boldsymbol{F}_1)$–$(\boldsymbol{F}_4)$ 均成立。则存在常数$\lambda_\star > 0$，使得若 $\lambda \ge \lambda_\star$，则问题 (3.1) 在 X 中至少有一个非平凡解。

为了证明定理 3.1，我们需要一些技术性结果。注意到，辅助问题 (3.1) 具有变分结构；事实上，它是如下定义的泛函 $E_{\theta,\lambda} : X \to \mathbb{R}$ 的欧拉–拉格朗日方程

$$E_{\theta,\lambda}(u) = \sum_{i=1}^n \widehat{M_{\theta_i}}(\mathscr{A}_i(u_i)) - \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{1}{s_i(x)}|u_i|^{s_i(x)}dx - \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\ell_i(x)}|u_i|^{\ell_i(x)}d\sigma_x - \int_\Omega \lambda F(x,u)dx,$$

其中 $\widehat{M\theta_i}(\tau) = \int_0^\tau M\theta_i(s)ds$。此外，泛函 $E\theta,\lambda$ 关于 $u \in X$ 是 Fr´échet 可微的，并且对于所有 $v = (v1,\ldots, vn) \in X$,

$$\begin{aligned}\langle E'_{\theta,\lambda}(u), v\rangle = &\sum_{i=1}^{n} M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_i)) \int_\Omega \left(\mathscr{B}_{1_i}(\nabla u_i)\nabla v_i + \mathscr{B}_{2_i}(u_i)v_i\right) dx - \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |u_i|^{s_i(x)-2}u_i v_i\, dx \\ &- \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega} |u_i|^{s_i(x)-2}u_i v_i\, d\sigma_x - \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \lambda F_{u_i}(x,u)v_i\, dx.\end{aligned} \tag{3.3}$$

现在我们证明，该泛函 $E\theta,\lambda$ 具有山路定理 2.6. 所要求的几何特征

引理 3.2. 假设条件 $(A_1)-(A_4)$、(M) 和 $(F_1)-(F_4)$ 成立。那么存在正常数$\mathscr{R}$和 ρ，使得 $E\theta,\lambda(u) \geq \mathscr{R} > 0$, 对所有满足 $\|u\| = \rho$ 的 $u \in X$ 均成立。

证明。对于所有 $u = (u1,\ldots, un) \in X$，在假设 (A_2) 和 (A_4) 下，我们得到:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\widehat{M}_{\theta_i}\left(\mathscr{A}_i(u_i)\right) &\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+}\int_\Omega \left(A_{1_i}(|\nabla u_i|^{p_i(x)}) + A_{2_i}(|u_i|^{p_i(x)})\right)dx \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{1}{\beta_{1_i}}a_{1_i}(|\nabla u_i|^{p_i(x)})|\nabla u_i|^{p_i(x)} + \frac{1}{\beta_{2_i}}a_{2_i}(|u_i|^{p_i(x)})|u_i|^{p_i(x)}\right]dx \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathfrak{M}_i}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}\int_{\mathbb{R}^N}\left[a_{1_i}(|\nabla u_i|^{p_i(x)})|\nabla u_i|^{p_i(x)} + a_{2_i}(|u_i|^{p_i(x)})|u_i|^{p_i(x)}\right]dx \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathfrak{M}_i^0\min\{\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\},\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\}}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}\left(\rho_{1,p_i(x)}(u_i) + \mathscr{K}(k_i^3)\rho_{1,q_i(x)}(u_i)\right).\end{aligned}$$

因此，利用假设 $(\boldsymbol{F}_4)$以及关系式 (2.2)-(2.3)，可得

$$\begin{aligned}E_{\theta,\lambda}(u) \geq &\sum_{i=1}^{n}\frac{\mathfrak{M}_i^0\min\left\{\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\},\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\right\}}{p_i^+\max\left\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\right\}}\left(\min\left\{\|u_i\|_{1,p_i(x)}^{p_i^-},\|u_i\|_{1,p_i(x)}^{p_i^+}\right\}\right. \\ &\left.+\mathscr{K}(k_i^3)\min\left\{\|u_i\|_{1,q_i(x)}^{q_i^-},\|u_i\|_{1,q_i(x)}^{q_i^+}\right\}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{s_i^-}\max\left\{\|u_i\|_{L^{s_i(x)}(\Omega)}^{s_i^-},\|u_i\|_{L^{s_i(x)}(\Omega)}^{s_i^+}\right\} \\ &-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\ell_i^-}\max\left\{\|u_i\|_{L^{\ell_i(x)}(\partial\Omega)}^{\ell_i^-},\|u_i\|_{L^{\ell_i(x)}(\partial\Omega)}^{\ell_i^+}\right\} - \sum_{i=1}^{n}\lambda\max\left\{\|u_i\|_{L^{w_i(x)}(\Omega)}^{w_i^-},\|u_i\|_{L^{w_i(x)}(\Omega)}^{w_i^+}\right\}.\end{aligned}$$

根据 Sobolev 嵌入定理，并取 $0 < \|u\| = \max_{1\leq i\leq n}\{\|u_i\|_{1,p_i(x)} + \mathscr{K}(k_i^3)\|u_i\|_{1,q_i(x)}\} = \rho < 1$，存在正常数 $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$ 和 c_{5i}，使得

$$\begin{aligned}E_{\theta,\lambda}(u) &\geq \sum_{i=1}^{n} c_{1_i}\left(\|u_i\|_{1,p_i(x)}^{q_i^+} + \mathscr{K}(k_i^3)\|u_i\|_{1,q_i(x)}^{q_i^+}\right) - \sum_{i=1}^{n} c_{2_i}\|u_i\|_i^{s_i^-} - \sum_{i=1}^{n} c_{3i}\|u_i\|_i^{\ell_i^-} - \sum_{i=1}^{n} c_{4i}\|u_i\|_i^{w_i^-} \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\left(c_{5i}\|u_i\|_i^{q_i^+} - c_{2_i}\|u_i\|_i^{s_i^-} - c_{3i}\|u_i\|_i^{\ell_i^-} - c_{4i}\|u_i\|_i^{w_i^-}\right).\end{aligned}$$

由于 $q_i^+ < w_i^- < \inf\{s_i^-\ell_i^-\}$，存在一个正数 $\mathscr{R}$ 使得 $E\theta,\lambda(u) \geq \mathscr{R} > 0$，其中 $\|u\| = \rho$. □

引理 3.3. 假设条件 $(A_1)-(A_4)$、(M) 和 (F_4) 成立。那么对于每个正函数 λ，存在一个非负函数 $e \in X$, 与 λ 无关，使得 $\|z\| > R$ 且 $E\theta,\lambda(z) < 0$。

证明。根据假设 (A_1) 和 (A_4)，对于所有 $\delta > 0$ and $u \in X$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\widehat{M_{\theta_i}}\left(\mathscr{A}_i(\delta u_i)\right) &= \sum_{i=1}^{n}\int_0^{\mathscr{A}_i(\delta u_i)} M_{\theta,i}(s)\,ds \le \sum_{i=1}^{n}\theta_i\mathscr{A}_i(\delta u_i)\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\theta_i\int_\Omega \frac{1}{p_i(x)}\left(A_{1_i}(|\nabla(\delta u_i)|^{p_i(x)} + A_{2_i}(|\delta u_i|^{p_i(x)})\right)dx\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\theta_i\int_\Omega \Big(\frac{\max\{k^1_{1_i},k^1_{2_i}\}}{p_i(x)}\left(|\nabla(\delta u_i)|^{p_i(x)} + |\delta u_i|^{p_i(x)}\right) + \frac{k_i^3}{q_i(x)}\left(|\nabla(\delta u_i)|^{q_i(x)} + |\delta u_i|^{q_i(x)}\right)\Big)dx\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\theta_i\Big(\frac{\max\{k^1_{1_i},k^1_{2_i}\}}{p_i^-}\max\left\{\|u_i\|^{p_i^-}_{1,p_i(x)},\|u_i\|^{p_i^+}_{1,p_i(x)}\right\} + \frac{k_i^3}{q_i^+}\max\left\{\|u_i\|^{q_i^-}_{1,q_i(x)},\|u_i\|^{q_i^+}_{1,q_i(x)}\right\}\Big).\end{aligned}$$

由此不等式和假设 (F_4)，对于 $e = (e1,\dots,e_n) \in X \setminus \{(0,\dots,0)\}$ 以及每个 $\delta > 1$，我们有

$$\begin{aligned}E_{\theta,\lambda}(\delta e) &= \sum_{i=1}^{n}\widehat{M_i}\left(\mathscr{A}_i(\delta e_i)\right) - \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega \frac{1}{s_i(x)}|\delta e_i|^{s_i(x)}dx - \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\ell_i(x)}|\delta e_i|^{\ell_i(x)}d\sigma_x - \lambda\int_\Omega F(x,\delta e)dx\\ &\le \sum_{i=1}^{n}\Bigg[\theta_i\delta^{q_i^+}\Big(\frac{\max\{k^1_{1_i},k^1_{2_i}\}}{p_i^-}\max\left\{\|e_i\|^{p_i^-}_{1,p_i(x)},\|e_i\|^{p_i^+}_{1,p_i(x)}\right\} + \frac{k_i^3}{q_i^+}\max\left\{\|e_i\|^{q_i^-}_{1,q_i(x)},\|e_i\|^{q_i^+}_{1,q_i(x)}\right\}\Big)\\ &\quad - \frac{\delta^{s_i^-}}{s_i^-}\min\left\{\|e_i\|^{s_i^-}_{s_i(x)},\|e_i\|^{s_i^+}_{s_i(x)}\right\} - \frac{\delta^{\ell_i^-}}{\ell_i^-}\min\left\{\|e_i\|^{\ell_i^-}_{\ell_i(x)},\|e_i\|^{\ell_i^+}_{\ell_i(x)}\right\} - \delta^{w_i^-}\min\left\{\|e_i\|^{w_i^-}_{w_i(x)},\|e_i\|^{w_i^+}_{w_i(x)}\right\}\Bigg],\end{aligned}$$

当 $\delta \to +\infty$ 时，该式趋于 $-\infty$，因为 $\min\{s_i^-,\ell_i^-\} > w_i^- > q_i^+$。因此，取 $z = \delta_* e$ 且 $\delta_* > 0$ 充分大，便可证明该引理。□

现在，由于不满足 Palais-Smale 条件的山路定理2.6，我们得到一个序列 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset X$，使得 $E_{\theta,\lambda}(u_m) \to c_{\theta,\lambda}$ 且 $E'_{\theta,\lambda}(u_m) \to 0$，其中 $c_{\theta,\lambda} := \inf_{\phi\in\Gamma}\max_{\delta\in[0,1]} E_\lambda(\phi(\delta))$，并且

$$\Gamma = \left\{\phi : [0,1] \to X \text{ continuous } : \phi(0) = (0,\dots,0),\ E_{\theta,\lambda}(\phi(1)) < 0\right\}.$$

引理3.4. 假设条件 $(A_1)-(A_2)$、(M) 和 (F_4) 成立。那么 $\lim_{\lambda\to+\infty} c_{\theta,\lambda} = 0.$

证明. 设 $z = (z1,\dots,z_n) \in X$ 是由引理 3.3 给出的函数。那么，对于每个 $\lambda > 0$，$\lim_{\delta\to\infty} E_{\theta,\lambda}(\delta z) = -\infty$，因此可知存在 $\delta_\lambda > 0$ 使得 $E_{\theta,\lambda}(\delta_\lambda z) = \max_{\delta\ge 0} E_{\theta,\lambda}(\delta z)$。因此，$\langle E'_{\theta,\lambda}(\delta_\lambda z)\ \delta_\lambda z\rangle = 0$，由关系 (3.3) 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}M_{\theta_i}\left(\mathscr{A}_i(\delta_\lambda z_i)\right)\int_\Omega \left(a_{1_i}(|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{p_i(x)})|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{p_i(x)} + a_{2_i}(|\delta_\lambda z_i|^{p_i(x)})|\delta_\lambda z_i|^{p_i(x)}\right)dx &= \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |\delta_\lambda z_i|^{s_i(x)}\,dx\\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}|\delta_\lambda z_i|^{\ell_i(x)}\,d\sigma_x + \sum_{i=1}^{n}\lambda\delta_\lambda\int_\Omega F_{u_i}(x,\delta_\lambda z)z_i\,dx. \quad (3.4)\end{aligned}$$

