事件触发通信的能量与带宽效率

Christopher Willuweit、Carsten Bockelmann、Armin Dekorsy 通信工程系，不来梅大学，德国不来梅 电子邮件：{willuweit, bockelmann, dekorsy}@ant.uni-bremen.de

arXiv:2303.01783v1 [eess.SP] 3 Mar 2023

摘要—**无线传感器节点需要大幅降低技术复杂度，以满足未来应用的约束。降低复杂度往往会导致能量与带宽效率下降。一种有望同时降低技术复杂度和能量消耗的有趣新方法是事件触发通信（EBC）。尽管此类系统的实用低复杂度实现方案已被提出，但其能量与带宽效率这一总体问题仍有待解决。本文比较了EBC与依赖经典均匀采样的系统在这两方面的表现。我们表明，EBC的能量效率确实高得多，但这是以带宽效率为代价的。因此，EBC尤其适合与超宽带通信相结合。**

关键词—**低功耗无线传感器、低复杂度无线传感器、事件触发采样、事件触发通信、能量效率、带宽效率**

I. 引言

无线传感器网络（WSN）广泛应用于当今许多科研和商业领域，例如物联网；在这些领域中，需要在空间的不同位置测量和处理信号。感知实体——传感器节点——以无线方式进行通信，从而避免了布线需求。传感器节点的典型要求包括尺寸小、生产成本低以及能量效率高 [1], [2]。前两点可以通过降低技术复杂度来实现，因为所需的芯片面积会同时影响传感器节点的尺寸和价格。然而，这种降低往往以牺牲能量与带宽效率为代价。例如，模拟传输仅用一个晶体管就能实现，但出于对能量与带宽效率等因素的考虑，这类系统早已被数字系统取代。

在模拟测量信号与数字域之间的接口处，最先进的传感器节点基于 Whittaker-Shannon-Kotelnikov（WSK）采样定理。当测量信号除了带限特性之外还具有更多结构时，通常会采用针对特定信号的数字信源编码来压缩待传输的数据。但一般而言，数字信号处理的复杂度非常高，也就是说，用于无线感知的片上系统往往含有数百万个晶体管 [3]。目前，许多研究领域致力于在采样时直接捕获信号结构，例如模拟信息转换或压缩感知 [4]。另一种在低于 WSK 速率的情况下捕获信号结构的有趣方法是事件触发采样（EBS） [5], [6]。对于结构化信号，它能够实现远低于 WSK 速率的采样率。已有初步研究尝试将 EBS 框架与通信相结合，实现事件触发通信（EBC） [7], [8]。除了采样之外，与最先进的方法（如多载波传输）相比，通信硬件的复杂度也显著降低。当然，也可以设想一种基于 WSK、且技术复杂度已降至最低的传感器节点。那么，EBC 是否仍不仅复杂度更低，而且比这种精简后的 WSK 节点更节能、带宽效率更高？本文将回答这一问题。

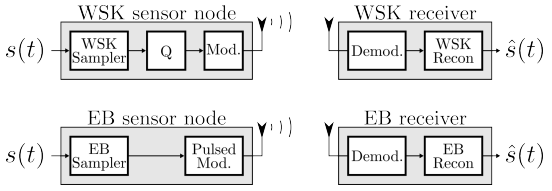

图1：我们所比较的两种用于无线感知的低复杂度系统。上图：采用WSK采样、量化（Q）和数字调制的数字通信系统。下图：所提出的事件触发通信（EBC）系统，使用事件驱动采样器生成非均匀采样，并将其直接调制到传输脉冲上。

图1展示了这两种方法的结构。WSK方案由均匀采样器和量化器组成。所得比特随后被调制到符号上。EBC方案由事件驱动采样器组成，用于生成非均匀采样，随后将其调制到符号上。由于这些符号的时间间隔不均匀，我们称其为脉冲。在两种方案中，相应的接收机都会估计测量信号。

我们将首先分析众多可能的事件触发采样器中，哪些适用，以及它们对通信信号的影响。随后，我们将以公平的方式对 WSK 设置进行参数化，并比较两种设置对发射能量和带宽的需求。

