arXiv:2303.01798v1 [math.AP] 3 Mar 2023

分数阶扩散方程的均匀化与反问题

ATSUSHI KAWAMOTO[1], MANABU MACHIDA[2], 和 MASAHIRO YAMAMOTO[3,4,5]

Abstract. 我们研究周期结构中的时间分数阶扩散方程的均匀化，并推导出均匀化时间分数阶扩散方程。随后，我们讨论如何利用最少数据确定常数扩散系数。结合上述结果，我们研究如何根据周期结构中的数据确定均匀化方程的扩散系数，反之亦然；也就是说，我们研究如何根据均匀化结构中的数据确定周期方程的扩散系数这一反问题。

1. 引言

设 $0 < \alpha < 1$, $N \in \{1, 2, 3\}$ 和 $T > 0$。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 是一个边界 $\partial\Omega$ 属于 C^2 类的有界区域。我们考虑周期结构中带参数 $\varepsilon > 0$ 的以下时间分数阶扩散方程，其满足零狄利克雷边界条件和初始条件。

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u^\varepsilon(x,t) - \operatorname{div}(A^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon(x,t)) = f^\varepsilon(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u^\varepsilon(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0^\varepsilon(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 $A^\varepsilon(x) = (a_{ij}^\varepsilon(x))_{i,\ j=1,\ \ldots N}$ 是满足适当条件的对称矩阵值函数。函数 u_0^ε 和 f^ε 将在后文定义。这里， ∂_t^α是Caputo型分数阶导数。

首先，我们在 §3.1 中研究时间分数阶扩散方程初边值问题的均匀化。为讨论均匀化，我们采用 Kubica、Ryszewska 和 Yamamoto [8] 引入的上述问题 (1.1) 的 L^2-意义下的变分形式。我们将问题 (1.1) 视为周期结构中的问题。由此可得到以下均质化问题。

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u^0(x,t) - \operatorname{div}(A^0\nabla u^0(x,t)) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u^0(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u^0(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

[1]Faculty of Engineering, Takushoku University, Tatemachi, Hachioji, Tokyo 193-0985, Japan[2]Institute for Medical Photonics Research,
Hamamatsu University School ofMedicine, Hamamatsu, Shizuoka 431-3192, Japan
[3]Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, Komaba, Meguro, Tokyo 153-8914, Japan
[4]Honorary Member of Academy of Romanian Scientists, Ilfov, nr. 3, Bucuresti, Romania,
[5]Correspondence member of Accademia Peloritana dei Pericolanti Palazzo Università, Piazza S. Pugliatti 1 98122 Messina Italy*E-mail addresses*:
[1]akawamot@la.takushoku-u.ac.jp, [2]machida@hama-med.ac.jp,[3,4,5]myama@ms.u-tokyo.ac.jp.

其中， A^0 是均匀化矩阵。函数 u_0 和 f 分别是在适当意义下 $\{u_0^\varepsilon\}$ 和 $\{f^\varepsilon\}$ 的极限。关于时间分数阶扩散方程均匀化的早期研究，可参见文章 [7], ；该文通过形式计算，利用多尺度方法推导出均匀化方程 (1.2)。本文通过严格论证讨论均匀化，并利用振荡测试函数方法建立均匀化结果。关于均匀化方面的专著，可参阅 Cioranescu 和 Donato[3] 及其中的参考文献。

其次，我们研究 §3.2 中确定均匀化方程系数的反问题。我们先从扩散系数为标量的情形入手。然后，对于 $N \in \{2, 3\}$，我们考虑扩散系数依赖于单个空间变量的层状材料。

第三，我们在 §3.3 中结合求解反问题的方法与均匀化，提出不同结构之间的新反问题。求解反问题的方法能够确定同一结构中的系数，并保证其唯一性和稳定性；与此同时，均匀化则由周期方程导出均匀化方程。基于对上述两个问题的认识，我们可以考虑周期结构与均匀化结构之间的反问题。也就是说，我们研究如下反问题：根据周期结构中的数据确定均匀化方程的扩散系数，以及根据均匀化结构中的数据确定周期方程的扩散系数。

第 2 节中，我们准备了关于时间分数阶扩散方程适定性的已知结果和工具，也准备了周期结构均匀化的基本工具。第 3 节中，我们陈述主要结果。首先给出时间分数阶扩散方程的均匀化结果，然后讨论常扩散系数的确定。接着，我们陈述不同结构之间逆问题的唯一性和稳定性结果。第 4 节中，我们证明主要结果。

2. Preliminaries

本节为使本文内容自成一体，准备了一些工具，并陈述证明主要结果时所用的已有结果。不过，为了缩短本文篇幅，我们会尽量精简准备内容，并将许多内容留给专著和论文。我们会在各小节中酌情引用相关专著和论文。

2.1. 关于分数阶扩散方程的适定性。

我们陈述基于 L^2 框架的时间分数阶扩散方程适定性方面的已有结果，并利用这些结果证明关于均匀化的主要定理。详情请参阅 Kubica、Ryszewska 和 Yamamoto 的专著 [8] 。

2.1.1. 函数空间与 Caputo型一般分数阶导数。

在经典意义下，Caputo型分数阶导数定义为

$$d_t^\alpha v(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \frac{dv}{d\tau}(\tau)\, d\tau, \quad 0 \le t \le T$$

对于 $v \in W^{1,\,1}(0,T)$，其中 Γ 表示伽马函数。为了利用 L^2-框架陈述时间分数阶扩散方程的适定性结果，我们要求上述分数阶导数应包含在 L^2 空间中。然而，$W^{1,\,1}$ 空间对我们而言过小，因为当 $v \in W^{1,\,1}(0,T)$ 时， $d_t^\alpha v \in L^1(0,T)$

在上述 d_t^α的定义中。为此，我们在适当的函数空间中重新定义 Caputo型一般分数阶导数。

首先，我们定义函数空间 $H_\alpha(0,T)$，它将作为 Caputo 型广义分数阶微分算子 ∂_t^α的定义域。我们知道，索博列夫-斯洛博杰茨基空间 $H^\alpha(0,T)$ 的范数如下（例如参见 Adams [1]）：

$$\|u\|_{H^\alpha(0,T)} = \left(\|u\|_{L^2(0,T)}^2 + \int_0^T \int_0^T \frac{|u(t)-u(s)|^2}{|t-s|^{1+2\alpha}}\, ds\, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

