arXiv:2303.01790v2 [math.PR] 1 Aug 2024

划分集合的新组合恒等式及有限自由概率中的极限定理

OCTAVIO ARIZMENDI、KATSUNORI FUJIE 和 YUKI UEDA

Abstract. 我们为 $\{1,\dots,n\}$ 的划分集合给出一个精细的组合恒等式，这一恒等式在研究与有限自由卷积相关的若干极限定理时发挥着重要作用。首先，我们提出 Sakuma 和 Yoshida 极限定理的有限自由类比。也就是说，我们给出了在两种情形下，当 $m\to\infty$ 时 $\{D_{1/m}((p_d^{\boxtimes_d m})^{\uplus_d m})\}_{m\in\mathbb{N}}$ 的极限：(i) 对某个 $t>0$， $m/d\to t$；或 (ii) $m/d\to 0$。第二项应用给出了有限自由乘法卷积的中心极限定理。我们通过组合恒等式，建立了该定理与乘法自由半圆分布之间的联系。最后，我们针对 Kabluchko 关于酉厄米多项式和拉盖尔多项式的极限定理给出了另一种证明。

1. Introduction

20世纪80年代，Voiculescu 创立了自由概率论，以解决算子代数自由积中的问题。这一理论中最重要的概念之一是自由独立性；这一概念已在算子代数和随机矩阵中得到重要应用（例如参见 [21, 23, 27] 及其中的参考文献）。

近年来，Marcus、Spielman 和 Srivastava [19]在研究交错多项式理论的各种推论时，引入了有限自由概率。顾名思义，该理论在多项式卷积、自由概率论（参见 [18]）和随机矩阵（参见 [19]）之间建立了联系。这一理论中的两个重要概念是多项式的有限自由加法卷积和乘法卷积。

关于有限自由卷积的极限定理以及有限自由概率中的组合结构，近年来已取得了特别显著的进展（例如参见 [1, 2, 14, 15, 18]）。本文为有限自由卷积的极限定理及其与自由概率论之间的联系提供了新的见解。在证明这些定理的过程中，我们发现了一系列关于划分之和的组合恒等式，这些恒等式本身也可能具有独立的研究价值。特别是，这些恒等式使我们能够仅使用组合工具，为 Kabluchko [14, 15]近期得到的结果提供新的证明。

1.1. 记号。令 $\mathbb{C}[x]$ 为所有复系数多项式的集合。对于表示为 $f(x)=a_dx^d+\cdots+a_1x+a_0$ $(a_d\neq 0)$ 的多项式 $f\in\mathbb{C}[x]$，我们定义 $\deg(f):=d$，以及 $\operatorname{lead}(f):=a_d$。若多项式 $f\in\mathbb{C}[x]$ 满足 $\operatorname{lead}(f)=1$，则称其为首一多项式。此外，若 $f\in\mathbb{C}[x]$ 的所有根都属于 $\mathbb{R}$，则称其为实根多项式。本文中常用 $\mathbb{C}[x]$ 的以下子集：

- $\mathbb{C}[x]_0:=\{f\in\mathbb{C}[x]\mid f(0)=0\}$；
- $\mathbb{P}_{\text{单首项系数}}(d):=\{p\in\mathbb{C}[x]\mid p$ 是首一多项式，且 $\deg(p)=d\}$。

本文中，对于次数为 d 的多项式 p，我们使用以下记号。

- 对于表示为 $p\in\mathbb{C}[x]$ 的情形

$$p(x)=\sum_{i=0}^{d}a_ix^{d-i},$$

使用以下记号通常会更方便

$$\widetilde{a}_i(p) := (-1)^i \binom{d}{i}^{-1} a_i, \qquad i = 0, 1, \ldots, d,$$

然后 p可以表示为

$$p(x) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \binom{d}{i} \widetilde{a}_i(p) x^{d-i}. \tag{1.1}$$

- $p(x) = \prod_{k=1}^{d}(x - \lambda_k)$ 的经验根分布是一个概率测度

$$\mu[\![p]\!] := \frac{1}{d} \sum_{k=1}^{d} \delta_{\lambda_k}.$$

- 对于 $c \neq 0$, $p \in \mathbb{P}_{首一}(d)$ 的伸缩定义为 $D_c(p)(x) := c^d p(x/c)$。
- 对于一个具有非负根的首一多项式 $p(x) = \prod_{k=1}^{d}(x - \lambda_k)$,

$$\phi_\alpha(p)(x) := \prod_{k=1}^{d}(x - \lambda_k^\alpha), \qquad \alpha > 0. \tag{1.2}$$

1.2. 主要结果。下面介绍本文的主要结果。首先，我们推导出一个关于划分求和的新的组合恒等式。

定理 **1.1**。考虑多项式 $f_1, \ldots, f_k$，使得 $f_i \in \mathbb{C}[x]_0$，其中 $\deg(f_i) = m_i$，对 $i = 1, \ldots, k$ 均成立。于是

(1.3)

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{V \in \pi} f_i(|V|) \right) \mu_n(\pi, 1_n) = \begin{cases} (n-1)! n^{k-1} \prod_{i=1}^{k} m_i \mathrm{lead}(f_i), & n = \sum_{i=1}^{k} m_i - (k-1), \\ 0, & n > \sum_{i=1}^{k} m_i - (k-1), \end{cases}$$

其中，$\mathcal{P}(n)$表示 $[n]$ 的所有划分构成的集合，且 $1_n := \{\{1, \ldots, n\}\} \in \mathcal{P}(n)$，$\mu_n$ 是 $\mathcal{P}(n)$上的M¨obius函数，详情见第2.1节。

该公式在研究下文概述的三个极限定理（定理1.2、1.3和1.4）中起着至关重要的作用，这些定理建立了有限自由概率与自由概率之间的联系。

接下来，我们给出 Sakuma 和 Yoshida 结果 [24], 的有限自由类比，该结果是一个涉及有限自由乘法卷积和加法卷积的极限定理。要准确阐述这一问题，有必要详细描述 [24] 中的研究结果。设 μ 是 $[0, \infty)$上的一个具有二阶矩且不是 δ_0的概率测度。令 $s := 1/m_1(\mu) > 0$ 并且$\alpha = \mathrm{Var}(\mu)/(m_1(\mu))^2$。那么，Sakuma 和 Yoshida 在 [24, 定理9和 11] 中证明，存在 $[0, \infty)$ 上的一个概率测度 η_α，使得

$$D_{s^m/m}((\mu^{\boxtimes m})^{\boxplus m}) \xrightarrow{w} \eta_\alpha, \tag{1.4}$$

其中，对于集合 $\mathbb{R}$ 上的概率测度 ρ，有 $D_c(\rho)(B) := \rho(cB)$；$c \neq 0$ 是 $\mathbb{R}$ 中的一个博雷尔集合；此外，$\xrightarrow{w}$ 表示弱收敛。另外，对于测度 η_α，有

$$\kappa_n(\eta_\alpha) = \frac{(\alpha n)^{n-1}}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N},$$

其中，$\kappa_n(\rho)$ 是概率测度 ρ 在 $\mathbb{R}$ 上的第 n 阶自由累积量。自由累积量是处理自由加法卷积和乘法卷积的重要组合工具（详情见 [23]）。

如 [2], 所述，可以为 $\mathbb{P}_{mon}(d)$ 定义有限自由累积量 $\{\kappa_n^{(d)}(p)\}_{n=1}^d \quad p \in$。这种方法可以从组合角度处理有限自由加法卷积 $\boxplus_d$ 。有限自由累积量的定义及其相关详细性质见第2.2节。这里，我们关注下列表达式的极限：

$$\kappa_n^{(d)}\left(D_{1/m}\left((p_d^{\boxtimes_d m})^{\boxplus_d m}\right)\right). \tag{1.5}$$

然而，可以观察到，当 d 固定时，(1.5) 的极限随着 $m \to \infty$ 趋于零（详见第4节）。为获得非平凡极限，我们在假设 $\mu[\![p_d]\!] \xrightarrow{w} \mu$ 随着 $d \to \infty$ 的条件下，考虑两种情形：(i) 对某个 $t > 0$， $m/d \to t$；以及 (ii) $m/d \to 0$。值得注意的是，情形 (i) 为 (1.5) 给出了一个非平凡极限，但它与 Sakuma 和 Yoshida 的极限分布的自由累积量（命题 4.1）并不一致。更重要的是情形 (ii)，此时极限与所需的自由累积量序列一致。现在我们给出第二个主要结果。

定理 1.2. 考虑具有非负根的 $p_d \in \mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$，使得 $\kappa_1^{(d)}(p_d) = 1$，并令 μ 为具有紧支撑的概率测度。假设当 $d \to \infty$ 时， $\mu[\![p_d]\!] \xrightarrow{w} \mu$ 。对于 $n \in \mathbb{N}$，有

$$\lim_{\substack{d,m\to\infty \\ m/d\to 0}} \kappa_n^{(d)}\left(D_{1/m}\left((p_d^{\boxtimes_d m})^{\boxplus_d m}\right)\right) = \frac{(\kappa_2(\mu)n)^{n-1}}{n!},$$

也就是说，该极限与 $\eta_{\kappa_2(\mu)}$ 的第 n 个自由累积量相同。

作为第三个主要结果，我们为具有非负根的多项式的有限自由乘法卷积建立了一个中心极限定理。此外，我们通过运用第一组组合恒等式（定理 1.1）探讨了它与自由概率之间的联系。

定理 1.3.（1）（中心极限定理）设 $d \geq 2$。假设 $p(x) = \prod_{k=1}^d (x - e^{\theta_k})$，使得 $\frac{1}{d}\sum_{k=1}^d \theta_k = 0$ 且 $\frac{1}{d}\sum_{k=1}^d \theta_k^2 = \sigma^2$。则有

$$\lim_{m\to\infty} \phi_{1/\sqrt{m}}(p)^{\boxtimes_d m} = I_d\left(x; \frac{d\sigma^2}{d-1}\right),$$

其中

$$I_d(x;t) := \sum_{k=0}^{d} (-1)^k \binom{d}{k} \exp\left(\frac{k(d-k)}{2d}t\right) x^{d-k}, \qquad t \geq 0.$$

（2）当 $d \to \infty$ 时，有

$$\mu[\![I_d(x;t)]\!] \xrightarrow{w} \lambda_t,$$

其中 λ_t 是乘法自由半圆分布（详细内容参见 [6, 命题 5] 或第5节）。

作为最后一个主要结果，我们再次利用第一组组合恒等式，为 Kabluchko 的两个极限定理给出另一种证明。

定理 1.4. (1) (Kabluchko [15]) 令 $H_d(z;t)$ 表示酉厄米多项式。那么我们有

$$\mu[\![H_d(z;t)]\!] \xrightarrow{w} \sigma_t, \qquad d \to \infty,$$

其中 σ_t 是自由酉正态分布（见 [6] 和 [4, 引理 6.3]） .

(2) (Kabluchko [14]) 令 $L_{d,\ m}(z)$ 表示酉拉盖尔多项式。那么我们有

$$\mu[\![L_{d,m}]\!] \xrightarrow{w} \Pi_t, \qquad d \to \infty,$$

其中 Π_t 是自由酉泊松分布（参见 [14]和 [4,引理 6.4]）。

1.3. 论文结构。本文其余部分包括五节和一个附录。在第 2 节中，我们回顾划分的基础知识和组合概念。此外，我们还介绍有限自由卷积和有限自由累积量的定义，并讨论它们的各种已知性质。此外，我们给出有限自由乘法卷积的有限自由累积量公式。在第 3 节中，我们证明定理 1.1 中提出的组合恒等式。在第4节中，我们考察 $D_{1/m}((p_d^{\boxtimes_d m})^{\boxplus_d m})$ 的极限行为，其中 $d, m \to \infty$ 分为两种情况：(i) $m/d \to t$ 适用于某个 $t > 0$，以及 (ii) $m/d \to 0$ （参见定理 1.2）。在第5节中，我们建立有限自由乘法卷积的中心极限定理。此外，我们还探讨其与自由概率的联系（参见定理 1.3）。在第6节中，我们给出 Kabluchko 的两个极限定理的另一种证明（参见定理 1.4）。第4–6节证明的关键在于运用由定理 1.1 推导出的组合公式。在附录 A 中，我们利用拉格朗日反演定理，计算乘法自由半圆分布 λ_t、自由酉正态分布 σ_t 和自由酉泊松分布 Π_t 的自由累积量。

2. Preliminaries

2.1. 偏序集上的莫比乌斯函数。本节总结偏序集上莫比乌斯函数的有用结果。偏序集（简称 poset）是配备了偏序的集合。更准确地说，若 P 是一个集合，且 $\leq$ 是 P 上的关系，即具有自反性、反对称性和传递性，则称有序对 $P = (P, \leq)$ 为偏序集。若偏序集 P 的元素个数有限，则称其为有限偏序集。

例 2.1. (1) 定义 $\mathcal{B}(n)$ 为 $[n]$ 的所有子集构成的集合。集合 $\mathcal{B}(n)$ 可配备如下偏序 $\leq$:

$$A \leq B \overset{\text{def}}{\iff} A \subset B \quad (A \text{ is a subset of } B),$$

对于 $A, B \in \mathcal{B}(n)$。因此，$\mathcal{B}(n) = (\mathcal{B}(n) \leq)$ 是一个有限偏序集。容易验证，$\mathcal{B}(n)$ 的最小元和最大元分别为 $\emptyset$ 和 $[n]$。

(2) 如果满足以下条件，我们称 $\pi = \{V_1, \ldots, V_r\}$ 为集合 $[n]$ 的一个划分：

(i) 对所有 $i = 1$、2、.....、r，V_i 都是 $[n]$ 的非空子集；(ii) 当 $i \neq j$时，$V_i \cap V_j = \emptyset$；(iii) $V_1 \cup \cdots \cup V_r = [n]$。

V_i 中的每个子集称为 π 的一个块，$|V_i|$ 表示 V_i中元素的数量，即 V_i的大小。

令 $\mathcal{P}(n)$ 表示 $[n]$中所有划分组成的集合。集合 $\mathcal{P}(n)$ 可以赋予如下偏序 $\leq$:

$\pi \leq \sigma \overset{\text{def}}{\iff}$的每个块都完全包含于 σ.的某个块中

于是，$\mathcal{P}(n) = (\mathcal{P}(n) \leq)$ 是一个有限偏序集。$\mathcal{P}(n)$ 的最小元和最大元分别为 0_n : $= \{\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}\}$ 和 1_n : $= \{\{1, 2, \ldots, n\}\}$。

令 $P = (P, \leq)$ 为一个有限偏序集。记 $P^{(2)} := \{(\pi, \sigma) \in P \times P \mid \pi \leq \sigma\}$。对于$F, G$: $P_{(2)} \to \mathbb{C}$，其卷积 $F * G$定义为从 $P^{(2)}$到 $\mathbb{C}$的函数，定义如下

$$(F * G)(\pi, \sigma) := \sum_{\substack{\rho \in P \\ \pi \leq \rho \leq \sigma}} F(\pi, \rho) G(\rho, \sigma).$$

偏序集 P的 ζ 函数 ζ_P: $P^{(2)} \to \mathbb{C}$ 定义如下

$$\zeta_P(\pi, \sigma) = 1, \qquad (\pi, \sigma) \in P^{(2)}.$$

M ¨obius 函数 μ_P of P 被定义为相对于卷积 ζ_P 的逆元 $*$.