本研究部分由德国联邦教育与研究部（BMBF）通过项目资助，项目编号为 16KIS1028（MOMENTUM）和 16KISK003K（Open6GHub）

A. 相关工作

本研究用于描述测量信号结构的信号类别最初由 [9] 提出，并在 [10]中得到进一步分析。控制领域推动了将这一信号类别与事件触发采样相结合的研究。 [6] 提供了关于信号采样、处理和重建的良好综述及具体技术。

我们采用的事件触发采样——增量发送（SOD）采样，已用于 [7] 中的无线感知。作者基于超宽带（UWB）频移键控提出了 EBC。然而，他们主要关注通信的实际实现，而较少研究信号结构对性能的影响。随后， [8] 和 [11] 通过事件触发纠错对该系统进行了扩展。

B. 贡献

在介绍可变带宽信号和事件触发采样的概念后，我们证明 SOD 采样器的两个采样之间存在最小时间间隔。我们证明，这不仅适用于经典的带限信号，也适用于可变带宽信号，并据此推导出关于 EBC 传输带宽的具体结论。

为展示该系统相较于经典方法的优势，我们提出一个基于 WSK 的低复杂度传感器节点作为对比。

事件触发方法尤其适用于带宽变化较大的信号。因此，我们提出一种测试信号类别，用于生成具有不同带宽变化的随机信号。

虽然 WSK 采样的完美重建广为人知，但事件触发方法并非如此。因此，我们提出了一种简单快速的重建方法。我们通过数值仿真比较了 WSK 与 EBC 方法的重建精度，以及所需的发射能量和带宽。

我们详细阐述带宽变化与所需采样数量之间的一般联系，进而说明其与能耗的关系。我们表明，事件触发通信在能量效率方面明显优于 WSK 系统，但代价是带宽效率较低。

II. 事件触发采样

经典 WSK 采样的基本思想是在等间隔的时间点对信号 $s(t)$ 进行采样。采样时刻仅在一定程度上取决于信号，即根据该信号的最高频率分量确定。相比之下，事件触发采样的采样时刻直接取决于信号。随后，这些采样可以被视为事件（例如，信号越过某个幅度阈值），这也是其名称的由来。采样方法种类繁多，其中大多数只需极少的硬件开销。

A. 信号模型

一种能够同时指出最佳采样和重建方式的信号框架是时间扭曲，它由 Clark、Palmer 和 Lawrence [9] 早在1985年就提出了这一方法。它是经典 WSK采样定理的扩展。我们从一个带限信号 $\tilde{s}(\tau)$ 开始:

$$\forall |f| > \tilde{B}: \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = 0. \tag{1}$$

我们定义一个单调递增的变形函数 $\gamma(t)$，并将信号 $s(t)$定义为

$$s(t) = \tilde{s}(\gamma(t)). \tag{2}$$

不失一般性，我们假设 $B = 1$。根据 WSK采样定理，我们知道，可以从其在 $\tau_n = \frac{n}{2}$， $n \in \mathbb{N}$处的均匀采样中完美重构 $\tilde{s}(\tau)$。因此，当已知 $\gamma(t)$时，我们也可以从其在 $t_n = \gamma^{-1}(\tau_n)$处的采样中重构 $s(t)$。除变形函数为线性的特殊情况外，这些采样在 t中并非均匀分布，而是集中在 $\delta\gamma_{(t)\ \delta t}$ 较大的区域，并且在 $\delta\gamma_{(t)\ \delta t}$ 较小的区域较为稀疏。因此，局部采样率与 $\gamma(t)$ 的导数成正比。由于在经典 WSK 采样中，信号带宽与采样率成正比，这引出了对瞬时带宽的定义

$$W(t) := \frac{1}{2} \frac{\delta\gamma(t)}{\delta t}, \tag{3}$$

其始终为正。我们将以这种方式定义的信号 $s(t)$称为变带宽信号。

请注意， $W(t)$ 的定义与傅里叶积分所定义的信号带宽（如式（1）所示）截然不同。除非 $W(t)$ 是常数函数，否则可变带宽信号的带宽为无穷大B 。然而，最大瞬时带宽为$W_{\max} := \max_{t\in\mathbb{R}} W(t)$ 的可变带宽信号，可以用带宽为 $B = W_{\max}$ 的经典带限信号来近似。

