具有不匹配不确定性和测量噪声的异构多智能体系统输出一致性：一种自抗扰控制方法

李梦玲、吴泽豪、邓飞其和赵志良

arXiv:2303.01782v1 [math.OC] 3 Mar 2023

摘要—本文研究了有向通信拓扑包含有向生成树、且受到大规模不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声影响的异构高阶领导者-跟随者多智能体系统的实际输出一致性问题。通过引入一种不改变输出的可逆状态变换，提取了影响每个智能体输出性能、并与变换后系统控制输入相匹配的实际总扰动，并利用扩张状态观测器对其进行估计。随后，将基于扩张状态观测器估计值的控制协议与输出反馈控制相结合进行设计，以实现输出一致性，并通过前馈补偿器主动减弱每个智能体的总扰动。严格的证明表明，所有跟随者的输出均能实际跟踪领导者的输出，且领导者-跟随者多智能体系统的所有状态均有界。最后，通过数值仿真验证了控制协议和理论结果的有效性。

索引词——异构多智能体系统，输出一致性，自抗扰控制，失配不确定性，测量噪声。

I. 引言

Over 近年来，多智能体系统（MASs）的协同控制因其在传感器网络、多机器人团队协作、无人机协调等方面的广阔应用前景而受到广泛关注 [1]。一致性是指智能体的状态或输出收敛到相同值，被认为是协同控制领域中的一个基本问题。多智能体系统的一致性控制已受到控制领域的大量关注，例如参见 [2],[3], [4], [5], [6], [7], [8], [9]。一种重要的一致性控制策略是智能体集合中的领导者-跟随者协调控制，该策略已广泛应用于诸多领域，例如无人机编队 [10], 通信系统 [11], 车联网 [12], 电力工程[13], 等。此外，在实际应用中，智能体通常处于复杂的工作环境中，并受到扰动和不确定性的影响。因此，迄今为止，各种抗扰控制方法已被应用于不确定多智能体系统的领导者-跟随者一致性控制中，例如自适应控制 [14], [15], 滑模控制 [16], [17],模糊自适应动态规划 [18], 以及用于输出调节的分布式内模原理 [19], 等。

然而，上述提出的大多数一致性控制方法都是被动抗扰控制方法，仅通过基于跟踪误差的反馈控制来实现扰动抑制目标。与另外两种具有代表性的主动抗扰控制方法相比，这些一致性协议在应对大规模扰动和不确定性时不够快速直接；这两种方法是以自抗扰控制（ADRC） [20] 和基于扰动观测器的控制（DOBC） [21] 而闻名的主动抗扰控制方法，并已广泛应用于工程领域。自抗扰控制作为一种新型主动抗扰控制技术，由 Han [20]首创。自抗扰控制的核心组成部分是扩张状态观测器（ESO），旨在估计未测状态以及总扰动；总扰动代表所有影响系统性能的扰动和不确定性的综合作用。基于对总扰动的估计，自抗扰控制器是一种由反馈控制器和通过 ESO 实现的前馈补偿器构成的复合控制器，其中补偿器在扰动抑制中发挥重要作用，而反馈控制器则可单独设计，以实现标称系统的控制目标。总的来说，由于自抗扰控制框架具有这种估计与抵消特性，因此能够主动、快速地抑制总扰动，而不损害标称系统的性能，并且自抗扰控制器不保守。

近年来，针对存在匹配扰动和不确定性的多智能体系统一致性问题，主动抗扰控制的理论基础已得到充分发展，参见例如 [1], [22], [23], [24]。然而，在一些实际过程中，每个智能体的性能可能受到与控制输入通道不同的不匹配扰动和不确定性的影响 [25], , 例如磁悬浮车辆系统 [26] 和导弹系统 [27]。关于采用自抗扰控制方法对存在不匹配扰动和不确定性的不确定非线性系统进行镇定和输出跟踪的最新进展，可见[28], [29], [30], [31], [32] 及其参考文献，随后这一方法也被推广至相应的多智能体系统。例如，在不考虑系统不确定性且假设状态可测的情况下，针对存在不匹配扰动的同质高阶领导者-跟随者

李梦玲和吴泽豪就职于佛山大学数学与大数据学院，中国佛山 528000。邮箱：menglingli@fosu.edu.cn；zehaowu@amss.ac.cn邓飞其就职于华南理工大学系统工程研究所，中国广州 510640。邮箱：aufqdeng@scut.edu.cn赵志良就职于陕西师范大学数学与信息科学学院，中国西安 710119。邮箱：zhiliangzhao@snnu.edu.cn

多智能体系统，研究者基于滑模控制（SMC）和基于扰动观测器的控制方法[33], , 以及基于反步策略和广义比例积分观测器 [34]，设计前馈-反馈复合一致性控制器，对其一致性控制问题进行了研究；在假设状态可测的情况下，文献 [35]研究了存在通信时延和系统不确定性的非仿射非线性同质多智能体系统的编队跟踪问题；在连通无向网络下，文献 [36]通过自抗扰控制方法研究了受带宽限制、存在不匹配扰动和不确定性的非线性异质多智能体系统的一致性问题。然而，据作者所知，对于有向通信拓扑下存在大规模不匹配扰动和不确定性的非线性同质多智能体系统，基于主动抗扰控制方法的综合输出一致性协议设计及其理论分析仍未得到解决，且鲜有相关文献涉及测量噪声。

受当前研究现状的启发，本文采用自抗扰控制方法，解决一类存在不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声的非线性异构高阶领导者-跟随者多智能体系统的实际输出一致性问题。本文的贡献与创新主要体现在以下两方面：a）在有向通信拓扑下，非线性异构高阶领导者-跟随者多智能体系统受到大规模扰动和不确定性的影响，包括不可测状态、不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声，而自抗扰控制设计仅依赖各智能体的输出；b）设计自抗扰一致性协议，以主动抑制扰动并实现不确定多智能体系统的实际输出一致性，同时给出严格的理论依据。

本文结构安排如下。第二节给出问题描述和预备知识。第三节介绍自抗扰一致性协议设计，并给出实际输出一致性的主要结果及其证明。第四节通过若干仿真验证自抗扰一致性协议和理论结果的合理性，最后在第五节给出总结。

II. 问题表述与预备知识

全文中，约定使用以下数学符号。 $\lambda_{\min}(Z)$ 和 $\lambda_{\max}(Z)$ 分别表示矩阵 Z 的最小和最大特征值；$|\cdot|$ 表示标量的绝对值，$\|\cdot\|$ 表示矩阵或向量的二范数；1_m 和 0_m 分别表示所有元素均为 1 和 0 的 $m\times 1$ 列向量；$0_{m\times n}$ 表示具有 m 行和 n 列的零矩阵，$\mathbb{I}_m$ 表示 m 单位矩阵；$\mathrm{diag}(\mathfrak{p}_1,\cdots,\mathfrak{p}_m)$ 表示对角元素为 $\mathfrak{p}_1$、$\cdots$、$\mathfrak{p}_m$ 的对角矩阵；$\otimes$ 表示克罗内克积，对于具有适当维数的某些矩阵 $\mathbb{A}_i$ $(i=1、2、3、4)$，其满足以下若干性质：

$$(\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_2)^\top=\mathbb{A}_1^\top\otimes\mathbb{A}_2^\top,\ (\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_2)^{-1}=\mathbb{A}_1^{-1}\otimes\mathbb{A}_2^{-1},$$

$$(\mathbb{A}_1+\mathbb{A}_2)\otimes\mathbb{A}_3=\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_3+\mathbb{A}_2\otimes\mathbb{A}_3,$$
$$\mathbb{A}_1\otimes(\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_3)=\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_2+\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_3,$$
$$(\mathbb{A}_1\otimes\mathbb{A}_2)(\mathbb{A}_3\otimes\mathbb{A}_4)=\mathbb{A}_1\mathbb{A}_3\otimes\mathbb{A}_2\mathbb{A}_4.$$

以下证明中将频繁使用这些常规性质。

接下来，给出一些数学定义，并对拓扑图作简要说明。考虑一个包含 $m(\geq 1)$ 个跟随者智能体和一个领导者智能体的多智能体系统（MAS）。 $\mathcal{N}=\{1,\cdots,m\}$和 $\mathcal{M}=\{0\}$ 分别表示跟随者和领导者的集合。 $\bar{\mathcal{N}}=\mathcal{N}\cup\mathcal{M}$。跟随者与领导者之间的网络拓扑用有向图 $\mathcal{G}=\{\mathrm{V},\mathrm{E}\}$ 表示，其中 $\mathrm{V}=\{\mathrm{V}_0,\mathrm{V}1,\cdots,\mathrm{V}_m\}$ 表示上述 $m+1$ 智能体所对应的顶点集合，$\mathrm{E}\subseteq\mathrm{V}\times\mathrm{V}$ 表示图中边的集合。有向边 $\mathrm{E}_{ij}=(\mathrm{V}_i,\mathrm{V}j)$ 表示顶点 V_j 可以从顶点 V_i接收信息。记 $\mathcal{A}=[a_{ij}]\in\mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$ 为 $\mathcal{G}$ 的加权邻接矩阵，其中，$a_{ij}=1$ 等价于¯属于 $\mathrm{E}_{ji}\in\mathrm{E}$，否则 $a_{ij}=0$。对于任意 $i\in\mathcal{N}$，$a_{ii}=0$。令 $\mathcal{N}_i=\{\mathrm{V}_j\in\mathrm{V}|\mathrm{E}_{ji}\in\mathrm{E}\}$ 为顶点 V_i 的入邻居集合，并令 $D=\mathrm{diag}\{D_0,\cdots,D_m\}\in\mathbb{R}^{(m+1)\times(m+1)}$表示入度矩阵，其中 $D_i=\sum_{j\in\mathcal{N}_i}a_{ij}$ 为智能体 i的加权入度。拉普拉斯矩阵定义为 $L=[l_{ij}]=D-\mathcal{A}$，可表示为$L=\begin{bmatrix}0 & 0_{1\times m}\\ L_0 & L_1\end{bmatrix}$，其中 $L_0\in\mathbb{R}^{m\times 1}$ 且 $L_1\in\mathbb{R}^{m\times m}$，因为领导者没有入邻居。$a_{i0}>0$ 表示第 i个跟随者智能体可以获取领导者的信息，否则 $a_{i0}=0$。