以下反演原理是关联代数最重要的性质之一。

命题 2.2（M¨obius 反演公式）。设 P 为一个有限偏序集。则存在唯一的 M¨obius 函数 $\mu_P\colon P_{(2)}\to\mathbb{Z}$，使得对于任意函数 $f,g\colon P\to\mathbb{C}$ 和 $\pi\in P$，恒等式

$$f(\pi)=\sum_{\sigma\le\pi}g(\sigma)$$

成立，当且仅当

$$g(\pi)=\sum_{\sigma\le\pi}f(\sigma)\mu_P(\sigma,\pi).$$

本文经常使用以下关于 M¨obius 函数的公式。

引理 2.3。设 P 为一个有最大元 1_P 的有限偏序集，且 μ_P 是 P上的 M¨obius 函数。则以下恒等式成立：

$$\sum_{\pi\le\sigma}\mu_P(\sigma,1_P)=\delta_{\pi,1_P}:=\begin{cases}1, & \pi=1_P,\\ 0, & \pi\neq 1_P.\end{cases}$$

例 2.4。(1) 函数 $\mu_{\mathcal{B}(n)}$ 表示 $\mathcal{B}(n)$上的 M¨obius 函数。容易验证，若 $W\le V$属于 $\mathcal{B}(n)$，则 $\mu_{\mathcal{B}(n)}(W,V)=(-1)^{|V|-|W|}$。特别地，对于所有 $W\in\mathcal{B}(n)$，有$\mu_{\mathcal{B}(n)}(W,[n])=(-1)^{n-|W|}$。

(2) 函数 $\mu_n=\mu_{\mathcal{P}(n)}$ 表示 $\mathcal{P}(n)$ 上的莫比乌斯函数。函数 μ_n 可显式计算如下：对于 $\pi,\sigma\in\mathcal{P}(n)$,

$$\mu_n(\pi,\sigma)=(-1)^{|\pi|-|\sigma|}(2!)^{r_3}(3!)^{r_4}\cdots((n-1)!)^{r_n},$$

其中，$|\pi|$ 表示 $\pi\in\mathcal{P}(n)$ 的块数，而 r_i 表示 σ中恰好包含 i 个块的块数。特别地，我们有

$$\mu_n(\pi,1_n)=(-1)^{|\pi|-1}(|\pi|-1)! \tag{2.1}$$

and

$$\mu_n(0_n,\sigma)=(-1)^{n-|\sigma|}(2!)^{t_3}(3!)^{t_4}\cdots((n-1)!)^{t_n},$$

其中，t_i 表示 σ 中大小为 i的块数。

2.2. 有限自由概率。本节介绍有限自由概率中的本质概念。具体而言，我们定义两种有限自由卷积和有限自由累积量，并总结与这些概念相关的若干结果。

有限自由卷积。对于任意 $p,q\in\mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$，定义有限自由加法卷积 $p\boxplus_d q$ 为

$$(p\boxplus_d q)(x)=\sum_{k=0}^{d}(-1)^k\binom{d}{k}\sum_{i+j=k}\frac{k!}{i!j!}\widetilde{a}_i(p)\widetilde{a}_j(q)x^{d-k}.$$

对于 $p\in\mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$，多项式 $p^{\boxplus_d m}$ 表示有限自由加法卷积 p的 m 次幂。注意，若 p, $q\in\mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$ 是实根的，则 $p\boxplus_d q\in\mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$ 也是实根的（见 [19, 定理 1.3]）。有限自由加法卷积在研究（随机）矩阵之和的特征多项式时发挥着重要作用。对于一个 $d\times d$ 实对称矩阵 A，χ_A表示 A的特征多项式。于是我们得到

$$(\chi_A\boxplus_d\chi_B)(x)=\mathbb{E}_Q\det[xI_d-A-QBQ^*],$$

其中，期望是对在 Q次数为 d 的酉群上均匀分布的酉矩阵取的（参见 [19, 定理 1.2]）。此外，有限加法卷积与自由加法卷积密切相关，$\boxplus$ 后者描述了自由

相互独立的非交换随机变量之和的分布（关于自由加法卷积的详细信息，参见 [5, 17, 28] ）。

命题 2.5.（参见 [2, 推论 5.5]）假设 $p_d, q_d \in \mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$ 是实根的，且 μ, ν 是 $\mathbb{R}$ 上具有紧支撑的概率测度。若 $\mu[\![p_d]\!] \xrightarrow{w} \mu$ 和 $\mu[\![q_d]\!] \xrightarrow{w} \nu$ 分别以 $d \to \infty$ 收敛，则 $\mu[\![p_d \boxplus_d q_d]\!] \xrightarrow{w} \mu \boxplus \nu$ 以 $d \to \infty$ 收敛。

类似地，对于 $p, q \in \mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$，有限自由乘法卷积 $p \boxtimes_d q$ 定义为

$$(p \boxtimes_d q)(x) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \binom{d}{i} \widetilde{a}_i(p) \widetilde{a}_i(q) x^{d-i}.$$

对于 $p \in \mathbb{P}_{mon}(d)$，我们用 $p^{\boxtimes_d m}$ 表示 p 的有限自由乘法卷积的 m 次幂。注意，若 p 只有非负根，且 q 是实根的，则 $p \boxtimes_d q$ 只有实根（例如参见 [20, 第 16 节，练习 2]）。若 p, q 的根都位于 $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 上，则 $p \boxtimes_d q$ 也如此（例如参见 [25, Satz 3]）。根据 [19, 定理 1.5], ，有限自由乘法卷积描述了正定矩阵乘积的特征多项式。更确切地说，若 A 和 B 是 $d \times d$ 正定矩阵，则

$$(\chi_A \boxtimes_d \chi_B)(x) = \mathbb{E}_Q \det[xI_d - AQBQ^*].$$

此外，众所周知，$\boxtimes_d$ 与自由乘法卷积 $\boxtimes$密切相关；自由乘法卷积描述了自由独立随机变量相乘所对应的分布（自由乘法卷积的定义及已知性质见 [5] ）。

命题 2.6.（见 [1, 定理 1.4]）考虑 p_d、$q_d \in \mathbb{P}_{mon}$（d），其中 p_d 仅有非负根，且 q_d 是实根的。此外，考虑具有紧支撑的概率测度 μ、ν，定义在$\mathbb{R}$ 上，其中 μ 支撑于 $[0, \infty)$。若 $\mu[\![p_d]\!] \xrightarrow{w} \mu$ 和 $\mu[\![q_d]\!] \xrightarrow{w} \nu$分别满足 $d \to \infty$，则 $\mu[\![p_d \boxtimes_d q_d]\!] \xrightarrow{w} \mu \boxtimes \nu$ 满足 $d \to \infty$。

此外，根据 [14, 命题 2.9], ，当 p_d、q_d 的根仅位于 $\mathbb{T}$ 上，且 μ、ν 是定义在 $\mathbb{T}$上的概率测度时，同样的结论也成立。

有限自由乘法卷积幂的极限行为。第4节中，我们将研究关于有限自由乘法卷积的极限定理。不过，在此之前，我们先考察 m 重有限自由乘法卷积 $p^{\boxtimes_d m}$ 的 $p \in \mathbb{P}_{mon}(d)$ 的极限行为，其中根均为非负数；令人惊讶的是，这可能会导向一个非平凡极限。

首先，让我们回顾 $\{\widetilde{a}_i(p)\}_{i=0}^d$ 的牛顿不等式和麦克劳林不等式。（例如，参见 [13, 第 2.22] 节。）

引理 2.7. (1)（牛顿不等式）设 $p \in \mathbb{P}_{mon}(d)$ 是一个实根首一多项式。则

$$\widetilde{a}_{i+1}(p)\widetilde{a}_{i-1}(p) \le \widetilde{a}_i(p)^2, \qquad i = 1, 2, \ldots, d-1.$$

等号成立当且仅当它的根都相同 α；此时，对于 $i = 1$、2、.....、d，$\widetilde{a}_i(p) = \alpha^i$。

(2)（麦克劳林不等式）设 $p \in \mathbb{P}_{mon}(d)$ 是一个正根首一多项式。则

$$\widetilde{a}_1(p) \ge \widetilde{a}_2(p)^{\frac{1}{2}} \ge \cdots \ge \widetilde{a}_d(p)^{\frac{1}{d}} \tag{2.2}$$

当且仅当其根相同时取等号 α。

注 2.8. 不等式 (2.2) 即使在 p 具有零根时仍然成立。更准确地说，如果 p 恰好有 k 个零根，那么 $\widetilde{a}_1(p) > \widetilde{a}_2(p)^{\frac{1}{2}} > \cdots > \widetilde{a}_{d-k}(p)^{\frac{1}{d-k}}$，并且 $\widetilde{a}_{d-k+1}(p) = \cdots = \widetilde{a}_d(p) = 0$。

命题 2.9. 对于具有非负根的 $p \in \mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$，我们有

$$\lim_{m\to\infty} p^{\boxtimes_d m}(x) = \begin{cases} x^d, & \widetilde{a}_1(p) < 1, \\ x^d - dx^{d-1}, & \widetilde{a}_1(p) = 1 \text{ and } \widetilde{a}_2(p) < 1, \\ (x-1)^d, & \widetilde{a}_1(p) = 1 \text{ and } \widetilde{a}_2(p) = 1. \end{cases}$$

当 $\widetilde{a}_1(p) > 1$ 时，极限不存在。

证明。对于每个 i，我们有

$$\widetilde{a}_i(p^{\boxtimes_d m}) = \widetilde{a}_i(p)^m \xrightarrow{m\to\infty} \begin{cases} 0, & \widetilde{a}_i(p) < 1, \\ 1, & \widetilde{a}_i(p) = 1, \\ \infty, & \widetilde{a}_i(p) > 1. \end{cases}$$

由于 d 是固定的，当 $\widetilde{a}_1(p) > 1$ 时，它不会产生任何极限。

接下来，我们考虑 $\widetilde{a}_1(p) \leq 1$ 的情况。

- 若 $\widetilde{a}_1(p) < 1$，则根据引理 2.7 (2)，对 $i = 2, \ldots, d$，有 $\widetilde{a}_i(p) < 1$。于是我们有

$$p^{\boxtimes_d m}(x) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \binom{d}{i} \widetilde{a}_i(p)^m x^{d-i} \xrightarrow{m\to\infty} x^d.$$

- 若 $\widetilde{a}_1(p) = 1$，则根据引理 2.7 (2)，有 $\widetilde{a}_2(p) \leq 1$。存在两种可能的情况 .

  (i) 若 $\widetilde{a}_2(p) < 1$，则对于 $i = 2, \ldots, d$，有 $\widetilde{a}_i(p) < 1$，因此

$$p^{\boxtimes_d m}(x) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \binom{d}{i} \widetilde{a}_i(p)^m x^{d-i} \xrightarrow{m\to\infty} x^d - dx^{d-1}.$$

  (ii) 若 $\widetilde{a}_2(p) = 1$，则根据引理 2.7 (1)，对于 $i = 2, \ldots, d$，有 $\widetilde{a}_i(p) = 1$。这意味着 $p(x) = (x-1)^d$。因此我们有

$$p^{\boxtimes_d m}(x) = (x-1)^d \xrightarrow{m\to\infty} (x-1)^d.$$

□

有限自由累积量。为了理解两个有限自由卷积，有一个有用的组合概念。对于 $p \in \mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$，$p$ 的有限自由累积量定义为

$$\kappa_n^{(d)}(p) := \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \widetilde{a}_\pi(p) \mu_n(\pi, 1_n), \tag{2.3}$$

对于 $n = 1, 2, \ldots, d$（详情参见命题 3.4]）。

例 2.10. (1) 令 $p(x) = x^d - dx^{d-1}$。由于对于所有 $i = 2, \ldots, d$，都有 $\widetilde{a_1}(p) = 1$ 和 $\widetilde{a}_i(p) = 0$，容易看出，对于 $n = 1, 2, \ldots, d$，有 $\kappa_n^{(d)}(p) = d^{n-1}$。

（2）令 $\lambda > 0$。我们定义归一化拉盖尔多项式 $\widehat{L}_d^{(\lambda)}$ as

$$\widehat{L}_d^{(\lambda)}(x) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i \binom{d}{i} \frac{(d\lambda)_i}{d^i} x^{d-i},$$

其中 $(\alpha)_i := \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-i+1)$。那么，$\hat{}L_d^{(\lambda)}$ 的有限自由累积量由 $\kappa_n^{(d)}(\widehat{L}_d^{(\lambda)}) = \lambda$ 给出，其中 $n = 1, 2, \ldots, d$ （见 [1]）。

根据 [2, 命题 3.6]，已知有限自由累积量可以将有限自由加法卷积线性化：

$$\kappa_n^{(d)}(p \boxplus_d q) = \kappa_n^{(d)}(p) + \kappa_n^{(d)}(q)$$

对于 p， $q \in \mathbb{P}_{mon}$（d）。特别地，我们有

$$\kappa_n^{(d)}(p^{\boxplus_d m}) = m\kappa_n^{(d)}(p), \qquad m \in \mathbb{N}.$$

回忆一下，对于 $p \in \mathbb{P}_{mon}(d)$ 和 $c \neq 0$,

$$D_c(p)(x) = c^d p(x/c).$$

因此，根据有限自由累积量的定义，我们得到

$$\kappa_n^{(d)}(D_c(p)) = c^n \kappa_n^{(d)}(p). \tag{2.4}$$

根据 [2], ，已知当次数 d 趋于无穷时，有限自由累积量趋近于 Speicher 引入的自由累积量。由此可得下面这个关于分布收敛的判据。

命题 2.11。设 $p_d \in \mathbb{P}_{mon}(d)$，并设概率测度 μ 具有紧支撑。以下命题等价。

(1) $\mu[\![p_d]\!] \xrightarrow{w} \mu$ 当 $d \to \infty$ 时。(2) 对所有
$n \in \mathbb{N}$，$\lim_{d\to\infty} \kappa_n^{(d)}(p_d) = \kappa_n(\mu)$。

证明。我们给出证明的概要。首先假设 $\mu[\![p_d]\!] \xrightarrow{w} \mu$ 当 $d \to \infty$ 时。注意，对于任意 $n \in \mathbb{N}$，这种弱收敛等价于 $\lim_{d\to\infty} m_n(\mu[\![p_d]\!]) = m_n(\mu)$，其中$m_n(\rho)$ 表示概率测度 ρ 在 $\mathbb{R}$ 上的第 n 阶矩。接着，[2] 中的定理 5.4 推出命题 (2)。反过来，假设对于任意$n \in \mathbb{N}$, $\lim_{d\to\infty} \kappa_n^{(d)}(p_d) = \kappa_n(\mu)$。根据 [2, 中定理 5.4], 里 (5.2) 后一行的等式，我们得到

$$\lim_{d\to\infty} m_n(\mu[\![p_d]\!]) = \sum_{\sigma\in NC(n)} \kappa_\sigma(\mu) = m_n(\mu),$$