时间扭曲表明，许多信号可能只需比 WSK 定理所指出的更少的采样即可表示。描述信号 s 每秒所需的采样数，不由 $W_{\max}$ 决定，而由平均瞬时带宽$W(t)$ 决定。一旦 $W(t) < W_{\max}$，该信号的自由度就会少于在 $2 \cdot W_{\max}$ 处通过 WSK 采样生成的采样数，因此它具有带限性之外的结构。关于这一概念的更多内容，请参阅 [9]和 [6]。

此外，我们假设测量信号的幅度有界

$$|s(t)| < s_{\max}, \tag{4}$$

这是现实世界信号的自然特征。我们需要这个界限 $s_{\max}$ 来计算 WSK 系统的量化误差；并且在后续章节中可以看到，它也为我们提供了有关 EBC 系统传输带宽的重要信息。

B. 基于增量触发的采样

如果我们希望对带宽变化信号进行采样和重建，就会面临两个问题：首先，必须知道瞬时带宽 $W(t)$，才能进行重建。其次，很难想象一种能够恰好以 $W(t)$ 进行采样的实用采样器。而

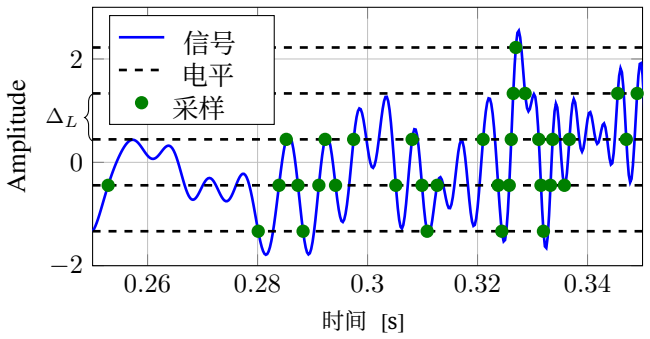

图 2：一个变带宽信号 $s(t)$（蓝色曲线）的示例。其瞬时带宽（在图3中突出显示）在此处所示的时间范围内单调递增。图中还显示了生成的 SOD 电平（带有 $\Delta_L = \frac{8}{9}$ 的虚线）和 SOD 采样值（绿色）。可以看出，SOD 采样值的密度随瞬时带宽增加。

在 [5] 中，研究表明，只要采样器生成的瞬时采样率与瞬时带宽成正比，就足以实现信号重建。作者以所谓的电平交越采样器为例进行了说明。当信号 $s(t)$ 穿过若干预定义的幅度电平时，这些采样器便对其进行采样。然而，出于第三章中所解释的原因，电平交越采样器并不适用于我们提出的低复杂度事件触发通信。相反，我们采用与其高度相关的 SOD 采样器。

SOD 采样这一概念应用于许多不同领域，从信号理论到计算机科学。在通信领域，它尤其应用于不同的抽象层次，因此 SOD 一词含义非常模糊。为明确起见，我们将描述 SOD 的定义：首先，定义一组间距为 Δ_L 的等间距幅度电平。信号首次穿越某个电平时，将在穿越点生成一个采样值。之后，当信号穿越相邻的两个电平之一时，触发下一个采样值。因此，当信号幅度与上一个采样值之间的距离达到 Δ_L 时，就会生成采样值。这一过程在图2中通过一个变带宽信号示例加以说明。将生成的采样值与信号的瞬时带宽（见图3）进行比较，可以看出，采样值的密度随瞬时带宽增加。这正是上一段所述的行为。

SOD 采样值可以用一种非常高效的方式编码：只需记录当前采样值比上一个采样值高一级还是低一级，因此每个采样值只需一位。这也是 EBC 名称的由来：信号不是用采样值表示，而是用事件表示（例如，信号增加了 Δ_L）。显然，如果信号至少一次跨越所有级别（这是本文的假设），就可以根据事件序列唯一地推导出实际采样值。

C. 有界信号的事件

Bernstein-Zygmund定理 [12] 表明，有界带限信号也具有有界导数。将其应用于我们的信号模型，意味着：

$$\left|\frac{\delta\tilde{s}(\tau)}{\delta\tau}\right| \leq 2\pi\tilde{s}_{\max}\tilde{B}, \tag{5}$$