根据构造，$z_i \ge 0$ 几乎处处成立于 Ω，对所有 $i \in \{1,2,\dots,n\}$。因此，根据假设 (F_3) 以及关系 (3.4)，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}M_{\theta_i}\left(\mathscr{A}_i(\delta_\lambda z_i)\right)\int_\Omega \left(a_{1_i}(|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{p_i(x)})|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{p_i(x)} + a_{2_i}(|\delta_\lambda z_i|^{p_i(x)})|\delta_\lambda z_i|^{p_i(x)}\right)dx &\\ \ge \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega |\delta_\lambda z_i|^{s_i(x)}\,dx + \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}|\delta_\lambda z_i|^{\ell_i(x)}\,d\sigma_x. \quad (3.5)\end{aligned}$$

另一方面，根据假设 (A_2) 以及不等式 (2.2)、(2.3)，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} M_{\theta_i}\left(\mathscr{A}_i(\delta_\lambda z_i)\right)\int_\Omega \left(a_{1_i}(|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{p_i(x)})|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|\delta_\lambda z_i|^{p_i(x)})|\delta_\lambda z_i|^{p_i(x)}\right)dx\\
&\qquad\le \sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\int_\Omega\left(a_{1_i}(|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{p_i(x)})|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|\delta_\lambda z_i|^{p_i(x)})|\delta_\lambda z_i|^{p_i(x)}\right)dx\right)\\
&\qquad\le \sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\max\{k^1_{1_i},k^1_{2_i}\}\int_\Omega\left(|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{p_i(x)}+|\delta_\lambda z_i|^{p_i(x)}\right)dx+k_i^3\int_\Omega\left(|\nabla(\delta_\lambda z_i)|^{q_i(x)}+|\delta_\lambda z_i|^{q_i(x)}\right)dx\right)\\
&\qquad\le \sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\max\{k^1_{1_i},k^1_{2_i}\}\max\left\{\|\delta_\lambda z_i\|^{p_i^-}_{1,p_i(x)},\|\delta_\lambda z_i\|^{p_i^+}_{1,p_i(x)}\right\}+k_i^3\max\left\{\|\delta_\lambda z_i\|^{q_i^-}_{1,q_i(x)},\|\delta_\lambda z_i\|^{q_i^+}_{1,q_i(x)}\right\}\right).
\end{aligned}\tag{3.6}$$

因此，由关系式（3.5）、（3.6）以及不等式（2.2）、（2.3），我们得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\theta_i\left(\max\{k^1_{1_i},k^1_{2_i}\}\max\left\{\|\delta_\lambda z_i\|^{p_i^-}_{1,p_i(x)},\|\delta_\lambda z_i\|^{p_i^+}_{1,p_i(x)}\right\}+k_i^3\max\left\{\|\delta_\lambda z_i\|^{q_i^-}_{1,q_i(x)},\|\delta_\lambda z_i\|^{q_i^+}_{1,q_i(x)}\right\}\right)\\
&\qquad\ge \sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\delta_\lambda z_i|^{s_i(x)}dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}|\delta_\lambda z_i|^{s_i(x)}d\sigma_x\\
&\qquad\ge \sum_{i=1}^{n}\min\left\{\|\delta_\lambda z_i\|^{s_i^-}_{L^{s_i(x)}(\Omega)},\|\delta_\lambda z_i\|^{s_i^+}_{L^{s_i(x)}(\Omega)}\right\}\\
&\qquad\quad+\sum_{i=1}^{n}\min\left\{\|\delta_\lambda z_i\|^{\ell_i^-}_{L^{\ell_i(x)}(\partial\Omega)},\|\delta_\lambda z_i\|^{\ell_i^+}_{L^{\ell_i(x)}(\partial\Omega)}\right\}.
\end{aligned}\tag{3.7}$$

接下来，我们将证明序列$\{\delta_\lambda\}$ 在 $\mathbb{R}$中有界。事实上，反设 $\{\delta_\lambda\}$ 无界。那么存在一个子列，记为 $\{\delta_{\lambda_m}\}$，满足 $\delta_{\lambda_m}\to\infty$，当$m\to+\infty$时。由关系式（3.7），

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\theta_i\max\{k^1_{1_i},k^1_{2_i}\}\|z_i\|^{p_i^+}_{1,p_i(x)}}{\delta_{\lambda_m}^{q_M^+-p_i^+}}+k_i^3\theta_i\|z_i\|^{q_i^+}_{1,q_i(x)}\right)\ge\sum_{i=1}^{n}\delta_\lambda^{s_i^--q_M^+}\|z_i\|^{s_i^-}_{L^{s_i(x)}(\Omega)}+\sum_{i=1}^{n}\delta_\lambda^{\ell_i^--q_M^+}\|z_i\|^{\ell_i^-}_{L^{\ell_i(x)}(\partial\Omega)},\tag{3.8}$$

其中 $q_M^+=\max\limits_{1\le i\le n}\{q_i^+\}$。因此，当 $m\to+\infty$ 时取极限，我们得到矛盾，因为 $p_i^+<q_M^+<\inf\{s_i^-,\ell_i^-\}$。由此可知，$\{\delta_\lambda\}$ 确实在 $\mathbb{R}$中有界。

考虑一个序列 $\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}$，满足 $\lambda_m\to+\infty$，并令$\delta_0\ge0$ 满足 $\delta_{\lambda_m}\to\delta_0$，当 $m\to+\infty$ 时。由 M^{θ_i} 的连续性可知，$\{M^{\theta_i}(\mathscr{A}_i(\delta_{\lambda_m}z_i))\}_{m\in\mathbb{N}}$有界，对所有 $i\in\{1,2,\dots,n\}$ 均成立。因此，存在 $C>0$，使得

$$\sum_{i=1}^{n}M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(\delta_{\lambda_m}z_i))\int_\Omega\left(a_{1_i}(|\nabla\delta_{\lambda_m}z_i|^{p_i(x)})|\nabla\delta_{\lambda_m}z_i|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|\delta_{\lambda_m}z_i|^{p_i(x)})|\delta_{\lambda_m}z_i|^{p_i(x)}\right)dx\le C,\ \text{for all } m\in\mathbb{N}$$

因此，由不等式（3.5），我们有

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\delta_{\lambda_m}z_i|^{s_i(x)}dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}|\delta_{\lambda_m}z_i|^{\ell_i(x)}d\sigma_x+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\lambda\delta_{\lambda_m}F_{u_i}(x,\delta_{\lambda_m}z)z_i\,dx\le C,\ \text{for all } m\in\mathbb{N}.\tag{3.9}$$

我们将证明 $\delta_0=0$。事实上，若 $\delta_0>0$，则由假设（F_2），存在正函数 $b^{ij}(1\le i,j\le n)$，使得

$$\left|F_{\xi_i}(x,\xi_1,\dots,\xi_n)\right|\le\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(x)|\xi_j|^{\ell_{ij}-1},\ \text{where } 1<\ell_{ij}<\inf_{x\in\Omega}h_i(x),\ \text{for all } x\in\Omega.$$

因此，由勒贝格控制收敛定理可得

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\lambda\delta_{\lambda_m}F_{u_i}(x,\delta_{\lambda_m}z)z_i\,dx\to\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\lambda\delta_0F_{u_i}(x,\delta_0z)z_i\,dx,\ \text{as}\ m\to+\infty$$

记住 $\lambda_m\to+\infty$，我们得到

$$\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|\delta_{\lambda_m}z_i|^{s_i(x)}dx+\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}|\delta_{\lambda_m}z_i|^{\ell_i(x)}d\sigma_x+\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega\lambda\delta_{\lambda_m}F_{u_i}(x,\delta_{\lambda_m}z)z_i\,dx\to+\infty,\ \text{as}\ \lambda_m\to+\infty.$$

这与事实（3.9）矛盾，因此我们可以推断出 $\delta_0 = 0$。
接下来，我们考虑如下路径 $\phi_*(\delta) = \delta z$，其中 $\delta \in [0,1]$ 属于 Γ。利用假设 (F_3)，我们得到

$$0 < c_{\theta,\lambda_m} \le \max_{\delta\in[0,1]} E_{\theta,\lambda_m}(\phi_*(\delta)) \le E_{\theta,\lambda}(\delta_{\lambda_m} z) \le \sum_{i=1}^{n} \widehat{M_{\theta_i}}\left(\mathscr{A}_i(\delta_{\lambda_m} z_i)\right). \tag{3.10}$$

另一方面，由于对于所有 $1 \le i \le n$ 以及 $\delta_0 = 0$，M_{θ_i} 均连续，我们得到 $\lim_{m\to+\infty} \widehat{M_{\theta_i}}\left(\mathscr{A}_i(\delta_{\lambda_m} z_i)\right) = 0$，对所有 $i \in \{1,2,\dots,n\}$。因此，由关系 (3.10)，我们得到 $\lim_{m\to+\infty} c_{\theta,\lambda_m} = 0$。此外，利用假设 (F_3)，我们还可得序列 $\{c_{\theta,\lambda}\}_\lambda$ 是单调的。因此，证明完毕。□

引理 3.5. 若 $\{u_m = (u^1_m, u^2_m, \dots, u^n_m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $E_{\theta,\lambda}$ 的 Palais-Smale 序列，则 $\{u_m\}_m$ 在 X 中有界。

证明。令 $\{u_m = (u^1_m, u^2_m, \dots, u^n_m)\}_m$ 为 $E_{\theta,\lambda}$ 的一个 $(PS)_c$ 序列。则有

$$\begin{aligned} E_{\theta,\lambda}(u_m) = {} & \sum_{i=1}^{n} \widehat{M_{\theta_i}}\left(\mathscr{A}_i(u_{i_m}(x))\right) - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{1}{s_i(x)} |u_{i_m}(x)|^{s_i(x)} dx - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\ell_i(x)} |u_{i_m}(x)|^{\ell_i(x)} d\sigma_x \\ & - \int_\Omega \lambda F(x, u_m) dx = c + o_m(1). \end{aligned}$$

另一方面，对于所有 $v = (v_1, v2, \dots, v_n) \in X$，有

$$\begin{aligned} \langle E'_{\theta,\lambda}(u_m), v\rangle = {} & \sum_{i=1}^{n} M_{\theta_i}\left(\mathscr{A}_i(u_{i_m})\right) \int_\Omega \left(\mathscr{B}_{1_i}(\nabla u_{i_m}) \nabla u_{i_m} \nabla v_i + \mathscr{B}_{2_i}(u_{i_m}) u_{i_m} v_i \right) dx - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega |u_{i_m}|^{s_i(x)-2} u_{i_m} v_i \, dx \\ & - \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} |u_{i_m}|^{s_i(x)-2} u_{i_m} v_i \, d\sigma_x - \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \lambda F_{u_i}(x, u_m) v_i \, dx = o_m(1). \end{aligned} \tag{3.11}$$