其中 $NC(n)$ 表示 $[n]$ 的非交叉划分集合，最后一个等式由矩-累积量公式得出（见 [23, 命题 11.4]）。这意味着，当 $d \to \infty$ 时， $\mu[\![p_d]\!] \xrightarrow{w} \mu$。□

与有限自由乘法卷积相关的有限自由累积量公式。下面，我们给出 $p^{\boxtimes_d m}$ 关于 $p \in \mathbb{P}_{mon}(d)$ 和 $m \in \mathbb{N}$ 的有限自由累积量公式。首先，以下引理可直接由有限自由乘法卷积的定义推出。

引理 2.12。（见 [11, 引理 3.1]）对于一族 $\{p_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{P}_{mon}(d)$，有

$$\widetilde{a}_j(p_1 \boxtimes_d \cdots \boxtimes_d p_m) = \prod_{i=1}^m \widetilde{a}_j(p_i) \qquad (j = 1, \ldots, d).$$

特别地，若对于某个 $p \in \mathbb{P}_{mon}(d)$，所有 $p_i = p$ 均成立，则

$$\widetilde{a}_j(p^{\boxtimes_d m}) = \widetilde{a}_j(p)^m.$$

其次，众所周知，

$$\kappa_n^{(d)}(p \boxtimes_d q) = \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{\sigma,\tau\in\mathcal{P}(n)\\ \sigma\vee\tau=1_n}} d^{|\sigma|+|\tau|-2n} \mu_n(0_n,\sigma)\mu_n(0_n,\tau)\kappa_\sigma^{(d)}(p)\kappa_\tau^{(d)}(q)$$

由 [1, 定理 1.1] 可得。特别地，若 $p = q$，则

$$\kappa_n^{(d)}(p^{\boxtimes_d 2}) = \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{\sigma_1,\sigma_2\in\mathcal{P}(n)\\ \sigma_1\vee\sigma_2=1_n}} \left(\prod_{i=1}^2 d^{|\sigma_i|-n} \mu_n(0_n,\sigma_i)\kappa_{\sigma_i}^{(d)}(p) \right).$$

一般而言，以下公式成立。

命题 2.13。对于一个族 $\{p_i\}_{i=1}^m \subset \mathbb{P}_{mon}(d)$，有

$$\begin{aligned}\kappa_n^{(d)}(p_1 \boxtimes_d \cdots \boxtimes_d p_m) &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \prod_{i=1}^m \sum_{\sigma_i\le\pi} d^{|\sigma_i|-n}\mu_n(0_n,\sigma_i)\kappa_{\sigma_i}^{(d)}(p_i)\mu_n(\pi,1_n)\\ &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\in\mathcal{P}(n)\\ \sigma_1\vee\cdots\vee\sigma_m=1_n}} \left(\prod_{i=1}^m d^{|\sigma_i|-n}\mu_n(0_n,\sigma_i)\kappa_{\sigma_i}^{(d)}(p_i)\right).\end{aligned}$$

特别地，如果对于某个 $p\in\mathbb{P}_{mon}(d)$，所有 $p_i = p$，那么

$$\begin{aligned}\kappa_n^{(d)}(p^{\boxtimes_d m}) &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \left(\sum_{\sigma\le\pi} d^{|\sigma|-n}\mu_n(0_n,\sigma)\kappa_\sigma^{(d)}(p)\right)^m \mu_n(\pi,1_n)\\ &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\in\mathcal{P}(n)\\ \sigma_1\vee\cdots\vee\sigma_m=1_n}} \left(\prod_{i=1}^m d^{|\sigma_i|-n}\mu_n(0_n,\sigma_i)\kappa_{\sigma_i}^{(d)}(p)\right).\end{aligned}$$

Pr根据有限自由累积量的定义（2.3）和引理 2.12，我们得到

$$\begin{aligned}\kappa_n^{(d)}(p_1 \boxtimes_d \cdots \boxtimes_d p_m) &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \widetilde{a}_\pi(p_1 \boxtimes_d \cdots \boxtimes_d p_m)\mu_n(\pi,1_n)\\ &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \prod_{i=1}^m \widetilde{a}_\pi(p_i)\mu_n(\pi,1_n). \qquad (2.5)\end{aligned}$$

根据 [2,命题 3.4], ，因为

$$\widetilde{a}_\pi(p) = \sum_{\sigma\le\pi} d^{|\sigma|-n}\mu_n(0_n,\sigma)\kappa_\sigma^{(d)}(p),$$

对于任意 $p\in\mathbb{P}_{mon}(d)$，第一个等式由（2.5）得出。

第二个等式证明如下:

$$\begin{aligned}&\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \prod_{i=1}^m \sum_{\sigma_i\le\pi} d^{|\sigma_i|-n}\mu_n(0_n,\sigma_i)\kappa_{\sigma_i}^{(d)}(p_i)\mu_n(\pi,1_n)\\ &\quad= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \left(\sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\le\pi} \prod_{i=1}^m d^{|\sigma_i|-n}\mu_n(0_n,\sigma_i)\kappa_{\sigma_i}^{(d)}(p_i)\right)\mu_n(\pi,1_n)\\ &\quad= \sum_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\in\mathcal{P}(n)} \prod_{i=1}^m d^{|\sigma_i|-n}\mu_n(0_n,\sigma_i)\kappa_{\sigma_i}^{(d)}(p_i) \left(\sum_{\sigma_1\vee\cdots\vee\sigma_m\le\pi} \mu_n(\pi,1_n)\right)\\ &\quad= \sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_m\in\mathcal{P}(n)\\ \sigma_1\vee\cdots\vee\sigma_m=1_n}} \left(\prod_{i=1}^m d^{|\sigma_i|-n}\mu_n(0_n,\sigma_i)\kappa_{\sigma_i}^{(d)}(p_i)\right),\end{aligned}$$

其中第三行使用了命题 2.3。 □

例 2.14。利用命题 2.13 中的第一个方程，我们得到

$$\kappa_n^{(d)}\left((\widehat{L}_d^{(1)})^{\boxtimes_d m}\right) = \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \left(\sum_{\sigma\le\pi} d^{|\sigma|-n}\mu_n(0_n,\sigma)\right)^m \mu_n(\pi,1_n)$$

因为对所有 n， $\kappa_n^{(d)}(\widehat{L}_d^{(1)}) = 1$，该公式意味着

$$\kappa_2^{(d)}\left((\widehat{L}_d^{(1)})^{\boxtimes_d m}\right) = d\left\{1-\left(1-\frac{1}{d}\right)^m\right\}$$

and

$$\kappa_3^{(d)}\left((\widehat{L}_d^{(1)})^{\boxtimes_d m}\right) = d^2\left\{1-\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{d}\right)^m+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{d}\right)^m\left(1-\frac{2}{d}\right)^m\right\}.$$

3. Combinatorial formula related to finite free probability

在本节中，我们研究

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{V\in\pi}f_i(|V|)\right)\mu_n(\pi,1_n)$$

对于不含常数项的多项式 f_1、...、 f_k，这些值将在第 4–6 节考察有限自由累积量的收敛性时起到关键作用。

3.1. 多项式 $r_k[f](z)$ 和 $s_k[f](z)$ 的定义。

定义 3.1. 对于多项式 $f(x) \in \mathbb{C}[x]_0$，定义族 $\{\varphi_n[f](t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ 及其生成级数 $M[f](t,z)$ 如下。对于 $n\in\mathbb{N}$

$$\varphi_n[f](t) := \exp(f(n)t),$$

and

$$M[f](t,z) := 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n[f](t)}{n!}z^n.$$

此外，我们定义 $\{\psi_n[f](t)\}_{n\in\mathbb{N}}$、 $\{r_k[f](z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{s_k[f](z)\}_{k\in\mathbb{N}}$，使其满足以下恒等式:

$$M[f](t,z) = e^z\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r_k[f](z)}{k!}t^k\right),$$

and

$$\log(M[f](t,z)) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n[f](t)}{n!}z^n = z+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{s_k[f](z)}{k!}t^k.$$

引理 3.2. 设 $\{\varphi_n[f](t)\}_{n\in\mathbb{N}}$、 $\{\psi_n[f](t)\}_{n\in\mathbb{N}}$、 $\{r_k[f](z)\}_{k\in\mathbb{N}}$ 和 $\{s_k[f](z)\}_{k\in\mathbb{N}}$如上所定义。

(1) 对所有 n、 $k\in\mathbb{N}$，我们得到

$$\varphi_n[f](t) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\psi_\pi[f](t), \qquad \text{or equivalently} \qquad \psi_n[f](t) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\varphi_\pi[f](t)\mu_n(\pi,1_n),$$

and

(3.1)

$$r_k[f](z) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(k)}s_\pi[f](z), \qquad \text{or equivalently} \qquad s_k[f](z) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(k)}r_\pi[f](z)\mu_k(\pi,1_k).$$

(2) 对所有 n、 $k\in\mathbb{N}$，我们有

$$s_k^{(n)}[f](0) = \psi_n^{(k)}[f](0) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\left(\sum_{V\in\pi}f(|V|)\right)^k\mu_n(\pi,1_n), \tag{3.2}$$

其中 $s_k^{(n)}[f](0) := \frac{d^n}{dz^n}s_k[f](z)|_{z=0}$且 $\psi_n^{(k)}[f](0) := \frac{d^k}{dt^k}\psi_n[f](t)|_{t=0}$。

(3) 对所有 $n, k \in \mathbb{N}$,

$$r_k^{(n)}[f](0) = \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{n-l} f(l)^k, \tag{3.3}$$

其中 $r_k^{(n)}[f](0) := \frac{d^n}{dz^n} r_k[f](z)|_{z=0}$。

证明。结论 (1) 由矩-累积量公式得出。由于 $\varphi_\pi[f](0) = 1$以及

$$\varphi_\pi^{(k)}[f](t) := \frac{d^k}{dt^k}\varphi_\pi[f](t) = \left(\sum_{V\in\pi} f(|V|)\right)^k \varphi_\pi[f](t)$$

对于 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $\pi \in \mathcal{P}(n)$，我们得到

$$\psi_n^{(k)}[f](0) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \varphi_\pi^{(k)}[f](0)\mu_n(\pi, 1_n) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \left(\sum_{V\in\pi} f(|V|)\right)^k \mu_n(\pi, 1_n).$$

由于我们刚刚交换了求和次序，因此得到 (2) 中所需的结果 $s_k^{(n)}[f](0) = \psi_n^{(k)}[f](0)$。根据 $M[f](t, z)$ 和 $r_k[f](z)$ 的定义，

$$r_k^{(n)}[f](0) = \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{n-l} \varphi_l^{(k)}[f](0).$$

容易验证，$\varphi_l^{(k)}[f](0) = f(l)^k$，正如所需。 □

例3.3。这里，取最简单的多项式 $f(x) = x$。于是立即可得 $\varphi_n[f](t) = \exp(nt)$，$\psi_1[f](t) = e^t$ 以及 $\psi_n[f](t) = 0 (n \geq 2)$。因此，$s_k[f](z) = z$以及

$$r_k[f](z) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(k)} z^{|\pi|} \tag{3.4}$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$。

注3.4. 由 (3.3) 和 (3.4) 可直接得到

$$\sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} (-1)^{n-l} l^k = 0 \tag{3.5}$$

当 $n > k$ 时，对 $k \in \mathbb{N}$ 成立。因此，对于任意多项式 $f \in \mathbb{C}[x]_0$，我们可以观察到 $r_k[f](z)$ 是一个多项式，因为根据 (3.5)，若 $n > k \deg(f)$，则 $r_k^{(n)}[f](0) = 0$。此外，由于矩–累积量公式 (3.1)，$s_k[f](z)$ 也是一个多项式。

引理 3.5. 设 f, g 是 $\mathbb{C}[x]_0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 和 $k \in \mathbb{N}$ 中的多项式。那么

(1) $r_1[\alpha f + \beta g](z) = \alpha r_1[f](z) + \beta r_1[g](z)$。

(2) $r_k[f](z) = r_1[f^k](z)$。

证明。两者都可直接由 (3.3) 得出。 □

接下来，我们将推广由多项式 $\{f_i\}_{i=1}^k$ 确定且满足多线性的多项式 $r_k[f](z)$ 和 $s_k[f](z)$ 的定义。根据引理 3.5，以下内容可视为一种自然推广。

定义 3.6. 设我们考虑 $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x]_0$. 我们定义

$$r_k[f_1, \ldots, f_k](z) := r_1[f_1 \cdots f_k](z). \tag{3.6}$$

同样，对于 $\pi \in \mathcal{P}(k)$,

$$r_\pi[f_1, \dots, f_k](z) := \prod_{V=\{i_1,\dots,i_{|V|}\}\in\pi} r_{|V|}[f_{i_1}, \dots, f_{i_{|V|}}](z).$$

我们还定义

$$s_\pi[f_1, \dots, f_k](z) := \sum_{\substack{\sigma\in\mathcal{P}(k)\\ \sigma\le\pi}} r_\sigma[f_1, \dots, f_k](z)\mu_k(\sigma, \pi) \tag{3.7}$$

对于 $\pi \in \mathcal{P}(k)$。特别地， $s_k[f_1, \dots, f_k](z)$ 表示 $s_{1_k}[f_1, \dots, f_k](z)$。

显然，对于所有多项式 $f \in \mathbb{C}[x]_0$， $s_k[f, \dots, f] = s_k[f]$ 均成立，因此这是一个推广。该推广具有以下性质。

引理 3.7。对于 $k \in \mathbb{N}$ 和 f_1、.....、 $f_k \in \mathbb{C}[x]_0$，有

$$r_k[f_1, \dots, f_k](z) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(k)} s_\pi[f_1, \dots, f_k](z).$$

同理，我们得到

$$s_\pi[f_1, \dots, f_k](z) = \prod_{V=\{i_1,\dots,i_{|V|}\}\in\pi} s_{|V|}[f_{i_1}, \dots, f_{i_{|V|}}](z)$$

对于 $\pi \in \mathcal{P}(k)$。

证明。由标准讨论可知，使用莫比乌斯反演公式，参见 [23,Lectures9–11]。□

例 3.8。作为一个有趣的例子，我们取多项式 $g_m(x) = x^m$，其中 $m \in \mathbb{N}$。考虑正整数 $\{m_i\}_{i=1}^k$ 和 $M = \sum_{i=1}^k m_i$ 时的 $s_k[g_{m_1}, \dots, g_{m_k}](z)$。首先，注意到 $g_1(x) = x$，并且

$$\begin{aligned} r_k[g_{m_1}, \dots, g_{m_k}](z) &= r_1[g_M](z) \\ &= r_M[g_1](z) \\ &= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(M)} z^{|\pi|} \end{aligned}$$