其中，$\tilde{B}$ 是 $\tilde{s}$ 相对于 τ 的带宽，而 $\tilde{s}_{\max}$是其最大幅值。在附录中，我们给出证明：变带宽有界信号$s(t)$的导数同样有界：

$$\left|\frac{\delta s(t)}{\delta t}\right| \leq 2\pi s_{\max} W(t). \tag{6}$$

这是一个有趣的结果，因为如前所述，变带宽信号在经典意义上并非带限信号。尽管如此，伯恩斯坦-齐格蒙德不等式仍然成立。对于本文后续内容，所有 t 上的全局界已足够：

$$\left|\frac{\delta s(t)}{\delta t}\right| \leq 2\pi s_{\max} W_{\max}. \tag{7}$$

我们可以直接据此得到两个SOD事件之间时间间隔的下界 T_{LB}，因为信号的变化速率有界，因此它需要一定时间才能跨越所需的幅度距离 Δ_L 并触发两个连续采样：

$$T_{\mathrm{LB}} \geq \frac{\Delta_L}{2\pi s_{\max} W_{\max}}. \tag{8}$$

III. 事件触发通信

正如引言中所述，我们的目标是在事件发生后立即通过发射脉冲来传输这些事件。本章不关注这些脉冲的具体细节，而是结合SOD讨论脉冲传输的一些一般性思路：

- 每个脉冲都必须具有一定的能量才能被检测到。
- 相邻脉冲之间必须保持最小间隔，才能彼此区分。

脉冲要能够被检测到，其能量必须高于噪声底。我们假设，EBC系统的脉冲（每个脉冲代表一个以单比特编码的SOD采样）要达到可检测的程度，所需能量与WSK系统的符号相同。当然，只有当WSK系统每个符号也仅传输一个比特时，这一假设才成立。因此，我们假设WSK每个采样必须传输 N_{bits} 个符号，从而得到符号率 $r_{\mathrm{symbol}} = N_{\mathrm{bits}} \cdot f_s$。这样，我们便建立了可比性，无需在基带分析这两个系统。根据WSK和EBC系统单位时间内生成的采样数量，我们可以直接比较所需的发射功率，而无需知道所需的具体符号能量或脉冲能量。因此，我们将相对发射功率定义为EBC系统的事件率与WSK系统的符号率之比：

$$p_{\mathrm{rel}} = \frac{r_{\mathrm{event}}}{r_{\mathrm{symbol}}} = \frac{r_{\mathrm{event}}}{N_{\mathrm{bits}} \cdot f_s}. \tag{9}$$

为了计算EBC系统的相对传输带宽，我们分析WSK符号和EBC脉冲的持续时间。WSK符号的持续时间为 $\frac{1}{N_{\text{bits}} f_s}$。EBC系统的脉冲速率会变化。尽管如此，为了降低EBC的硬件复杂度，我们假设脉冲持续时间固定。因此，我们必须设计脉冲持续时间，使其不超过给定测量信号中两个事件之间的最小时间间隔 $T_{\min}$ ，以防止连续脉冲之间发生干扰。如上一章所示，该间隔的下限为 T_{LB}。由于脉冲持续时间与其带宽成反比，我们可以在不指定具体脉冲形状的情况下，再次推导EBC的相对传输带宽：

$$b_{\text{rel}} = \frac{1}{T_{\min} \cdot N_{\text{bits}} \cdot f_s}, \tag{10}$$

在最坏情况下， $T_{\min} = T_{\text{LB}}$ 相对传输带宽不能小于

$$b_{\text{rel,worst}} = \frac{1}{T_{\text{LB}} \cdot N_{\text{bits}} \cdot f_s} = \frac{2\pi s_{\max} W_{\max}}{\Delta_L N_{\text{bits}} f_s}. \tag{11}$$

有关不同步且部分重叠的发射脉冲的可检测性的更多内容，请参阅 [13]。

A. 重建

WSK采样的重建算法广为人知，参见例如 [14]。基于事件的采样有许多不同的重建方法，其中许多是针对特定信号类别设计的，例如用于心电图（ECG）信号的方法 [15]。关于带宽变化信号的一种更通用的方法，见 [5]。由于这些方法通常复杂度较高，我们采用一种不同且更简单的方法，它完全不依赖信号类别：我们仅对由 SOD事件导出的 SOD 采样值进行线性插值。因此，本文所示EBC系统的所有性能都应视为最坏情况性能；采用更复杂的重建方法很可能会取得更好的表现。另一方面，我们始终会选择 WSK系统的参数，以实现最佳性能。