对于本文的拓扑，我们给出以下假设。

假设1. 拓扑 $\mathcal{G}$ 包含一棵有向生成树，且领导者是根节点。

引理 2.1. [14] 在假设1下，L_1 是一个非奇异对角占优 M矩阵，因此存在一个正定对角矩阵 $W=\mathrm{diag}\{W_1,\cdots,W_m\}$，其中 $(W_1,\cdots,W_m)^\top=(L_1^\top)^{-1}1_m$，使得 $WL_1+L_1^\top W$是正定的。

上述引理对于矩阵 L_1而言非常有用，并将有助于我们的分析。本文考虑包含 m 个智能体的异构高阶多智能体系统，其中第 i个智能体（$i\in\{1,\cdots,m\}$）在不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声作用下的动力学描述如下：

$$\begin{cases}\dot{x}_{i1}(t)=x_{i2}(t)+h_{i1}(x_{i1}(t),d_i(t)),\\ \qquad\vdots\\ \dot{x}_{i,n-1}(t)=x_{in}(t)+h_{i,n-1}(x_{i1}(t),\cdots,x_{i,n-1}(t),d_i(t)),\\ \dot{x}_{in}(t)=h_{i,n}(x_{i1}(t),\cdots,x_{in}(t),d_i(t))+u_i(t),\\ y_i(t)=x_{i1}(t)+w_i(t),\ \ i\in\{1,\cdots,m\},\end{cases}\tag{2.1}$$

其中，$x_i(t)=(x_{i1}(t)\ \cdots,x_{in}(t))^\top\in\mathbb{R}^n$、$d_i(t)\in\mathbb{R}$ 和 $w_i(t)\in\mathbb{R}$ 分别为第 i个智能体的系统状态、外部扰动和测量噪声；$h_{ij}:\mathbb{R}^{j+1}\to\mathbb{R}(j=1,\cdots,n-1)$和 $h_{in}:\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$为未知系统函数；$u_i(t)\in\mathbb{R}$ 和 $y_i(t)\in\mathbb{R}$ 分别为第 i 个智能体的控制输入和输出测量，

分别地； $x(t) \triangleq (x_1^\top(t) \cdots, x_m^\top(t))^\top$ 为多智能体系统的状态。领导者的动力学描述如下

$$\begin{cases} \dot{x}_{0k}(t) = x_{0,k+1}(t),\ k = 1, \cdots, n-1, \\ \dot{x}_{0,n}(t) = u_0(t), \\ y_0(t) = x_{01}(t), \end{cases} \tag{2.2}$$

其中， $u_0(t)$为上述领导者系统的控制输入，且 $x_0(t) = (x_{01}(t) \cdots, x_{0n}(t))^\top$。

本文旨在设计基于自抗扰控制方法的一致性协议，使所有跟随者的输出能够实际跟踪领导者的输出，并确保领导者-跟随者多智能体系统的所有状态有界。

III. 自抗扰一致性协议设计及主要结果

将由扩张状态观测器估计的每个智能体的实际总扰动包含不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声的高阶导数。为便于后续扩张状态观测器设计和理论分析，要求系统函数 h_{ij}、外部扰动 $d_i(t)$以及测量噪声 $w_i(t)$满足如下某些光滑性假设。

假设2。关于 t， $h_{ij} \in C^{n+1-j}(\mathbb{R}^{j+1}; \mathbb{R})$以及 $d_i(t)$和$w_i(t)$分别为 n阶连续可微和$n+1$阶连续可微。

根据假设2，通过设定可以引入以下状态变换

$$\begin{cases} \bar{x}_{i1}(t) = x_{i1}(t) + w_i(t), \\ \bar{x}_{ij}(t) = x_{ij}(t) + \sum_{l=1}^{j-1} h_{i,j-l}^{(l-1)}(x_{i1}(t), \cdots, x_{i,j-l}(t), d_i(t)) \\ \qquad\quad + w_i^{(j-1)}(t),\ \ j = 2, \cdots, n,\ i = 1, \cdots, m, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中 $h_i^{(l-1)}{}_{,\ j-l}(x_{i1}(t) \cdots, x_{i,\ j-l}(t)\ d_i(t))$ 表示 the $(l-$ 第1）阶 导数 of $h_{i,j-l}(x_{i1}(t) \cdots, x_{i,j-l}(t), d_i(t))$ with 关于 to the 时间变量 t and $h_i^{(0)}{}_{,j-1}(x_{i1}(t) \cdots, x_{i,j-1}(t)\ d_i(t)) \triangleq h_{i,j-1}(x_{i1}(t) \cdots, x_{i,j-1}(t)\ d_i(t))$，下文同理，and we set $\bar{x}_i(t) = (\bar{x}_{i1}(t) \cdots, \bar{x}_{in}(t))^\top$ and $\bar{x}(t) = (\bar{x}_1(t) \cdots, \bar{x}_m(t))^\top$ in 接下来。这可由假设2和下三角结构很容易推出
多智能体系统（2.1）存在连续函数 ϕ_{ij} ，使得
that

$$\begin{aligned} &h_{i,j-l}^{(l-1)}(x_{i1}(t), \cdots, x_{i,j-l}(t), d_i(t)) \\ &= \phi_{ij}(x_{i1}(t), \cdots, x_{i,j-1}(t), d_i(t), \cdots, d_i^{(l-1)}(t)). \end{aligned} \tag{3.2}$$

因此，可以进一步得到存在连续函数 $\psi_{ij}(i = 1, \cdots, m, j = 1, \cdots, n)$，使得

$$\begin{cases} x_{i1}(t) = \bar{x}_{i1}(t) - w_i(t) \triangleq \psi_{i1}(\bar{x}_{i1}(t), w_i(t)), \\ x_{i2}(t) = \bar{x}_{i2}(t) - h_{i1}(x_{i1}(t), d_i(t)) - \dot{w}_i(t) \\ \qquad \triangleq \psi_{i2}(\bar{x}_{i1}(t), \bar{x}_{i2}(t), d_i(t), \dot{w}_i(t)), \\ \qquad\ \vdots \\ x_{in}(t) = \bar{x}_{in}(t) - \sum_{l=1}^{n-1} h_{i,n-l}^{(l-1)}(x_{i1}(t), \cdots, \\ \qquad\quad x_{i,n-l}(t), d_i(t)) - w_i^{(n-1)}(t) \\ \qquad \triangleq \psi_{in}(\bar{x}_{i1}(t), \cdots, \bar{x}_{in}(t), d_i(t), \cdots, d_i^{(n-2)}(t), \\ \qquad\quad w_i(t), \cdots, w_i^{(n-1)}(t)),\ i = 1, \cdots, m, \end{cases} \tag{3.3}$$

其可等价地表示为

$$\begin{aligned} x_i(t) = \psi_i(&\bar{x}_{i1}(t), \cdots, \bar{x}_{in}(t), d_i(t), \cdots, d_i^{(n-2)}(t), \\ &w_i(t), \cdots, w_i^{(n-1)}(t)),\ i = 1, \cdots, m, \end{aligned} \tag{3.4}$$

其中

$$\psi_i \triangleq (\psi_{i1}, \psi_{i2}, \cdots, \psi_{in})^\top. \tag{3.5}$$

令 $(\bar{x}_{i1}(t) \cdots、\ \bar{x}_{in}(t))$ 为新的状态变量，受不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声影响的多智能体系统（2.1）被转换为

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_{i1}(t) = \bar{x}_{i2}(t), \\ \qquad\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{i,n-1}(t) = \bar{x}_{in}(t), \\ \dot{\bar{x}}_{in}(t) = \bar{x}_{i,n+1}(t) + u_i(t), \\ y_i(t) = \bar{x}_{i1}(t),\ \ i \in \{1, \cdots, m\}, \end{cases} \tag{3.6}$$

该系统受到与控制输入匹配的实际总扰动（扩展状态）的影响，其形式为

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i,n+1}(t) &\triangleq h_{in}(x_{i1}(t), \cdots, x_{in}(t), d_i(t)) \\ &+ \sum_{l=1}^{n-1} h_{i,n-l}^{(l)}(x_{i1}(t), \cdots, x_{i,n-l}(t), d_i(t)) + w_i^{(n)}(t). \end{aligned} \tag{3.7}$$