利用函数空间 $H^\alpha(0,T)$，我们定义巴拿赫空间 $H_\alpha(0,T)$:

$$H_\alpha(0,T) = \begin{cases} H^\alpha(0,T), & 0 \le \alpha < \dfrac{1}{2}, \\ \left\{ u \in H^{\frac{1}{2}}(0,T) \,\middle|\, \displaystyle\int_0^T \frac{|u(t)|^2}{t}\, dt < \infty \right\}, & \alpha = \dfrac{1}{2}, \\ \{u \in H^\alpha(0,T) \mid u(0) = 0\}, & \dfrac{1}{2} < \alpha \le 1 \end{cases}$$

其范数为

$$\|u\|_{H_\alpha(0,T)} = \begin{cases} \|u\|_{H^\alpha(0,T)}, & 0 \le \alpha \le 1,\ \alpha \ne \dfrac{1}{2}, \\ \left(\|u\|_{H^{\frac{1}{2}}(0,T)}^2 + \displaystyle\int_0^T \frac{|u(t)|^2}{t}\, dt \right)^{\frac{1}{2}}, & \alpha = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

下面定义 Caputo 型广义分数阶导数。为此，我们引入黎曼-刘维尔分数阶积分算子

$$J^\beta v(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} v(s)\, ds, \quad v \in L^2(0,T)$$

对于 $\beta > 0$。那么， J^α： $L^2(0,T) \to H_\alpha(0,T)$ 同胚（参见[8] 中的定理2.1和 [4]中的定理2.1），并且该算子 J^α 与下述算子 J 的 α 阶分数幂一致，该算子定义为

$$Jv(t) = \int_0^t v(s)\, ds, \quad v \in L^2(0,T).$$

参见 [8]中的引理2.4。现在我们可以陈述 Caputo 型广义分数阶导数的定义了。

定义2.1（Caputo型一般分数阶导数）。我们定义 ∂_t^α为$\partial_t^\alpha := (J^\alpha)^{-1}$，其定义域为 $\mathcal{D}(\partial_t^\alpha) = H_\alpha(0,T)$。

于是可知， ∂_t^α: $H_\alpha(0,T) \to L^2(0,T)$是同胚的，并且以下范数等价关系成立:

$$C^{-1}\|v\|_{H_\alpha(0,T)} \le \|\partial_t^\alpha v\|_{L^2(0,T)} \le C\|v\|_{H_\alpha(0,T)}, \quad v \in H_\alpha(0,T) \tag{2.1}$$

其中常数 $C > 0$ 仅依赖于 α。此外，我们有

$$\partial_t^\alpha v = \frac{d}{dt}(J^{1-\alpha} v), \quad v \in H_\alpha(0,T). \tag{2.2}$$

关于这些 Caputo 型广义分数阶导数的结果，可参见 [8] 中的定理 2.4。

2.1.2. 适定性结果。设 ν、$\mu \in \mathbb{R}$ 满足 $0 < \nu < \mu$。我们用 $M_S(\nu, \mu, \Omega)$ 表示满足以下条件的 $N \times N$ 矩阵 $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,\ j=1,\ \ldots\ldots N}$ 的集合：对于任意 $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{cases} \text{i)} & a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \\ \text{ii)} & A \text{ is symmetric, that is, } a_{ij} = a_{ji}, \\ \text{iii)} & (A(x)\xi, \xi) \geq \nu|\xi|^2, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ \text{iv)} & |A(x)\xi| \leq \mu|\xi|, \quad x \in \overline{\Omega}. \end{cases}$$

设 $A \in M_S(\nu, \mu, \Omega)$、$f \in L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega))$、$u_0 \in L^2(\Omega)$。我们考虑以下初边值问题。

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u(x,t) - \operatorname{div}(A(x)\nabla u(x,t)) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.3}$$

我们定义函数空间

$$\mathcal{W}^\alpha(u_0) = \{v \mid v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), v - u_0 \in H_\alpha(0,T; H^{-1}(\Omega))\}$$

其范数为

$$\|v\|_{\mathcal{W}^\alpha(u_0)} = \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|v - u_0\|_{H_\alpha(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

我们研究问题 (2.3) 的弱解，该弱解由以下变分公式得到

$$\begin{cases} \text{Find } u \in \mathcal{W}^\alpha(u_0) \text{ such that} \\ \langle \partial_t^\alpha (u - u_0), \Phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} + (A\nabla u, \nabla \Phi)_{L^2(\Omega)} \\ = \langle f, \Phi \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} \quad \text{for } \Phi \in H_0^1(\Omega), \quad \text{a.e. } t \in (0,T). \end{cases} \tag{2.4}$$

在此公式中，我们注意到 $u - u_0 \in H_\alpha(0, T;\ H^{-1}(\Omega))$ 包含了 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ 的初始条件。事实上，由 $H^\alpha(0,T) \subset C[0,T]$，可知 $u - u_0 \in C([0,T];\ H^{-1}(\Omega))$。于是，在以下意义下有 $u(x, 0) = u_0(x)$

$$\lim_{t \to 0} u(\cdot, t) = u_0 \text{ in } H^{-1}(\Omega).$$

定理 2.2. 假设 $A \in M_S(\nu, \mu, \Omega)$、$f \in L^2(0, T;\ H^{-1}(\Omega))$、$u_0 \in L^2(\Omega)$。则问题 (2.3) 存在唯一的弱解。此外，我们有以下估计。

$$\|u\|_{\mathcal{W}^\alpha(u_0)} \leq C \left(\|u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \right). \tag{2.5}$$

关于该定理的证明，可参见 Kubica 和 Yamamoto [9]。若假设 A 足够光滑，我们可以更容易地证明该定理（参见专著 [8]）。

关于函数空间 $\mathcal{W}^\alpha(u_0)$，我们将证明以下引理。这是 Simon [15] 所得结果的直接推论。

引理 2.3. 我们考虑巴拿赫空间

$$\mathrm{W}^\alpha = \{v \mid v \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega)), v \in H^\alpha(0,T; H^{-1}(\Omega))\}$$

其范数为

$$\|v\|_{\mathrm{W}^\alpha} = \|v\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|v\|_{H^\alpha(0,T;H^{-1}(\Omega))}.$$