IV. 数值仿真

A. 测试信号

为了比较 EBC 和 WSK 的性能，我们需要生成可变带宽测试信号。为便于在能量与功率之间转换，我们将信号长度设为 1 秒。首先，我们确定测试信号的瞬时带宽 $W(t)$。由于我们希望改变信号的结构性，因此应将平均瞬时带宽 W 作为参数。此外，信号应平滑变化、始终为正，且其最大值 $W_{\max}$ 应与 W无关。因此，我们选用一个偏置高斯函数，其中 $W_{\max} = 1\text{kHz}$。高斯函数的标准差任意设为信号持续时间的十分之一，即 100 毫秒：

$$W(t) = \frac{4}{3}(\overline{W} - 250) + \left(\frac{4000}{3} - \frac{4}{3}\overline{W}\right) \cdot e^{-\frac{(t-0.5)^2}{0.02}}. \tag{12}$$

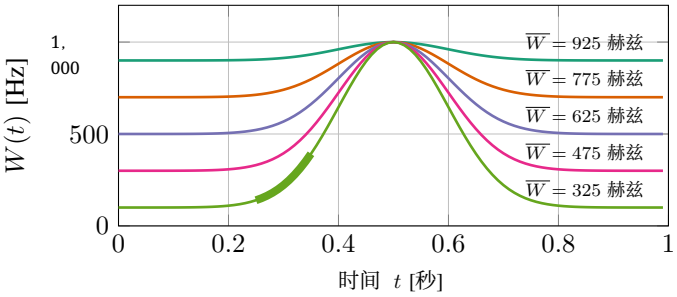

图3：具有五种不同平均瞬时带宽的瞬时带宽 W，用于生成我们的测试信号。下方图表中高亮显示的区域对应于图2中示例信号的瞬时带宽。

使用这些参数，平均瞬时带宽被限制为

$$250\,\text{Hz} < \overline{W} < 1000\,\text{Hz}. \tag{13}$$

在本文中，我们分析五种不同的 $\overline{W}$：[325,475,625,775,925] 赫兹。相应的 $W(t)$ 如图3所示。

现在，我们必须为振幅分配一个数量（见 II-A 节），其由 $2W$ 给出。我们从标准正态分布 $\mathcal{N}(0, 1)$ 中选择这些振幅，从而得到平均功率为 1 的信号 $s(t)$。为确保有界性，我们仅考虑满足 $|s(t)| \leq s_{\max} = 4$ 的实现。

B. 参数化

WSK系统有两个自由参数：采样频率 f_s 和量化的每样本位数 N_{bits}。在进行WSK采样之前，对 $s(t)$应用截止频率为 $\frac{f_s}{2}$ 的抗混叠低通滤波器[1]。采样频率设置在低于和高于 $2 \cdot W_{\max}$ =2 kHz的范围内，以涵盖欠采样和过采样：

$$f_s = 2 \cdot W_{\max} \cdot N_{\text{os}},\ N_{\text{os}} \in [0.2, 0.3, ..., 1.9, 2]\,. \tag{14}$$

量化参数 N_{bits} 选定为

$$N_{\text{bits}} \in [3, 4, ..., 8]\,. \tag{15}$$

EBC系统只有一个参数，即级间距Δ_L。我们确定了该参数的以下取值范围，使其产生的速率与WSK系统的速率相近：

$$\Delta_L = \frac{2s_{\max}}{(N_L - 1)} = \frac{8}{N_L - 1},\ N_L \in [10, 15, ..., 95, 100]\,, \tag{16}$$

其中， N_L 表示信号幅度范围内的级数（-4 至4）。

[1]巴特沃斯设计，8 阶

C. 评估

所有结果均基于对五种不同瞬时带宽 $W(t)$ 中每种随机选取的 $M = 100$ 个测试信号 $s_m(t)$ $m \in [1, ..., M]$ 取平均得出。为获得能量与带宽效率的最终结果，我们使用 WSK 的 N_{bits} 和 f_s 参数的 114 种不同组合，以及 EBC 的 20 种不同 Δ_L，对每个测试信号进行采样和重构。