因此，

$$\begin{aligned} E_{\theta,\lambda}(u_m) - \langle E'_{\theta,\lambda}(u_m), \frac{u_m}{\gamma}\rangle \ge {} & \sum_{i=1}^{n} \left(\widehat{M_{\theta_i}}\left(\mathscr{A}_i(u_{i_m})\right) - \frac{1}{\gamma_i} M_{\theta_i}\left(\mathscr{A}_i(u_{i_m})\right) \int_\Omega \left(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}) |\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)} \right.\right. \\ & \left.\left. + a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)}) |u_{i_m}|^{p_i(x)} \right) dx \right) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{s_i^-} \right) \int_\Omega |u_{i_m}|^{s_i(x)} dx \\ & + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\gamma_i} - \frac{1}{\ell_i^-} \right) \int_{\partial\Omega} |u_{i_m}|^{\ell_i(x)} d\sigma_x + \lambda \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{u_{i_m}}{\gamma_i} F_{u_i}(x, u_m) - F(x, u_m) \right] dx, \end{aligned}$$

其中 $u_{m_\gamma} = (\frac{u^1_m}{\gamma_1}, \frac{u^2_m}{\gamma_2}, \dots, \frac{u^n_m}{\gamma_n})$。因此，利用假设 (A_4)、(M) 和 (F_3)，我们可以得出 t

$$\begin{aligned} E_{\theta,\lambda}(u_m) - \langle E'_{\theta,\lambda}(u_m), \frac{u_m}{\gamma}\rangle \ge {} & \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i^0 \left(\frac{\theta_i}{p_i^+} \int_\Omega \left(A_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}) + A_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)}) \right) dx \right. \\ & \left. - \frac{1}{\gamma_i} \int_\Omega \left(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}) |\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)} + a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)}) |u_{i_m}|^{p_i(x)} \right) dx \right) \\ \ge {} & \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\theta_i \mathfrak{M}_i^0}{p_i^+ \max\{\beta_{1_i}, \beta_{2_i}\}} - \frac{\mathfrak{M}_i^0}{\gamma_i} \right) \int_\Omega \left(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}) |\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)} + a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)}) |u_{i_m}|^{p_i(x)} \right) dx. \end{aligned}$$

利用假设 (A_4)，我们可以找到正常数 C_{i1} 和 C_{i2}，使得

$$E_{\theta,\lambda}(u_m) - \langle E'_{\theta,\lambda}(u_m), \frac{u_m}{\gamma}\rangle \ge \sum_{i=1}^{n} \left[C_{i1} \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)} + |u_{i_m}|^{p_i(x)} \right) dx \right) + C_{i2} \mathscr{K}(k_i^3) \left(\int_\Omega \left(|\nabla u_{i_m}|^{q_i(x)} + |u_{i_m}|^{q_i(x)} \right) dx \right) \right]. \tag{3.12}$$

为了证明该结论，我们反设 $\|u_{i_m}\|_i = \|u^i\|_{1,p_i}(x) + \mathscr{K}(k_i^3)\|u^i\|_{1,q_i}(x) \to +\infty$。因此，若 $k_i^3 = 0$，则利用关系式 (2.2)，可得 $E_{\theta,\lambda}(u_m) - \langle E'_{\theta,\lambda}(u_m), u_{m_\gamma} \rangle \ge \sum_{i=1}^{n} C_i \|u_{i_m}\|^{p_i^-} i \quad \cdot$。因此，我们可以找到 $c + o_m(1) \ge \sum_{i=1}^{n} C_i \|u_{i_m}\|^{p_i^-} i \quad \cdot$。由于 $p_i^- > 1$，得到矛盾。因此，我们可以推断 $\{u_m\}$ 在 X 中有界。

当 $k_i^3 > 0$时，我们有三种情况需要分析。
(i) $\|u^{i_m}\|_{1,\ p_i}(x) \to +\infty$ 以及 $\|u^{i_m}\|_{1,\ q_i}(x) \to +\infty$，当 $m \to +\infty$时，

(ii) $\|u_{i_m}\|_{1,\ p_i(x)} \to +\infty$ 和 $\|u_{i_m}\|_{1,\ q_i(x)}$ 有界，

(iii) $\|u_{i_m}\|_{1,\ p_i(x)}$ 有界，并且 $\|u_{i_m}\|_{1,\ q_i(x)} \to +\infty$。

在情形 (i)中，当 m 充分大时，我们有 $\|u_{i_m}\|_{1,q_i(x)}^{q^-} \geq \|u_{i_m}\|_{1,q_i(x)}^{p^-}$。因此，由不等式 (3.12)，可得

$$\begin{aligned} c+o_m(1) &\geq \sum_{i=1}^{n}\left[C_{1_i}\|u_{i_m}\|_{1,p_i(x)}^{p_i^-}+C_{2_i}\mathcal{K}(k_i^3)\|u_{i_m}\|_{1,q_i(x)}^{q_i^-}\right] \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\left[C_{1_i}\|u_{i_m}\|_{1,p_i(x)}^{p_i^-}+C_{2_i}\mathcal{K}(k_i^3)\|u_{i_m}\|_{1,q_i(x)}^{p_i^-}\right] \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} C_{3i}\|u_{i_m}\|_{i}^{p_i^-}, \end{aligned}$$

这就产生了矛盾。在情形 (ii) 中，利用不等式 (3.12)，我们得出 $c+o_m(1) \geq \sum_{i=1}^{n} C_{1_i}\|u_{i_m}\|_{1,p_i(x)}^{p_i^-}$，因此，当 $m \to +\infty$ 时，由于 $p_i^- > 1$，同样可得矛盾。在情形 (iii) 中，证明与情形 (ii) 类似，故从略。最后，我们可以推得 $\{u_m\}$ 是 X 中的有界序列。□

接下来，我们将证明辅助问题 (3.1) 至少存在一个非平凡弱解。

定理 3.1 的证明。由引理 3.2 和引理 3.3 可知，泛函 $E_{\theta,\lambda}$ 满足山路定理 2.6 所要求的几何结构。现在，只需验证 Palais-Smale 条件是否成立。设 $\{u_m = (u_{1m}, u_{2m}, \ldots, u_{nm})\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 X 中能级为 $c_{\theta,\lambda}$ 的 Palais-Smale 序列。于是，引理3.4表明存在 λ_*，使得

$$c_{\theta,\lambda} < \min\left\{\min_{1\leq i\leq n}\left\{\left(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{\ell_{i_{\mathscr{C}_{h_i}^1}}^-}\right)\inf_{j\in J_i^1}\left\{\overline{T}_{i_{x_j}}^N\left(D_i\right)^{N/h_i(x_j)}\right\}\right\}, \min_{1\leq i\leq n}\left\{\left(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{s_{i_{\mathscr{C}_{h_i}^2}}^-}\right)\inf_{j\in J_i^2}\left\{S_i^N\left(D_i\right)^{N/h_i(x_j)}\right\}\right\}\right\},$$

其中 $\overline{T^{x_j}}$ 和 S_i 分别由关系式（2.10）和（2.14）给出，并且

$$D_i = \mathfrak{M}_i^0\left(\min\{k_{1_i}^0, k_{2_i}^0\}(1-\mathcal{K}(k_i^3)+\mathcal{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2, k_{2_i}^2\})\right).$$

因此，存在一个在 X 中强收敛的子列。事实上，应用引理 3.5，$\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 在 X 中有界；取一个子列，仍记为 $\{u_m\}_m$，它在 X 中弱收敛，因此存在正的有界测度μ_i、$\nu_i \in \Omega$ 和 $\overline{\nu}_i \in \partial\Omega$，使得 $|\nabla u_{i_m}|^{h_i}(x) \rightharpoonup \mu_i$、$|u_{i_m}|^{s_i}(x) \rightharpoonup \nu_i$，以及 $|u_{i_m}|^{\ell_i}(x) \rightharpoonup \overline{\nu}_i$。因此，由定理 2.8 和定理 2.9 可知，若 $\bigcup_{i=1}^{n}(J_i^1 \cup J_i^2) = \emptyset$，则对所有 $1 \leq i \leq n$，$u_{i_m} \rightharpoonup u_i$ 属于 $L^{s_i}(x)(\Omega)$，且 $u_{i_m} \rightharpoonup u_i$ 属于 $L^{\ell_i}(x)(\partial\Omega)$。下面证明，若

$$c_{\theta,\lambda} < \min\left\{\min_{1\leq i\leq n}\left\{\left(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{\ell_{i_{\mathscr{C}_{h_i}^1}}^-}\right)\inf_{j\in J_i^1}\left\{\overline{T}_{i_{x_j}}^N\left(D_i\right)^{N/h_i(x_j)}\right\}\right\}, \min_{1\leq i\leq n}\left\{\left(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{s_{i_{\mathscr{C}_{h_i}^2}}^-}\right)\inf_{j\in J_i^2}\left\{S_i^N\left(D_i\right)^{N/h_i(x_j)}\right\}\right\}\right\}$$

并且 $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是能量水平为 $c_{\theta,\ \lambda}$ 的 Palais-Smale 序列，那么对于所有 $1 \leq i \leq n$，都有 $J_i^1 \cup J_i^2 = \emptyset$。事实上，假设存在 i 属于 $\{1,\ldots,n\}$，使得 $J_i^1 \cup J_i^2$ 非空，那么 $J_i^1 \neq \emptyset$ 或 $J_i^2 \neq \emptyset$。

首先，我们假设 $J_i^1 \neq \emptyset$ 的情形。设 $x^j \in \mathscr{C}_{h_i}^1$ 是测度 μ_i 和 $\overline{\nu}_i$ 的一个奇异点。考虑 $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$，使得 $0 \leq \psi(x) \leq 1$，$\psi(0) = 1$，且 $\operatorname{supp}\psi \subset B(0,1)$。对于每个 $j \in J_i^1$ 和任意 $\varepsilon > 0$，我们考虑函数$\psi_{j,\ \varepsilon} := \psi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)$，对所有 $x \in \mathbb{R}^N$。注意 $\psi_{j,\ \varepsilon} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$，$|\nabla\psi_{j,\ \varepsilon}|_\infty \leq \frac{2}{\varepsilon}$，并且

$$\psi_{j,\varepsilon}(x) = \begin{cases} 1, & x \in B(x_j,\varepsilon), \\ 0, & x \in \mathbb{R}^N \setminus B(x_j,2\varepsilon). \end{cases}$$

由于 $\{u_{i_m}\}_m$ 在 $W^{1,h_i}(x)(\Omega) \cap W^{1}p_i(x)(\Omega)$ 中有界，序列 $\{u_{i_m}\psi_{j,\varepsilon}\}$ 在 $W^{1}h_i(x)(\Omega) \cap W^{1}p_i(x)(\Omega)$ 中也有界。因此，由关系 (3.11)，我们得到 $\langle E'_{\theta,\lambda}(u_{1m}, \ldots, u_{im}, \ldots, u_{nm}), (0, \ldots, u_{i_m}\psi_{j,\varepsilon}, \ldots, 0)\rangle \to 0$ 当 $m \to +\infty$.