类似于（3.2），根据假设2以及多智能体系统（2.1）的下三角结构，可知存在连续函数 φ_i ，使得

$$\begin{aligned} \bar{x}_{i,n+1}(t) = \varphi_i(&x_{i1}(t), \cdots, x_{in}(t), d_i(t), \cdots, \\ &d_i^{(n-1)}(t)) + w_i^{(n)}(t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

需要强调的是，上述变换保持了多智能体系统（2.1）与多智能体系统（3.6）之间相同的输出 $y_i(t)$，且$\bar{x}_{i,\ n+1}(t)$是影响第 i 个智能体输出 $y_i(t)$的实际总扰动，该扰动可由输出 $y_i(t)$观测得到。实际上，如果 $y_i(t) \equiv 0$， $u_i(t) \equiv 0$， $\forall t \in [0, \infty) \Rightarrow \bar{x}_{i,\ n+1}(t) \equiv 0$， $\forall t \in [0, \infty)$以及 $\bar{x}_{ij}(0) = 0$， $j = 1, \cdots, n$，则称不确定多智能体系统（3.6）是精确可观测的，参见例如 [37, 第5页，定义12]。因此，接下来我们设计

一组扩张状态观测器，以实时估计多智能体系统（3.6）的总扰动$\bar{x}_{i,\ n+1}(t)$和状态，如下所示

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}_{i1}(t)=\hat{x}_{i2}(t)+k_1 r(y_i(t)-\hat{x}_{i1}(t)),\\ \qquad\vdots\\ \dot{\hat{x}}_{i,n-1}(t)=\hat{x}_{in}(t)+k_{n-1}r^{n-1}(y_i(t)-\hat{x}_{i1}(t)),\\ \dot{\hat{x}}_{in}(t)=\hat{x}_{i,n+1}(t)+k_n r^n(y_i(t)-\hat{x}_{i1}(t))+u_i(t),\\ \dot{\hat{x}}_{i,n+1}(t)=k_{n+1}r^{n+1}(y_i(t)-\hat{x}_{i1}(t)),\ i=1,\cdots,m,\end{cases}\tag{3.9}$$

其中，r 为调节增益，常数 k_i需选取为使得

$$U\triangleq\begin{bmatrix}-k_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -k_2 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ -k_{n+1} & 0 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}\tag{3.10}$$

为赫尔维茨矩阵，且$\hat{}\ \bar{x}_{ij}(t)$ $(i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n)$是$\bar{x}_{ij}(t)$的估计值。从这里开始，本文中对于方程 (3.9) 及其他系统的解，为避免混淆，均省略 r 。

Set

$$A=\begin{bmatrix}0^{(n-1)\times 1} & \mathbb{I}_{n-1}\\ 0 & 0^{1\times(n-1)}\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times n},B=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{n\times 1}.$$

容易验证，(A,B)是可稳定化的，因此存在一个正定矩阵 $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 满足以下黎卡提方程：

$$A^\top P+PA-\mu_0 PBB^\top P=-\mathbb{I}_n,\tag{3.11}$$

其中，$\mu_0,\mu\lambda_{\min}(W^{-1})$满足 $\mu,\lambda_{\min}(WL_1+L_1^TW)$，且$W$ 按引理 2.1 指定。

Set

$$\vartheta_{iq}(t)=\sum_{j\in\mathcal{N}_i}a_{ij}(\hat{\bar{x}}_{iq}(t)-\hat{\bar{x}}_{jq}(t))+a_{i0}(\hat{\bar{x}}_{iq}(t)-x_{0q}(t)),\tag{3.12}$$

其中，$q=1,\cdots,n$，并令 $\vartheta_i=(\vartheta_{i1},\cdots,\vartheta_{in})^\top$。

因此，自抗扰一致性协议可设计如下：

$$u_i(t)=\mathrm{sat}_M(K\vartheta_i(t))-\mathrm{sat}_{N_i}(\hat{\bar{x}}_{i,n+1}(t))+u_0(t),\tag{3.13}$$

对于 $i=1$、$\cdots$、m，其中 $K=-B^\top P\in\mathbb{R}^{1\times n}$ 是输出反馈控制增益向量，P 将在 (3.11) 中指定；M 和 N_i 是正常数，分别在 (3.19) 和 (3.24) 中指定。连续可微饱和奇函数 $\mathrm{sat}_\Theta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 对于任意给定的 $\Theta>0$ 定义如下：

$$\mathrm{sat}_\Theta(s)=\begin{cases}s, & 0\le s\le\Theta,\\ -\frac{1}{2}s^2+(\Theta+1)s-\frac{1}{2}\Theta^2, & \Theta<s\le\Theta+1,\\ \Theta+\frac{1}{2}, & s>\Theta+1.\end{cases}\tag{3.14}$$

自抗扰一致性协议 (3.13) 由以下部分组成：用于实现多智能体系统输出一致性的通用输出反馈控制 $\mathrm{sat}_M(K\vartheta_i(t))$；基于扩张状态观测器 (3.9) 的补偿器 $-\mathrm{sat}_{N_i}(\hat{\bar{x}}_{i,n+1}(t))$，用于补偿实际总扰动；以及从领导者获得的前馈信号 $u_0(t)$ 与仅采用反馈控制设计的传统被动抗扰一致性协议相比，基于扩张状态观测器 (3.9) 的自抗扰一致性协议 (3.13) 通过补偿器$-\mathrm{sat}_{N_i}(\hat{\bar{x}}_{i,n+1}(t))$ 在主动扰动抑制方面发挥着重要作用。在自抗扰一致性协议 (3.13) 中使用饱和函数 $\mathrm{sat}_M(\cdot)$ 和 $\mathrm{sat}_{N_i}(\cdot)$ 主要有两个原因。一方面，它可以避免扩张状态观测器 (3.9) 中可能的高增益在初始状态附近引起的峰值现象。另一方面，由于饱和函数的作用，自抗扰一致性协议 (3.13) 始终有界，这将有利于后续的理论分析。

下面给出所要实现的实际输出一致性的定义。

定义 1. 若存在依赖于可调观测器增益 r 的一致性协议 (3.13)，使得对于任意 $\varepsilon>0$ 以及给定紧集中的任意初始值，均存在 $r^*\ge 1$，从而对于任意$r\ge r^*$，都有：则称领导者-跟随者多智能体系统 (2.1)-(2.2) 的实际输出一致性问题得到解决。

$$|y_i(t)-y_0(t)|\le\varepsilon,\ \forall t\ge t_r,i=1,\cdots,m,\tag{3.15}$$

其中 t_r 是依赖于 r 的正数。

注 3.1. 定义 1 直接表明，对于任意 $\varepsilon>0$，当相应地将 r 调大时，$\lim_{t\to+\infty}|y_i(t)-y_0(t)|\le\varepsilon$。更具体地说，实际输出一致性意味着，只要设计相应的依赖于 r 的扩张状态观测器（ESO）一致性协议 (3.13)，就能确保稳态时跟随者输出与领导者输出之间的误差任意接近于零。

为实现领导者-跟随者多智能体系统 (2.1)-(2.2) 的实际输出一致性和有界性，还需要满足以下假设。

假设 3. 存在若干正常数 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{3i}$ 和有界控制输入 $u_0\ t$ $\|x\ 0\|\ \le$ ( )，使得对于所有，$\alpha_1\ \|x_0\ t\|\ \le\ \alpha_2$ $t\ \ge\ 0$ $|d_i^{(l)}\ t|\ \le\ \alpha_{3i}$ ( )、( ) 均成立；并且对于所有，( )、$|w_i^{(j)}\ t|\ \le\ \alpha_{3i}$ $t\ \ge\ 0$ $i\ =\ 1\ \cdots\ m\ l\ =$ ( ) 均成立，其中，，，0，$\cdots,n,j=0,\cdots,n+1$。

注 3.2. 假设 3 涉及以下三个方面。首先，初始值应位于给定的紧集中，这表明领导者-跟随者多智能体系统 (2.1)-(2.2) 的实际输出一致性问题只能在半全局意义下解决。其次，要求领导者的状态和控制输入有界。最后，假设 3 中外部扰动和测量噪声的导数有界，这是因为需要在闭环中估计并补偿每个智能体的实际总扰动 (3.7)。

根据变换(3.1)和假设 2–3，可以很容易地得到，对于某个正数 α_4，$\|\bar{x}(0)\|\ \le\ \alpha_4$ 。

Set

$$V_{1i}(\varrho_i)=W_i\varrho_i^\top P\varrho_i,\ \forall\varrho_i\in\mathbb{R}^n,\ i=1,\cdots,m,\tag{3.16}$$

其中 P 由式 (3.11) 指定，并且可以很容易地得到

$$V_1(\varrho) \triangleq \varrho^\top (W \otimes P)\varrho = \sum_{i=1}^{m} V_{1i}(\varrho_i), \quad \forall \varrho = (\varrho_1^\top, \cdots, \varrho_m^\top)^\top \in \mathbb{R}^{nm}. \tag{3.17}$$

此外，由于 V_1 是一个径向无界连续函数，我们可以在 $\mathbb{R}^{nm}$ 中定义两个紧集如下:

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{R}^{nm} : V_1(z) \leq \max_{s\in\mathbb{R}^{nm}, \|s\|\leq\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4} V_1(s) + 1\},$$
$$\Omega_2 = \{z \in \mathbb{R}^{nm} : V_1(z) \leq \max_{s\in\mathbb{R}^{nm}, \|s\|\leq\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4} V_1(s)\}. \tag{3.18}$$