这是由引理 3.5 和方程 (3.4) 得出的。

映射 $\mathcal{P}(k) \to \mathcal{P}(M)$ $\sigma \mapsto \widehat{\sigma}$ 定义为将每个点 $\{i\}$ 扩展为 m_i 区间，例如 $\widehat{0}_k = \{\{1, \dots, m_1\}, \{m_1 + 1, \dots, m_1 + m_2\}, \dots, \{M - m_k + 1, \dots, M\}\}$；特别地， $\mathcal{P}(k)$

$\widehat{\ }$和 $[0_k, 1_M]$ 通过此映射构成偏序集同构。于是我们有

$$\begin{aligned} s_k[g_{m_1}, \ldots, g_{m_k}](z) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(k)} r_\sigma[g_{m_1}, \ldots, g_{m_k}](z) \mu_k(\sigma, 1_k) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(k)} r_{\widehat{\sigma}}[g_1, \ldots, g_1](z) \mu_M(\widehat{\sigma}, 1_M) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathcal{P}(k)} \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(M) \\ \pi \leq \widehat{\sigma}}} z^{|\pi|} \mu_M(\widehat{\sigma}, 1_M) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(M)} z^{|\pi|} \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{P}(k) \\ \pi \leq \widehat{\sigma}}} \mu_M(\widehat{\sigma}, 1_M) \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(M)} z^{|\pi|} \sum_{\substack{\rho \in \mathcal{P}(k) \\ \pi \vee \widehat{0}_k \leq \rho}} \mu_M(\rho, 1_M) \\ &= \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(M) \\ \pi \vee \widehat{0}_k = 1_M}} z^{|\pi|}, \end{aligned}$$

其中，第二行用到了例3.3的结果，第五行用到了引理 2.3。因此，$\deg(s_k[g_{m_1}, \ldots, g_{m_k}]) = M - (k-1)$ 且 $\operatorname{lead}(s_k[g_{m_1}, \ldots, g_{m_k}]) = \#\{\pi \in \mathcal{P}(M) \mid \pi \vee \widehat{0}_k = 1_M, |\pi| = M - (k-1)\}$。

我们得到（3.2）的一个推广结果如下。

命题 3.9。对于任意 k、$n \in \mathbb{N}$ 和 $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{C}[x]_0$,

$$\begin{aligned} s_k^{(n)}[f_1, \ldots, f_k](0) &:= \frac{d^n}{dz^n} s_k[f_1, \ldots, f_k](z)|_{z=0} \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \prod_{i=1}^{k} \left(\sum_{V \in \pi} f_i(|V|) \right) \mu_n(\pi, 1_n). \end{aligned}$$

为了证明命题 3.9，我们需要引入向量空间上的对称多重线性映射这一概念及相关结果。设 V、W 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。若多重线性映射 $\Phi: V^k \to W$ 满足

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \Phi(x_{\iota(1)}, \ldots, x_{\iota(k)}), \qquad (x_1, \ldots, x_k) \in V^k,$$

对于 $[k]$ 的任意置换 ι，

引理 3.10（见 [26]）。设 V、W 是域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。如果 $\Phi: V^k \to W$ 是一个对称多重线性映射，则它可以写成

$$\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{l=1}^{k} (-1)^{k-l} \sum_{\substack{J \subset [k] \\ |J| = l}} \Phi(\underbrace{x_J, \ldots, x_J}_{k \text{ times}}),$$

其中 $x_J := \sum_{j \in J} x_j$。

引理 3.11。这两个映射

$$(f_1, \ldots, f_k) \mapsto r_k[f_1, \ldots, f_k](z) \quad \text{and} \quad (f_1, \ldots, f_k) \mapsto s_k[f_1, \ldots, f_k](z)$$

是从 $\mathbb{C}[x]_0^k$ 到 $\mathbb{C}[z]$的对称多重线性映射。

证明。根据定义（3.6）和引理 3.5，显然第一个映射是对称多重线性的。

第二个映射的多线性由矩–累积量公式 (3.7) 得出。对于 $[k]$ 的一个置换 ι，

$$\begin{aligned} s_k[f_{\iota(1)},\dots,f_{\iota(k)}](z) &= \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(k)} r_\sigma[f_{\iota(1)},\dots,f_{\iota(k)}](z)\mu_k(\sigma,1_k) \\ &= \sum_{\sigma\in\mathcal{P}(k)} r_{\iota^{-1}(\sigma)}[f_1,\dots,f_k](z)\mu_k(\sigma,1_k), \end{aligned}$$

其中 $\iota^{-1}(\sigma) := \{\iota^{-1}(V) \mid V\in\sigma\}$。利用变量替换 $\pi = \iota^{-1}(\sigma)$，我们得到

$$\begin{aligned} s_k[f_{\iota(1)},\dots,f_{\iota(k)}](z) &= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(k)} r_\pi[f_1,\dots,f_k](z)\mu_k(\iota(\pi),1_k) \\ &= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(k)} r_\pi[f_1,\dots,f_k](z)\mu_k(\pi,1_k) \\ &= s_k[f_1,\dots,f_k](z), \end{aligned}$$

这里我们使用了由方程 (2.1) 得出的等式 $\mu_k(\iota(\pi)\ 1_k) = \mu_k(\pi,1_k)$。因此，第二个映射是对称的。□

证明。（命题 3.9）令 $k,n\in\mathbb{N}$ 固定。定义

$$\Phi_1(f_1,\dots,f_k) := s_k^{(n)}[f_1,\dots,f_k](0)$$

对于 $(f_1,\dots,f_k)\in\mathbb{C}[x]_0^k$。那么，根据引理 3.11，映射 Φ_1 是从 $\mathbb{C}[x]_0^k$ 到 $\mathbb{C}$ 的对称多线性映射。此外，我们定义一个对称多线性映射 $\Phi_2\colon \mathbb{C}[x]_0^k\to\mathbb{C}$，如下：

$$\Phi_2(f_1,\dots,f_k) := \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\prod_{i=1}^{k}\left(\sum_{V\in\pi} f_i(|V|)\right)\mu_n(\pi,1_n).$$

由方程 (3.2) 可知，对于任意 $f\in\mathbb{C}[x]_0$，都有 $\Phi_1(f,\dots,f) = \Phi_2(f,\dots,f)$。因此，引理 3.10 表明，对于任意 $(f_1,\dots,f_k)\in\mathbb{C}[x]_0^k$，

$$\begin{aligned} \Phi_1(f_1,\dots,f_k) &= \frac{1}{k!}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\sum_{\substack{J\subset[k]\\|J|=l}}\Phi_1(f_J,\dots,f_J) \\ &= \frac{1}{k!}\sum_{l=1}^{k}(-1)^{k-l}\sum_{\substack{J\subset[k]\\|J|=l}}\Phi_2(f_J,\dots,f_J) \\ &= \Phi_2(f_1,\dots,f_k), \end{aligned}$$

其中 $f_J = \sum_{j\in J} f_j\in\mathbb{C}[x]_0$。□

3.2. 多项式 $s_k[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](z)$ 的次数与首项系数。作为一类特殊的多项式族，我们取

$$c_m(x) := \binom{x}{m},$$

对于 $m\in\mathbb{N}$。然后，由 $(f_1,\dots,f_k)\mapsto s_k[f_1,\dots,f_k](z)$ 的多线性可推出一般情形；参见第 3.3 节。

考虑正整数 $\{m_i\}_{i=1}^k$ 对应的 $r_k[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](z)$。根据等式（3.3），其系数为

$$\begin{aligned} r_k^{(n)}[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](0) &= r_1^{(n)}[c_{m_1}\cdots c_{m_k}](0) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}(-1)^{n-l}c_{m_1}(l)\cdots c_{m_k}(l) \\ &= \sum_{l=1}^{n}\binom{n}{l}(-1)^{n-l}\binom{l}{m_1}\cdots\binom{l}{m_k}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

其中 $r_k^{(n)}[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](0) := \frac{d^n}{dz^n}r_k[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](z)|_{z=0}$。这个值的组合解释如下。

引理 3.12. 有

$$r_k^{(n)}[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](0) = \#R^{(n)}_{(m_1,\dots,m_k)},$$

其中 $R^{(n)}{}_{(m_1,\dots,m_k)} := \{(W_1,\dots,W_k) \in \mathcal{B}(n)^k \mid |W_i| = m_i, \bigcup_{i=1}^k W_i = [n]\}$。特别地，

(1) $\deg(r_k[c_{m_1},\dots,c_{m_k}]) = \sum_{i=1}^k m_i =: M$,

(2) $\operatorname{lead}(r_k[c_{m_1},\dots,c_{m_k}]) = \dfrac{1}{M!}\cdot r_k^{(M)}[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](0) = \dfrac{1}{\prod_{i=1}^k m_i!}$.

证明。等式（3.8）推出

$$r_k^{(n)}[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](0) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{\substack{V\in\mathcal{B}(n)\\|V|=l}}\sum_{\substack{W_1,\dots,W_k\subset V\\|W_1|=m_1,\dots,|W_k|=m_k}}(-1)^{n-l}.$$

定义 $W = \bigcup_{i=1}^k W_i$。交换求和次序可得

$$\begin{aligned} r_k^{(n)}[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](0) &= \sum_{\substack{W_1,\dots,W_k\in\mathcal{B}(n)\\|W_1|=m_1,\dots,|W_k|=m_k}}\ \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{\substack{W\subset V\\|V|=l}}(-1)^{n-l}\right) \\ &= \sum_{\substack{W_1,\dots,W_k\in\mathcal{B}(n)\\|W_1|=m_1,\dots,|W_k|=m_k}}\ \sum_{W\subset V}(-1)^{n-|V|} \\ &= \sum_{\substack{W_1,\dots,W_k\in\mathcal{B}(n)\\|W_1|=m_1,\dots,|W_k|=m_k}}\ \delta_{W,[n]} \\ &= \#R^{(n)}_{(m_1,\dots,m_k)}, \end{aligned}$$

其中，第三个方程由引理 2.3 和例 2.4（1）推出。性质（1）和（2）很容易由集合 $R^{(n)}{}_{(m_1,\dots,m_k)}$ 的定义得到。□

与多项式 $r_k[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](z)$ 类似，我们可以为 $s_k[c_{m_1},\dots,c_{m_k}](z)$ 的系数给出一种组合解释，它反映了 $R^{(n)}{}_{(m_1,\dots,m_k)}$ 的内在分解。下面介绍几个概念来说明这一点。

- 定义自然映射 $\tau\colon \mathcal{B}(n)\setminus\emptyset \to \mathcal{P}(n)$ 如下：
$$\tau(W) = \{W\}\cup\{\{j\} \mid j\notin W\}$$
对于所有非空子集 $W\subset[n]$;
- 一个有序划分的 $[n]$ 是一个元组 $\mathbf{V} = (V_1,\dots,V_l)$，满足 $\{V_1,\dots,V_l\}\in\mathcal{P}(n)$。

• 存在一个典范映射，使划分 $\pi = \{V_1, \ldots, V_l\} \in \mathcal{P}(n)$ 与有序划分 $\overrightarrow{\pi} = (V_1, \ldots, V_l)$ 相对应，并且 $1 \in V_1$ 和 V_i 包含 $[n] \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_{i-1})$ 中的最小数，且对 $i \geq 2$ 成立。我们将 $\overrightarrow{\pi}$ 称为与 $\pi \in \mathcal{P}(n)$ 相关联的 $[n]$ 的自然有序划分。显然，该映射是一一对应。

以下概念对于组合地理解 $s_k[c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}](z)$ 的系数至关重要。

定义 3.13。设 $W = (W_1, \ldots, W_k) \in R^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)}$。

(1) 若元组 W 满足 $\vee_{i=1}^{k} \tau(W_i) \neq 1_n \in \mathcal{P}(n)$，则称其为可分离的。(2) 若元组 W 不可分离，则称其为本质的。令 $S^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 表示 $R^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 中本质元组的集合。

集合 $R^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 可分解为由本质元组构成的分支。可以看出，对于 $(W_1, \ldots, W_k) \in R^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)}$，存在唯一的 $[k]$ 的自然有序划分 $\overrightarrow{\pi} = (V_1, \ldots, V_l)$，以及 $[n]$ 的有序划分 $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_l)$，使得对每个 $1 \leq j \leq l$，均有 $\bigvee_{r \in V_j} \tau(W_r) = \tau(U_j)$。

例 3.14。取 $(W_1, W_2, W_3) \in R^{(5)}_{(2,\ 2,\ 2)}$，其中

$$W_1 = \{1, 4\}, \quad W_2 = \{2, 4\} \quad \text{and} \quad W_3 = \{3, 5\}.$$

那么 $\overrightarrow{\pi} = (V_1, V_2) = (\{1, 2\}, \{3\})$，并且 $\mathbf{U} = (U_1, U_2) = (\{1, 2, 4\}, \{3, 5\})$。显然，$\mathbf{U} = \left(\bigcup_{r \in V_1} W_r, \bigcup_{r \in V_2} W_r\right)$。此外，$\tau(W_1) \vee \tau(W_2) = \{\{1, 2, 4\}, \{3\}, \{5\}\} = \tau(U_1)$，且 $\tau(W_3) = \tau(U_2)$。

定义

$$S^{\overrightarrow{\pi},\mathbf{U}}_{(m_1,\ldots,m_k)} = \left\{ (W_1, \ldots, W_k) \in R^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)} \;\middle|\; \bigcup_{r \in V_j} W_r = U_j,\ \bigvee_{r \in V_j} \tau(W_r) = \tau(U_j) \right\}.$$

对于 $[k]$ 的自然有序划分 $\overrightarrow{\pi} = (V_1, \ldots, V_l)$、$[n]$ 的有序划分 $\mathbf{U} = (U_1, \ldots, U_l)$，以及正整数 $\{m_i\}_{i=1}^{k}$，定义。注意，$S^{\overrightarrow{\pi},\ \mathbf{U}}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 同构于 $S^{(|U_1|)}_{V_1} \times \cdots \times S^{(|U_l|)}_{V_l}$，其中 $S^{(i)}_{V} := S^{(i)}_{(m_{r_1},\ldots,m_{r_t})}$ 当 $V = \{r_1, \ldots, r_t\}$ 时。

上述一一对应的一个推论是

$$\begin{aligned} R^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)} &= \bigcup_{\overrightarrow{\pi}=(V_1,\ldots,V_l)} \bigcup_{\mathbf{U}=(U_1,\ldots,U_l)} S^{\overrightarrow{\pi},\mathbf{U}}_{(m_1,\ldots,m_k)} \\ &= \bigcup_{\overrightarrow{\pi}=(V_1,\ldots,V_l)} \bigcup_{\substack{i_1,\ldots,i_l \geq 1 \\ i_1+\cdots+i_l=n}} \bigcup_{\substack{\mathbf{U}=(U_1,\ldots,U_l) \\ |U_j|=i_j}} S^{\overrightarrow{\pi},\mathbf{U}}_{(m_1,\ldots,m_k)} \end{aligned}$$