因此，我们有

$$\langle E'_{\theta,\lambda}(u_m)(0,\dots,u_{i_m}\psi_{j,\varepsilon},\dots,0)\rangle = M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_{i_m}))\int_\Omega \Big(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla(u_{i_m}\psi_{j,\varepsilon})$$
$$+ a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)})|u_{i_m}|^{p_i(x)-2}u_{i_m}(u_{i_m}\psi_{j,\varepsilon})\Big)\,dx - \int_\Omega |u_{i_m}|^{s_i(x)-2}u_{i_m}(u_{i_m}\psi_{j,\varepsilon})\,dx$$
$$- \int_{\partial\Omega}|u_{i_m}|^{\ell_i(x)-2}u_{i_m}(u_{i_m}\psi_{j,\varepsilon})\,d\sigma_x - \int_\Omega \lambda F_{u_i}(x,u_m)u_{i_m}\psi_{j,\varepsilon}\,dx \to 0 \text{ as } m\to+\infty$$

并且我们可以找到

$$M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_{i_m}))\int_\Omega a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\,dx = \int_\Omega |u_{i_m}|^{s_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}\,dx + \int_{\partial\Omega}|u_{i_m}|^{\ell_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}\,d\sigma_x$$
$$-M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_{i_m}))\int_\Omega \Big(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)} + a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)})|u_{i_m}|^{p_i(x)}\Big)\psi_{j,\varepsilon}\,dx + \int_\Omega \lambda F_{u_i}(x,u_m)u_{i_m}\psi_{j,\varepsilon}\,dx + o_m(1). \tag{3.13}$$

接下来，我们将证明

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\limsup_{m\to+\infty} M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_{i_m}))\int_\Omega a_i(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\,dx\right\} = 0. \tag{3.14}$$

注意，由于假设 (A_2)，只需证明

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\limsup_{m\to+\infty} M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_{i_m}))\int_\Omega |\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\,dx\right\} = 0. \tag{3.15}$$

and

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\limsup_{m\to+\infty} M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_{i_m}))\int_\Omega |\nabla u_{i_m}|^{q_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\,dx\right\} = 0. \tag{3.16}$$

首先，应用 H¨older 不等式，得到

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\,dx\right| \le 2\left\||\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-1}\right\|_{L^{\frac{p_i(x)}{p_i(x)-1}}(\Omega)}\left\|\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\right\|_{L^{p_i(x)}(\Omega)},$$

由于 $\{u_{i_m}\}$ 有界，实值数列 $\left\||\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-1}\right\|_{L^{\frac{p_i(x)}{p_i(x)-1}}(\Omega)}$ 也有界，因此存在正数 C_i 使得

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\,dx\right| \le C_i\left\|\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\right\|_{L^{p_i(x)}(\Omega)}.$$

此外，序列 $\{u_{i_m}\}$ 在 $W^{1,p_i(x)}(B(x_j,2\varepsilon))$ 中有界，因此存在一个子列（仍记为 $\{u_{i_m}\}$），弱收敛于 u_i 在 $L^{p_i(x)}(B(x_j,2\varepsilon))$ 中。因此，

$$\limsup_{m\to+\infty}\left|\int_\Omega |\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\,dx\right| \le C_i\left\|\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_i\right\|_{L^{p_i(x)}(\Omega)}$$
$$\le 2C_i\limsup_{\varepsilon\to0}\left\||\nabla\psi_{j,\varepsilon}|^{p_i(x)}\right\|_{L^{\left(\frac{p_i^*(x)}{p_i(x)}\right)'}(B(x_j,2\varepsilon))}\left\||u_i|^{p_i(x)}\right\|_{L^{\frac{p_i^*(x)}{p_i(x)}}(B(x_j,2\varepsilon))}$$
$$\le 2C_i\limsup_{\varepsilon\to0}\left\||\nabla\psi_{j,\varepsilon}|^{p_i(x)}\right\|_{L^{\frac{N}{p_i(x)}}(B(x_j,2\varepsilon))}\left\||u_i|^{p_i(x)}\right\|_{L^{\frac{N}{N-p_i(x)}}(B(x_j,2\varepsilon))}.$$

注意

$$\int_{B(x_j,2\varepsilon)}(|\nabla\psi_{j,\varepsilon}|^{p_i(x)})^{\frac{N}{p_i(x)}}dx = \int_{B(x_j,2\varepsilon)}|\nabla\psi_{j,\varepsilon}|^N dx \le \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^N \text{meas}(B(x_j,2\varepsilon)) = \frac{4^N}{N}\omega_N,$$

其中 ω_N 是N维单位球面的表面积。由于 $\int_{B(x_j,2\varepsilon)}(|u_i|^{p_i(x)})^{\frac{N}{N-p_i(x)}}dx \to 0$，当 $\varepsilon\to0$ 时，我们得到 $\left\|\nabla\psi_{j,\varepsilon}u^i\right\|_{L^{p_i(x)}(\Omega)}\to0$，这意味着

$$\lim_{\varepsilon\to0}\left\{\limsup_{n\to+\infty}\left|\int_\Omega |\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\,dx\right|\right\} = 0. \tag{3.17}$$

由于序列 $\{u_{i_m}\}$ 在 $W^{1,h_i(x)}(\Omega)\cap W^{1}pi(x)(\Omega)$ 中有界，我们可以假设，当 $m\to+\infty$时， $\mathscr{A}_i(u_{i_m})\to\xi_i\geq 0$。注意，$M_i(\xi_i)$ 是连续的，因此，当 $m\to+\infty.$ 时，我们有 $M_i\left(\mathscr{A}_i(u_{i_m})\right)\to M_i(\xi_i)\geq\mathfrak{M}_i^0>0$。因此，由关系 (3.17)，我们得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\limsup_{m\to+\infty}M_i\left(\mathscr{A}_i(u_{i_m})\right)\int_\Omega|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)-2}\nabla u_{i_m}\nabla\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\,dx\right\}=0. \tag{3.18}$$

类似地，我们可以验证关系（3.16）。因此，我们完成了关系（3.14）的证明。同样，我们还可以得到

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\lambda F_{u_i}(x,u_m)\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}dx=0,\ \text{as } m\to+\infty. \tag{3.19}$$

应用 H¨older 不等式、假设 (F_2) 以及 $0\leq\psi_{j,\varepsilon}\leq 1$ 这一事实，我们得到

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\lambda F_{u_i}(x,u_m)\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}dx&\leq\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda\int_\Omega\Big(\sum_{j=1}^n b_{i_j}(x)|u_jm|^{r_{i_j}-1}\Big)\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}dx\\&\leq\lim_{\varepsilon\to 0}c\int_\Omega\Big(\sum_{j=1}^n b_{i_j}(x)|u_j|^{r_{i_j}-1}\Big)|\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}|dx\\&\leq\lim_{\varepsilon\to 0}c_1\Big(\sum_{j=1}^n|b_{i_j}|_{\alpha_{i_j}(x)}\big||u_{jm}|^{r_{i_j}-1}\big\|_{L^{q_j^*(x)}(\Omega)}\big\|\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}\big\|_{L^{q_i^*(x)}(\Omega)}\Big).\end{aligned}$$

这得出

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\lambda F_{u_i}(x,u_m)\psi_{j,\varepsilon}u_{i_m}dx\leq\lim_{\varepsilon\to 0}c_1\Big(\sum_{j=1}^n\|b_{i_j}\|_{L^{\alpha_{i_j}(x)}(B(x_j,2\varepsilon))}\|u_{jm}\|^{r_{i_j}-1}_{L^{q_j(x)}(B(x_j,2\varepsilon))}\Big)\big\|u_{i_m}\big\|_{L^{q_i(x)}(B(x_j,2\varepsilon))},$$

并且右侧的最后一项趋于零，因为 $\sum_{j=1}^n\|b_{i_j}\|_{L^{\alpha_{i_j}}}(x)(B(xj2\varepsilon))\|u\,j\|^{r_{i_j}-1}Lqj(x)(B(xj2\varepsilon))<\infty.$ 因此，我们完成了关系 (3.19) 的证明。另一方面，我们有 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\psi_{j,\varepsilon}d\mu_{i_j}=\mu_{i_j}\psi(0)$ 和 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial\Omega}\psi_{j,\varepsilon}d\overline{\nu}_{i_j}=\overline{\nu}_{i_j}\psi(0)$，并且由于 $\mathscr{C}^1hi\cap\mathscr{C}^2hi=/0$，当 $\varepsilon>0$ 足够小时，我们有

$$\int_\Omega|u_{i_m}|^{p_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx\to\int_\Omega|u_i|^{p_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx,\ \int_\Omega|u_{i_m}|^{q_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx\to\int_\Omega|u_i|^{q_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx,\ \int_\Omega|u_{i_m}|^{s_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx\to\int_\Omega|u_i|^{s_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx,$$

因此，当 $\varepsilon\to 0$,

$$\int_\Omega|u_i|^{p_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx\to 0\,,\ \int_\Omega|u_i|^{q_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx\to 0,\ \int_\Omega|u_i|^{s_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx\to 0.$$

函数 $\psi_{j,\ \varepsilon}$ 具有紧支集，因此令 $m\to+\infty$ 且 $\varepsilon\to 0$ 在关系式（3.13）中，我们由关系式（3.14）–（3.19），得到

$$\begin{aligned}0&=-\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\limsup_{m\to+\infty}\left(M_{\theta_i}\left(\mathscr{A}_i(u_{i_m})\right)\int_\Omega\left(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)})|u_{i_m}|^{p_i(x)}\right)\psi_{j,\varepsilon}\,dx\right)\right]+\overline{\nu}_{i_j}\\&\leq-\mathfrak{M}_i^0\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\limsup_{m\to+\infty}\left(\int_\Omega\left(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)})|u_{i_m}|^{p_i(x)}\right)\psi_{j,\varepsilon}\,dx\right)\right]+\overline{\nu}_{i_j}\\&\leq-\mathfrak{M}_i^0\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\limsup_{m\to+\infty}\left(\int_\Omega\left(\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}\left(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}+|u_{i_m}|^{p_i(x)}\right)\right.\right.\right.\\&\quad\left.\left.\left.+\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\left(|\nabla u_{i_m}|^{q_i(x)}+|u_{i_m}|^{q_i(x)}\right)\right)\psi_{j,\varepsilon}\,dx\right)\right]+\overline{\nu}_{i_j}.\end{aligned} \tag{3.20}$$

注意，当 $k_i^3=0$ 时，有 $h_i(x)=p_i(x)$。因此，利用关系式（2.8），可得

$$\begin{aligned}0&\leq-\mathfrak{M}_i^0\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega\psi_{j,\varepsilon}\,d\mu_i+\overline{\nu}_{i_j}\\&\leq-\mathfrak{M}_i^0\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}\mu_{i_j}-\mathfrak{M}_i^0\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega|\nabla u_i|^{p_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}\,dx+\overline{\nu}_{i_j}.\end{aligned}$$

应用勒贝格控制收敛定理，我们得到 $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega|\nabla u_i|^{p_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx=0.$ 因此，

$$\mathfrak{M}_i^0\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}\mu_{i_j}\leq\overline{\nu}_{i_j}. \tag{3.21}$$

关于其他另一方面，如果 $k_i^3>0$，那么 $h_i(x)=q_i(x)$ 因此，由关系（2.10）和（3.20）可知 t

$$\begin{aligned}0&\le -\mathfrak{M}_i^0\lim_{\varepsilon\to0}\left[\limsup_{m\to0}\Big(\int_\Omega \mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}|\nabla u_{i_m}|^{q_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}\,dx\Big)\right]+\overline{\nu}_{i_j}\\&\le -\mathfrak{M}_i^0\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega\psi_{j,\varepsilon}\,d\mu_i+\overline{\nu}_{i_j}\\&\le -\mathfrak{M}_i^0\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\mu_{i_j}-\mathfrak{M}_i^0\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega|\nabla u_i|^{p_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}\,dx+\overline{\nu}_{i_j}.\end{aligned}$$

再次应用勒贝格控制收敛定理，我们得到 $\lim_{\varepsilon\to0}\int_\Omega|\nabla u_i|^{q_i(x)}\psi_{j,\varepsilon}dx=0$. 因此，

$$\mathfrak{M}_i^0\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\mu_{i_j}\le\overline{\nu}_{i_j}. \tag{3.22}$$

结合关系式（3.21）和（3.22），可得 $\mathfrak{M}_i^0\big((1-\mathscr{K}(k_i^3))\min\{k_{1_i}^0,\ k_{2_i}^0\}+\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,\ k_{2_i}^2\}\big)\mu_{i_j}\le\overline{\nu}_{i_j}$.利用关系式（2.10），得到

$$\overline{T}_{ix_j}\overline{\nu}_{ij}^{\frac{1}{h_i^*(x_j)}}\le\mu_{i_j}^{\frac{1}{h_i(x_j)}}\le\left(\frac{\overline{\nu}_{i_j}}{\mathfrak{M}_i^0\big((1-\mathscr{K}(k_i^3))\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}+\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\big)}\right)^{\frac{1}{h_i(x_j)}}.$$