WSK系统的符号率可通过 $r_{\text{symbol}} = N_{\text{bits}} \cdot f_s$ 解析计算得出。EBC系统的事件率则通过数值方法进行评估。由于观测时间间隔为一秒，我们只需计算全部 100 次实现中发生事件数的平均值。两个事件之间的最小间隔也同样如此，该间隔将用于计算传输带宽。

为了计算误差，我们采用重建信号 $\hat{s}_m(t)$ 的归一化均方误差（NMSE）

$$\text{NMSE} = \frac{1}{N \cdot M} \sum_{m=1}^{M} \sum_{n=0}^{N} \frac{|s_m(n/N) - \hat{s}_m(n/N)|^2}{|s_m(n/N)|^2} \quad (17)$$

对于 $M = 100$ 个信号实现和 $N = 16000$ 个时间点，这对应于相对于 W_{max} 的 8 倍过采样因子。

当 $W = 475$ 赫兹时，两个系统的性能如图4所示。可以看出，对于这个平均瞬时

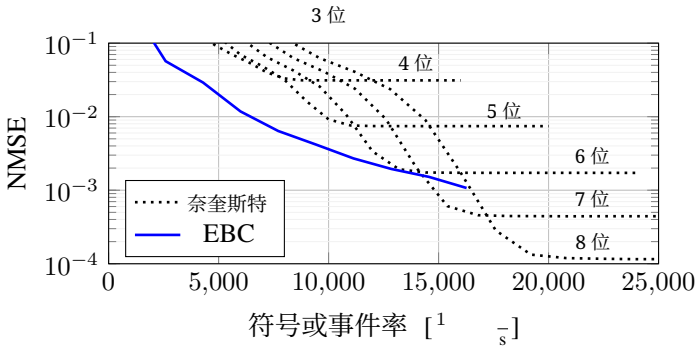

图 4：当 $W = 475$赫兹时，WSK 和 EBC 的性能。通过改变 Δ_L和 f_s，可获得不同的符号率和事件率。

带宽方面，在某些归一化均方误差和速率范围内，EBC 优于 WSK。在接下来的传输功率和带宽分析中，我们选择能在给定归一化均方误差下实现最低符号率的 WSK 参数 N_{bits}和 f_s，并将其与 EBC 的性能进行比较。对每个归一化均方误差分别进行此分析。例如，对于 10^{-1} 的归一化均方误差，我们选择 4 位量化器；对于10^{-3}的归一化均方误差，则选择 7 位量化器。

V. 结果

A. 能量效率

图 5 展示了 EBC 系统的相对发射功率。可以看出，在最低的 W 下，EBC 所需的功率

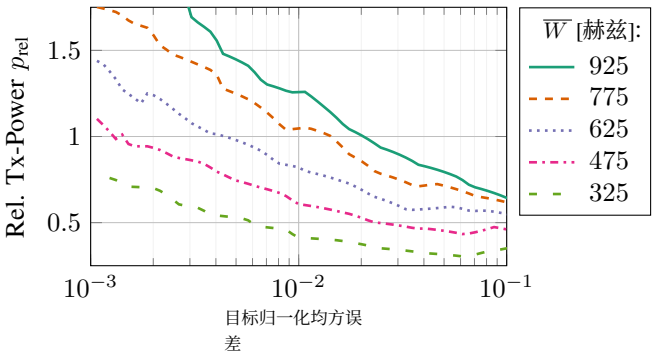

图5：EBC系统的相对发射功率随平均瞬时带宽 W的变化。

不到 WSK 传输功率的一半，适用于归一化均方误差在 $6 \cdot 10^{-3}$ 至 $3 \cdot 10^{-1}$ 之间的情况。随着平均瞬时带宽 W 增大，EBC 的优势会减弱。若不大幅增加功耗，EBC 无法达到非常低的归一化均方误差。这当然也与本文所用的重建算法较为简单有关。

B. 带宽效率

图6展示了相对传输带宽 b_{rel} 。这些带宽基于所有测试信号中两个SOD事件之间的平均最小间隔T_{min} 。为清晰起见，未显示最坏情况下的带宽$b_{\text{rel, worst}}$，但其约为 b_{rel} 的两倍。性能-