那么嵌入

$$\mathrm{W}^\alpha \hookrightarrow L^2(0,T; L^2(\Omega))$$

是紧嵌入。

证明。设 $\{v^\varepsilon\} \subset \mathrm{W}^\alpha$ 是 $\varepsilon > 0$的有界序列。也就是说，存在$M > 0$，使得对于任意 $\varepsilon > 0$，都有 $\|v^\varepsilon\|_{\mathrm{W}^\alpha} \le M$。

应用 Simon 中的引理 5 [15]（取 $\mu = \alpha$、$r = 2$、$p = 2$），可知$v^\varepsilon \in L^2(0,T;\, H^{-1}(\Omega))$ 满足

$$\|\tau_h v^\varepsilon - v^\varepsilon\|_{L^2(0,T-h;H^{-1}(\Omega))} \le CMh^\alpha$$

对于 $h > 0$，其中 $C > 0$ 是一个与 v^ε无关的常数，且 τ_h 是由 $(\tau_h v)(x,t) = v(x,t+h)$ 对 $h > 0$定义的平移。

注意，$H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$，且 $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ 是紧嵌入。根据函数空间之间的这一关系及上述不等式，Simon [15] 中的定理 5 的假设得以满足（取 $p = 2$、$X = H_0^1(\Omega)$ $B = L^2(\Omega)$ $Y = H^{-1}(\Omega)$ 和 $F = \{v^\varepsilon\}$）。因此可知，$\{v^\varepsilon\}$ 在 $L^2(0,T;\, L^2(\Omega))$中相对紧。由此可知，$\mathrm{W}^\alpha \hookrightarrow L^2(0,T;\, L^2(\Omega))$ 是紧嵌入，证明完毕。□

备注1. 我们将使用这个引理来证明均匀化结果。这类结果称为 Aubin-Lions-Simon 引理，广泛用于研究偏微分方程。例如，Aubin-Lions-Simon 引理可用于证明非线性初边值问题解的存在性。

备注2. 设 $u_0 \in L^2(\Omega)$。那么我们有 $\mathcal{W}^\alpha(u_0) \subset \mathrm{W}^\alpha$，并且有以下不等式：存在一个常数 $C > 0$，使得

$$\|v\|_{\mathrm{W}^\alpha} \le \|v\|_{\mathcal{W}^\alpha(u_0)} + C\|u_0\|_{L^2(\Omega)}$$

对于 $v \in \mathcal{W}^\alpha(u_0)$。

2.2. 关于均匀化。我们将通过严谨的论证并运用泛函分析来获得均匀化结果。这里我们准备了均匀化的基本工具，这些工具将在证明我们的结果时使用。它们基于 Cioranescu 和 Donato 的专著 [3]。

2.2.1. 快速振荡周期函数。首先，我们来看快速振荡周期函数的定义及其弱极限。

设 Y 为一个参考单胞，其定义如下

$$Y = (0,\ell_1) \times \cdots \times (0,\ell_N),$$

其中 $\ell_i > 0 (i = 1, \ldots, N)$。设 $\{e_1, \ldots, e_N\}$ 为 $\mathbb{R}^N$ 上的标准基

定义 2.4（Y-周期）。定义在 $\mathbb{R}^N$ 上几乎处处的函数 g 称为 Y-周期函数，当且仅当

$$g(y) = g(y + k\ell_i e_i), \quad \text{a.e. } y \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad i \in \{1, \ldots, N\}.$$

我们将 $g \in L^1(Y)$ 的平均值定义为

$$\mathcal{M}_Y(g) = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(y)\, dy.$$

由此可得以下引理。

引理 2.5. 设 g 是 $L^2(Y)$ 中的 Y-周期函数。对于 $\varepsilon > 0$，我们设

$$g^\varepsilon(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ a.e. on } \mathbb{R}^N.$$

于是我们得到如下弱收敛：对于任意有界区域 $\omega \subset \mathbb{R}^N$,

$$g^\varepsilon \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(g) \text{ weakly in } L^2(\omega),$$

如 $\varepsilon \to 0$。

这个 εY-周期函数 g^ε 称为快速振荡周期函数，因为当 ε 趋于 0 时，它会快速振荡。上述引理的证明可参见 [3]中的定理 2.6。

在本文中，关于均匀化，我们始终假设矩阵 A 满足以下条件：

$$\begin{cases} a_{ij} \text{ is } Y\text{-periodic for all } i,j=1,\dots,N, \\ A=(a_{ij}) \in M_S(\nu,\mu,Y), \end{cases} \tag{2.6}$$

其中， Y 是上文定义的参考单胞。我们设

$$\begin{cases} a_{ij}^\varepsilon(x) = a_{ij}\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ A^\varepsilon(x) = A\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) = (a_{ij}^\varepsilon)_{i,j=1,\dots,N}, \quad x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.7}$$

在均匀化过程中，我们将考虑具有该矩阵 A^ε 的周期方程。

2.2.2. 辅助问题。为了证明关于时间分数阶扩散方程均匀化的主要结果，我们采用 Tartar [16] 的振荡测试函数方法，其中考虑辅助周期边值问题的解。我们从参考单胞 Y 上的以下问题开始：对任意 $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y \chi_\xi) = -\operatorname{div}_y(A(y)\xi) \quad \text{in } Y, \\ \chi_\xi \text{ is } Y\text{-periodic and } \mathcal{M}_Y(\chi_\xi) = 0, \end{cases} \tag{2.8}$$

其中， A 满足条件 (2.6)。该问题 (2.8) 的变分形式写为

$$\begin{cases} \text{Find } \chi_\xi \in W_{\mathrm{per}}(Y) \text{ such that} \\ \displaystyle\int_Y A\nabla_y \chi_\xi \cdot \nabla_y v \, dy = \int_Y A\xi \cdot \nabla_y v \, dy, \quad \text{for all } v \in W_{\mathrm{per}}(Y), \end{cases} \tag{2.9}$$

其中，函数空间 $W_{\mathrm{per}}(Y)$ 定义为

$$W_{\mathrm{per}}(Y) = \{ v \in H^1_{\mathrm{per}}(Y) \mid \mathcal{M}_Y(v) = 0 \}.$$

这里， $H^1_{\mathrm{per}}(Y)$ 是如下函数空间：

$$H^1_{\mathrm{per}}(Y) = \overline{C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)}^{H^1(Y)},$$

其中， $C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)$ 是 $C^\infty(\mathbb{R}^N)$ 中所有 Y-周期函数构成的空间。关于函数空间 $H^1_{\mathrm{per}}(Y)$ 的更多细节，可参阅专著 [3] 的 §3.4。