这意味着 $\overline{\nu}_{i_j}=0$或 $\overline{\nu}_{i_j}\ge T_i^{N}{}_{xj}\left(\mathfrak{M}_i^0\big(\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}(1-\mathscr{K}(k_i^3)+\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\big)\right)^{N/h_i}{}_{(xj)}$，对所有 $j\in J_i^1$ 均成立。另一方面，利用假设 (M) 和 (F_3)，我们有

$$\begin{aligned}c_{\theta,\lambda}&=E_{\theta,\lambda}(u_m)-\langle E'_{\theta,\lambda}(u_m),\frac{u_m}{\gamma}\rangle\\&=\sum_{i=1}^n\widehat{M_{\theta_i}}(\mathscr{A}_i(u_{i_m}))-\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{1}{s_i(x)}|u_{i_m}|^{s_i(x)}dx-\sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\ell_i(x)}|u_{i_m}|^{\ell_i(x)}d\sigma_x-\int_\Omega\lambda F(x,u_m)\,dx\\&\quad-\sum_{i=1}^n M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_{i_m}))\int_\Omega\frac{1}{\gamma_i}\Big(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)})|u_{i_m}|^{p_i(x)}\Big)\,dx\\&\quad+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{1}{\gamma_i}|u_{i_m}|^{s_i(x)}\,dx+\sum_{i=1}^n\int_{\partial\Omega}\frac{1}{\gamma_i}|u_{i_m}|^{\ell_i(x)}\,d\sigma_x+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\lambda}{\gamma_i}F_{u_i}(x,u_m)u_{i_m}\,dx+o_m(1)\\&\ge\sum_{i=1}^n\frac{\theta_i\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}\int_\Omega\Big(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)})|u_{i_m}|^{p_i(x)}\Big)\,dx-\sum_{i=1}^n\frac{1}{s_i^-}\int_\Omega|u_{i_m}|^{s_i(x)}\,dx\\&\quad-\sum_{i=1}^n\frac{1}{\ell_i^-}\int_{\partial\Omega}|u_{i_m}|^{\ell_i(x)}\,d\sigma_x-\int_\Omega\lambda F(x,u_m)dx-\sum_{i=1}^n\frac{\mathfrak{M}_i^0}{\gamma_i}\int_\Omega\Big(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)})|u_{i_m}|^{p_i(x)}\Big)\,dx\\&\quad+\sum_{i=1}^n\frac{1}{\gamma_i}\int_\Omega|u_{i_m}|^{s_i(x)}\,dx+\sum_{i=1}^n\frac{1}{\gamma_i}\int_{\partial\Omega}|u_{i_m}|^{\ell_i(x)}\,dx+\sum_{i=1}^n\int_\Omega\frac{\lambda}{\gamma_i}F_{u_i}(x,u_m)u_{i_m}\,dx+o_m(1)\\&\ge\sum_{i=1}^n\mathfrak{M}_i^0\Big(\frac{\theta_i}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}-\frac{1}{\gamma_i}\Big)\int_\Omega\Big(a_{1_i}(|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i_m}|^{p_i(x)})|u_{i_m}|^{p_i(x)}\Big)\,dx\\&\quad+\sum_{i=1}^n\Big(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{s_i^-}\Big)\int_\Omega|u_{i_m}|^{s_i(x)}dx+\sum_{i=1}^n\Big(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{\ell_i^-}\Big)\int_{\partial\Omega}|u_{i_m}|^{\ell_i(x)}dx+\lambda\int_\Omega\left[\sum_{i=1}^n\frac{u_{i_m}}{\gamma_i}F_{u_i}(x,u_m)-F(x,u_m)\right]dx+o_m(1).\end{aligned}$$

因此，我们有 $c_{\theta,\lambda}\ge\sum_{i=1}^n\Big(\frac{1}{\gamma^i}-\frac{1}{\ell^-_i}\Big)\int_{\partial\Omega}|u_{i_m}|^{\ell_i(x)}d\sigma_x+o_m(1)$。令 $\mathscr{C}^1{}_{i\kappa}=\cup_{x\in\mathscr{C}^1{}_{hi}}(B_\kappa(x)\cap\Omega)=\{x\in\Omega:$ $\operatorname{dist}(x,\mathscr{C}^1{}_{hi})<\kappa\}$，当 $m\to+\infty$ 时，我们得到

$$\begin{aligned}c_{\theta,\lambda}&\ge\sum_{i=1}^n\Big(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{\ell^-_{i_{\mathscr{C}^1_{i\kappa}}}}\Big)\Big(\int_\Omega|u_i|^{\ell_i(x)}dx+\sum_{j\in J_i^1}\nu_{ij}\delta_{x_j}\Big)\\&\ge\sum_{i=1}^n\Big(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{\ell^-_{i_{\mathscr{C}^1_{i\kappa}}}}\Big)\Big(\int_\Omega|u_i|^{s_i(x)}dx+\inf_{j\in J_i^1}\Big\{\overline{T}_{ix_j}^N\Big(D_i\Big)^{N/h_i(x_j)}\Big\}\operatorname{Card}J_i^1\Big),\end{aligned}$$

其中 $D_i = \mathfrak{M}_i^0\big(\min\{k_{1_i}^0,\ k_{2_i}^0\}(1-\mathscr{K}(k_i^3)+\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,\ k_{2_i}^2\})\big)$。由于 $\kappa>0$ 是任意的，且对于所有 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$，ℓ_i都是连续函数，我们得到

$$c_{\theta,\lambda}\geq\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{\ell_{i_{\mathscr{C}_{h_i}^1}}^{-}}\Big)\Big(\int_\Omega|u_i|^{s_i(x)}dx+\inf_{j\in J_i^1}\Big\{\overline{T}_{i_{x_j}}^N\Big(D_i\Big)^{N/h_i(x_j)}\Big\}\mathrm{Card}\,J_i^1\Big).$$

假设 $\cup_{i=1}^n J_i^1\neq\emptyset$，则

$$c_{\theta,\lambda}\geq\min_{1\leq i\leq n}\left\{\Big(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{\ell_{i_{\mathscr{C}_{h_i}^1}}^{-}}\Big)\inf_{j\in J_i^1}\Big\{\overline{T}_{i_{x_j}}^N\Big(D_i\Big)^{N/h_i(x_j)}\Big\}\right\}.$$

因此，若 $c_{\theta,\lambda}<\min_{1\leq i\leq n}\left\{\Big(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{\ell_{i_{\mathscr{C}^1}}^{-}}\Big)\inf_{j\in J^1 i}\Big\{T_i^N xj\ \Big(D_i\Big)^{N/h_i}(xj)\Big\}\right\}$，则集合 $\cup_{i=1}^n J_i^1$ 为空，这意味着对所有 $1\leq i\leq n$ $\|u^{i_m}\|_{L^{\ell_i(x)}(\partial\Omega)}\to\|u^i\|_{L^{\ell_i(x)}(\partial\Omega)}$。由于 $u_m\rightharpoonup u$ 属于 X，我们有，对所有 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$，$u_{i_m}\to u_i$ 在 $L^{\ell_i}(x)(\partial\Omega)$ 中强收敛。接下来，考虑 $J_i^2\neq\emptyset$，采用与 J_i^1 情形相同的方法。我们得到

$$c_{\theta,\lambda}\geq\min_{1\leq i\leq n}\left\{\Big(\frac{1}{\gamma_i}-\frac{1}{s_{i_{\mathscr{C}_{h_i}^2}}^{-}}\Big)\inf_{j\in J_i^2}\Big\{S_i^N\Big(D_i\Big)^{N/h_i(x_j)}\Big\}\right\},$$

其中 $D_i = \mathfrak{M}_i^0\big(\min\{k_{1_i}^0,\ k_{2_i}^0\}(1-\mathscr{K}(k_i^3)+\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,\ k_{2_i}^2\})\big)$。因此，我们推得 $\cup_{i=1}^n J_i^2=\emptyset$，这意味着对于所有 $1\leq i\leq n$ $\|u^{i_m}\|_{L^{s_i(x)}(\Omega)}\to\|u^i\|_{L^{s_i(x)}(\Omega)}$。由于 $u_m\rightharpoonup u$ 属于 X，我们有 $u_{i_m}\to u_i$ 在 $L^{s_i(x)}(\Omega)$ 中强收敛，对所有 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ 均成立。另一方面，我们有

$$\begin{aligned}
&E'_{\theta,\lambda}(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})-\Big\langle E'_{\theta,\lambda}(u_{1_k},\ldots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\ldots,0)\Big\rangle\\
&\quad=\big\langle\Phi'_\theta(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})-\Phi'_\theta(u_{1_k},\ldots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\ldots,0)\big\rangle\\
&\quad\quad-\big\langle\Psi'(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})-\Psi'(u_{1_k},\ldots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\ldots,0)\big\rangle\\
&\quad\quad-\big\langle\Upsilon'(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})-\Upsilon'(u_{1_k},\ldots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\ldots,0)\big\rangle\\
&\quad\quad-\big\langle\mathscr{F}'_\lambda(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})-\mathscr{F}'_\lambda(u_{1_k},\ldots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\ldots,0)\big\rangle,
\end{aligned}$$

于是 $E'_{\theta,\lambda}(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})\to 0$，即 $E'_{\theta,\lambda}(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})$ 是 X^*中的柯西序列。此外，再次利用 H¨ Hölder 不等式，我们得到

$$\begin{aligned}
\big\langle\Psi'(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})-\Psi'(u_{1_k},\ldots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\ldots,0)\big\rangle&=\int_\Omega\Big(|u_{1_m}|^{s_1(x)-2}u_{1_m}-|u_{1_k}|^{s_1(x)-2}u_{1_k}\Big)(u_{1_m}-u_{1_k})dx\\
&\leq\Big\||u_{1_m}|^{s_1(x)-2}u_{1_m}-|u_{1_k}|^{s_1(x)-2}u_{1_k}\Big\|_{L^{s_1'(x)}(\Omega)}\Big\|u_{1_m}-u_{1_k}\Big\|_{L^{s_1(x)}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

同样，我们还有

$$\begin{aligned}
\big\langle\Upsilon'(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})-\Upsilon'(u_{1_k},\ldots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\ldots,0)\big\rangle&=\int_{\partial\Omega}\Big(|u_{1_m}|^{\ell_1(x)-2}u_{1_m}-|u_{1_k}|^{\ell_1(x)-2}u_{1_k}\Big)(u_{1_m}-u_{1_k})d\sigma_x\\
&\leq\Big\||u_{1_m}|^{\ell_1(x)-2}u_{1_m}-|u_{1_k}|^{\ell_1(x)-2}u_{1_k}\Big\|_{L^{\ell_1'(x)}(\partial\Omega)}\Big\|u_{1_m}-u_{1_k}\Big\|_{L^{\ell_1(x)}(\partial\Omega)}.
\end{aligned}$$

由于 $\{u_{1_m}\}$ 是 $L^{s_1}(x)(\Omega)$ 和 $L^{\ell_1}(x)(\partial\Omega)$ 中的柯西序列，因此 $\Psi'(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})$ 和 $\Upsilon'(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})$ 是 X^* 中的柯西序列。此外，由于 $\mathscr{F}'_\lambda$ 的紧性，我们有 $(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})\rightharpoonup(u1,\ldots,u_n)\Rightarrow\mathscr{F}'_\lambda(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})\to\mathscr{F}'_\lambda(u1,\ldots,u_n)$，这意味着 $\mathscr{F}'_\lambda(u_{1_m},\ldots,u_{n_m})$ 也是 X^* 中的柯西序列。因此，运用一些初等不等式（例如参见 Hurtado 等人的 [32, 辅助结果]），我们得出，对于所有 $\rho,\zeta\in\mathbb{R}^N$,

$$\begin{cases}
|\rho-\zeta|^{p_i(x)}\leq c_{p_i}\Big(\mathscr{B}_{j_i}(\rho)-\mathscr{B}_{j_i}(\zeta)\Big)\cdot(\rho-\zeta) & \text{if } p_i(x)\geq 2\\
|\rho-\zeta|^2\leq c(|\rho|+|\zeta|)^{2-p_i(x)}\Big(\mathscr{B}_{j_i}(\rho)-\mathscr{B}_{j_i}(\zeta)\Big)\cdot(\rho-\zeta) & \text{if } 1<p_i(x)<2
\end{cases}\tag{3.23}$$