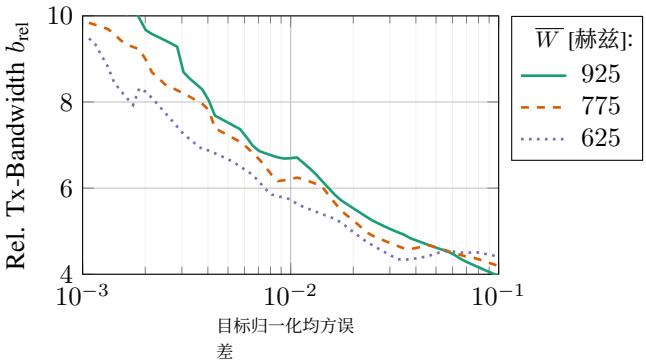

图 6：EBC系统的相对传输带宽与平均瞬时带宽 W 的关系。由于 $W = 475$ 和 $W = 325$ 的性能与 $W = 625$ 非常接近，因此未显示。

对于结构化程度更高的信号（平均瞬时带宽 W 更小），性能略有提升。尽管如此，相对传输带宽明显大于 1，这使得 EBC 的带宽效率低于 WSK方案。我们认为，即便采用好得多的重建算法，EBC系统也不太可能达到 WSK系统的带宽效率。

VI. 结论

通过 EBC，我们提出了一种低复杂度的替代方案，可替代当前广泛采用的基于 WSK 的无线感知。

然而，除了传感器节点的复杂度外，其能量与带宽效率也起着重要作用，而这两方面我们都进行了考察。

我们已经证明，EBC系统的能量效率远高于WSK系统，尤其是在测量信号具有高度结构化特征时。仅凭我们使用的非常简单的重建算法，就已能清楚看出这一点。我们预计，更复杂的重建算法能够显著提升这一性能。能量效率的提高是以带宽效率为代价的，因此该系统对于超宽带通信尤其具有吸引力，因为在这种通信中，带宽效率所起的作用较小。

附录

VBW函数的导数有界

假设函数 $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$：$\tilde{s}(\tau)$ $\tau \in \mathbb{R}$，且 $\tilde{s}(\tau)$˜ 的带限范围为 B：

$$\forall |f| > \tilde{B}: \quad \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{s}(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = 0 \tag{18}$$

且其振幅有界于 $\tilde{s}_{\max}$：

$$\forall \tau \in \mathbb{R}: \ |\tilde{s}(\tau)| < \tilde{s}_{\max}. \tag{19}$$

根据 Bernstein-Zygmund 定理 [12] 可知，$\tilde{s}(\tau)$ 的导数有界：

$$\left| \frac{\delta \tilde{s}(\tau)}{\delta \tau} \right| \leq 2\pi \tilde{s}_{\max} \tilde{B}. \tag{20}$$

设 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ：$W(t)$ 是一个严格正且有界的函数：

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ 0 < W(t) < W_{\max}. \tag{21}$$

因此，其原函数 $\gamma(t)$ 是一个严格单调递增且可微的函数：

$$\gamma(t) = \int_{-\infty}^{t} W(t')dt' \ \Leftrightarrow \ \frac{\delta \gamma(t)}{\delta t} = W(t). \tag{22}$$

设函数 $s(t)$ 是 $\tilde{s}(\tau)$ 经时间扭曲（使用 $\gamma(t)$）得到的版本：

$$s(t) = \tilde{s}(\gamma(t)). \tag{23}$$

注意，$\tilde{s}(\gamma(t))$ 仅相对于 γ 带限，不一定相对于 t 带限。由于时间扭曲不会改变振幅，$s(t)$ 也有界：

$$\forall t \in \mathbb{R}: \ |s(t)| < s_{\max} = \tilde{s}_{\max}. \tag{24}$$

我们使用求导的链式法则：

$$\frac{\delta s(t)}{\delta t} = \frac{\delta \gamma(t)}{\delta t} \cdot \frac{\delta \tilde{s}(\gamma)}{\delta \gamma}. \tag{25}$$