由 [3] 中的定理 4.27 可知，问题 (2.9) 存在唯一解 $\chi_\xi \in W_{\mathrm{per}}(Y)$。

现在，我们通过周期性将 χ_ξ 延拓到 $\mathbb{R}^N$ （仍用 χ_ξ 表示该延拓）。于是可知，这个 χ_ξ 是以下问题的唯一解（见 [3] 中的定理 4.28）：对任意 $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y \chi_\xi) = -\operatorname{div}_y(A(y)\xi) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \\ \chi_\xi \text{ is } Y\text{-periodic and } \mathcal{M}_Y(\chi_\xi) = 0. \end{cases} \tag{2.10}$$

接下来，我们考虑一个由 χ_ξ 定义的函数 w_ξ：

$$w_\xi = \xi \cdot y - \chi_\xi$$

对任意 $\xi \in \mathbb{R}^N$。由此可见， w_ξ 是下列问题的唯一解：对任意 $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y w_\xi) = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \\ w_\xi - \xi \cdot y \text{ is } Y\text{-periodic and } \mathcal{M}_Y(w_\xi - \xi \cdot y) = 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

在均匀化结果的证明中，我们将使用以下函数 w_ξ^ε 作为振荡检验函数。

$$w_\xi^\varepsilon(x) = \varepsilon w_\xi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \xi \cdot x - \varepsilon\chi_\xi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Omega$$

对于 $\xi \in \mathbb{R}^N$，其中 w_ξ 和 χ_ξ 是如上定义的函数。我们观察到函数 w_ξ^ε 的收敛。由于 χ_ξ 是 Y-周期的，我们有

$$w_\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi \cdot x \text{ weakly in } L^2(\Omega)$$

由引理 2.5。注意到 $w_\xi = -\chi_\xi + \xi \cdot y$，我们得到

$$(\nabla_x w_\xi^\varepsilon)(x) = (\nabla_y w_\xi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \xi - \nabla_y\chi_\xi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

由于 χ_ξ 是 Y-周期的，我们也可知 $\nabla_y w_\xi$ 是 Y-周期的。再次利用引理 2.5，可得

$$\nabla_x w_\xi^\varepsilon \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(\xi - \nabla_y\chi_\xi) = \xi - \mathcal{M}_Y(\nabla_y\chi_\xi) \text{ weakly in } L^2(\Omega).$$

由格林公式，我们有

$$\int_Y \nabla_y\chi_\xi(y)\,dy = \int_{\partial Y} \chi_\xi \cdot n\,dS_y = 0,$$

其中 n 表示 ∂Y 的单位外法向量。这里我们用到了这样一个事实： χ_ξ 的迹在 Y 的相对面上相同（见 [3] 中的命题 3.49）。因此我们得到

$$\mathcal{M}_Y(\nabla_y\chi_\xi) = 0.$$

因此我们看到，存在 $\{w_\xi^\varepsilon\}$ 的一个子列（仍记为 ε），满足以下收敛关系

$$\begin{cases} w_\xi^\varepsilon \rightharpoonup \xi \cdot x \text{ weakly in } H^1(\Omega), \\ w_\xi^\varepsilon \to \xi \cdot x \text{ strongly in } L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.12}$$

这里使用了 Sobolev 嵌入定理（例如参见 Adams [1]），即嵌入 $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ 是紧嵌入这一事实。上述收敛（2.12）在均匀化的证明中发挥了重要作用。

现在我们考虑下面所定义的向量值函数的收敛性

$$\eta_\xi^\varepsilon = A^\varepsilon \nabla w_\xi^\varepsilon = \left(\sum_{i=1}^N a_{i1}^\varepsilon \frac{\partial w_\xi^\varepsilon}{\partial x_i}, \ldots, \sum_{i=1}^N a_{iN}^\varepsilon \frac{\partial w_\xi^\varepsilon}{\partial x_i}\right).$$

根据 A^ε 和 w_ξ^ε的定义，我们得到

$$\eta_\xi^\varepsilon(x) = (A\nabla_y w_\xi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\left[A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)(\nabla_y(\varepsilon w_\xi))\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right].$$

由于 A 是 Y-周期的， $A\nabla_y w_\xi$ 是 Y-周期的，因此 η_ξ^ε 是 Y-周期的。由引理 2.5，我们有

$$\eta_\xi^\varepsilon \rightharpoonup \mathcal{M}_Y(A\nabla w_\xi) = A^0\xi \text{ weakly in } (L^2(\Omega))^N, \tag{2.13}$$

其中 A^0 是定理 3.1 中由（3.6）定义的矩阵。

此外，我们将证明 η_ξ^ε 满足

$$\int_\Omega \eta_\xi^\varepsilon(x) \cdot \nabla\Phi(x)\,dx = 0 \quad \text{for } \Phi \in H_0^1(\Omega). \tag{2.14}$$

令 $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$，并定义

$$\varphi^\varepsilon(y) = \varphi(\varepsilon y) \text{ a.e. on } \mathbb{R}^N.$$

显然，我们有 $\varphi^\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$。因此，

$$\int_{\mathbb{R}^N} (A\nabla_y w_\xi)(y) \cdot \nabla_y \varphi^\varepsilon(y)\, dy = 0.$$

由于 $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$，我们有

$$\int_\Omega (A\nabla_y w_\xi)\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla\varphi(x)\, dx = 0 \quad \text{for any } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

通过变量替换 $x = \varepsilon y$。根据稠密性论证，我们得出 (2.14)。

本节最后，我们给出一个关于矩阵的引理 $\widehat{A}$由 w_ξ 定义。

$\widehat{\ }$引理 2.6。设 $A \in M_S(\nu, \mu, Y)$。我们定义 $N \times N$常数矩阵 $A = (\widehat{a}_{ij})_{i,\ j=1,\dots,N}$ 为

$$\widehat{A}\xi = \mathcal{M}_Y(A\nabla_y w_\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

于是我们有

$$\widehat{A} \in M_S(\nu, \mu, \Omega).$$

关于该引理的证明，可参阅专著 [3]（例如，[3]中的推论 6.10、命题 8.3 和推论 8.13）。

3. Main Results

首先，我们在 §3.1 中介绍均匀化结果。接着，我们在 §3.2 中研究如何确定时间分数阶扩散方程的常扩散系数这一反问题。最后，我们在 §3.3 中陈述不同结构之间的反问题。