其中，$\cdot$ 表示 $\mathbb{R}^N$中的标准内积。定义依赖于 p_i 的 Ω 的子集 $U_{p_i}:=\{x\in\Omega:\ p(x)\geq 2\}$ 和 $V_{p_i}:=\{x\in\Omega:\ 1<p(x)<2\}$. 对于 $i=1$，分别将ρ 和 ζ 替换为 $\nabla u^1{}_m$ 和 $\nabla u^1{}_k$，当

$j=1$ 以及 u^{1}_{m} 和 u^{1}_{k}，分别，当 $j=2$ 在关系（3.23）的第一行中，并在 Ω上积分，得到

$$c_1\int_{U_{p_i}}\left(|\nabla u_{1_m}-\nabla u_{1_k}|^{p_1(x)}+|u_{1_m}-u_{1_k}|^{p_1(x)}\right)dx\le\left\langle\Phi'_\theta(u_{1_m},\dots,u_{n_m})-\Phi'_\theta(u_{1_k},\dots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\dots,0)\right\rangle.$$

另一方面，根据关系式（3.23）的第二行，我们有

$$c_2\int_{V_{p_i}}\left(\sigma_1(x)^{p_1(x)-2}|\nabla u_{1_m}-\nabla u_{1_k}|^2+\sigma_2(x)^{p_1(x)-2}|u_{1_m}-u_{1_k}|^2\right)dx \le\left\langle\Phi'_\theta(u_{1_m},\dots,u_{n_m})-\Phi'_\theta(u_{1_k},\dots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\dots,0)\right\rangle,$$

其中 $\sigma_1(x)=(|\nabla u_{1_m}|+|\nabla u_{1_k}|)$ 以及 $\sigma_2(x)=(|u_{1_m}|+|u_{1_k}|)$。因此，根据 H¨older 不等式和引理 2。 2，

$$\begin{aligned}
&\int_{V_{p_i}}\left(|\nabla u_{1_m}-\nabla u_{1_k}|^{p_1(x)}+|u_{1_m}-u_{1_k}|^{p_1(x)}\right)dx\\
&=\int_{V_{p_i}}\sigma_1^{\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}}\left(\sigma_1^{\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}}|\nabla u_{1_m}-\nabla u_{1_k}|^{p_1(x)}\right)dx+\int_{V_{p_i}}\sigma_1^{\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}}\left(\sigma_1^{\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}}|u_{1_m}-u_{1_k}|^{p_1(x)}\right)dx\\
&\le C_3\left\|\sigma_1^{\frac{p_1(x)(2-p_1(x))}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{2-p_1(x)}}(V_{p_i})}\left\|\sigma_1^{\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}}|\nabla u_{1_m}-\nabla u_{1_k}|^{p_1(x)}\right\|_{L^{\frac{2}{p_1(x)}}(V_{p_i})}\\
&\quad+C_4\left\|\sigma_2^{\frac{p_1(x)(2-p_1(x))}{2}}\right\|_{L^{\frac{2}{2-p_1(x)}}(V_{p_i})}\left\|\sigma_2^{\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}}|u_{1_m}-u_{1_k}|^{p_1(x)}\right\|_{L^{\frac{2}{p_1(x)}}(V_{p_i})}\\
&\le C_5\max\left\{\|\sigma_1\|^{\left(\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}\right)^-}_{L^{p_1(x)}(V_{p_i})},\|\sigma_1\|^{\left(\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}\right)^+}_{L^{p_1(x)}(V_{p_i})}\right\}\\
&\quad\times\max\left\{\left(\int_{V_{p_i}}\sigma_1^{p_1(x)-2}|\nabla u_{1_m}-\nabla u_{1_k}|^2dx\right)^{\frac{p_1^-}{2}},\left(\int_{V_{p_i}}\sigma_1^{p_1(x)-2}|\nabla u_{1_m}-\nabla u_{1_k}|^2dx\right)^{\frac{p_1^+}{2}}\right\}\\
&\quad+C_6\max\left\{\|\sigma_2\|^{[\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}]^-}_{L^{p_1(x)}(V_{p_i})},\|\sigma_2\|^{[\frac{p_1(x)(p_1(x)-2)}{2}]^+}_{L^{p_1(x)}(V_{p_i})}\right\}\\
&\quad\times\max\left\{\left(\int_{V_{p_i}}\sigma_1^{p_1(x)-2}|u_{1_m}-u_{1_k}|^2dx\right)^{\frac{p_1^-}{2}},\left(\int_{V_{p_i}}\sigma_1^{p_1(x)-2}|u_{1_m}-u_{1_k}|^2dx\right)^{\frac{p_1^+}{2}}\right\}.
\end{aligned}$$

由于 $\{u_{1_m}\}$ 是 $W^{1,h_1(x)}(\Omega)\cap W^{1,p_1(x)}$ 中的有界序列，我们有

$$\left\langle\Phi'_\theta(u_{1_m},\dots,u_{n_m})-\Phi'_\theta(u_{1_k},\dots,u_{n_k}),(u_{1_m}-u_{1_k},0,\dots,0)\right\rangle\to0,\ \text{as}\ m,k\to+\infty,$$

因此 $\{u_{1_m}\}$ 是 $W^{1,p_1(x)}\cap W^{1,h_1(x)}(\Omega)$ 中的柯西序列。对于 $\{u_{i_m}\}$，我们可以类似地论证，

$$\left\langle\Phi'_\theta(u_{1_m},\dots,u_{i_m},\dots,u_{n_m})-\Phi'_\theta(u_{1_k},\dots,u_{i_k},\dots,u_{n_k}),(0,\dots,u_{i_m}-u_{i_k},0,\dots,0)\right\rangle,\ \text{for all}\ i\in\{2,\dots,n\}.$$

因此，我们可以得出结论：当 $m\to+\infty$ 时，$u_m=(u_{1_m},\dots,u_{n_m})\to u=(u_1,\dots,u_n)$ 在 X 中强收敛。因此，我们有 $E_{\theta,\lambda}(u)=c_\theta$，$\lambda>0$ 且 $E'_{\theta,\lambda}(u)=0$ 在 X' 中，即 $u\in X$ 是问题（3.1）的弱解。由于 $E_{\theta,\lambda}(u)=c_\theta$，$\lambda>0=E_{\theta,\lambda}(0)$，我们可以得出结论 $u\neq0$。□

4. 主要定理的证明

现在我们可以证明定理1.2。

证明。应用 T 定理3.1，对所有 $\lambda\ge\lambda_*$ 令 $u_\lambda=(u_1,\lambda,u_2,\lambda,\dots,u_n,\lambda)$ 为系统（3.1）的一个解。我们将 1 证明

$$\text{there exists}\ \lambda^*\ge\lambda_*\ \text{such that}\ \mathscr{A}_i(u_{i,\lambda})\le\tau_i^0,\ \text{for all}\ \lambda\ge\lambda^*,\tag{4.1}$$

其中 τ_i^0 的定义见第3节开头。我们用反证法，假设存在一个序列$\{\lambda_m\}_{m\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{R}$，使得对所有 $i\in\{1,2,\dots,n\}$，均有 $\mathscr{A}_i(u_{i,\lambda_m})\ge\tau_i^0$。根据假设 (A_1) 以及 $\mathscr{A}_i(u_{i,\lambda_m})\ge\tau_i^0$ 这一事实，我们得到

$$\int_\Omega\left(\max\{k_{1_i}^1,k_{2_i}^1\}\left(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}+|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}\right)+k_i^3\left(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{q_i(x)}+|u_{i,\lambda_m}|^{q_i(x)}\right)\right)dx\ge\tau_i^0\ \text{for all}\ i=1,2,\dots,n.\tag{4.2}$$

由于 $u_{\lambda_m}=(u_{1,\lambda_m},\dots,u_{n,\lambda_m})$ 是泛函 E_{θ,λ_m} 的临界点，我们可以利用假设 (M) 和 (F_3) 得出

$$\begin{aligned}
c_{\theta,\lambda_m} &= E_{\theta,\lambda}(u_{\lambda_m})-\left\langle E'_{\theta,\lambda}(u_{\lambda_m}),\frac{u_{\lambda_m}}{\gamma}\right\rangle\\
&\geq \sum_{i=1}^{n}\widehat{M_{\theta_i}}\left(\mathscr{A}_i(u_{i,\lambda_m})\right)-\sum_{i=1}^{n}M_i\left(\mathscr{A}_i(u_{i,\lambda_m})\right)\int_\Omega\frac{1}{\gamma_i}\left(a_{1_i}(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)})|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}\right)dx\\
&\geq \sum_{i=1}^{n}\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}\int_\Omega\left(a_{1_i}(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)})|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}\right)dx\\
&\quad-\sum_{i=1}^{n}\frac{\theta_i}{\gamma_i}\int_\Omega\left(a_{1_i}(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)})|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}\right)dx\\
&\geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}-\frac{\theta_i}{\gamma_i}\right)\int_\Omega\left(a_{1_i}(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)})|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}+a_{2_i}(|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)})|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}\right)dx\\
&\geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}-\frac{\theta_i}{\gamma_i}\right)\left[\int_\Omega\max\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}\left(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}+|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}\right)dx\right.\\
&\quad\left.+\mathscr{K}(k_i^3)\max\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\int_\Omega\left(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{q_i(x)}+|u_{i,\lambda_m}|^{q_i(x)}\right)dx\right].
\end{aligned}$$

若 $k_i^3=0$，则利用关系式（4.2），可得 $\int_\Omega\left(|\nabla u_i|^{p_i(x)}+|u_i|^{p_i(x)}\right)dx\geq \tau_i^0\max\{k_{1_i}^1,k_{2_i}^1\}$, (4.3)

因此我们有

$$c_{\theta,\lambda}\geq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}-\frac{\theta_i}{\gamma_i}\right)\left(\frac{\max\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}}{\max\{k_{1_i}^1,k_{2_i}^1\}}\right)\tau_i^0>0.$$

这与引理 3.4矛盾，因为 $\lim_{m\to+\infty}c_{\theta,\lambda_m}=0$。另一方面，若 $k_i^3>0$，我们将关系式（4.3）乘以 $\max_{1\leq i\leq n}\{\max\{k_{1_i}^1,k_{2_i}^1\}\times k_i^3\}>0$，并利用关系式（4.2），可得

$$\begin{aligned}
\max_{1\leq i\leq n}\{\max\{k_{1_i}^1,k_{2_i}^1\}\times k_i^3\}C_{\theta,\lambda}&\geq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}-\frac{\theta_i}{\gamma_i}\right)\kappa_i\int_\Omega\left(\max\{k_{1_i}^1,k_{2_i}^1\}\left(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}+|u_{i,\lambda_m}|^{p_i(x)}\right)\right.\\
&\quad\left.+k_i^3\left(|\nabla u_{i,\lambda_m}|^{q_i(x)}+|u_{i,\lambda_m}|^{q_i(x)}\right)\right)dx\\
&\geq\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}-\frac{\theta_i}{\gamma_i}\right)\kappa_i\tau_i^0,
\end{aligned}$$