因此

$$\#R^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)} = \sum_{\pi=\{V_1,\ldots,V_l\} \in \mathcal{P}(k)} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_l \geq 1 \\ i_1+\cdots+i_l=n}} \binom{n}{i_1, \ldots, i_l} \prod_{j=1}^{l} \#S^{(i_j)}_{V_j}. \tag{3.9}$$

该值 $\mathrm{e}\, s^{(n)}_k[c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}](0)$ 可以通过计算 $S^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 的数量来求得。

命题 3.15. 成立的是

$$s^{(n)}_k[c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}](0) = \#S^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)}.$$

特别地，$s_k[c_{m_1}, \ldots, c_{m_k}](z)$ 是次数为 $\sum_{i=1}^{k} m_i - (k-1)$ 的多项式。

证明。利用归纳法不难看出，如果 $n > \sum_{i=1}^{k} m_i - (k-1)$，那么 $R^{(n)}{}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 中不存在本质元组，这意味着 $\#S^{(n)}{}_{(m_1,\ldots,m_k)} = 0$。

定义多项式

$$\tilde{s}_k[m_1,\ldots,m_k](z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#S^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)}}{n!} z^n.$$

要得出结论，只需证明 $s_k[c_{m_1},\ldots,c_{m_k}](z) = \tilde{s}_k[m_1,\ldots,m_k](z)$，这等价于

$$r_k[c_{m_1},\ldots,c_{m_k}](z) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(k)} \tilde{s}_\pi[m_1,\ldots,m_k](z) \tag{3.10}$$

由 M¨obius 反演公式可知。根据引理 3.12，方程（3.10）等价于

$$\#R^{(n)}_{(m_1,\ldots,m_k)} = \sum_{\pi=\{V_1,\ldots,V_l\}\in\mathcal{P}(k)} \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_l\geq 1\\ i_1+\cdots+i_l=n}} \binom{n}{i_1,\ldots,i_l} \prod_{j=1}^{l} \#S^{(i_j)}_{V_j}.$$

对于 $n\in\mathbb{N}$，这与方程（3.9）完全相同。 □

现在，最后一个问题是确定 $s_k[c_{m_1},\ldots,c_{m_k}](z)$ 的首项系数，即计算 $S^{(M-(k-1))}{}_{(m_1,\ldots,m_k)}$，其中 $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$。主要策略是使用数学归纳法，这需要对 $S^{(M-(k-1))}{}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 稍作修改。

定义 3.16. 设 $\{m_i\}_{i=1}^{k}$ 和 $\{l_i\}_{i=1}^{M-(k-1)}$ 为正整数序列，且 $L{:=}l_1+\cdots+l_{M-(k-1)}$。定义

$$T^{(l_1,\ldots,l_{M-(k-1)})}_{(m_1,\ldots,m_k)} := \left\{ (W_1,\ldots,W_k)\in\mathcal{B}(L)^k \;\middle|\; |W_i| = m_i,\ \bigvee_{i=1}^{k} \tau(W_i)\vee\widehat{0}_{M-(k-1)} = 1_L \right\},$$

其中 $\widehat{0}_{M-(k-1)}{:=}\{\{1,\ldots,l_1\},\{l_1{+}1,\ldots,l_1{+}l_2\},\ldots,\{\sum_{i=1}^{M-(k-1)-1} l_i{+}1,\ldots,\sum_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\}\}$。

由定义 3.13 和 3.16 可知，$S^{(M-(k-1))}{}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 是 $T^{(l_1,\ldots,l_{M-(k-1)})}{}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 的一个特例。也就是说，

$$S^{(M-(k-1))}_{(m_1,\ldots,m_k)} = T^{(1,\ldots,1)}_{(m_1,\ldots,m_k)}, \tag{3.11}$$

其中 $(1,\ldots,1)$ 是一个由 1 组成的 $(M-(k-1))$-元组。

例 3.17。我们来看一些较小 k 的例子。

- 对于任意正整数 m_1 和 $l_1,\ldots,l_{m_1}$，有

$$\#T^{(l_1,\ldots,l_{m_1})}_{(m_1)} = l_1\cdots l_{m_1}.$$

- 对于任意正整数 m_1、m_2 和 l_1、……、$l_{m_1+m_2-1}$，均有

$$\#T^{(l_1,\ldots,l_{m_1+m_2-1})}_{(m_1,m_2)} = \sum_{\substack{I\subset[m_1+m_2-1]\\ |I|=m_1}} \left(\prod_{i\in I} l_i\right) \#T^{(l'_1,\ldots,l'_{m_2})}_{(m_2)},$$

其中 $l'_1 = \sum_{i\in I} l_i$ 和 $\{l'_2, \dots, l'_{m_2}\} = \{l_i \mid i \in [m_1+m_2-1] \setminus I\}$。因此，

$$\begin{aligned}\#T^{(l_1,\dots,l_{m_1+m_2-1})}_{(m_1,m_2)} &= \sum_{\substack{I\subset[m_1+m_2-1]\\|I|=m_1}} \left(\prod_{i=1}^{m_1+m_2-1} l_i\right)\sum_{i\in I} l_i \\ &= \left(\prod_{i=1}^{m_1+m_2-1} l_i\right)\binom{m_1+m_2-2}{m_1-1}\sum_{i=1}^{m_1+m_2-1} l_i.\end{aligned}$$

将上述例子中使用的计数技巧应用于一般情形，可得到以下结果。

命题 3.18。设 $\{m_i\}_{i=1}^k$ 和 $\{l_j\}_{j=1}^{M-(k-1)}$ 为正整数序列，其中 $M = \sum_{i=1}^k m_i$。则

$$\#T^{(l_1,\dots,l_{M-(k-1)})}_{(m_1,\dots,m_k)} = \left(\prod_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)\binom{M-k}{m_1-1,\dots,m_k-1}\left(\sum_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)^{k-1}. \tag{3.12}$$

证明。我们对 k 使用归纳法如下。由于我们在例 3.17 中已经提到，公式 (3.12) 对 $k=1$ 成立。假设公式 (3.12) 对 $k-1$ 以内的情形均成立。注意到

$$\#T^{(l_1,\dots,l_{M-(k-1)})}_{(m_1,\dots,m_k)} = \sum_{\substack{I\subset[M-(k-1)]\\|I|=m_1}} \left(\prod_{i\in I} l_i\right)\#T^{(l'_1,\dots,l'_{m_2+\cdots+m_k-(k-1)})}_{(m_2,\dots,m_k)},$$

其中 $l'_1 = \sum_{i\in I} l_i$ 和 $\{l'_2, \dots, l'_{m_2+\cdots+m_k-(k-1)}\} = \{l_i \mid i \in [M-(k-1)] \setminus I\}$。因此，根据归纳假设 (3.12)，

$$\begin{aligned}&\#T^{(l_1,\dots,l_{M-(k-1)})}_{(m_1,\dots,m_k)} \\ &= \sum_{\substack{I\subset[M-(k-1)]\\|I|=m_1}} \left(\prod_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)\left(\sum_{i\in I} l_i\right)\binom{m_2+\cdots+m_k-(k-1)}{m_2-1,\dots,m_k-1}\left(\sum_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)^{k-2} \\ &= \left(\prod_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)\binom{m_2+\cdots+m_k-(k-1)}{m_2-1,\dots,m_k-1}\left(\sum_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)^{k-2}\sum_{\substack{I\subset[M-(k-1)]\\|I|=m_1}}\left(\sum_{i\in I} l_i\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)\binom{m_2+\cdots+m_k-(k-1)}{m_2-1,\dots,m_k-1}\left(\sum_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)^{k-2}\binom{M-k}{m_1-1}\left(\sum_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)\binom{M-k}{m_1-1,\dots,m_k-1}\left(\sum_{i=1}^{M-(k-1)} l_i\right)^{k-1}.\end{aligned}$$

□

推论 3.19. 设 $\{m_i\}_{i=1}^k$ 是一个正整数序列，且 $M = \sum_{i=1}^k m_i$。那么

$$\operatorname{lead}(s_k[c_{m_1},\dots,c_{m_k}]) = \frac{(M-(k-1))^{k-2}}{\prod_{i=1}^k (m_i-1)!}.$$

证明. 回忆一下，$\deg(s_k[c_{m_1},\cdots,c_{m_k}]) = M-(k-1)$ 且 $s_k^{(M-(k-1))}[c_{m_1},\ldots,c_{m_k}](0) = \#S^{(M-(k-1))}{}_{(m_1,\ldots,m_k)}$ 由命题 3.15 得出。此外，公式 (3.11) 和命题 3.18 意味着

$$\begin{aligned}\#S^{(M-(k-1))}_{(m_1,\ldots,m_k)} &= \#T^{(1,\ldots,1)}_{(m_1,\ldots,m_k)}\\ &= \binom{M-k}{m_1-1,\ldots,m_k-1}(M-(k-1))^{k-1}\\ &= \frac{(M-(k-1))!}{\prod_{i=1}^k (m_i-1)!}\cdot(M-(k-1))^{k-2}.\end{aligned}$$

□

3.3. 新的组合公式。

定理 3.20（见定理 1.1）。设对于每个$1\le i\le k$，$f_i\in\mathbb{C}[x]_0$ 满足 $\deg(f_i)=m_i$，并令 $M=\sum_{i=1}^k m_i$。则有

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\prod_{i=1}^k\left(\sum_{V\in\pi} f_i(|V|)\right)\mu_n(\pi,1_n)=\begin{cases}(n-1)!n^{k-1}\prod_{i=1}^k m_i\operatorname{lead}(f_i), & n=M-(k-1),\\ 0, & n>M-(k-1).\end{cases}$$

证明。根据命题 3.9，该陈述等价于以下内容：

- $\deg(s_k[f_1,\ldots,f_k])=M-(k-1)$;
- $\operatorname{lead}(s_k[f_1,\ldots,f_k])=(M-(k-1))^{k-2}\cdot\prod_{i=1}^k m_i\operatorname{lead}(f_i)$.

由于多项式族 $\{c_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathbb{C}[x]_0$ 的一组基，多项式 $\{f_i\}_{i=1}^k$ 可以唯一地表示为 $\{c_m\}_{m\in\mathbb{N}}$的线性组合：

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{m_i} a_j^{(i)}c_j(x)$$

对于 $1\le i\le k$。这里注意，$c_m(x)$ 是次数为 m 且首项系数为$1/m!$的多项式，因此 $a_{m_i}^{(i)}=m_i!\operatorname{lead}(f_i)$。接下来，根据引理 3.11，

$$s_k[f_1,\ldots,f_k](z)=\sum_{j_1=1}^{m_1}\cdots\sum_{j_k=1}^{m_k}a_{j_1}^{(1)}\cdots a_{j_k}^{(k)}s_k[c_{j_1},\ldots,c_{j_k}](z).$$

然后，根据命题 3.15，

$$\begin{aligned}\deg(s_k[f_1,\ldots,f_k]) &= \deg(s_k[c_{m_1},\ldots,c_{m_k}])\\ &= M-(k-1).\end{aligned}$$

因此，由推论 3.19，

$$\begin{aligned}\operatorname{lead}(s_k[f_1,\ldots,f_k]) &= a_{m_1}^{(1)}\cdots a_{m_k}^{(k)}\operatorname{lead}(s_k[c_{m_1},\ldots,c_{m_k}])\\ &= \operatorname{lead}(s_k[c_{m_1},\ldots,c_{m_k}])\prod_{i=1}^k m_i!\operatorname{lead}(f_i)\\ &= \frac{(M-(k-1))^{k-2}}{\prod_{i=1}^k(m_i-1)!}\prod_{i=1}^k m_i!\operatorname{lead}(f_i)\\ &= (M-(k-1))^{k-2}\prod_{i=1}^k m_i\operatorname{lead}(f_i).\end{aligned}$$

□

推论 3.21。对于 $n, k \in \mathbb{N}$ $(n \geq k+1)$,

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \left(\sum_{V \in \pi} \binom{|V|}{2} \right)^k \mu_n(\pi, 1_n) = \begin{cases} (n-1)! n^{k-1}, & n = k+1, \\ 0, & n > k+1, \end{cases} \tag{3.13}$$

and

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \left(\sum_{V \in \pi} |V|^2 \right)^k \mu_n(\pi, 1_n) = \begin{cases} 2^k (n-1)! n^{k-1}, & n = k+1, \\ 0, & n > k+1. \end{cases} \tag{3.14}$$

这些结果将在后续章节中使用。

最后，我们通过指出例 3.8 和定理 3.20 的结合会得到以下推论，来结束本节。

推论 3.22。对于正整数 $\{m_i\}_{i=1}^k$，定义 $M = \sum_{i=1}^k m_i$ 和 $\widehat{0}_k = \{\{1, \ldots, m_1\}, \{m_1+1, \ldots, m_1+m_2\}, \ldots, \{M-m_k+1, \ldots, M\}\}$。那么

$$\#\{\sigma \in \mathcal{P}(M) \mid \sigma \vee \widehat{0}_k = 1_M, |\sigma| = M-(k-1)\} = (M-(k-1))^{k-2} \prod_{i=1}^k m_i.$$

注 3.23。对于定理 3.20 中的情形 $n < M-(k-1)$，尽管这些情形对后续章节并不重要，我们仍无法在一般情况下得到显式公式。所求公式的关键在于计数

$$\#\{\sigma \in \mathcal{P}(M) \mid \sigma \vee \widehat{0}_k = 1_M, |\sigma| = n\},$$

这等价于确定 $s_k^{(n)}[g_{m_1}, \ldots, g_{m_k}]$，其中 $g_m(x) = x^m$ 对于 $m \in \mathbb{N}$。

4. Finite free analogue of Sakuma-Yoshida's limit theorem

本节将建立 Sakuma 和 Yoshida [24] 的极限定理的有限自由类比。更具体地说，本节旨在研究以下对象的有限自由累积量序列的极限行为:

$$D_{1/m}((p_d^{\boxtimes_d m})^{\boxplus_d m}),$$

当 $m \to \infty$ for $p_d \in \mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$ 且根为非负时，其中 $\kappa_1^{(d)}(p_d) = 1$。回顾一下，Sakuma 和 Yoshida 研究了 S 变换的渐近展开；与此不同，Arizmendi 和 Vargas [3] 则通过聚焦于非交叉分割的组合结构给出了另一种证明。这里我们将采用后一种方法，即研究有限自由累积量的收敛性。

首先，假设次数 d 固定。根据方程 (2.4) 和命题 2.9，我们有

$$\kappa_n^{(d)}\left(D_{1/m}((p_d^{\boxtimes_d m})^{\boxplus_d m})\right) = \frac{1}{m^{n-1}} \kappa_n^{(d)}(p_d^{\boxtimes_d m}) \xrightarrow{m \to \infty} 0$$

对于 $n = 2, \ldots, d$，这意味着当 $m \to \infty$ 时，$D_{1/m}((p_d^{\boxtimes_d m})^{\boxplus_d m})(x) \to (x-1)^d$。因此，这并不是一个有趣的结果。为了观察到有限自由累积量的非平凡极限，我们考虑 $m \to \infty$ 的以下两种情形：(i) 对某个 $t > 0$，$m/d \to t$；(ii) $m/d \to 0$。