3.1. 均匀化。

我们首先介绍时间分数阶扩散方程的均匀化结果。我们在 §3.1.1 中将主要定理表述为定理 3.1。接着，我们来看均匀化系数的例子；这些系数是通过均匀化得到的模型的系数。在定理 3.1 中，我们将看到均匀化系数矩阵由等式 (3.6) 给出。然而，直接研究该矩阵颇为困难，因此我们在此考虑一些便于研究反问题的例子。作为例子，我们在 §3.1.2 中考虑空间一维情形，并在 §3.1.3 中考虑层状材料情形。

3.1.1. 分数阶扩散方程的均匀化。

我们有以下定理。

定理 3.1. 设 $f^\varepsilon \in L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$ 和 $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$。我们假设 u^ε 是周期结构中以下问题的弱解：

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u^\varepsilon(x,t) - \operatorname{div}(A^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon(x,t)) = f^\varepsilon(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u^\varepsilon(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u^\varepsilon(x,0) = u_0^\varepsilon(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

其中，A^ε 是由 (2.6) 和 (2.7) 定义的系数矩阵。我们还假设以下收敛条件：存在 $u_0 \in L^2(\Omega)$ 和 $f \in L^2(0,T;\ H^{-1}(\Omega))$，使得

$$\begin{cases} \text{i)} & u_0^\varepsilon \rightharpoonup u_0 \text{ weakly in } L^2(\Omega), \\ \text{ii)} & f^\varepsilon \to f \text{ strongly in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{cases} \tag{3.2}$$

那么， u^ε 满足以下条件：

$$
\begin{cases}
\text{i)} & u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \text{ weakly in } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)),\\
\text{ii)} & \partial_t^\alpha(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon) \rightharpoonup \partial_t^\alpha(u^0 - u_0) \text{ weakly in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),\\
\text{iii)} & A^\varepsilon \nabla u^\varepsilon \rightharpoonup A^0 \nabla u^0 \text{ weakly in } (L^2(0,T;L^2(\Omega)))^N.
\end{cases} \tag{3.3}
$$

此外，

$$
u^\varepsilon \to u^0 \text{ strongly in } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.4}
$$

其中， u^0 是均质化问题的弱解：

$$
\begin{cases}
\partial_t^\alpha u^0(x,t) - \operatorname{div}(A^0 \nabla u^0(x,t)) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
u^0(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),\\
u^0(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega.
\end{cases} \tag{3.5}
$$

这里， A^0 是由下式定义的均匀化系数矩阵

$$
A^0 \xi = \mathcal{M}_Y(A \nabla_y w_\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.6}
$$

我们将在 §4.1 中证明该定理。

注 3. 根据引理 2.6， $A^0 \in M_S(\nu, \mu, \Omega)$。因此，由定理 2.2 可知，均质化问题 (3.5) 存在唯一的弱解 u^0 。

注 4. 我们可以将关于 f^ε 的假设替换为以下条件： $f^\varepsilon \in L^2(0,T;\, L^2(\Omega))$，且存在 $f \in L^2(0,T;\, L^2(\Omega))$ 使得

$$
f^\varepsilon \to f \text{ strongly in } L^2(0,T;L^2(\Omega)).
$$

事实上，由于在取极限时证明中使用了关于 f^ε 的假设，因此我们的定理结论在任一假设下均成立。

备注 5. 关于具有周期结构的均匀化方法，我们也可以考虑由 Nguetseng[12] 和 Allaire [2] 引入的两尺度收敛方法。此外，根据定理 3.1，我们可以讨论非周期情形，但本文不对此进行处理。

3.1.2. 空间一维情形。我们考虑空间一维情形下的分数阶扩散方程，即 $N = 1$。设 $Y = (0, \ell_1)$，且 Ω 是 $\mathbb{R}$ 中的一个开区间。记 $|Y|$ 为 Y 的测度，即 $|Y| = \ell_1$。我们假设 a^ε 定义为

$$
a^\varepsilon(x) = a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R},
$$

其中

$$
a \in L^\infty(Y), \quad \nu \le a(y) \le \mu, \ y \in \overline{Y}, \quad a \text{ is } Y\text{-periodic},
$$

其中常数 ν、 $\mu \in \mathbb{R}$ 满足 $0 < \nu < \mu$。

设 $f^\varepsilon \in L^2(0,T;\, H^{-1}(\Omega))$ 和 $u_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ 满足收敛关系 (3.2)，其中 $f \in L^2(0,T;\, H^{-1}(\Omega))$ 和 $u_0 \in L^2(\Omega)$。我们假设 u^ε 满足以下问题：

$$
\begin{cases}
\partial_t^\alpha u^\varepsilon(x,t) - \partial_x(a^\varepsilon(x) \partial_x u^\varepsilon(x,t)) = f^\varepsilon(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
u^\varepsilon(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),\\
u^\varepsilon(x,0) = u_0^\varepsilon(x), & x \in \Omega.
\end{cases}
$$

根据定理 3.1， u^ε 在收敛意义 (3.3) 和 (3.4) 下收敛到以下问题的弱解 u^0 ：

$$
\begin{cases}
\partial_t^\alpha u^0(x,t) - \partial_x(a^0 \partial_x u^0(x,t)) = f(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T),\\
u^0(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T),\\
u^0(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega,
\end{cases}
$$

其中 a^0 是均匀化系数

$$a^0\xi = \mathcal{M}_Y(a\partial_y w_\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

在空间一维情形下，我们可以将均匀化系数a^0 表示为 $a_\circ$

引理 3.2. 我们有 a^0 关于 a的如下表示公式:

$$a^0 = \frac{1}{\mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

该引理的证明见附录。

3.1.3. 层状材料情形。我们考虑层状材料中的反常扩散现象。此时，周期结构中的扩散系数A写作 $A(y) = A(y_1)$，其中 A满足假设 (2.6)，且 $y = (y_1, \ldots, y_N) \in Y$。在这种情况下，我们注意到 A 是 $(0, \ell_1)$-周期的。

在定理 3.1 的假设下，我们可以得到关于均匀化的结果，并且 A^0 可以明确表示为 A 。也就是说，我们有如下引理，其证明见附录。

引理 3.3. 我们有表示公式 $A^0 = (a^0_{ij})$，其由 $A(y) = A(y_1) = (a_{ij}(y_1))$ 给出:

$$A^0 = A^*,$$

其中， $A^* = (a^*_{ij})$ 定义为

$$\begin{aligned}
a^*_{11} &= \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)},\\
a^*_{1j} &= a^*_{11}\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right), \quad a^*_{i1} = a^*_{11}\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right),\\
a^*_{ij} &= a^*_{11}\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{i1}}{a_{11}}\right) + \mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(a_{ij} - \frac{a_{1j}a_{i1}}{a_{11}}\right)
\end{aligned}$$