一致性协议 (3.13) 中的常数 M 可指定为

$$M \triangleq \|L_1 \otimes K\| \cdot \sup\{\|z\| : z \in \Omega_1\}. \tag{3.19}$$

定义

$$\Omega_3 = \{z \in \mathbb{R}^{nm} : \|z\| \leq \frac{M}{\|L_1 \otimes K\|} + \|1_m \otimes \mathbb{I}_n\|\alpha_2\}, \tag{3.20}$$

对于 $i = 1$、$\cdots$和 m，我们定义

$$\Omega_{3i} = \{z_i \in \mathbb{R}^n : z = (z_1^\top, \cdots, z_m^\top)^\top \in \Omega_3\}. \tag{3.21}$$

令 $\mathcal{A}_i = [-\alpha_{3i}, \alpha_{3i}]$，并且

$$Q_i = \sup_{(\bar{x}_{i1},\cdots,\bar{x}_{in},d_i,\cdots,d_i^{(n-2)},w_i,\cdots,w_i^{(n-1)})^\top \in \Omega_{3i}\times\mathcal{A}_i^{2n-1}} |\psi_i(\bar{x}_{i1}, \cdots, \bar{x}_{in}, d_i, \cdots, d_i^{(n-2)}, w_i, \cdots, w_i^{(n-1)})|, \ i = 1, \cdots, m. \tag{3.22}$$

此外，我们定义

$$\Omega_{4i} = \{z_i \in \mathbb{R}^n : \|z_i\| \leq Q_i\}, \ i = 1, \cdots, m, \quad \Omega_4 = \underbrace{\Omega_{41} \times \cdots \times \Omega_{4m}}_{m}, \tag{3.23}$$

然后，一致性协议 (3.13) 中的常数 N_i指定如下:

$$N_i = \sup_{(x_{i1},\cdots,x_{in},d_i,\cdots,d_i^{(n-1)})^\top \in \Omega_{4i}\times\mathcal{A}_i^n} |\varphi_i(x_{i1}, \cdots, x_{in}, d_i, \cdots, d_i^{(n-1)})| + \alpha_{3i}, \ i = 1, \cdots, m. \tag{3.24}$$

领导者-跟随者多智能体系统 (2.1)-(2.2) 在自抗扰一致性协议 (3.13) 下的实际输出一致性和有界性总结如下定理。

定理 3.1. 假设假设 1-3 成立，则在自抗扰控制协议 (3.13) 下，领导者-跟随者多智能体系统 (2.1)-(2.2) 能够实现实际输出一致性，并且存在一个与 r 无关的正数 Λ，使得$\|x(t)\| \leq \Lambda$ 对所有 $t \geq 0$ 均成立。

证明. 对于 $i = 1, \cdots, m$，我们设

$$\begin{cases} \eta_{ij} = r^{n+1-j}(\bar{x}_{ij} - \hat{\bar{x}}_{ij}), \ j = 1, \cdots, n+1, \\ \eta_i = (\eta_{i1}, \cdots, \eta_{i,n+1})^\top, \eta = (\eta_1^\top, \cdots, \eta_m^\top)^\top, \\ \hat{\bar{x}}_{0j} = x_{0j}, \ k = 1, \cdots, n, \\ \varrho_{ij} = \bar{x}_{ij} - x_{0j}, \hat{\varrho}_{ij} = \hat{\bar{x}}_{ij} - \hat{x}_{0j}, \ j = 1, \cdots, n, \\ \varrho_i = (\varrho_{i1}, \cdots, \varrho_{in})^\top, \hat{\varrho}_i = (\hat{\varrho}_{i1}, \cdots, \hat{\varrho}_{in})^\top, \\ \varrho = (\varrho_1^\top, \cdots, \varrho_m^\top)^\top, \hat{\varrho} = (\hat{\varrho}_1^\top, \cdots, \hat{\varrho}_m^\top)^\top, \\ \hat{\bar{x}}_i = (\hat{\bar{x}}_{i1}, \cdots, \hat{\bar{x}}_{in})^\top, \hat{\bar{x}} = (\hat{\bar{x}}_1^\top, \cdots, \hat{\bar{x}}_m^\top)^\top, \\ \bar{u}_i(t) = K\vartheta_i(t) - \hat{\bar{x}}_{i,n+1}(t). \end{cases} \tag{3.25}$$

存在唯一的正定矩阵 $G \in \mathbb{R}^{(n+1)\times\ n+}$，使得 $\quad (\quad 1)$

$$UG + GU^\top = -\mathbb{I}_{n+1}, \tag{3.26}$$

其中， U 是 (3.10) 中指定的赫尔维茨矩阵。

Set

$$V_{2i}(\eta_i) = \eta_i^\top G\eta_i, \ \forall \eta_i \in \mathbb{R}^{n+1}, i = 1, \cdots, m, \tag{3.27}$$

并且可以直接得到

$$V_2(\eta) \triangleq \eta^\top (\mathbb{I}_m \otimes G)\eta = \sum_{i=1}^{m} V_{2i}(\eta_i), \forall \eta \in \mathbb{R}^{nm+m}. \tag{3.28}$$

我们可以证明， $\varrho_i(t)$ 和 $\eta_i(t)$ 满足

$$\begin{cases} \dot{\varrho}_{i1}(t) = \varrho_{i2}(t), \\ \quad \vdots \\ \dot{\varrho}_{i,n-1}(t) = \varrho_{in}(t), \\ \dot{\varrho}_{in}(t) = \bar{x}_{i,n+1}(t) + u_i(t) - u_0(t), \\ \dot{\eta}_{i1}(t) = r(\eta_{i2}(t) - k_1\eta_{i1}(t)), \\ \quad \vdots \\ \dot{\eta}_{in}(t) = r(\eta_{i,n+1}(t) - k_n\eta_{i1}(t)), \\ \dot{\eta}_{i,n+1}(t) = -rk_{n+1}\eta_{i1}(t) + \dot{\bar{x}}_{i,n+1}(t), \ i = 1, \cdots, m. \end{cases} \tag{3.29}$$

此外，经过一些数学运算，可得到式 (3.29) 的紧凑形式:

$$\begin{cases} \dot{\varrho}(t) = (\mathbb{I}_m \otimes A)\varrho(t) + (\mathbb{I}_m \otimes B)\Xi(t) \\ \quad = (\mathbb{I}_m \otimes A)\varrho(t) + (L_1 \otimes BK)\hat{\varrho}(t) + (\mathbb{I}_m \otimes B) \triangle(t), \\ \dot{\eta}(t) = r(\mathbb{I}_m \otimes U)\eta(t) + (\mathbb{I}_m \otimes B_{n+1}) \bigtriangledown(t), \end{cases} \tag{3.30}$$

其中

$$\Xi(t) = (\bar{x}_{1,n+1}(t) + u_1(t) - u_0(t), \cdots, \bar{x}_{m,n+1}(t) + u_m(t) - u_0(t))^\top,$$

$$\triangle(t) = (\bar{x}_{1,n+1}(t) - \hat{\bar{x}}_{1,n+1}(t) - \bar{u}_1(t) + u_1(t) - u_0(t), \cdots, \bar{x}_{m,n+1}(t) - \hat{\bar{x}}_{m,n+1}(t) - \bar{u}_m(t) + u_m(t) - u_0(t))^\top,$$

$$B_{n+1} = (0, \cdots, 0, 1)^\top \in \mathbb{R}^{n+1},$$

$$\bigtriangledown(t) = (\dot{\bar{x}}_{1,n+1}(t), \cdots, \dot{\bar{x}}_{m,n+1}(t))^\top.$$

我们通过以下三个步骤展开证明。

步骤 1: 证明存在 $r_1 > 0$ ，使得对于任意 $r \geq r_1$，对所有 $t \geq 0$，均有 $\varrho(t) \in \Omega_1$ ，这

也表明，我们可以找到一个与 r 无关的常数 Λ，使得 $\|x(t)\| \le \Lambda, \forall t \ge 0$。

我们开始证明步骤 1。根据式 (3.18) 中紧集 Ω_2 的定义，有 $\varrho(0) \in \Omega_2$，且 $\varrho(0)$ 是 Ω_2 的内部点。因此，由 $\varrho(t)$ 关于 t 的连续性可知，从 $t = 0$ 起的一段短时间内，$\varrho(t)$ 将保持在 $\Omega_2 \subset \Omega_1$ 中。由于 $\bar{x}(t) = \varrho(t) + (1_m \otimes \mathbb{I}_n)x_0(t)$，且根据假设 3，$x_0(t)$ 有界，因此从 $t = 0$ 起的一段短时间内，$\bar{x}(t)$ 将位于式 (3.20) 定义的 Ω_3 中。由假设 3、式 (3.4) 和式 (3.22) 可进一步得出，从 $t = 0$ 起的一段短时间内，$x(t) \in \Omega_4$，其中 Ω_4 由式 (3.23) 定义。此外，根据总扰动 $\bar{x}_{i,n+1}(t)$ 在式 (3.8) 中的等价表达式以及假设 2–3，对于式 (3.24) 中给出的 N_i，从 $t = 0$ 起的一段短时间内有 $\bar{x}_{i,n+1}(t) \le N_i$，且该结论与 r 无关。由式 (3.29) 的 ϱ-子系统，以及由饱和函数保证有界且其界也与 r 无关的 $u_i(t) - u_0(t)$，可得存在一个与 r 无关的时间 $t_0 > 0$，使得 $\varrho(t) \in \Omega 1$, $\forall t \in [0, t_0]$。