接下来，我们考虑具有非负根的 $p_d \in \mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$。此外，我们假设

(A-1) $\kappa_1^{(d)}(p_d) = 1$，即 $\widetilde{a}_1(p_d) = 1$；(A-2) 存在一个具有紧支撑的概率测度 μ，使得 $\mu[\![p_d]\!] \xrightarrow{w} \mu$ as $d \to \infty$。

我们定义

$$e_n(t,\mu) := \exp\left(-t\binom{n}{2}\kappa_2(\mu)\right), \qquad t>0$$

对于 $n\in\mathbb{N}$。注意，对于 $\pi\in\mathcal{P}(n)$,

$$e_\pi(t,\mu)=\prod_{V\in\pi}\exp\left(-t\binom{|V|}{2}\kappa_2(\mu)\right)=\exp\left(-t\sum_{V\in\pi}\binom{|V|}{2}\kappa_2(\mu)\right).$$

4.1. 某些 $t>0$ 下的 $m/d\to t$ 情形。本节考察有限自由乘法卷积的次数 m 与多项式次数 d 之比在 $d,m\to\infty$ 时收敛到某个 $t>0$ 的情形，即 $m/d\to t$。本节的结论如下。

命题 4.1. 考虑满足 (A-1) 和 (A-2) 的 $p_d\in\mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$。对于 $n\in\mathbb{N}$,

$$\kappa_n^{(d)}\left(D_{1/m}((p_d^{\boxtimes_d m})^{\uplus_d m})\right)\to\frac{(-1)^{n-1}}{t^{n-1}(n-1)!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}e_\pi(t,\mu)\mu_n(\pi,1_n),$$

当 $d,m\to\infty$ 时，且对于某个 $t>0$ 有 $m/d\to t$。

证明。由引理 2.12，得

$$\widetilde{a}_n(p_d^{\boxtimes_d m})=\widetilde{a}_n(p_d)^m=\left(\kappa_1^{(d)}(p_d)^n-\binom{n}{2}\frac{\kappa_1^{(d)}(p_d)^{n-2}\kappa_2^{(d)}(p_d)}{d}+O(d^{-2})\right)^m.$$

由于根据 (A-1) 有 $\kappa_1^{(d)}(p_d)=1$，且根据 (A-2)，当 $d\to\infty$ 时 $\kappa_2^{(d)}(p_d)\to\kappa_2(\mu)$，因此我们得到

$$\begin{aligned}\widetilde{a}_n(p_d^{\boxtimes_d m})&=\left(1-\binom{n}{2}\frac{\kappa_2^{(d)}(p_d)}{d}+O(d^{-2})\right)^m\\&=\left\{\left(1-\binom{n}{2}\frac{\kappa_2^{(d)}(p_d)}{d}+O(d^{-2})\right)^d\right\}^{\frac{m}{d}}\\&\to\exp\left(-t\binom{n}{2}\kappa_2(\mu)\right),\end{aligned}\tag{4.1}$$

作为 $m\to\infty$，其中 $m/d\to t$。 □

我们将上述有限自由累积量的极限记作 $\{\kappa_n(t,\mu)\}_{n\geq1}$。

推论 4.2. 对于 $n\in\mathbb{N}$，我们有

$$\lim_{t\to0^+}\kappa_n(t,\mu)=\frac{(\kappa_2(\mu)n)^{n-1}}{n!}.$$

证明。容易看出 $\lim_{t\to0^+}e_\pi(t,\mu)=1$。注意，

$$\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\mu_n(\pi,1_n)=0$$

and

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}e_\pi(t,\mu)=\left(-\sum_{V\in\pi}\binom{|V|}{2}\kappa_2(\mu)\right)^k e_\pi(t,\mu).$$

根据洛必达法则、命题 4.1 和公式 (3.13)，可得以下结果：

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0^+}\kappa_n(t,\mu) &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\left\{\lim_{t\to 0^+}\frac{\left(-\sum_{V\in\pi}\binom{|V|}{2}\kappa_2(\mu)\right)^{n-1}e_\pi(t,\mu)}{(n-1)!}\right\}\mu_n(\pi,1_n)\\ &= \frac{\kappa_2(\mu)^{n-1}}{((n-1)!)^2}\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\left(\sum_{V\in\pi}\binom{|V|}{2}\right)^{n-1}\mu_n(\pi,1_n)\\ &= \frac{(\kappa_2(\mu)n)^{n-1}}{n!}.\end{aligned}$$

□

例 4.3. 为简单起见，我们假设 $\kappa_2^{(d)}(p_d) = 1$。则它还满足 $\kappa_2(\mu) = 1$。因此，前四个累积量计算如下。

- $\kappa_1(t,\mu) = 1$ and $\lim_{t\to 0^+}\kappa_1(t,\mu) = 1$.
- $\kappa_2(t,\mu) = \dfrac{e^t-1}{t}$ and $\lim_{t\to 0^+}\kappa_2(t,\mu) = 1$.
- $\kappa_3(t,\mu) = \dfrac{e^{3t}-3e^t+2}{2t^2}$ and $\lim_{t\to 0^+}\kappa_3(t,\mu) = \dfrac{3}{2}$.
- $\kappa_4(t,\mu) = \dfrac{e^{6t}-4e^{3t}-3e^{2t}+12e^t-6}{6t^3}$ and $\lim_{t\to 0^+}\kappa_4(t,\mu) = \dfrac{8}{3}$.

4.2. $m/d \to 0$ 为 $d, m \to \infty$的情形。为证明定理 4.7，我们准备一些概念。

定义 4.4. 令 $\mathbb{C}[[x,y]]$ 表示由 x 和 y构成的形式幂级数环 ：

$$\mathbb{C}[[x,y]] := \left\{ f(x,y) = \sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}x^k y^l \;\middle|\; a_{kl}\in\mathbb{C}\right\}.$$

对于任意 $f(x,y) \in \mathbb{C}[[x,y]]$，唯一存在 $\{q_l[f](x)\}_{l=0}^{\infty} \subset \mathbb{C}[[x]]$，使得

$$f(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l[f](x)y^l$$

由于 $\mathbb{C}[[x,y]] \cong (\mathbb{C}[[x]])[[y]]$。我们将 $\mathbb{D}$ 定义为 $\mathbb{C}[[x,y]]$ 的一个子集：

$$\mathbb{D} := \left\{ f(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty} q_l[f](x)y^l \in \mathbb{C}[[x,y]] \;\middle|\; \deg q_l[f] \le l\right\}.$$

引理 4.5. 子集 $\mathbb{D}$ 在加法和乘法下封闭，即 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{C}[[x,y]]$的子环。

证明。事实上，根据定义，

$$q_l[f+g] = q_l[f] + q_l[g]$$

and

$$q_l[fg] = \sum_{i+j=l} q_i[f]q_j[g]$$

对于 f、$g \in \mathbb{D}$、$l \ge 0$。特别是，

$$\operatorname{lead}(q_l[fg]) = \sum_{i+j=l}\operatorname{lead}(q_i[f])\operatorname{lead}(q_j[g]).$$

□

引理 4.6。对于形式幂级数 $f(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\, x^k \in \mathbb{C}[[x]]$，考虑

$$F(m,x) := f^m(x) = \left(1 + \sum_{k=1}^{d} \frac{a_k}{k!} x^k\right)^m = \sum_{l=0}^{\infty} q_l[F](m) x^l \in \mathbb{C}[[m,x]].$$

那么，对于 $l \geq 0$，$F \in \mathbb{D}$、$\deg(q_l[F]) = l$，且 $\operatorname{lead}(q_l[F]) = a_1^l/l!$

证明。显然，$q_0[F](m) = F(0,m) = f^m(0) = 1$，并且

$$q_1[F](m) = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_{x=0} F(m,x) = n f^{m-1}(0) f'(0) = m a_1.$$

定义 $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\, x^k$，然后 $f(x) = 1 + g(x)$。因此，

$$\begin{aligned} F(m,x) &= (1+g(x))^m \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} g(x)^k \end{aligned}$$

因此

$$q_l[F](m) = \frac{1}{l!} \left.\frac{\partial^l}{\partial x^l}\right|_{x=0} F(m,x) = \sum_{k=1}^{l} \binom{m}{k} \frac{1}{l!} \left.\frac{\partial^l}{\partial x^l}\right|_{x=0} g(x)^k.$$

因此，$\deg\, q_l[F] = l$，并且

$$\operatorname{lead} q_l[F] = \frac{1}{(l!)^2} \left.\frac{\partial^l}{\partial x^l}\right|_{x=0} g(x)^l = \frac{g'(0)^l}{l!} = \frac{a_1^l}{l!}.$$

□

定理 4.7（见定理 1.2）。考虑满足 (A-1) 和 (A-2) 的 $p_d \in \mathbb{P}_{\mathrm{mon}}(d)$。它满足

$$\kappa_n^{(d)}\left(D_{1/m}((p_d^{\boxtimes_d m})^{\boxplus_d m})\right) \to \frac{(\kappa_2(\mu)n)^{n-1}}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

当 d、$m \to \infty$ 具有 $m/d \to 0$ 时。

证明。由命题 2.13,

$$\begin{aligned} \kappa_n^{(d)}(p_d^{\boxtimes_d m}) &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} \widetilde{a}_\pi(p_d)^m \mu_n(\pi, 1_n) \\ &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{\substack{\sigma_1,\ldots,\sigma_m \in \mathcal{P}(n) \\ \sigma_1 \vee \cdots \vee \sigma_m = 1_n}} \left(\prod_{i=1}^{m} d^{|\sigma_i|-n} \mu_n(0_n, \sigma_i) \kappa_{\sigma_i}^{(d)}(p_d)\right) \\ &=: \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q_l(m)}{d^l}, \end{aligned}$$

其中，在第三行，我们将关于 d^{-1} 的展开式中的系数定义为多项式 $\{q_l(m)\}_{l=0}^{\infty}$。由第二行可立即得知，$q_l(m) = 0\,(l = 0, \ldots, n-2)$。可以验证，$q_l(m)$ 的次数小于或等于 l。观察第一行和 (4.1)，然后考察 $\widetilde{a}_n(p_d)^m$ $(n \in \mathbb{N})$ 关于 d^{-1} 的展开式中的系数。由此，根据引理 4.6，其次数小于或等于分母的次数。此外，根据引理 4.5，对于 $\pi \in \mathcal{P}(n)$，$\widetilde{a}_\pi(p_d)^m$ 也成立。

接下来，我们证明 $q_{n-1}(m)$ 的首项系数等于 $(-\kappa_2(p_d))^{n-1}n^{n-2}$。对于 d^{n-1}， $\widetilde{a}_\pi(p_d)^m$ 的分子多项式的首项系数计算如下：

$$\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_{|\pi|}\geq 0\\ l_1+\cdots+l_{|\pi|}=n-1}} \frac{1}{l_1!\cdots l_{|\pi|}!}\left(-\kappa_2^{(d)}(p_d)\binom{|V_1|}{2}\right)^{l_1}\cdots\left(-\kappa_2^{(d)}(p_d)\binom{|V_{|\pi|}|}{2}\right)^{l_{|\pi|}}$$

根据引理 4.5。因此， $q_{n-1}(m)$ 的首项系数等于

$$\begin{aligned}(-\kappa_2^{(d)}(p_d))^{n-1}&\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{P}(n)\\ \pi=\{V_1,\ldots,V_r\}}}\left\{\sum_{\substack{l_1,\ldots,l_r\geq 0\\ l_1+\cdots+l_r=n-1}}\frac{1}{l_1!\cdots l_r!}\binom{|V_1|}{2}^{l_1}\cdots\binom{|V_r|}{2}^{l_r}\right\}\mu_n(\pi,1_n)\\ &=\frac{(-\kappa_2^{(d)}(p_d))^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\left(\sum_{V\in\pi}\binom{|V|}{2}\right)^{n-1}\mu_n(\pi,1_n)\\ &=(-\kappa_2^{(d)}(p_d))^{n-1}n^{n-2},\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由公式 (3.13) 得出。最终，我们得到

$$\begin{aligned}\kappa_n^{(d)}\left(D_{1/m}((p_d^{\boxtimes_d m})^{\boxplus_d m})\right)&=\frac{(-d)^{n-1}}{m^{n-1}(n-1)!}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{q_l(m)}{d^l}\\ &=\frac{(\kappa_2^{(d)}(p_d)n)^{n-1}}{n!}+O\left(\frac{1}{m}\right)+O\left(\frac{m}{d}\right).\end{aligned}$$

□

5. Central limit theorem for finite free multiplicative convolution of polynomials with nonnegative roots

本节证明具有非负根的多项式的有限自由乘法卷积的大数定律（大数定律）和中心极限定理（中心极限定理）。此外，我们研究中心极限定理中的极限多项式与 $[0,\infty$ 上的乘法自由半圆分布之间的关系。

5.1. 大数定律。在 [11], 中，具有非负根的多项式的有限自由乘法卷积的大数定律已得到确立。也就是说，如果 p 是一个次数为 d 且具有非负根的多项式，那么我们研究了当 $m\to\infty$ 时 $\phi_{1/m}(p^{\boxtimes_d m})$ 的极限多项式，其中 ϕ_α 定义于 (1.2) 中。回顾可知，其极限多项式是非平凡的，并且预计与 [12] 中的结果密切相关。在这里，我们关注 $\boxtimes_d$ 的另一种大数定律，即当 $m\to\infty$ 时， $\phi_{1/m}(p)^{\boxtimes_d m}$ 的极限行为（不等于 $\phi_{1/m}(p^{\boxtimes_d m})$）。然而， [11] 尚未研究这一问题。本节将证明，当 $m\to\infty$ 时， $\phi_{1/m}(p)^{\boxtimes_d m}$ 的极限根集中于一个点。

命题 5.1. 设 $p(x)=\prod_{k=1}^d(x-e^{\theta_k})$。假设

$$\frac{1}{d}\sum_{k=1}^d\theta_k=\alpha.$$

Then

$$\lim_{m\to\infty}\phi_{1/m}(p)^{\boxtimes_d m}(x)=(x-e^\alpha)^d.$$

证明。简单计算可得

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k(\phi_{1/m}(p)) &= \binom{d}{k}^{-1} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le d} \exp\left(\frac{1}{m}(\theta_{j_1}+\cdots\theta_{j_k})\right)\\ &= \binom{d}{k}^{-1}\left\{\binom{d}{k}+\frac{1}{m}\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le d}(\theta_{j_1}+\cdots\theta_{j_k})+O(m^{-2})\right\}\\ &= \binom{d}{k}^{-1}\left\{\binom{d}{k}+\frac{1}{m}\binom{d-1}{k-1}\sum_{i=1}^{d}\theta_i+O(m^{-2})\right\}\\ &= 1+\frac{1}{m}\cdot\alpha k+O(m^{-2}).\end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{a}_k(\phi_{1/m}(p))^m = e^{\alpha k},$$

因此

$$\lim_{m\to\infty}\phi_{1/m}(p)^{\boxtimes_d m}(x) = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k\binom{d}{k}e^{\alpha k}x^{d-k} = (x-e^{\alpha})^d.$$

□

5.2. 中心极限定理与乘法自由半圆分布。本节中，我们研究 $\boxtimes_d$ 具有非负根的多项式的中心极限定理，以及当次数趋于无穷时它们的极限。

定理 5.2（参见定理 1.3 (1)）。设 $d\ge 2$。假设 $p(x)=\prod_{k=1}^{d}(x-e^{\theta_k})$，使得

$$\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\theta_k = 0 \qquad \text{and} \qquad \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\theta_k^2 = \sigma^2.$$

Then

$$\lim_{m\to\infty}\phi_{1/\sqrt{m}}(p)^{\boxtimes_d m}(x) = I_d\left(x;\frac{d\sigma^2}{d-1}\right), \tag{5.1}$$

where $I_d(x;t)=\sum_{k=0}^{d}(-1)^k\binom{d}{k}\exp(k(d-k)t/2d)x^{d-k}$ for $t\ge 0$.