其中 $\kappa_i=\min\left\{\max\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}\times k_i^3,\ \max\{k_{1_i}^1,k_{2_i}^1\}\times\max\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\right\}$。这也与引理3.4相矛盾，因为 $\lim_{m\to+\infty}c_{\theta,\lambda_m}=0$。因此，我们可以得出，在这两种情况下，对于所有$\lambda\geq\lambda^*$，均存在 $\lambda^*\geq\lambda_*$，使得 $\mathscr{A}_i(u_i,\lambda)\geq\tau_i^0$。所以，对于所有 $\lambda\geq\lambda^*$，我们可以找到 $M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_\lambda))=M_{\theta_i}(\mathscr{A}_i(u_\lambda))$，这意味着 $E_{\theta,\lambda}(u_\lambda)=E_\lambda(u_\lambda)$ 且 $E'_{\theta,\lambda}(u_\lambda)=E'_\lambda(u_\lambda)$，也就是说，对于每个 $\lambda\geq\lambda^*$，u_λ 是问题（1.1）的非平凡弱解。现在还需要考察问题（1.1）的解的渐近行为。根据假设 (A_2)、(A_4)、(M)，

(F_3)，以及不等式（2.2）-（2.3）和（3.2），按照上述论证，我们得到

$$\begin{aligned} c_\lambda &= c_{\theta,\lambda} \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}-\frac{\theta_i}{\gamma_i}\right)\Bigg(\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}\int_\Omega\left(|\nabla u_{i,\lambda}|^{p_i(x)}+|u_{i,\lambda}|^{p_i(x)}\right)dx \\ &\quad +\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\int_\Omega\left(|\nabla u_{i,\lambda}|^{q_i(x)}+|u_{i,\lambda}|^{q_i(x)}\right)dx\Bigg) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathfrak{M}_i^0}{p_i^+\max\{\beta_{1_i},\beta_{2_i}\}}-\frac{\theta_i}{\gamma_i}\right)\Bigg[\min\{k_{1_i}^0,k_{2_i}^0\}\min\left\{\|u_{i,\lambda}\|_{1,p_i(x)}^{p_i^-},\|u_{i,\lambda}\|_{p_i(x)}^{p_i^+}\right\} \\ &\quad +\mathscr{K}(k_i^3)\min\{k_{1_i}^2,k_{2_i}^2\}\min\left\{\|u_{i,\lambda}\|_{1,q_i(x)}^{q_i^-},\|u_{i,\lambda}\|_{1,q_i(x)}^{q_i^+}\right\}\Bigg]. \end{aligned}$$

因此，由引理 3.4，我们得到 $\lim_{\lambda\to+\infty}\|u_\lambda\|=\lim\lambda\to+\infty\max_{1\leq i\leq n}\left\{\|ui\|_{1,pi}(x)+\mathscr{K}(k_i^3)\|ui\|_{1,qi}(x)\right\}=0.$

□

5. Some examples

在最后一节中，我们将给出一些从数学角度来看颇为有趣的例子。这些例子在物理学及其他科学领域有着广泛的应用，且在对函数 a^{ij}作出适当假设的条件下，属于本文研究的一般系统类别。

例5.1。取 $a_{1_i}\equiv 1$ 和 $a_{2_i}\equiv 1$，可知 a^{1i} 满足假设 (A_1)、(A_2) 和 (A_3)，其中 $k_{j_i}^0=k_{j_i}^1=1$、$k_{j_i}^2>0$ 和 $k_i^3=0$，对所有 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ 以及 $j=1$ 或 2 均成立。因此，系统 (1.1) 变为

$$\begin{aligned} -M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\Big(\Delta_{p_i(x)}u_i-|u_i|^{p_i(x)-2}u_i\Big)&=|u_i|^{s_i(x)-2}u_i+\lambda F_{u_i}(x,u) \quad \text{in } \Omega,\\ M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)|\nabla u_i|^{p(x)-2}\nabla u_i.\mathfrak{N}_i&=|u_i|^{\ell_i(x)-2}u_i \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.1}$$

对于 $1\leq i\leq n(n\in\mathbb{N}^*)$，其中

$$\mathscr{A}_i(u_i)=\int_\Omega\frac{1}{p_i(x)}\left(|\nabla u_i|^{p_i(x)}+|u_i|^{p_i(x)}\right)dx.$$

算子 $\Delta_{p_i(x)}u_i:=\operatorname{div}(|\nabla u_i|^{p_i(x)-2}\nabla u_i)$ 称为 $p_i(x)$-拉普拉斯算子；当 $p_i(x)=p_i$ 时，它与通常的 p_i-拉普拉斯算子一致；当 $p_i(x)=2$ 时，它与拉普拉斯算子一致。

qi(x)–pi(x) 例5.2. 取一个 ji(ξ)~~= 1 +~~ξ pi(x)，我们看到 a ji 满足假设 (A_1)、(A_2) 和 (A_3)，其中 k $^0_{j_i}=k_{j_i}^1=k_{j_i}^2=k_i^3=1$，对所有 $i\in\{1,2,\ldots,n\}$ 以及 $j=1$ 或 2 均成立。因此，系统 (1.1) 成为以下 p-q 拉普拉斯系统

$$\begin{aligned} -M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\Big(\Delta_{p_i(x)}u_i+\Delta_{q_i(x)}u_i-\left(|u_i|^{p_i(x)-2}u_i+|u_i|^{q_i(x)-2}u_i\right)\Big)&=|u_i|^{s_i(x)-2}u_i+\lambda F_{u_i}(x,u) \quad \text{in } \Omega,\\ M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\left(|\nabla u_i|^{p_i(x)-2}\nabla u_i+|\nabla u_i|^{q_i(x)-2}\nabla u_i\right).\mathfrak{N}_i&=|u_i|^{\ell_i(x)-2}u_i \qquad \text{on } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.2}$$

对于 $1\leq i\leq n(n\in\mathbb{N}^*)$，其中

$$\mathscr{A}_i(u_i)=\int_\Omega\left(\frac{1}{p_i(x)}\left(|\nabla u_i|^{p_i(x)}+w_i(x)|u_i|^{p_i(x)}\right)+\frac{1}{q_i(x)}\left(|\nabla u_i|^{q_i(x)}+|u_i|^{q_i(x)}\right)\right)dx.$$

正如 Cherfils 和 Il'yasov 所述，[16], 对系统（5.2）的研究源于以下更一般的反应-扩散系统

$$u_t=\operatorname{div}[H(u)\nabla u]+d(x,u),\ \text{where}\ H(u)=|\nabla u|^{p(x)-2}+|\nabla u|^{q(x)-2},$$

该系统在生物物理学领域有应用（例如，参见 Fife [25], Murray [40]），在等离子体物理学领域也有应用（例如，参见 Wilhelmsson[49]），还应用于化学反应设计（例如，参见 Aris [4]）。在这些应用中，u 表示浓度，$\operatorname{div}[H(u)\nabla u]$ 表示扩散，其扩散系数为，而反应项 $d(x,u)$ 与源汇过程有关。有关更多详情，感兴趣的读者可参阅 Mahshid 和 Razani [38], He 和 Li [30], 及其中的参考文献。

我们接着讨论其他例子，这些例子从数学角度来看也很有趣。

例 5.3。取一个 ji(ξ) $=1+\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$和 $a_{2_i}\equiv 1$，我们看到 a ji 满足假设 (A_1)、(A_2) 和 (A_3)，其中 $k^0_{1_i}=k^0_{2_i}=k^1_{2_i}=1$、$k^1_{1_i}=2$ 和 $k^3_i=0$、$k^2_{1_i}>0$ 及 $k^2_{2_i}>0$，对所有 $i\in\{1,2,\dots,n\}$ 均成立。因此，系统 (1.1) 变为

$$\begin{aligned}
&-M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\left(\operatorname{div}\left(\left(1+\frac{|\nabla u_i|^{p_i(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i(x)}}}\right)|\nabla u_i|^{p_i(x)-2}\nabla u_i\right)-w_i(x)|u_i|^{p_i(x)-2}u_i\right)=|u_i|^{s_i(x)-2}u_i+\lambda F_{u_i}(x,u)\ \text{in }\Omega,\\
&M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\left(1+\frac{|\nabla u_i|^{p_i(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i(x)}}}\right)|\nabla u_i|^{p_i(x)-2}\nabla u_i.\mathfrak{N}_i=|u_i|^{\ell_i(x)-2}u_i\qquad\text{on }\partial\Omega,
\end{aligned}\tag{5.3}$$

对于 $1\le i\le n(n\in\mathbb{N}^*)$，其中

$$\mathscr{A}_i(u_i)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p_i(x)}\left(|\nabla u_i|^{p_i(x)}+\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i(x)}}+|u_i|^{p_i(x)}\right)dx.$$

算子 $\operatorname{div}\left(\left(1+\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p(x)}}}\right)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$ 被称为 $p_i(x)$-拉普拉斯型算子，或称为广义毛细算子。毛细作用可以通过考察两种相互对抗的力的影响来简要解释：附着力，即液体分子与容器分子之间的吸引力（或排斥力）；以及内聚力，即液体分子之间的吸引力。毛细现象的研究已受到广泛关注。这种日益增长的兴趣不仅源于对自然发生现象的迷恋，例如液滴、气泡和波的运动，也源于其在应用领域中的重要性，涉及工业、生物医学、制药以及微流体系统等领域——有关更多细节，感兴趣的读者可参阅 Ni 和 Serrin [41], 及其中的参考文献。

例 5.4。取 $a^1{}_i(\xi)=1+{}^{1}\,\mathrm{pi}(x)_{-2}$和 $a_{2_i}\equiv 1$，我们看到 a ji 满足假设 (A_1)、(A_2)、$(1+\xi)$ pi(x) 和 (A_3)，其中 $k^0_{1_i}=k^0_{2_i}=k^1_{2_i}=1$、$k^1_{1_i}=2$、$k^3_i=0$、$k^2_{1_i}>0$ 和 $k^2_{2_i}>0$，对所有 $i\in\{1,2,\dots,n\}$ 均成立。因此，系统 (1.1) 变为

$$\begin{aligned}
&-M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\left(\operatorname{div}\left(|\nabla u_i|^{p(x)-2}\nabla u_i+\frac{|\nabla u_i|^{p(x)-2}\nabla u_i}{\left(1+|\nabla u_i|^{p(x)}\right)^{\frac{p(x)-2}{p(x)}}}\right)-|u_i|^{p_i(x)-2}u_i\right)=|u_i|^{s_i(x)-2}u_i+\lambda F_{u_i}(x,u)\quad\text{in }\Omega,\\
&M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\left(|\nabla u_i|^{p(x)-2}\nabla u_i+\frac{|\nabla u_i|^{p(x)-2}\nabla u_i}{\left(1+|\nabla u_i|^{p(x)}\right)^{\frac{p(x)-2}{p(x)}}}\right).\mathfrak{N}_i=|u_i|^{\ell_i(x)-2}u_i\qquad\text{on }\partial\Omega,
\end{aligned}\tag{5.4}$$

对于 $1\le i\le n(n\in\mathbb{N}^*)$，其中

$$\mathscr{A}_i(u_i)=\int_{\mathbb{R}^N}\frac{1}{p_i(x)}\left(|\nabla u_i|^{p_i(x)}+\sqrt{1+|\nabla u_i|^{2p_i(x)}}+|u_i|^{p_i(x)}\right)dx.$$