步骤 1 的结论可通过以下归谬法得出。首先假设步骤 1 的结论不成立，再根据 $\varrho(t)$ 在 t 中的连续性，存在依赖于 r 的常数 t_1、t_2，满足 $t_2 > t_1 \ge t_0$，使得

$$\begin{aligned} &\varrho(t_1) \in \partial\Omega_2,\ \varrho(t_2) \in \partial\Omega_1, \\ &\{\varrho(t) : t \in (t_1, t_2]\} \subset \Omega_1 - \Omega_2^0, \\ &\{\varrho(t) : t \in [0, t_2]\} \subset \Omega_1, \end{aligned} \tag{3.31}$$

其中，$\partial\Omega_j$ ($j = 1,2$) 和 Ω_2^0 分别表示 Ω_j 的边界和 Ω_2，的内部。

对于 $i = 1、\cdots、m$，求总扰动 $\bar{x}_{i,n+1}(t)$ 关于 t 的导数，可得

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}_{i,n+1}(t) &= h_{in}^{(1)}(x_i(t), d_i(t)) \\ &+ \sum_{l=1}^{n-1} h_{i,n-l}^{(l+1)}(x_{i1}(t), \cdots, x_{i,n-l}(t), d_i(t)) + w_i^{(n+1)}(t). \end{aligned} \tag{3.32}$$

与 (3.2) 类似，可得存在连续函数 f_i 和 g_i，使得

$$\begin{aligned} &h_{in}^{(1)}(x_i(t), d_i(t)) = f_i(x_i(t), d_i(t), \dot{d}_i(t), u_i(t)), \\ &h_{i,n-l}^{(l+1)}(x_{i1}(t), \cdots, x_{i,n-l}(t), d_i(t)) \\ &= g_i(x_i(t), d_i(t), \dot{d}_i(t), \cdots, d_i^{(l+1)}(t), u_i(t)) \end{aligned} \tag{3.33}$$

与前述推导类似，由于 $\varrho(t)$ 在 $t \in [0, t_2]$ 中有界，$\bar{x}(t)$ 进而 $x(t)$ 在 $t \in [0, t_2]$ 中有界。此外，饱和函数确保了 $u_i(t)$ 有界。结合假设 3，可得

$$|\dot{\bar{x}}_{i,n+1}(t)| \le D_{1i},\ \forall t \in [0, t_2], \tag{3.34}$$

对于某些与 r 无关的正常数 D_{1i}。根据式 (3.27) 中 V_{2i} 的定义，我们有

$$\begin{aligned} &\lambda_{\min}(G)\|\eta_i\|^2 \le V_{2i}(\eta_i) \le \lambda_{\max}(G)\|\eta_i\|^2, \\ &\frac{\partial V_{2i}(\eta_i)}{\partial \eta_{i,n+1}} \le 2\lambda_{\max}(G)\|\eta_i\|,\ \forall \eta_i \in \mathbb{R}^{n+1}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

结合式 (3.26)，对于所有 $t \in [0, t_2]$，可得

$$\begin{aligned} &\frac{dV_{2i}(\eta_i(t))}{dt} = r\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V_{2i}(\eta_i(t))}{\partial \eta_{ij}} [\eta_{i,j+1}(t) - k_j\eta_{i1}(t)] \\ &-r\frac{\partial V_{2i}(\eta_i(t))}{\partial \eta_{i,n+1}} k_{n+1}\eta_{i1}(t) + \frac{\partial V_{2i}(\eta_i(t))}{\partial \eta_{i,n+1}} \dot{\bar{x}}_{i,n+1}(t) \\ &\le -\frac{r}{\lambda_{\max}(G)} V_{2i}(\eta_i(t)) + \frac{2\lambda_{\max}(G) D_{1i}}{\sqrt{\lambda_{\min}(G)}} \sqrt{V_{2i}(\eta_i(t))}. \end{aligned} \tag{3.36}$$

根据常用不等式 $(\sum_{i=1}^{m} a_i)^p \le m^{p-1} \sum_{i=1}^{m} a_i^p$，对于任意 $a_i \ge 0$ 和 $p > 1$，有

$$\sum_{i=1}^{m} \sqrt{V_{2i}(\eta_i)} \le \sqrt{m}\sqrt{V_2(\eta)}.$$

因此，对于 $t \in [t_1, t_2]$，有

$$\begin{aligned} &\frac{dV_2(\eta(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{dV_{2i}(\eta_i(t))}{dt} \\ &\le -\frac{r}{\lambda_{\max}(G)} V_2(\eta(t)) + \frac{2\sqrt{m}\lambda_{\max}(G) \max\limits_{1\le i\le m} D_{1i}}{\sqrt{\lambda_{\min}(G)}} \sqrt{V_2(\eta(t))}, \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} &\sqrt{V_2(\eta(t))} \\ &\le e^{-\frac{r}{2\lambda_{\max}(G)}t} \sqrt{V_2(\eta(0))} + \frac{2\sqrt{m}\lambda_{\max}^2(G) \max\limits_{1\le i\le m} D_{1i}}{\sqrt{\lambda_{\min}(G) r}}. \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} &e^{-\frac{rt}{2\lambda_{\max}(G)}} \sqrt{V_2(\eta(0))} \\ &\le e^{-\frac{rt_0}{2\lambda_{\max}(G)}} \sqrt{V_2(\eta(0))} \le e^{-\frac{rt_0}{2\lambda_{\max}(G)}} \sqrt{\lambda_{\max}(G)}\|\eta(0)\| \\ &\le e^{-\frac{rt_0}{2\lambda_{\max}(G)}} \sqrt{\lambda_{\max}(G)} [\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1} r^{2n+2-2j} (\bar{x}_{ij}(0) - \hat{\bar{x}}_{ij}(0))^2]^{\frac{1}{2}} \\ &\to 0 \ \text{ in } \ t \in [t_1, t_2] \ \text{ as } \ r \to +\infty, \end{aligned} \tag{3.37}$$

其中，$t_0 > 0$ 是一个与 r 无关的常数。因此，

$$\|\eta(t)\| \to 0 \ \text{ in uniformly in } t \in [t_1, t_2] \ \text{ as } \ r \to +\infty.$$

由此，对于

$$\varsigma \triangleq \min\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2\|L_1 \otimes K\|}, \frac{2}{\|L_1 \otimes K\|^2}, \frac{\beta_1 \min\limits_{\varrho\in\Omega_1} V_1(\varrho)}{\beta_2}\}, \tag{3.38}$$

其中，β_1, β_2 由式（3.44）给出，存在 $r_1 \ge 1$，使得对于任意 $r \ge r_1$，都有 $\|\eta(t)\| \le \varsigma$, $\forall t \in [t_1, t_2]$。通过直接计算可得

$$\begin{aligned} &\|\varrho(t) - \hat{\varrho}(t)\| = \|\bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t)\| \\ &= \|(\frac{\eta_{11}(t)}{r^n}, \cdots, \frac{\eta_{1n}(t)}{r}, \cdots, \frac{\eta_{m1}(t)}{r^n}, \cdots, \frac{\eta_{mn}(t)}{r})\| \\ &\le \|\eta(t)\|,\ \forall t \ge 0. \end{aligned} \tag{3.39}$$

由于对于 $t \in [0,t_2]$, $\varrho(t) \in \Omega_1$，根据式（3.19）中 M 的定义，进一步可得

$$\begin{aligned}\|L_1 \otimes K\hat{\varrho}(t)\| &\le \|L_1 \otimes K\| \left(\|\varrho(t)\| + \|\hat{\varrho}(t) - \varrho(t)\|\right) \\ &\le M + \frac{1}{2},\ \forall t \in [t_1,t_2].\end{aligned} \tag{3.40}$$

根据式 (3.12) 的定义，可得 $|K\vartheta_i(t)| \le \|L_1 \otimes K\hat{\varrho}(t)\| \le M + \frac{1}{2}$, $\forall t \in [t_1,t_2]$。因此，对于 $i = 1,\cdots,m$，若 $|K\vartheta_i(t)| \le M$，则可直接得到

$$K\vartheta_i(t) - \mathrm{sat}_M(K\vartheta_i(t)) = 0,\ \forall t \ge 0.$$

若 $K\vartheta_i(t) > M$，则

$$\begin{aligned}&|K\vartheta_i(t) - M| \le K\vartheta_i(t) - \|L_1 \otimes K\varrho(t)\| \\ &\le \|L_1 \otimes K\| \cdot \|\hat{\varrho}(t) - \varrho(t)\| \le \|L_1 \otimes K\|\varsigma,\ \forall t \in [t_1,t_2],\end{aligned} \tag{3.41}$$

and

$$\begin{aligned}&|K\vartheta_i(t) - \mathrm{sat}_M(K\vartheta_i(t))| \\ &= |K\vartheta_i(t) + \frac{1}{2}(K\vartheta_i(t))^2 - (M+1)K\vartheta_i(t) + \frac{1}{2}M^2| \\ &= \frac{(K\vartheta_i(t) - M)^2}{2} \le \varsigma,\ \forall t \in [t_1,t_2].\end{aligned}$$