证明。首先，注意到

$$0 = \left(\sum_{k=1}^{d}\theta_k\right)^2 = d\sigma^2 + 2\sum_{1\le j_1<j_2\le d}\theta_{j_1}\theta_{j_2} \tag{5.2}$$

根据假设，可得

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_k(\phi_{1/\sqrt{m}}(p)) &= \binom{d}{k}^{-1} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le d} \exp\left(\frac{1}{\sqrt{m}}(\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{j_k})\right) \\
&= \binom{d}{k}^{-1} \left\{ \binom{d}{k} + \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le d} (\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{j_k}) \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2m} \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le d} (\theta_{j_1}+\cdots+\theta_{j_k})^2 + O(m^{-\frac{3}{2}}) \right\} \\
&= \binom{d}{k}^{-1} \left\{ \binom{d}{k} + \frac{1}{\sqrt{m}} \binom{d-1}{k-1} \sum_{k=1}^{d} \theta_k \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2m} \left(\binom{d-1}{k-1} \sum_{k=1}^{d} \theta_k^2 + 2\binom{d-2}{k-2} \sum_{1\le j_1<j_2\le d} \theta_{j_1}\theta_{j_2} \right) + O(m^{-\frac{3}{2}}) \right\} \\
&= \binom{d}{k}^{-1} \left\{ \binom{d}{k} + \frac{d\sigma^2}{2m} \left(\binom{d-1}{k-1} - \binom{d-2}{k-2} \right) + O(m^{-\frac{3}{2}}) \right\} \\
&= 1 + \frac{k(d-k)}{2(d-1)m}\sigma^2 + O(m^{-\frac{3}{2}}),
\end{aligned}$$

其中第三行用到了这些假设和 (5.2)。因此，当 $m\to\infty$ 取 $k=0,\ldots,d$ 时，$\widetilde{a}_k(\phi_{1/\sqrt{m}}(p))^m$ 趋于 $\exp(k(d-k)\sigma^2/2(d-1))$。这意味着 $\lim_{m\to\infty}\phi_{1/\sqrt{m}}(p)^{\boxtimes_d m}(x) = I_d(x; d\sigma^2/(d-1))$。□

最后，我们证明 $I_d(x;t)$ 的有限自由累积量收敛于乘法自由半圆分布的自由累积量 λ_t，其 n 阶矩 $m_n(\lambda_t)$ 由下式给出

$$\exp\left(\frac{nt}{2}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n^{k-1}}{k!} \binom{n}{k+1} t^k, \qquad t\ge 0.$$

分布 λ_t 在 [6, 命题 5] 中引入。

定理 5.3（见定理 1.3（2））。对于 $t\ge 0$，当 $d\to\infty$ 时，我们有 $\mu[\![I_d(x;t)]\!] \xrightarrow{w} \lambda_t$。

证明。根据 $I_d(x;t)$ 的定义，我们有

$$\widetilde{a}_k(I_d(x;t)) = \exp\left(\frac{tk(d-k)}{2d}\right), \qquad k=0,1,\ldots,d,$$

因此，对于 $\pi\in\mathcal{P}(n)$,

$$\begin{aligned}
\widetilde{a}_\pi(I_d(x;t)) &= \prod_{V\in\pi} \exp\left(\frac{t|V|(d-|V|)}{2d}\right) \\
&= \exp\left\{ \frac{t}{2d} \left(\sum_{V\in\pi} d|V| - \sum_{V\in\pi} |V|^2 \right) \right\} \\
&= \exp\left(\frac{tn}{2}\right) \exp\left(-\frac{t}{2d} \sum_{V\in\pi} |V|^2 \right).
\end{aligned}$$

由方程 (3.14) 可直接计算得出

$$\begin{aligned}
&\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \widetilde{a}_\pi(I_d(x;t))\mu_n(\pi,1_n) \\
&\quad= \exp\left(\frac{tn}{2}\right)\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \exp\left(-\frac{t}{2d}\sum_{V\in\pi}|V|^2\right)\mu_n(\pi,1_n) \\
&\quad= \exp\left(\frac{tn}{2}\right)\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)} \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{t}{2d}\sum_{V\in\pi}|V|^2\right)^k\right\}\mu_n(\pi,1_n) \\
&\quad= \exp\left(\frac{tn}{2}\right)\frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{t}{2d}\right)^{n-1}\left\{\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\left(\sum_{V\in\pi}|V|^2\right)^{n-1}\mu_n(\pi,1_n)\right\}+O\left(\frac{1}{d^n}\right) \\
&\quad= \exp\left(\frac{tn}{2}\right)\frac{1}{(n-1)!}\left(-\frac{t}{2d}\right)^{n-1}\cdot 2^{n-1}(n-1)!n^{n-2}+O\left(\frac{1}{d^n}\right) \\
&\quad= \exp\left(\frac{tn}{2}\right)\left(-\frac{t}{d}\right)^{n-1}n^{n-2}+O\left(\frac{1}{d^n}\right).
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\begin{aligned}
\kappa_n^{(d)}(I_d(x;t)) &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\widetilde{a}_\pi(I_d(x;t))\mu_n(\pi,1_n) \\
&= \exp\left(\frac{nt}{2}\right)\frac{(nt)^{n-1}}{n!}+O\left(\frac{1}{d}\right),
\end{aligned}$$

这意味着

$$\lim_{d\to\infty}\kappa_n^{(d)}(I_d(x;t)) = \exp\left(\frac{nt}{2}\right)\frac{(nt)^{n-1}}{n!}.$$

结合　命题 A.1（1）和命题 2.11，所需结果得证　d. □

注 5.4. 注意到 λ_t 与 $D_{e^{t/2}}(\eta_t)$ 重合，其中 η_t 是 Sakuma 和 Yoshida [24], 所得到的概率测度，因为

$$\kappa_n(\lambda_t) = \exp\left(\frac{nt}{2}\right)\frac{(nt)^{n-1}}{n!} = \kappa_n(D_{e^{t/2}}(\eta_t))$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$ 均成立。

6. Alternative proof of Kabluchko's limit theorems

本节中，我们给出 Kabluchko 的两个极限定理的另一种证明。值得注意的是，第 6.1 节中的证明与第5节中的证明平行。

6.1. 酉 Hermite 多项式的 Kabluchko 极限定理。我们通过以下方式将$H_d(z;t)$定义为 $\mathbb{C}$ 上的一个多项式：

$$H_d(z;t) := \sum_{k=0}^{d}(-1)^k\binom{d}{k}\exp\left(-\frac{tk(d-k)}{2d}\right)z^{d-k}, \qquad z\in\mathbb{C},\ t\geq 0.$$

多项式 $H_d(z;t)$ 称为参数为 $t\geq 0$ 的酉 Hermite 多项式。根据 [15, 引理 2.1], , 多项式 $H_d(z;t)$ 的所有零点都位于单位圆 $\mathbb{T}$ 上。Mirabelli [22, 定理 3.16] 指出，它是多项式有限自由乘法卷积中心极限定理的极限多项式，适用于根位于 $\mathbb{T}$ 上的多项式。

对于一个所有根都位于 $\mathbb{T}$ 上的多项式 $p \in \mathbb{P}_{mon}(d)$，存在唯一的 $\theta_1, \ldots, \theta_d \in [-\pi, \pi)$，使得 $p(z) = \prod_{k=1}^{d}(z - e^{i\theta_k})$。接着，我们将多项式 $\phi_c(p)$ 定义为

$$\phi_c(p)(z) := \prod_{k=1}^{d}(z - e^{ic\theta_k})$$

当 $c \in (0, 1)$ 时。

命题 6.1。设 $d \geq 2$。假设对于某个 θ_1，有 $p(z) = \prod_{k=1}^{d}(z - e^{i\theta_k})$，其中 $\theta_1, \ldots, \theta_d \in [-\pi, \pi)$。假定

$$\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\theta_k = 0 \quad \text{and} \quad \frac{1}{d}\sum_{k=1}^{d}\theta_k^2 = \sigma^2.$$

Then

$$\lim_{m\to\infty} \phi_{1/\sqrt{m}}(p)^{\boxtimes_d m}(z) = H_d\left(z; \frac{d\sigma^2}{d-1}\right).$$

证明。为方便读者，我们在此简述证明。采用与定理 5.2 的证明平行的论证可得

$$\widetilde{a}_k(\phi_{1/\sqrt{m}}(p)) = 1 - \frac{k(d-k)}{2(d-1)m}\sigma^2 + O(m^{-\frac{3}{2}}).$$

因此，我们得到 $\lim_{m\to\infty} \phi_{1/\sqrt{m}}(p)^{\boxtimes_d m}(z) = H_d(z; d\sigma^2/(d-1))$。 □

Kabluchko 在 [15, 定理 2.2] 中证明，$H_d(z; t)$ 的经验根分布在单位圆上弱收敛于参数为 $t \geq 0$ 的 σ_t 上的自由正态分布，其中 σ_t 于 [4] 中引入，并在 [6, 7, 30, 31] 中进行了研究。此外，C´ebron 构造了一个矩阵模型，其中时间 t 的（酉）矩阵值布朗运动的矩随矩阵维数趋于无穷而收敛到 σ_t 的矩，收敛发生在 [8] 中。σ_t 的自由累积量已知（见 [10]），我们将在附录 A 中运用拉格朗日反演定理给出其严格证明。

定理 6。 2（见定理 1.4（1））。考虑 $t \geq 0$。当 $d \to \infty$ 时，我们有 $\mu[H_d(z; t)] \xrightarrow{w} \sigma_t$。

证明。类似于定理 5.3 的证明可得

$$\kappa_n^{(d)}(H_d(z; t)) = \exp\left(-\frac{nt}{2}\right)\frac{(-nt)^{n-1}}{n!} + O\left(\frac{1}{d}\right).$$

由命题 A.1（2）和命题 2.11，我们得到所需结果。 □

6.2. 酉拉盖尔多项式的 Kabluchko 极限定理。令 $L_{d,m}$ 为酉拉盖尔多项式，即

$$L_{d,m}(z) = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k\binom{d}{k}\left(1 - \frac{2k}{d}\right)^m z^{d-k}.$$

在 [14, 定理 2.7], 中，若对于某个 $t > 0$，当 d 时有 $m/d \to t > 0$，则多项式 $L_{d,m}(z)$ 的经验根分布在 $\mathbb{T}$ 上弱收敛于参数为 t 的自由酉泊松分布 Π_t，详见 [4, 14] 中关于 Π_t 的内容。我们给出如下关于自由酉泊松分布的 Kabluchko 极限定理的另一种证明。

定理 6.3（见定理 1.4 (2)）。由于 $d \to \infty$ 且 $m/d \to t$，其中 $t > 0$ 为某个值，因此我们有

$$\mu[L_{d,m}] \xrightarrow{w} \Pi_t,$$

等价地

$$\kappa_n^{(d)}(L_{d,m}) \to (-1)^{n-1}2^n e^{-2nt}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t)^k}{k!}(2n)^{k-1}\binom{n-2}{k-1} = \kappa_n(\Pi_t),$$

其中我们将 $\kappa_1^{(d)}(L_{d,\ m}) = e^{-2t}$ 理解为。

证明。考虑 $m/d \to t$ for some $t > 0$ as $d, m \to \infty$。根据有限自由累积量的定义,

$$\kappa_n^{(d)}(L_{d,m}) = \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\prod_{V\in\pi}\left(1-\frac{2|V|}{d}\right)^m \mu_n(\pi, 1_n).$$

我们有

$$\begin{aligned}
\prod_{V\in\pi}\left(1-\frac{2|V|}{d}\right)^m &= \exp\left(m\sum_{V\in\pi}\log\left(1-\frac{2|V|}{d}\right)\right)\\
&= \exp\left(-\frac{m}{d}\cdot d\sum_{V\in\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\frac{(2|V|)^l}{d^l}\right)\\
&= e^{-2nt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{m}{d}\sum_{V\in\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{l}\frac{(2|V|)^l}{d^{l-1}}\right)^k\\
&= e^{-2nt}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}\left(-\frac{m}{d}\sum_{V\in\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{l}\frac{(2|V|)^l}{d^{l-1}}\right)^k + O(d^{-n}).
\end{aligned}$$

令 $t_d := m/d$，则根据假设，$t_d \to t$ as $d \to \infty$。于是

$$\begin{aligned}
\kappa_n^{(d)}(L_{d,m}) &= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-2nt}\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t_d)^k}{k!}\left(\sum_{V\in\pi}\sum_{l=2}^{\infty}\frac{1}{l}\frac{(2|V|)^l}{d^{l-1}}\right)^k\mu_n(\pi,1_n) + O(d^{-1})\\
&= \frac{(-d)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-2nt}\underbrace{\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t_d)^k}{k!}\left(\sum_{V\in\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l+1}\frac{(2|V|)^{l+1}}{d^l}\right)^k\mu_n(\pi,1_n)}_{=:M_n(d)} + O(d^{-1}).
\end{aligned}$$

简便起见，我们记 $f_l(x) := (2x)^l/l$，于是

$$\begin{aligned}
M_n(d) &= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t_d)^k}{k!}\left(\sum_{V\in\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{f_{l+1}(|V|)}{d^l}\right)^k\mu_n(\pi,1_n)\\
&= \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t_d)^k}{k!}\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{V\in\pi}\sum_{l_j=1}^{\infty}\frac{f_{l_j+1}(|V|)}{d^{l_j}}\right)\mu_n(\pi,1_n)\\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t_d)^k}{k!}\sum_{l_1,\ldots,l_k=1}^{\infty}\frac{1}{d^{l_1+\cdots+l_k}}\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\left(\sum_{V\in\pi}f_{l_1+1}(|V|)\right)\cdots\left(\sum_{V\in\pi}f_{l_k+1}(|V|)\right)\mu_n(\pi,1_n).
\end{aligned}$$

回想一下，对于每个 $n \in \mathbb{N}$ 以及 l_1、$\cdots$、$l_k \in \mathbb{N}$,

$$s_k^{(n)}[f_{l_1+1},\ldots,f_{l_k+1}](0) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\left(\sum_{V\in\pi}f_{l_1+1}(|V|)\right)\cdots\left(\sum_{V\in\pi}f_{l_k+1}(|V|)\right)\mu_n(\pi,1_n).$$