对于 i、$j = 2$、.....、N。

由于 A 是对称矩阵，我们可以看出，引理 3.3 中的 A^* 也是对称矩阵。

特别地，若系数矩阵 A 是对角矩阵，则可直接由上述引理得到以下结果。

引理 3.4. 若 A 定义为

$$A(y) = \begin{pmatrix} a_1(y_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2(y_1) & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & a_N(y_1) \end{pmatrix}, \quad y = (y_1, \ldots, y_N) \in Y,$$

于是，我们可以将 $A^0 = (a^0_{ij})_{i,\ j=1.....N}$ 表示为 $a_1(y_1)$ $a_2(y_1)\ldots, a_N(y_1)$:

$$\begin{aligned}
a^0_{11} &= \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_1}\right)},\\
a^0_{ii} &= \mathcal{M}_{(0,\ell_1)}(a_i), && i = 2, \ldots, N,\\
a^0_{ij} &= 0, && i \neq j.
\end{aligned}$$

3.2. 常数扩散系数的确定。我们讨论均匀化时间分数阶扩散方程的系数反问题。首先，在系数为标量的情况下讨论逆问题，见 §3.2.1。然后，在层状材料的情况下讨论系数的确定问题，见 §3.2.2。

3.2.1. 扩散系数为标量的情形。令 u_p 满足以下问题：

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u_p(x,t) - p\Delta u_p(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u_p(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_p(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.7}$$

其中 p 是一个常数，满足 $0 < \nu \le p \le \mu$，其中 ν、μ为某些常数。

令 $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1 := -\Delta$ 为 $L^2(\Omega)$ 中的一个算子，其定义域为 $\mathcal{D}(\mathcal{A}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$。令

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \longrightarrow \infty$$

为 $\mathcal{A}$ 的特征值集合，并令 $\{\varphi_{n_j}\}_{j=1,\dots d_n}$ 为 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_n)$ 的标准正交基，$P_n : L^2(\Omega) \to \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_n)$ 为特征投影：

$$P_n v = \sum_{j=1}^{d_n} (v, \varphi_{n_j})_{L^2(\Omega)} \varphi_{n_j}, \quad v \in L^2(\Omega).$$

在本小节及以下定理的证明中，我们用 φ_{n_j}表示特征函数。

现在我们研究以下逆系数问题。

逆问题 1：任意选取 $x_0 \in \Omega$ 和 $t_0 \in (0,T)$。根据数据 $u_p(x_0,t_0)$ 确定常扩散系数 p。

解决这一逆问题的关键在于使用最少的观测数据。关于该逆问题的稳定性结果，我们有如下定理。我们将在 §4.2.1 中证明该定理。

定理 3.5（稳定性）。假设 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$u_0 \not\equiv 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad \Delta u_0(x) \ge 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \tag{3.8}$$

那么存在一个常数 $C = C(\nu,\mu) > 0$，使得

$$|p - q| \le C |u_p(x_0,t_0) - u_q(x_0,t_0)|.$$

接下来考虑以下逆问题。

逆问题 2：选取子区域 $\omega \subset \Omega$ 和开区间$I \subset (0,T)$。根据数据确定常扩散系数 p

$$\int_I \int_\omega u_p(x,t)\, dxdt.$$

于是我们得到关于该逆问题的以下稳定性结果。

定理 3.6（稳定性）。假设 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足 (3.8)，则存在常数 $C = C(\nu,\mu) > 0$，使得

$$|p - q| \le C \left| \int_I \int_\omega u_p(x,t)\, dxdt - \int_I \int_\omega u_q(x,t)\, dxdt \right|.$$

我们将在 §4.2.2 中证明该定理。

注 6。在定理 3.5 和定理 3.6 中，我们可以将假设 (3.8) 的后一部分替换为 $\Delta u_0(x) \le 0$，在 $x \in \Omega$ 中几乎处处成立。

注 7. 我们无法将定理 3.5 和定理 3.6 的结果推广到 $1 < \alpha < 2$ 的情形，因为关键在于最大值原理。

此外，我们可以通过更强的数据证明唯一性。尽管在前面的两个反问题中，我们将常数作为观测数据，但在下面的反问题中，我们将时间依赖函数作为观测数据。

反问题 3：任取 $x_0 \in \Omega$ 和 $t_1 \in (0,T)$。根据数据 $u_p(x_0,t)$、$0<t<t_1$，确定常扩散系数 p。

关于这个逆问题，我们陈述两个关于唯一性的定理：定理 3.7 和 3.8，并将在 §4.2.3 中证明。

定理 3.7（唯一性）。设 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$。我们假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}$，使得

$$P_{n_0} u_0(x_0) \neq 0. \tag{3.9}$$

若对 $0<t<t_1$ 有 $u_p(x_0,t) = u_q(x_0,t)$，则有 $p=q$。

注 8。特别地，$u_0(x_0) \neq 0$ 蕴含 (3.9)。

我们可以考虑 p 的唯一性，甚至允许初值未知$u_{0,\,p}$。令$\widetilde{u}_p$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha \widetilde{u}_p(x,t) - p\Delta \widetilde{u}_p(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \widetilde{u}_p(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ \widetilde{u}_p(x,0) = u_{0,p}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.10}$$

定理 3.8（未知初值下的唯一性）。我们假设$u_{0,\,p} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$P_1 u_{0,p}(x_0) \neq 0 \quad \text{and} \quad P_1 u_{0,q}(x_0) \neq 0. \tag{3.11}$$