由于 $\mathrm{sat}_M(\cdot)$ 是奇函数，对于 $K\vartheta_i(t) < -M$ 也可直接得到类似结论。因此，对于所有 $t \in [t_1,t_2]$, 有 $|K\vartheta_i(t) - \mathrm{sat}_M(K\vartheta_i(t))| \le \varsigma$。由于当 $t \in [0,t_2]$ 时 $\varrho(t) \in \Omega_1$，完全按照步骤 1 前面的推理，可得当 $t \in [0,t_2]$ 时，$|\bar{x}_{i,n+1}(t)| \le N_i$, 且 $i = 1,\cdots,m$。由于对于所有 $t \in [t_1,t_2]$, $|\hat{\bar{x}}_{i,n+1}(t)| \le |\bar{x}_{i,n+1}(t)| + \|\eta(t)\| \le N_i + \frac{1}{2}$，类似地可得 $|\hat{\bar{x}}_{i,n+1}(t) - \mathrm{sat}_{N_i}(\hat{\bar{x}}_{i,n+1}(t))| \le \varsigma$，进而对于所有 $t \in [t_1,t_2]$, 有 $|\bar{x}_{i,n+1}(t) - \mathrm{sat}_{N_i}(\hat{\bar{x}}_{i,n+1}(t))| \le 2\varsigma$。

因此，我们有

$$\|\triangle(t)\| \le 3\sqrt{m}\varsigma,\ \forall t \in [t_1,t_2]. \tag{3.42}$$

注意到正定矩阵 $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 满足黎卡提方程 (3.11)，小常数 ς 在 (3.38) 中定义，并沿着 (3.30) 的 ϱ-子系统对 $V_1(\varrho(t))$ 关于 t 求导，可得

$$\begin{aligned}&\frac{dV_1(\varrho(t))}{dt} = \varrho^\top(t)(W \otimes (PA + A^\top P) \\ &-(WL_1 + L_1^\top W) \otimes PBB^\top P)\varrho(t) \\ &-2\varrho^\top(t)(WL_1 \otimes PBB^\top P)(\hat{\varrho}(t) - \varrho(t)) \\ &+2\varrho^\top(t)(W \otimes PB)\triangle(t) \\ &\le \varrho^\top(t)(W \otimes (PA + A^\top P) - (\mu\mathbb{I}_m \otimes PBB^\top P))\varrho(t) \\ &-2\varrho^\top(t)(WL_1 \otimes PBB^\top P)(\hat{\varrho}(t) - \varrho(t)) \\ &+2\varrho^\top(t)(W \otimes PB)\triangle(t) \\ &\le \underline{\varrho}^\top(t)(\mathbb{I}_m \otimes (PA + A^\top P - \mu_0 PBB^\top P))\underline{\varrho}(t) \\ &-2\varrho^\top(t)(WL_1 \otimes PBB^\top P)(\hat{\varrho}(t) - \varrho(t)) \\ &+2\varrho^\top(t)(W \otimes PB)\triangle(t) \\ &= -\underline{\varrho}^\top(t)\underline{\varrho}(t) - 2\varrho^\top(t)(WL_1 \otimes PBB^\top P)(\hat{\varrho}(t) - \varrho(t)) \\ &+2\varrho^\top(t)(W \otimes PB)\triangle(t) \\ &= -\underline{\varrho}^\top(t)(W \otimes \mathbb{I}_n)\varrho(t) \\ &-2\varrho^\top(t)(WL_1 \otimes PBB^\top P)(\hat{\varrho}(t) - \varrho(t)) \\ &+2\varrho^\top(t)(W \otimes PB)\triangle(t) \\ &\le -\beta_1 V_1(\varrho(t)) + \beta_2\varsigma < 0,\quad t \in [t_1,t_2],\end{aligned} \tag{3.43}$$

其中

$$\begin{aligned}&\mu = \lambda_{\min}(WL_1 + L_1^\top W),\ \mu_0 = \mu\lambda_{\min}(W^{-1}), \\ &\underline{\varrho}(t) = (W^{\frac{1}{2}} \otimes \mathbb{I}_n)\varrho(t),\ \beta_1 = \frac{\lambda_{\min}(W)}{\lambda_{\max}(W \otimes P)}, \\ &\beta_2 = 2M\|WL_1 \otimes PBB^\top P\| + 6M\|W \otimes PB\|\sqrt{m}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

由 (3.43) 可知，$V_1(\varrho(t))$ 关于 $t \in [t_1,t_2]$ 单调递减。然而，根据 (3.18) 和 (3.31)，我们有 $V_1(\varrho(t_2)) = V_1(\varrho(t_1)) + 1$，这导致矛盾。因此，对于任意 $r \ge r_1$, $\{\varrho(t) : t \in [0,\infty)\} \subset \Omega_1$，进而存在一个与 r 无关的常数 Λ，从而 $\|x(t)\| \le \Lambda, \forall t \ge 0$。

步骤2：已证明，对于任意 $T > 0$, $\|\eta(t)\| \to 0$ 关于 $t \in [T,+\infty)$ 一致成立，当 $r \to +\infty$ 时；这也意味着 $|\bar{x}_{ij}(t) - \hat{\bar{x}}_{ij}(t)| \to 0$ 关于 $t \in [T,+\infty)$ 一致成立，当 $r \to +\infty$ 时，其中 $i = 1,\cdots,m, j = 1,\cdots,n+1$。

与步骤 1 的证明类似，对于任意 $r \ge r_1$，可以得出存在与 r 无关的正常数 D_{2i}，使得 $\{\varrho(t) : t \in [0,+\infty)\} \subset \Omega_1$

$$|\dot{\bar{x}}_{i,n+1}(t)| \le D_{2i},\ \forall t \ge 0,$$

然后

$$\begin{aligned}&\sqrt{V_2(\eta(t))} \\ &\le e^{-\frac{r}{2\lambda_{\max}(G)}t}\sqrt{V_2(\eta(0))} + \frac{2\sqrt{m}\lambda_{\max}^2(G)\max\limits_{1\le i\le m} D_{2i}}{\sqrt{\lambda_{\min}(G)}r}\end{aligned}$$

对于所有 $t \ge 0$。与 (3.37) 类似，有

$$e^{-\frac{r}{2\lambda_{\max}(G)}t}\sqrt{V_2(\eta(0))} \to 0 \tag{3.45}$$

当 $r \to +\infty$ 时，关于 $t \in [T,+\infty]$ 一致成立。由此可得，当 $r \to +\infty$ 时，$\|\eta(t)\| \to 0$ 关于 $t \in [T,+\infty$ 一致成立，从而完成步骤2的证明。

步骤3：证明对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $r^* > 0$，使得对于任意 $r \ge r^*$ 以及所有满足 t_r 的 $t \ge t_r$，存在与 r 有关的正数 r，使得 $\|\varrho(t)\| \le \varepsilon$，进而 $|y_i(t) - y_0(t)| \le \varepsilon$ 对所有 $t \ge t_r$ 以及 $i = 1、\cdots、m.$ 均成立。

步骤2结束时，类似于式 (3.42) 的证明，对于任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $r^* \ge r_1$，使得对于任意 $r \ge r^*$ 和 $T > 0$，有

$$\begin{aligned}&2M\|WL_1 \otimes PBB^\top P\| \cdot \|\eta(t)\| + 2M\|W \otimes PB\| \cdot \|\Delta(t)\| \\ &< \beta_1\lambda_{\min}(W \otimes P)\varepsilon^2,\ \forall t \in [T,\infty).\end{aligned} \tag{3.46}$$

因此，类似于式 (3.43) 的证明，可得当 $\|\varrho(t)\| > \varepsilon$ 时，有

$$\begin{aligned}&\frac{dV_1(\varrho(t))}{dt} \\ &\le -\beta_1 V_1(\varrho(t)) + 2M\|WL_1 \otimes PBB^\top P\| \cdot \|\eta(t)\| \\ &\quad +2M\|W \otimes PB\| \cdot \|\Delta(t)\| \\ &< 0.\end{aligned} \tag{3.47}$$

由此可知，对于任意 $r \ge r^*$，存在一个依赖于 r 的常数 t_r，使得

$$\|\varrho(t)\| \le \varepsilon,\ \forall t \in [t_r,+\infty),$$

这进一步表明

$$|y_i(t) - y_0(t)| \le \|\varrho(t)\| \le \varepsilon,\ \forall t \in [t_r,+\infty).$$

定理 3.1 的证明到此结束。 □

注 3.3。与现有文献（如 [32],[33], [34], ）相比，理论分析中的创新之处和主要难点源于不匹配不确定性，而非不匹配扰动。这也是本文标题未强调不匹配扰动的主要原因；不匹配扰动也可视为不匹配不确定性的一部分。此外，由于存在稳态下不消失的不匹配扰动和不匹配不确定性，只能针对输出讨论一致性，而不能讨论其他状态的一致性；在自抗扰控制的闭环系统中，只能保证其他状态有界。

IV. 数值仿真

本节通过一些数值仿真来验证自抗扰一致性协议和理论结果的有效性。考虑如下受不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声影响的二阶多智能体系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1}(t) = x_{i2}(t) + h_{i1}(x_{i1}(t), d_i(t)), \\ \dot{x}_{i2}(t) = h_{i2}(x_{i1}(t), x_{i2}(t), d_i(t)) + u_i(t), \\ y_i(t) = x_{i1}(t) + w_i(t),\ i \in \{1, \cdots, 5\}, \end{cases} \tag{4.1}$$