我们知道，由于其单调递增，$^{\delta \gamma_{(t)}}{}_{\delta t} > 0$。因此，我们可以将导数的绝对值表示为：

$$\left| \frac{\delta s(t)}{\delta t} \right| = \left| \frac{\delta \gamma(t)}{\delta t} \right| \cdot \left| \frac{\delta \tilde{s}(\gamma)}{\delta \gamma} \right|. \tag{26}$$

$\gamma(t)$ 的导数等于 $W(t)$（方程 (22)）。由于其严格为正（方程 21），其绝对值也等于 $W(t)$。因此，

$$\left| \frac{\delta s(t)}{\delta t} \right| = W(t) \cdot \left| \frac{\delta \tilde{s}(\gamma)}{\delta \gamma} \right|. \tag{27}$$

根据伯恩斯坦–齐格蒙德界，右侧因子有界，因为 $\tilde{s}(\gamma)$ 有界且相对于 γ 带限：

$$\left| \frac{\delta \tilde{s}(\gamma)}{\delta \gamma} \right| \leq 2\pi s_{\max} \tilde{B}. \tag{28}$$

˜当我们对 $B = 1$ 进行归一化时，

$$\left| \frac{\delta s(t)}{\delta t} \right| \leq 2\pi s_{\max} \cdot W(t) \qquad \blacksquare \tag{29}$$

参考文献

[1] V.C. Gungor 和 G.P. Hancke。“工业无线传感器网络：挑战、设计原则和技术方法。”《IEEE工业电子汇刊》56.10（2009）：4258-4265。[2] H.M.A. Fahmy，《无线传感器网络》，瑞士 Cham：施普林格，2016 5 6 。第 - M. Healy、T. Newe 和 E. Lewis，“无线传感器节点硬件：综述”，载于《IEEE传感器会议论文集》[3] *2008*，2008，621 624 意大利莱切，第 - M. Verhelst 和 A. Bahai。“模拟与数字的交汇：模拟到信息转换及其发展。”《IEEE固态电路杂志》7.3（2015）：67-80。[4] [5] D. Rzepka、D. Ko´scielnik 和 M. Mi´skowicz，“电平穿越采样中变带宽信号的恢复”，《2014年IEEE新兴技术与工厂自动化会议论文集》，2014年，第1-6页，doi：10.1109/ETFA.2014.7005071。[6] M. Miskowicz 编，《事件触发控制与信号处理》，博卡拉顿：CRC出版社，2016年。[7] Hu、Q.、Yi、C.、Kliewer、J.和Tang、W.（2015年8月）。用于无线传感器的超宽带脉冲无线电异步通信。载于《2015年IEEE第58届国际中西部电路与系统研讨会（MWSCAS）》（第1-4页）。IEEE。[8] C. Yi 和 J. Kliewer，“基于迭代处理的异步通信纠错”，载于《第50届阿西洛马信号、系统与计算机会议》，美国阿西洛马，2016年，第240-244页，doi：10.1109/ACSSC.2016.7869033。[9] Clark、J.、M. Palmer 和 P. O. Lawrence。“从非均匀间隔样本重构函数的变换方法。”《IEEE声学、语音与信号处理汇刊》33.5（1985）：1151-1165。[10] D. Wei，《基于局部带宽的采样》。硕士论文，麻省理工学院，波士顿，[11] 2006 C. Yi 和 J. Kliewer，“异步通信纠错”，《2016年第9届国际Turbo码与迭代信息处理研讨会（ISTC）》，2016年，第310-314页，doi：10.1109/ISTC.2016.7593127。[12] A.M. Pinsky，《傅里叶分析与小波导论》，第102卷。美国数学学会，2008 122 124 。第 - C. Willuweit、C. Bockelmann 和 A. Dekorsy，“面向超低复杂度无线传感器节点的硬件偏移多用户检测”，载于 *2022* 2022《IEEE Globecom研讨会》[13] [14] A.I. Zayed，《香农采样理论进展》。CRC出版社，1993年。第[15] N. Ravanshad、H. Rezaee-Dehsorkh、R. Lotfi 和 Y. Lian，“一种基于电平穿越的可穿戴心电传感器QRS检测算法”，载于《IEEE生物医学与健康信息学杂志》，第18卷，第1期，第183-192页，2014年1月，doi：10.1109/JBHI.2013.2274809。