例 5.5。取 $a^1{}_i(\xi)=1+\xi^{\frac{q_i(x)-p_i(x)}{}}\,\mathrm{pi}(x)_{+}\ {}^{1}\,\mathrm{pi}(x)_{-2}$和 $a^2{}_i(\xi)=1+\xi^{\frac{q_i(x)-p_i(x)}{}}\,\mathrm{pi}(x)$，我们看到 $a^1{}_i$ 满足 $(1+\xi)$ pi(x) 假设 (A_1)、(A_2)、(A_3) 和 (H_3)，其中 $k^0_{1_i}=k^0_{2_i}=k^1_{2_i}=1$、$k^1_{1_i}=2$ 和 $k^3_i=k^2_{1_i}=k^2_{2_i}=1$，对所有 $i\in\{1,2,\dots,n\}$ 均成立。因此，系统 (1.1) 变为

$$\begin{aligned}
&-M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\left(\Delta_{p_i(x)}u_i+\Delta_{q_i(x)}u_i+\operatorname{div}\left(\frac{|\nabla u_i|^{p_i(x)-2}\nabla u_i}{\left(1+|\nabla u_i|^{p_i(x)}\right)^{\frac{p_i(x)-2}{p_i(x)}}}\right)-\left(|u_i|^{p_i(x)-2}u_i+|u_i|^{q_i(x)-2}u_i\right)\right)\\
&\qquad=|u_i|^{s_i(x)-2}u_i+\lambda F_{u_i}(x,u)\ \text{in }\Omega,\\
&M_i\Big(\mathscr{A}_i(u_i)\Big)\left(|\nabla u_i|^{p_i(x)-2}\nabla u_i+\frac{|\nabla u_i|^{p(x)-2}\nabla u_i}{\left(1+|\nabla u_i|^{p(x)}\right)^{\frac{p(x)-2}{p(x)}}}+|\nabla u_i|^{q_i(x)-2}\nabla u_i\right).\mathfrak{N}_i=|u_i|^{\ell_i(x)-2}u_i\qquad\text{on }\partial\Omega,
\end{aligned}\tag{5.5}$$

其中 $1\le i\le n(n\in\mathbb{N}^*)$，其中

$$\mathscr{A}_i(u_i)=\int_\Omega\left(\frac{1}{p_i(x)}\left(|\nabla u_i|^{p_i(x)}+w_i(x)|u_i|^{p_i(x)}\right)+\frac{1}{q_i(x)}\left(|\nabla u_i|^{q_i(x)}+w_i(x)|u_i|^{q_i(x)}\right)+\frac{1}{2}(1+|\nabla u_i|^{p_i(x)})^{\frac{2}{p_i(x)}}\right)dx.$$

另一方面，系统（1.1）可以包含上述散度算子的一种模型，如例 5.1–5.5所示；也可以根据所研究的现象，同时包含多种不同的散度算子模型。此外，这一类中的每个方程也可以是退化的或非退化的。

致谢。第二作者感谢斯洛文尼亚研究局资助项目 P1-0292、J1-4031、J1-4001、N1-0278、N1-0114 和 N1-0083 提供的资助。作者感谢审稿人提出的建议和意见。

参考文献

[1] C.O. Alves, J.P. Barreiro；具有临界增长的 p(x)-拉普拉斯方程解的存在性与多重性，《数学分析及其应用杂志》403 (2013)，143-154。[2] C.O. Alves, M.C. Ferreira； $\mathbb{R}^N$中涉及具有临界增长的凹凸型非线性项的一类 p(x)-拉普拉斯方程解的存在性，《非线性分析中的拓扑方法》45(2) (2015)，399-422。[3] V. Ambrosio, T. Isernia, V.D. R˘adulescu；一类分数阶 p-Kirchhoff 型方程正解的集中。《爱丁堡皇家学会会刊 A 辑》151 (2021)，第2期，601-651。[4] R. Aris；数学建模技术。《数学研究札记》24。Pitman（高级出版项目），波士顿、伦敦，1979。[5] A. Arosio, S. Pannizi；关于 Kirchhoff 弦的适定性，《美国数学会汇刊》348 (1996)，305-330。[6] J.F. Bonder, A. Silva；变指数空间的集中紧性原理及其应用，《电子微分方程杂志》141 (2010)，1-18。[7] J.F. Bonder, N. Saintier, A. Silva；临界范围内变指数空间的 Sobolev 迹定理，《纯粹与应用数学年刊》(4) 193 (2014)，第6期，1607-1628。[8] H. Brezis, L. Nirenberg；涉及临界 Sobolev 指数的非线性椭圆方程的正解，《纯粹与应用数学通讯》36 (1983)，437-477。[9] G. Caristi, S. Heidarkhani, A. Salari, S.A. Tersian；退化非局部问题的多重解，《应用数学快报》84 (2018)，26-33。[10] M.M. Cavalcanti, V.N. Cavacanti, J.A. Soriano；具有非线性耗散的 Kirchhoff-Carrier 方程的整体存在性与一致衰减率，《微分方程进展》6 (2001)，701-730。[11] N. Chems Eddine；具有变临界增长指数的 Kirchhoff 型位势系统解的存在性与多重性，《应用分析》(2021 10 1080 00036811 2021 1979223)。 https://doi.org/ . / . . N. Chems Eddine；临界 $(p_1(x), \dots, p_n(x))$-Kirchhoff 型位势系统解的存在性，《应用分析》101 (2022)，2239-2253。[13] N. Chems Eddine, A.A. Idrissi；无界区域中 $(p_1(x) \dots , p_n(x))$-拉普拉斯型系统的多重解，《阿塞拜疆数学杂志》10 (2020)，第1期，3-20。[14] N. Chems Eddine, M.A. Ragusa；具有诺伊曼边界条件的广义临界 Kirchhoff 型位势系统，《应用分析》101 (2022)，3958-3988。[15] Y.M. Chen, S. Levine, M. Rao；图像复原中的变指数线性增长泛函，《工业与应用数学学会应用数学杂志》66 (2006)，1383-1406。[16] L. Cherfils, Y. Il'yasov；具有 p&q-拉普拉斯算子的广义反应扩散方程的定常解，《纯粹与应用分析通讯》4 (2005)，第1期，9-22。[17] M. Chipot, B. Lovat；关于非局部椭圆与抛物问题的若干评注，《非线性分析：理论、方法与应用》30 (1997)，第7期，4619-4627。[18] F.J.S.A. Corrˆea, R.G. Nascimento；关于具有诺伊曼边界条件的非局部 p-Kirchhoff 型椭圆系统，《数学与计算机建模》(2008)，doi:10.1016/j.mcm.2008.03.013。[19] G. Dai, R. Hao；p(x)-Kirchhoff 型方程解的存在性，《数学分析及其应用杂志》359 (2009)，704–710。[20] L. Diening；电流变流体的理论与数值结果，博士学位论文，弗赖堡大学，德国 (2002)。[21] L. Diening, P. Harjulehto, P. H¨ast¨o, M. Ru˘zi˘vcka；变指数 Lebesgue 空间与 Sobolev 空间，《数学讲义》2017，施普林格出版社，海德堡，2011。[22] D.E. Edmunds, J. Rakosnik；变指数 Sobolev 嵌入，《数学研究》143 (2000)，267-293。[23] X. Fan, D. Zhao；关于空间 $L^{p(x)}(\Omega)$ 和 $W^{m,p(x)}(\Omega)$，《数学分析及其应用杂志》263 (2001)，424-446。[24] Y. Fang, J. Zhang；具有临界 Sobolev 指数的一类椭圆系统解的多重性，《非线性分析：理论、方法与应用》73 (2010)，第9期，2767-2778。[25] P.C. Fife；反应扩散系统的数学方面。《生物数学讲义》28。施普林格出版社，柏林-纽约，1979。[26] Y.Q. Fu；$L^{p(x)}$ 空间中的集中紧性原理及其应用，《非线性分析》71 (2009)，1876-1892。[27] Y.Q. Fu, X. Zhang；涉及临界指数的 R^n 中一类 p(x)-拉普拉斯方程的多重解，《伦敦皇家学会会刊 A 辑》466 (2010)，1667-1686。[28] T.C. Halsey；电流变流体，《科学》258 (1992)，761-766。[29] P. Harjulehto, P. H¨ast¨o, M. Koskenoja, S. Varonen；Dirichlet 能量积分与具有零边界值的变指数 Sobolev 空间，《位势分析》25 (2006)，第3期，205-222。[30] C. He, G. Li；含有 p – q-拉普拉斯算子的非线性标量场椭圆方程弱解的正则性，《芬兰科学院年刊》33 (2008)，337-371。[31] W. He, D. Qin, Q. Wu；Kirchhoff 型方程解的存在性、多重性与不存在性结果，《非线性分析进展》10 (2021)，第1期，616-635。

[32] E.J. Hurtado, O.H. Miyagaki, R.S. Rodrigues；具有变临界增长指数的 Kirchhoff 型方程的存在性与渐近行为，《米兰数学杂志》77 (2010)，127-150。[33] G. Kirchhoff，《力学》，Teubner，莱比锡，1983。[34] O. Kov´aˇcik, J. R´akosn´ık；关于空间 $L^{p}(x)(\Omega)$ 和 $W^{1,\,p}(\Omega)$，《捷克斯洛伐克数学杂志》41 (1991)，592-618。[35] J.L. Lions；关于数学物理边值问题中的若干问题。《北荷兰数学研究》（《连续介质力学与偏微分方程的当代发展》）30 (1978)，284-346。[36] P.L. Lions；变分法中的集中紧性原理：极限情形，第1、2部分。《伊比利亚美洲数学杂志评论》1 (1985)，145-201。[37] T.F. Ma；关于 Kirchhofff 型椭圆方程的评注，《非线性分析：理论、方法与应用》63 (2005)，1967-1977。[38] M. Mahshid, A. Razani；具有奇异项的 (p(x),q(x))-拉普拉斯椭圆问题的弱解，《边值问题》2021 (2021)，文章编号80。[39] X. Mingqi, V.D. Rˇadulescu, B. Zhang；具有临界非线性项的分数阶 Schr¨odinger-Kirchhoff 系统的组合效应。《ESAIM：控制、优化与变分法》24 (2018)，第3期，1249-1273。[40] A. Myers-Beaghton, D.D. Vedensky；外延生长马尔可夫模型的查普曼-柯尔莫哥洛夫方程。《物理学杂志 A》22 (1989)，第11期，467-475。[41] W. Ni, J. Serrin；拟线性偏微分方程基态的存在与不存在定理。《林琴科学院会议录》77 (1985)，231-257。[42] Papageorgiou, V.D. Rˇadulescu, D.D. Repovˇs；《非线性分析——理论与方法》。《施普林格数学专著》。施普林格出版社，Cham，2019。[43] P.H. Rabinowitz；《临界点理论中的极小极大方法及其在微分方程中的应用》，CBMS 区域会议丛书（数学），第65卷，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1986。[44] V.D. Rˇadulescu；变指数非线性椭圆方程：新旧进展，《非线性分析》121 (2015)，336-369。[45] V.D. Rˇadulescu, D.D. Repovˇs；《变指数偏微分方程：变分方法与定性分析》。《专著与数学研究札记》。CRC 出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2015。[46] M. Ruˇziˇcka，剪切依赖电流变流体的流动，《巴黎科学院报告》I辑 329 (1999)，393-398。[47] M. Ruˇziˇcka；《电流变流体：建模与数学理论》，《数学讲义》，施普林格出版社，柏林 (2000)。[48] F. Wang, D. Hu, M. Xiang；分数阶基尔霍夫问题中 Choquard 非线性项与奇异非线性项的组合效应，《非线性分析进展》10 (2021)，第1期，636-658。[49] H. Wilhelmsson；反应扩散方程的爆炸性不稳定性，《物理评论 A》(3) 36 (1987)，第2期，965-966。[50] W. Yang, J. Zhou；具有结构阻尼或强阻尼的退化分数阶基尔霍夫波动方程的全局吸引子，《非线性分析进展》11 (2022)，第1期，993-1029。[51] X. Zhang, Y. Fu；$\mathbb{R}^{N}$中具有临界指数和扰动的 p(x)-拉普拉斯方程的解，《电子微分方程杂志》120 (2012)，1-14。