这是多智能体系统（2.1）在 $n = 2$、$m = 5$ 下的一种特殊情况，领导者则描述为（2.2）在 $n = 2$ 下的一种特殊情况。网络拓扑如图 1 所示。

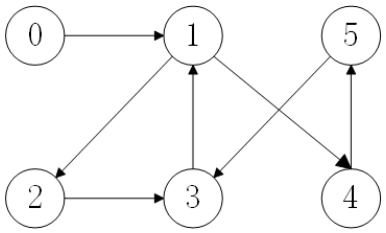


图 1：拓扑结构

设计五个扩张状态观测器如下：

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_{i1}(t) = \hat{x}_{i2}(t) + 3r(y_i(t) - \hat{x}_{i1}(t)), \\ \dot{\hat{x}}_{i2}(t) = \hat{x}_{i3}(t) + 3r^2(y_i(t) - \hat{x}_{i1}(t)), \\ \dot{\hat{x}}_{i3}(t) = r^3(y_i(t) - \hat{x}_{i1}(t)),\ i = 1, \cdots, 5, \end{cases} \tag{4.2}$$

其中，k_i 选取为 $k_1 = k_2 = 3, k_3 = 1$，使得式 (3.10) 中指定的矩阵 U 为赫尔维茨矩阵。根据拓扑结构和黎卡提方程 (3.11)，可容易地得到

$$W^\top = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} 2.3216 & 2.1949 \\ 2.1949 & 5.0956 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad K = \begin{bmatrix} -2.1949 & -5.0956 \end{bmatrix}.$$

式（3.13）中的自抗扰一致性协议设计如下：

$$u_i(t) = \mathrm{sat}_5(K\vartheta_i(t)) - \mathrm{sat}_5(\hat{\hat{x}}_{i3}(t)),\ i = 1, \cdots, 5, \tag{4.3}$$

其中，$\vartheta_i(t)$ 和 $\mathrm{sat}_5(\cdot)$ 分别定义于式（3.12）和式（3.14）中。

在所有数值仿真中，系统 (4.1) 的初值选为 $x_1(0) = (0.1, -0.4)^\top$，$x_2(0) = (0.2, 0.3)^\top$，$x_3(0) = (0.5, -0.5)^\top$，$x_4(0) = (0.5, -0.5)^\top$，$x_5(0) = (-0.8, 0.7)^\top$，且扩张状态观测器 (4.2) 的所有初值均为零。领导者动力学的初值指定为 $x_0(0) = [0.3, 0.2]^\top$，其控制输入为 $u_0(t) = -x_{01}(t) - 2x_{02}(t) + \cos(x_{01}^2(t) + x_{02}^2(t))$ $\forall t \geq 0$。容易证明，状态 $x_{01}(t)$ $x_{02}(t)$ 有界。

图 2–3 中，不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声选取如下：

$$\begin{aligned} &h_{i1}(x_{i1}, d_i) = 0.15e^{x_{i1}} + 0.2\cos^3(x_{i1}) + d_i^2, \\ &d_i(t) = \sqrt{0.3}\sin(2t),\ i = 1, 2; \\ &h_{i1}(x_{i1}, d_i) = 0.2x_{i1}^3 + 0.2x_{i1}^2 + d_i, \\ &d_i(t) = 0.2\cos(2t),\ i = 3, 4, 5; \\ &h_{i2}(x_{i1}, x_{i2}, d_i) = 0.3x_{i1} + 0.2e^{0.01x_{i2}} + d_i, \\ &d_i(t) = 0.2\sin(t),\ i = 1, 2; \\ &h_{i2}(x_{i1}, x_{i2}, d_i) = 0.3x_{i1} + 0.2e^{-0.1x_{i2}} + d_i^3, \\ &d_i(t) = \sqrt[3]{0.2}\sin(t),\ i = 3, 4, 5; \\ &w_i(t) = \cos(t), i = 1, 2,\ w_i(t) = 0.1te^{-t}, i = 3, 4, 5. \end{aligned} \tag{4.4}$$

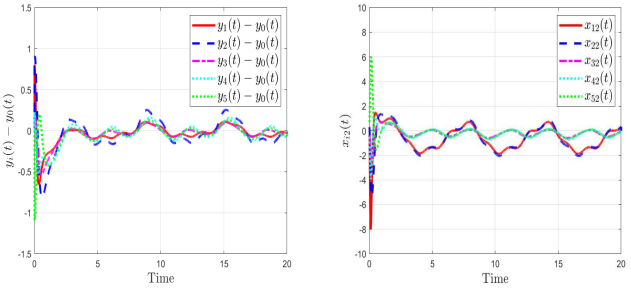
在图 2 中，调节增益 r 选为 $r = 10$。观察 $y_i(t) - y_0(t)$ 和 $\hat{\bar{x}}_{i3}(t) - \bar{x}_{i3}(t)$ 的误差曲线，可以看出实际总扰动 $\bar{x}_{i3}(t)$ 的输出一致性效果和估计效果令人满意，分别如图 2(a) 和图 2(c) 所示。在图 3 中，调节增益 r 增大至 $r = 50$。从图 3(a) 和图 3(c) 可以看出，实际总扰动 $\bar{x}_{i3}(t)$ 的输出一致性效果和估计效果均优于图 2 中的结果，这与理论结果所指出的事实一致：跟踪/估计误差的上界与调节参数 r 成反比。所有跟随者的第二状态 $x_{i2}(t)$ 的有界性可从图 2(b) 和图 3(b) 中看出，这也与理论结果一致。

在图 4 中，调节增益 r 仍设为 $r = 50$，但不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声按如下方式变化：

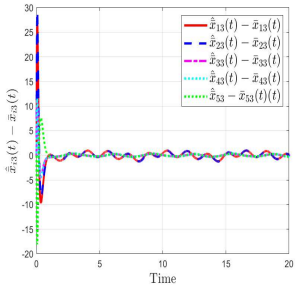
$$\begin{aligned} &h_{i1}(x_{i1}, d_i) = 0.2e^{x_{i1}} + 0.3\cos^3(x_{i1}) + d_i^2, \\ &d_i(t) = \sin(2t),\ i = 1, 2; \\ &h_{i1}(x_{i1}, d_i) = 0.4x_{i1}^3 + 0.4x_{i1}^2 + d_i, \\ &d_i(t) = 0.3\cos(2t),\ i = 3, 4, 5; \\ &h_{i2}(x_{i1}, x_{i2}, d_i) = x_{i1} + 0.5e^{0.01x_{i2}} + d_i, \\ &d_i(t) = \sin(t),\ i = 1, 2; \\ &h_{i2}(x_{i1}, x_{i2}, d_i) = 0.4x_{i1} + 0.3e^{-0.1x_{i2}} + d_i^3, \\ &d_i(t) = \sqrt[3]{0.5}\sin(t),\ i = 3, 4, 5; \\ &w_i(t) = \cos(2t), i = 1, 2,\ w_i(t) = 0.2te^{-t}, i = 3, 4, 5. \end{aligned} \tag{4.5}$$

与（4.4）相比，尽管系统函数和扰动中的大多数系数都增大了，但从图4可以看出，输出一致性、状态有界性以及实际总扰动估计的良好效果仍得以保持，这表明所

提出的自抗扰一致性协议在一定程度上具有鲁棒性。最后，从图2–4可以看出，前两个跟随者的输出一致性和实际总扰动估计效果均不如其他跟随者。这是因为前两个跟随者动力学中的系统函数呈指数增长，而其他跟随者的系统函数仅呈多项式增长，这与理论结果一致：跟踪/估计效果取决于扰动和不确定性的强度。



(a) 跟踪误差的变化轨迹 (b) 跟随者输出状态第二个分量的变化轨迹

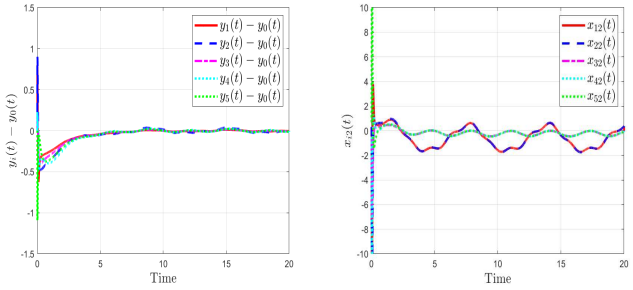


(c) 实际总扰动估计误差的变化轨迹

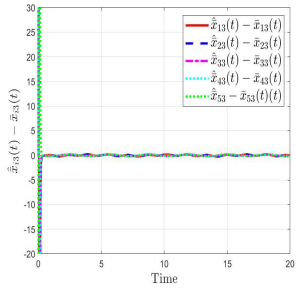
图 2：输出一致性、状态有界性以及实际总扰动估计的效果。

V. 总结

本文研究了一类大规模异构高阶领导者-跟随者多智能体系统在存在不匹配扰动、不匹配不确定性和测量噪声情况下的实际输出一致性与扰动抑制问题。网络拓扑为有向图，且包含一棵有向生成树。本文仅利用各智能体的输出测量设计了一组扩张状态观测器，以实时估计各智能体的实际总扰动；随后，基于扩张状态观测器设计了自抗扰一致性协议，保证所有跟随者的输出能够实际跟踪领导者的输出，并且领导者-跟随者多智能体系统的所有状态均有界。最后，通过数值仿真验证了自抗扰一致性协议的有效性以及理论结果的合理性。