根据定理 3.20，如果 $\sum_{i=1}^{k}\deg(f_{l_i+1}) - k < n-1$，也就是说，$\sum_{i=1}^{k} l_i < n-1$ 那么

$$s_k^{(n)}[f_{l_1+1},\dots,f_{l_k+1}](0) = 0,$$

并且若 $\sum_{i=1}^{k} l_i = n-1$，则

$$\begin{aligned} s_k^{(n)}[f_{l_1+1},\dots,f_{l_k+1}](0) &= (n-1)!n^{k-1}\left(\prod_{i=1}^{k}(l_i+1)\cdot\frac{2^{l_i+1}}{l_i+1}\right) \\ &= (n-1)!2^n(2n)^{k-1}. \end{aligned}$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \kappa_n^{(d)}(L_{d,m}) &= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-2nt}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t_d)^k}{k!}\sum_{\substack{l_1,\dots,l_k=1\\ l_1+\cdots+l_k=n-1}}^{\infty} s_k^{(n)}[f_{l_1+1},\dots,f_{l_k+1}](0)+O(d^{-1}) \\ &= (-1)^{n-1}2^n e^{-2nt}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t_d)^k}{k!}(2n)^{k-1}\#\left\{(l_1,\dots,l_k)\in\mathbb{N}^k \;\middle|\; \sum_{i=1}^{k} l_i = n-1\right\}+O(d^{-1}) \\ &= (-1)^{n-1}2^n e^{-2nt}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t_d)^k}{k!}(2n)^{k-1}\binom{n-2}{k-1}+O(d^{-1}). \end{aligned}$$

结合命题 A.2，取 $d\to\infty$ 后，我们便得到了该结果。 □

Acknowledgement

本研究得到了 JSPS 开放合作联合研究项目（项目编号：JPJSBP120209921）的资助。此外，Y.U. 得到了 JSPS 科学研究补助金（B）（19H01791）和 JSPS 青年科学家补助金（22K13925）的资助。K.F. 得到了北海道大学雄心博士奖学金（信息科学与人工智能）的资助。O.A. 得到了 CONACYT Grant CB-2017-2018-A1-S-9764 的资助。

O.A. 感谢 Jorge Garza Vargas、Zahkar Kabluchko、Daniel Perales 和 Noriyoshi Sakuma 进行富有成效的讨论。特别感谢 Jorge Garza Vargas 指出了第 3 节的组合公式与第 6.1 节所解决问题之间的联系，也感谢 Noriyoshi Sakuma 提议研究定理 1.2。

作者感谢匿名审稿人提出非常有帮助的意见，使论文更易于阅读。

References

[1] O. Arizmendi、J. Garza-Vargas 和 D. Perales，《有限自由累积量：乘法卷积、亏格展开与无穷小分布》。arXiv:2108.08489。[2] O. Arizmendi 和 D. Perales，《有限自由卷积的累积量》。《组合理论杂志 A 辑》155（2018），244–266。[3] O. Arizmendi 和 C. Vargas，《自由随机变量的乘积与 k-可除非交叉分割》。《电子概率通讯》17（2012），1–13。[4] H. Bercovici 和 D. Voiculescu，《乘法与加法自由卷积的 L´évy-Hincin 型定理》。《太平洋数学杂志》153，第 2 期（1992），217–248。[5] H. Bercovici 和 D. Voiculescu，《具有无界支集的测度的自由卷积》。《印第安纳大学数学杂志》42（1993），733–773。[6] P. Biane，《自由布朗运动、自由随机微积分与随机矩阵》。载于《自由概率论》（安大略省滑铁卢，1995），《菲尔兹研究所通讯》第 12 卷，第 1–19 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州。[7] P. Biane，《Segal-Bargmann 变换、矩阵空间上的函数演算与半圆系统和圆系统理论》。《函数分析杂志》144，第 1 期（1997），232–286。[8] G. C´ébron，《自由乘法卷积的矩阵模型》。《概率年刊》44，第 4 期（2016），2427–2478。

[9] L. Comtet, 《高级组合学》。D. Reidel 出版公司，多德雷赫特，增订版，1974年。《有限展开与无限展开的艺术》。[10] N. Demni、M. Guay-Paquet 和 A. Nica, 《自由酉布朗运动的星累积量》。《高级应用数学》69（2015），1–45。[11] K. Fujie 和 Y. Ueda, 《多项式有限自由乘法卷积的大数定律》。《SIGMA》19（2023），004，11 页。[12] U. Haagerup 和 S. M¨øller, 《自由乘法卷积的大数定律》。《算子代数与动力系统》，157–186, 《施普普林格数学统计学论文集》第 58 卷，施普林格，海德堡，2013年。[13] G. H. Hardy、J. E. Littlewood 和 G. Po´lya, 《不等式》。剑桥大学出版社，剑桥。1934年。[14] Z. Kabluchko, 《重复求导与自由酉泊松过程》，arXiv:2112.14729。[15] Z. Kabluchko, 《居里-外斯铁磁体的李-杨零点、酉 Hermite 多项式与反向热流》，arXiv:2203.05533。[16] V. P. Leonov 和 A. N. Sirjaev, 《关于半不变量的一种方法》。《理论概率及其应用》4：319–329，1959年。[17] H. Maassen, 《自由独立随机变量的加法》。《函数分析杂志》106（1992），409–438。[18] A. W. Marcus, 《多项式卷积与（有限）自由概率》，arXiv:2108.07054。[19] A. W. Marcus、D. A. Spielman 和 N. Srivastava, 《多项式的有限自由卷积》。《概率论及相关领域》182（2022），第 3–4 期，807–848。[20] M. Marden, 《多项式几何》，第 2 版，第 3 号。美国数学会，1966年。[21] J. A. Mingo 和 R. Speicher, 《自由概率与随机矩阵》，菲尔兹研究所专著，第 35 卷，施普林格，纽约；菲尔兹数学科学研究所，多伦多，安大略省，2017年。[22]B. Mirabelli, 《厄米、非厄米与多元有限自由概率》。2021年。网址：https://dataspace.princeton.edu/handle/88435/dsp019593tz21r。博士论文，普林斯顿大学。[23] A. Nica 和 R. Speicher, 《自由概率论组合学讲义》，伦敦数学学会讲义系列，第 335 卷，剑桥大学出版社，剑桥，2006年。[24] N. Sakuma 和 H. Yoshida, 《与自由乘法卷积相关的新极限定理》。《数学研究》214（2013），第 3 期，251–264。[25] G. Sze¨g{o}, 《关于 J. H. Grace 关于代数方程根的一个定理的注记》。《数学杂志》13（1），28–55，1922年。 ¨E. G.F. Thomas, 《多重线性映射的极化恒等式》。《数学探索》25，第 3 期（2014），468–474[26] D. Voiculescu、K. J. Dykema 和 A. Nica, 《自由随机变量》。第 1 号。美国数学会，1992年。[27] D. Voiculescu, 《某些非交换随机变量的加法》。《函数分析杂志》66（1986），323–346。[28] J. Yancey, 《边标记树》。《圆周率、缪、埃普西隆期刊》第 8 卷，第 2 期（1985），96–102。[29] P. Zhong, 《自由布朗运动与自由卷积半群：乘法情形》。《太平洋数学杂志》269，第 1 期（2014），219–256。[30] P. Zhong, 《关于与正态分布的自由乘法类比进行自由卷积》。《理论概率论杂志》28，第 4 期（2015），1354–1379。

Appendix 附录 A. Free cumulants via the Lagrange inversion theore m

本附录中，我们计算乘法自由半圆分布 λ_t、自由酉正态分布 σ_t 以及第 5 节和第 6 节中出现的自由酉泊松分布 Π_t 的自由累积量。一种计算策略是使用拉格朗日反演定理（例如，参见 [9, 第 148 页，定理 A]）。

回忆一下，对于概率测度 μ （在 $[0,\infty$ 上）或 $\mathbb{T}$），若其一阶矩非零，则可得

$$R_\mu(zS_\mu(z)) = z$$

在 0 的某个邻域内，其中 $R_\mu(z)$ 是 μ 的 R 变换，而 $S_\mu(z)$ 是μ的 S 变换，详情见 [4, 5]。若 $f_\mu(z) := zS_\mu(z)$ 在 0 的某个邻域内解析，且 $f_\mu(0) = 0$，同时 $f'_\mu(0) \neq 0$，则拉格朗日反演定理推出

$$\kappa_n(\mu) = \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{z}{f_\mu(z)}\right)^n.$$

A.1. 乘法自由半圆分布 λ_t 和自由正态分布σ_t。运用上述策略，我们给出以下已知结果的证明。

命题 A.1。（1）设 λ_t 是 $[0,\infty$ 上的乘法自由半圆分布，其中 $t \geq 0$。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\kappa_n(\lambda_t) = \exp\left(\frac{nt}{2}\right)\frac{(nt)^{n-1}}{n!}.$$

（2）（例如参见 [10]）设 σ_t 是 $\mathbb{T}$ 上的自由正态分布，其中 $t \geq 0$。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\kappa_n(\sigma_t) = \exp\left(-\frac{nt}{2}\right)\frac{(-nt)^{n-1}}{n!}.$$

证明。我们仅证明陈述（1）。回顾一下，对于任意 $t \geq 0$,

$$S_{\lambda_t}(z) = \exp\left(-t\left(z+\frac{1}{2}\right)\right),$$

参见 [4, 引理 7.1]。于是容易验证，$f_{\lambda_t}(z) := zS_{\lambda_t}(z)$ 在 0 的某个邻域内是解析的，并且 $f_{\lambda_t}(0) = 0$，同时 $f'_{\lambda_t}(0) = e^{-t/2} \neq 0$。拉格朗日反演定理推出

$$\begin{aligned}\kappa_n(\lambda_t) &= \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\left(\frac{z}{f_{\lambda_t}(z)}\right)^n \\ &= \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\left(\frac{d}{dz}\right)^{n-1}\exp\left(nt\left(z+\frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{nt}{2}\right)\frac{(nt)^{n-1}}{n!}.\end{aligned}$$

还要回顾一下，

$$S_{\sigma_t}(z) = \exp\left(t\left(z+\frac{1}{2}\right)\right).$$

然后，陈述（2）的证明与（1）的证明类似。 □

A.2. 自由酉泊松分布 Π_t。

命题 A.2. 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $t > 0$，我们有

$$\kappa_n(\Pi_t) = (-1)^{n-1}2^n e^{-2nt}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-t)^k}{k!}(2n)^{k-1}\binom{n-2}{k-1}. \tag{A.1}$$

为证 明这一点，我们再次使用拉格朗日反演定理。根据 [14], ，我们有 e

$$S_{\Pi_t}(z) = \exp\left(\frac{t}{z+\frac{1}{2}}\right), \qquad t > 0.$$

可以看出，$f_{\Pi_t}(z) = zS_{\Pi_t}(z)$ 在 0 的邻域内解析，且 $f_{\Pi_t}(0) = 0$，同时 $f'_{\Pi_t}(0) = e^{2t} \neq 0$。由拉格朗日反演定理，我们有

$$\begin{aligned}\kappa_n(\Pi_t) &= \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{z}{f_{\Pi_t}(z)}\right)^n \\ &= \frac{1}{n!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\exp\left(\frac{-nt}{z+\frac{1}{2}}\right).\end{aligned} \tag{A.2}$$

为计算这一结果，我们准备以下由 Fa´a Di Bruno 公式推导出的结果。

引理 A.3. 设 u 是 $\mathbb{C}$ 上的解析函数。则

$$\frac{d^n}{dz^n}e^{u(z)} = \left(\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}\prod_{V\in\pi}u^{(|V|)}(z)\right)e^{u(z)}.$$

证明。根据 Fa´a Di Bruno 公式，对于解析函数 f 和 g，有

$$\frac{d^n}{dz^n}f(g(z)) = \sum_{\pi\in\mathcal{P}(n)}f^{(|\pi|)}(g(z))\cdot\prod_{V\in\pi}g^{(|V|)}(z).$$

取 $f(z) = e^z$和 $g(z) = u(z)$，并注意到 $f^{(|\pi|)}(z) = e^z$，所需结果即得。□

证明。（命题 A.2）由 (A.2) 和引理 A.3 得

$$\begin{aligned}
\kappa_n(\Pi_t) &= \frac{1}{n!}(-2)^{n-1}e^{-2nt}\left(\sum_{\pi\in\mathcal{P}(n-1)}(-2nt)^{|\pi|}\prod_{V\in\pi}|V|!\right)\\
&= \frac{1}{n!}(-2)^{n-1}e^{-2nt}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-2nt)^k\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{P}(n-1)\\|\pi|=k}}\prod_{V\in\pi}|V|!\right)\\
&= (-1)^{n-1}2^ne^{-2nt}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(-t)^k(2n)^{k-1}\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{P}(n-1)\\|\pi|=k}}\frac{\prod_{V\in\pi}|V|!}{(n-1)!}\right).
\end{aligned}$$

因此，只需证明

$$\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{P}(n-1)\\|\pi|=k}}\frac{\prod_{V\in\pi}|V|!}{(n-1)!} = \frac{1}{k!}\binom{n-2}{k-1}$$

将其与 (A.1) 对比即可。注意，初等组合论论证表明

$$\sum_{\substack{p_1,\dots,p_{n-1}\geq 0\\p_1+\cdots+(n-1)p_{n-1}=n-1\\p_1+\cdots+p_{n-1}=k}}\binom{k}{p_1,\dots,p_{n-1}} = \binom{n-2}{k-1}, \qquad 1\leq k\leq n-1. \tag{A.3}$$

因此，由于包含 p_1 个大小为 1 的块、 p_2 个大小为 2 的块、.....、 p_n 个大小为 n 的块的划分数等于

$$\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_n!(1!)^{p_1}(2!)^{p_2}\cdots(n!)^{p_n}},$$

我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{\pi\in\mathcal{P}(n-1)\\|\pi|=k}}\frac{\prod_{V\in\pi}|V|!}{(n-1)!} &= \frac{1}{k!}\sum_{\substack{p_1,\dots,p_{n-1}\geq 0\\p_1+\cdots+(n-1)p_{n-1}=n-1\\p_1+\cdots+p_{n-1}=k}}\binom{k}{p_1,\dots,p_{n-1}}\\
&= \frac{1}{k!}\binom{n-2}{k-1},
\end{aligned}$$

其中，最后一个等式由 (A.3) 得出。 □

Octavio Arizmendi: Centro de Investigación en Matemáticas, Guanajuato, Mexico电子邮箱：octavius@cimat.mxKatsunori Fujie[1]: Department of Mathematics, Kyoto University, Kyoto, Japan电子邮箱：fujie.katsunori.42m@st.kyoto-u.ac.jp
Yuki Ueda: Department of Mathematics, Hokkaido University of Education, Hokkaido, Japan电子邮箱：ueda.yuki@a.hokkyodai.ac.jp

[1]该项目的所有工作都是他在北海道大学任职期间完成的。34