若对 $0<t<t_1$有 $\widetilde{u}_p(x_0,t) = \widetilde{u}_q(x_0,t)$，则有 $p=q$。

如果不假设$u_{0,\,p} \neq u_{0,\,q}$ 在 Ω 中成立，那么假设 (3.11) 对唯一性至关重要，以下例子将说明这一点。

例 1。令 $\Omega = (0,\pi)$。则 $P_k u_{0,p} = (u_{0,p},\varphi_k)\varphi_k$ 对 $k \in \mathbb{N}$ 成立，且 $\varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$，并且 $\lambda_k = k^2$ 对 $k \in \mathbb{N}$成立。令 $x_0 = \frac{\pi}{3}$, $p=1$, $q=\frac{1}{4}$, $u_{0,p}(x) = \varphi_1(x)$，且$u_{0,q}(x) = \varphi_2(x)$。则 $\widetilde{u}_p(x,t) = E_\alpha(-t^\alpha)\varphi_1(x)$，且 $\widetilde{u}_q(x,t) = E_\alpha(-t^\alpha)\varphi_2(x)$。容易看出，对 $t>0$有 $\widetilde{u}_p(x_0,t) = \widetilde{u}_q(x_0,t)$。在此情形下，注意到 $P_1 u_{0,q} = 0$ 在 Ω 中，也就是说，对于 $u_{0,q}$，(3.11) 不成立。

注 9. 我们可以将定理 3.7 和定理 3.8 推广到 $1<\alpha<2$ 的情形。此外，我们可以证明，$u_k(x_0,t_0)$ 也能同时确定阶数 $\alpha \in (0,2)$（例如参见 [17]）。

注 10. 利用唯一性结果（定理 3.7 和定理 3.8），我们可以通过季霍诺夫定理讨论稳定性结果（例如参见 [6]）。但这里省略这些内容。

3.2.2. 层状材料的情形。设 $N \geq 2$。令 $\Omega = (0,\delta) \times D$ 为圆柱形区域，其中 $\delta>0$ 和 D 是 $\mathbb{R}^{N-1}$ 中具有 C^2 类边界 ∂D 的有界区域。记 Ω 中的元素为 $x = (x_1, \widetilde{x}) \in \Omega$，其中 $x_1 \in (0,\delta)$ 且$\widetilde{x} = (x_2,\dots,x_N) \in D$。

设 u_p 满足关于 $k=1$ 的问题，2：

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u_p(x,t) - \operatorname{div}(B_p \nabla u_p(x,t)) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u_p(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_p(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.12}$$

这里 B_p 是由下式定义的对角矩阵

$$B_p = \begin{pmatrix} p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_N \end{pmatrix},$$

其中 $\nu \le p, b_i \le \mu$ 对于 $i = 2, \ldots, N$，其中一些常数 $\nu, \mu \in \mathbb{R}$ 满足 $0 < \nu < \mu$。

设 $\mathcal{B} := -\partial_1^2 - b_2\partial_2^2 - \cdots - b_N\partial_N^2$ 是 $L^2(\Omega)$ 中的一个算子，其定义域为 $\mathcal{D}(\mathcal{B}) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$。考虑如下特征值问题：

$$\mathcal{B}\varphi = \lambda\varphi \text{ in } \Omega, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{B}). \tag{3.13}$$

通过分离变量法，我们将求出特征函数 $\varphi(x) = \Phi(x_1)\Phi(\widetilde{x})$。于是可以将上述特征值问题分解为以下两个特征值问题。

$$-\partial_1^2\Phi = \Lambda\Phi \text{ in } (0, \ell_1), \quad \Phi \in H^2(0, \ell_1) \cap H_0^1(0, \ell_1) \tag{3.14}$$

and

$$\widetilde{\mathcal{B}}\widetilde{\Phi} = (\lambda - \Lambda)\widetilde{\Phi} \text{ in } D, \quad \widetilde{\Phi} \in H^2(D) \cap H_0^1(D), \tag{3.15}$$

其中 $\widetilde{\mathcal{B}} = -b_2\partial_2^2 - \cdots - b_N\partial_N^2$ 是 $L^2(D)$ 中的一个算子，其定义域为 $\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{B}}) = H^2(D) \cap H_0^1(D)$。我们可以求解上述问题，并得到以下特征值及其重数

$$0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 \le \cdots \le \Lambda_n \le \cdots \to \infty, \quad 0 < \widetilde{\Lambda}_1 < \widetilde{\Lambda}_2 \le \cdots \le \widetilde{\Lambda}_m \le \cdots \to \infty$$

其中 $\lambda_{n,\,m} = \Lambda_n + \widetilde{\Lambda}_m$ 以及相应的特征函数 $\Phi_n, \widetilde{\Phi}_m$ 满足

$$(\Phi_k, \Phi_\ell)_{L^2(0,\ell_1)} = \delta_{k,\ell}, \quad (\widetilde{\Phi}_k, \widetilde{\Phi}_\ell)_{L^2(D)} = \delta_{k,\ell},$$

其中 $\delta_{k,\,\ell}$ 是对应于 $k, \ell \in \mathbb{N}$ 的克罗内克 δ。因此，我们得到特征值问题 (3.13) 的特征值和特征函数：

$$\lambda_{n,m} = \Lambda_n + \widetilde{\Lambda}_m, \quad \varphi_{n,m}(x) = \Phi_n(x_1)\widetilde{\Phi}_m(\widetilde{x}).$$

我们还可以看到，特征值只有上述这些。事实上，任取特征值 λ，考虑问题 (3.13)。那么，φ 关于 x_1 和 $\widetilde{x}$ 的傅里叶级数展开给出

$$\varphi(x) = \sum_{n,m=1}^{\infty} c_{nm}\Phi_n(x_1)\widetilde{\Phi}_m(\widetilde{x})$$

，其中某个常数 $c_{nm} = (\varphi, \Phi_n\Phi_m)_{L^2(\Omega)}$。于是，我们至少可以选取一对 n, m，使得 $c_{nm} \neq 0$。将 (3.13) 中的方程乘以 $\Phi_n\Phi_m$，并对 Ω 上的积分，可得 $\lambda = \Lambda_n + \Lambda_m$。

为简单起见，我们将特征值 $\lambda_{n,\,m}$ 按递增顺序重新排列，不计重数。令

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \to \infty$$

设 $\mathcal{B}$ 的特征值集合为，令 $\{\varphi_{n_j}\}_{j=1,\,\ldots d_n}$ 为 $\mathrm{Ker}(\mathcal{B} - \lambda_n)$ 的标准正交基，$P_n : L^2(\Omega) \to \mathrm{Ker}(\mathcal{B} - \lambda_n)$ 为特征投影

$$P_n v = \sum_{j=1}^{d_n} (v, \varphi_{n_j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}, \quad v \in L^2(\Omega).$$

然后，我们可以将 λ_n 和 φ_{n_j} 分解如下：

$$\lambda_n = \Lambda_{n_j} + \widetilde{\Lambda}_{n_j} \quad \text{and} \quad \varphi_{n_j} = \Phi_{n_j}\widetilde{\Phi}_{n_j},$$