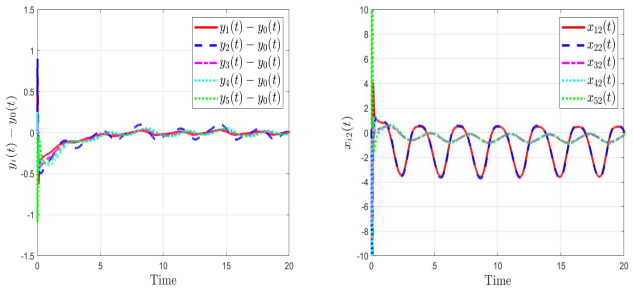


(a) 跟踪误差的轨迹 (b) 跟随者第二个输出状态的轨迹

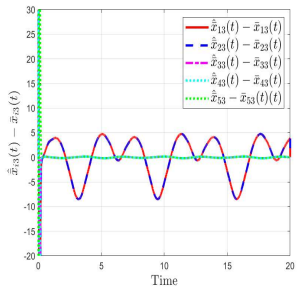


(c) 实际总扰动估计误差的轨迹

图 3：输出一致性、状态有界性以及实际总扰动估计的效果。



（a）跟踪误差的轨迹 （b）跟随者输出状态第二分量的轨迹



（c）实际总扰动估计误差的轨迹

图4：输出一致性、状态有界性以及实际总扰动估计的效果。

参考文献

[1] Cao, W., Zhang, J., & Ren, W. (2015年). 具有未知外部扰动的线性多智能体系统的领导者-跟随者一致性。Systems & Control Letters, 82, 64-70.

[2] Yu, W., Chen, G., & Cao, M. (2010年). 多智能体动力系统二阶一致性的若干充要条件. Automatica, 46(6), 1089-1095.

[3] Yu, W., Chen, G., & Cao, M. (2011年). 具有非线性动力学的智能体在有向网络中的一致性. IEEE自动控制汇刊, 56(6), 1436-1441. [4] Fan, M. C., Chen, Z., & Zhang, H. T. (2014年). 具有测量输出反馈的非线性二阶多智能体系统的半全局一致性. IEEE自动控制汇刊, 59(8), 2222-2227. [5] Li, T., Wu, F., & Zhang, J. F. (2014年). 具有相对状态相关测量噪声的多智能体一致性. IEEE自动控制汇刊, 59(9), 2463-2468. [6] Shen, Q., & Shi, P. (2015年). 严格反馈形式非线性多智能体系统的分布式命令滤波反步一致性跟踪控制. Automatica, 53, 120-124. [7] Li, M., & Deng, F. (2019年). 具有马尔可夫切换拓扑和通信噪声的连续时间多智能体系统一致性的充要条件. IEEE控制论汇刊, 50(7), 3264-3270. [8] Zong, X., Li, T., & Zhang, J. F. (2019年). 具有时滞和测量噪声的连续时间多智能体系统的一致性条件. Automatica, 99, 412-419. [9] Deng, C., Che, W. W., & Wu, Z. G. (2020年). 一种针对具有时变通信时延的异构线性多智能体系统一致性的动态周期事件触发方法. IEEE控制论汇刊, 51(4), 1812-1821. [10] Dong, X., Hua, Y., Zhou, Y., Ren, Z., & Zhong, Y. (2018年). 多旋翼无人机系统编队包容控制的理论与实验. IEEE自动化科学与工程汇刊, 16(1), 229-240. [11] Das, A., Gervet, T., Romoff, J., Batra, D., Parikh, D., Rabbat, M., & Pineau, J. (2019年, 5月). Tarmac：定向多智能体通信. 收录于《国际机器学习会议》, 1538-1546. PMLR. [12] Liang, L., Ye, H., & Li, G. Y. (2019年). 基于多智能体强化学习的车联网频谱共享. IEEE通信领域精选期刊, 37(10), 2282-2292. [13] McArthur, S. D., Davidson, E. M., Catterson, V. M., Dimeas, A. L., Hatziargyriou, N. D., Ponci, F., & Funabashi, T. (2007年). 电力工程应用中的多智能体系统——第二部分：构建多智能体系统的技术、标准和工具. IEEE电力系统汇刊, 22(4), 1753-1759. [14] Li, Z., Wen, G., Duan, Z., & Ren, W. (2014年). 有向图上线性多智能体系统的全分布式一致性协议设计. IEEE自动控制汇刊, 60(4), 1152-1157. [15] Liu, W., & Huang, J. (2017年). 具有有向切换网络的一类高阶非线性多智能体系统的自适应领航者跟随一致性. Automatica, 79, 84-92. [16] Mondal, S., Su, R., & Xie, L. (2017年). 利用滑模控制实现具有不匹配不确定性的高阶多智能体系统的异构一致性. 《国际鲁棒与非线性控制杂志》, 27(13), 2303-2320. [17] Guo, X. G., Tan, D. C., Ahn, C. K., & Wang, J. L. (2022年). 具有ANAS和积分二次约束的非线性领航者跟随多智能体系统的全分布式自适应容错滑模控制. IEEE控制论汇刊, 52(5), 2763-2774. [18] Zhang, H., Zhang, J., Yang, G. H., & Luo, Y. (2014年). 基于模糊自适应动态规划的多智能体微分博弈一致性问题的领航者最优协调控制. IEEE模糊系统汇刊, 23(1), 152-163. [19] Liu, W., & Huang, J. (2017年). 联合连通切换网络下非线性二阶多智能体系统的协作自适应输出调节. IEEE神经网络与学习系统汇刊, 29(3), 695-705. [20] Han, J. (2009年). 从比例-积分-微分控制到自抗扰控制. IEEE工业电子学汇刊, 56(3), 900-906. [21] Li, S., Yang, J., Chen, W. H., & Chen, X. (2014年). 扰动观测器控制：方法与应用. CRC出版社, 博卡拉顿. [22] Wang, C., Zuo, Z., Qi, Z., & Ding, Z. (2018年). 具有时延和扰动的多智能体系统一致性的基于预测器的扩张状态观测器设计. IEEE控制论汇刊, 49(4), 1259-1269. [23] Zou, A. M., Liu, Y., Hou, Z. G., & Hu, Z. (2022年). 多智能体系统实用预定义时间输出反馈一致性跟踪控制. IEEE控制论汇刊, 提前访问, 2022年10月6日, doi: 10.1109/TCYB.2022.3207325.[24] Li, M., Wu, Z. H., Deng, F., & Guo, B. Z. (2022年). 二阶随机多智能体系统的一致性自抗扰控制. IEEE网络系统控制汇刊, 提前访问, 2022年10月11日, doi: 10.1109/TCNS.2022.3213710. [25] Hua, Y., Dong, X., Han, L., Li, Q., & Ren, Z. (2018年). 高阶多智能体系统的有限时间时变编队跟踪不匹配扰动。IEEE系统、人类与控制论汇刊：系统, 50(10), 3795-3803。[26] Yang, J., Su, J., Li, S., & Yu, X. (2013年)。基于连续动态滑模方法的运动控制系统高阶不匹配扰动补偿。IEEE工业信息学汇刊, 10(1), 604-614。[27] Chen, W. H. (2003年)。导弹的非线性扰动观测器增强动态逆控制。Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 26(1), 161-166。[28] Xue, W., & Huang, Y. (2014年)。关于一类多输入多输出下三角非线性不确定系统的自抗扰控制性能分析。ISA汇刊, 53(4), 955-962。[29] Guo, B. Z., & Wu, Z. H. (2017年)。通过自抗扰控制实现一类具有不匹配不确定性的非线性系统的输出跟踪。Systems & Control Letters, 100, 21-31。[30] Zhao, Z. L., & Guo, B. Z. (2017年)。具有失配不确定性的多输入多输出系统输出跟踪的新型扩张状态观测器。IEEE自动控制汇刊, 63(1), 211-218。[31] Chen, S., & Chen, Z. (2020年)。关于具有测量不确定性的一类不确定系统的自抗扰控制。IEEE工业电子学汇刊, 68(2), 1475-1485。[32] Wu, Z. H., Deng, F., Guo, B. Z., Wu, C., & Xiang, Q. (2021年)。具有失配随机扰动的下三角非线性系统的反步自抗扰控制。IEEE系统、人类与控制论汇刊：系统, 52(4), 2688-2702。[33] Wang, X., Li, S., & Lam, J. (2016年)。具有不匹配扰动的高阶多智能体系统的分布式主动抗扰输出一致性算法。Automatica, 74, 30-37。[34] Wang, X., Li, S., & Chen, M. Z. (2017年)。受不匹配扰动影响的领导者-跟随者高阶非线性多智能体系统的复合反步一致性算法。IEEE控制论汇刊, 48(6), 1935-1946。[35] Yang, Y., Si, X., Yue, D., & Tan, J. (2020年)。具有通信时延的不确定非仿射非线性多智能体系统的时变编队跟踪。IEEE工业电子学汇刊, 68(3), 2501-2509。[36] Ran, M., & Xie, L. (2021年)。有限数据率下非线性异构多智能体系统的实际输出一致性。Automatica, 129, 109624。[37] Cheng, D., Hu, X., & Shen, T. (2010年)。非线性控制系统分析与设计。科学出版社。