~ ~其中 Λ_{n_j}、Λ_{n_j} 和 Φ_{n_j}、Φ_{n_j} 分别是问题 (3.14)、(3.15) 的特征值和特征函数，满足

$$\Lambda_{n_1} \le \Lambda_{n_2} \le \cdots \le \Lambda_{n_{d_n}}, \quad \widetilde{\Lambda}_{n_1} \ge \widetilde{\Lambda}_{n_2} \ge \cdots \ge \widetilde{\Lambda}_{n_{d_n}}.$$

我们注意到第一个特征值 λ_1 是简单的：$d_1 = 1$ 和 λ_1 可写为问题 (3.14) 和 (3.15) 的第一个特征值 Λ_1、Λ_1 之~和：

$$\lambda_1 = \Lambda_1 + \widetilde{\Lambda}_1,$$

~其中 Λ_1、Λ_1 也都是简单的（例如参见 Gilbarg 和 Trudinger [5]中的定理 8.38（第 214 页））。

现在我们考虑以下逆系数问题。

逆问题 1：任意给定 $x_0 \in \Omega$ 和 $t_0 \in (0,T)$，根据数据 $u_p(x_0,t_0)$ 确定常扩散系数 p。

对于层状材料的情形，我们可以得到与标量系数情形下类似的逆问题结果。我们将在 §4.2.4 中证明该定理。

定理 3.9（稳定性）。假设 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$u_0 \ne 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_1^2 u_0(x) \ge 0 \text{ and } \Delta u_0(x) \ge 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega. \tag{3.16}$$

那么存在一个常数 $C = C(\nu,\mu) > 0$，使得

$$|p-q| \le C|u_p(x_0,t_0) - u_q(x_0,t_0)|.$$

我们来研究以下逆问题。

逆问题 2：选取一个子区域 $\omega \subset \Omega$ 和一个开区间$I \subset (0,T)$。根据以下数据确定常扩散系数 p

$$\int_I \int_\omega u_p(x,t)\,dxdt.$$

于是得到以下定理。

定理 3.10（稳定性）。假设 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足 (3.16)，那么存在一个常数 $C = C(\nu,\mu) > 0$，使得

$$|p-q| \le C \left| \int_I \int_\omega u_p(x,t)\,dxdt - \int_I \int_\omega u_q(x,t)\,dxdt \right|.$$

我们将在§4.2.5中证明该定理。

注11. 在定理 3.9和定理 3.10中，我们可以用 $\partial_1^2 u_0(x) \le 0$ 和 $\Delta u_0(x) \le 0$ 替换假设 (3.16)的后半部分，且在 $x \in \Omega$中几乎处处成立。

尽管我们无法证明类似于定理 3.7的唯一性，但我们可以考虑 p 未知初值下的唯一性$u_{0,\ p}$ 对于层状材料。

令 $\widetilde{u}_p$ 满足

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha \widetilde{u}_p(x,t) - \operatorname{div}(B_p \nabla u_p(x,t)) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ \widetilde{u}_p(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ \widetilde{u}_p(x,0) = u_{0,p}(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.17}$$

反问题 3：任意选取 $x_0 \in \Omega$和 $t_1 \in (0,T)$。根据数据 $u_p(x_0,t)$，$0 < t < t_1$确定常扩散系数 p。

定理 3.11（未知初值下的唯一性）。令 $p,q \ge 1$。我们假设$u_{0,\ p} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$满足

$$P_1 u_{0,p}(x_0) \ne 0 \quad \text{and} \quad P_1 u_{0,q}(x_0) \ne 0. \tag{3.18}$$

如果对于 $0 < t < t_1$，$\widetilde{u}_p(x_0,t) = \widetilde{u}_q(x_0,t)$，其中 t_1 为某个常数，则有 $p = q$。

我们将在第 4.2.6 节证明定理 3.11。

3.3. 不同结构之间的反问题。我们讨论第 3.1.2 节和第 3.1.3 节所考虑的两个例子对应的系数反问题。也就是说，我们将在第 3.3.1 节研究空间一维情形的系数反问题，并在第 3.3.2 节研究层状材料情形的系数反问题。我们考虑以下两类反问题。

- 反问题 I：根据周期结构中问题 (3.1) 的数据，确定问题 (3.5) 的均匀化方程的扩散系数。
- 反问题 II：根据均匀化结构中问题 (3.5) 的数据，确定问题 (3.1) 的周期方程的扩散系数。

3.3.1. 空间一维情形。设 $Y = (0, \ell_1)$，且 Ω 是 $\mathbb{R}$ 中的一个开区间。记 $|Y|$ 为 Y 的测度。假设 a_k^ε 由下式定义：

$$a_k^\varepsilon(x) = a_k\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2,$$

其中

$$a_k \in L^\infty(Y), \quad \nu \le a_k(y) \le \mu, \ y \in \overline{Y}, \quad a_k \text{ is } Y\text{-periodic}, \quad k = 1, 2$$

其中常数 ν、$\mu \in \mathbb{R}$ 满足 $0 < \nu < \mu$。

设 $u_{0,\ k}^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ 满足带有 $u_{0,\ k} \in L^2(\Omega)$ 的收敛条件 (3.2)。假设 u_k^ε 满足以下问题：

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u_k^\varepsilon(x,t) - \partial_x(a_k^\varepsilon(x)\partial_x u_k^\varepsilon(x,t)) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u_k^\varepsilon(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_k^\varepsilon(x,0) = u_{0,k}^\varepsilon(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.19}$$

根据定理 3.1 和引理 3.2，我们可以看到，u_k^ε 收敛到以下问题的弱解 u_k^0，收敛意义由 (3.3) 和 (3.4) 给出：

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u_k^0(x,t) - \partial_x(a_k^0\partial_x u_k^0(x,t)) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u_k^0(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_k^0(x,0) = u_{0,k}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.20}$$

其中，a_k^0 是由下式定义的均匀化系数

$$a_k^0 = \frac{1}{\mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{a_k}\right)}.$$

我们考虑以下 I 型反问题。

反问题 I：取一个子区域 $\omega \subset \Omega$ 和一个开区间$I \subset (0,T)$。根据问题 (3.19) 的数据，确定问题 (3.20) 的常扩散系数 a_k^0

$$\int_I \int_\omega u_k^\varepsilon(x,t)\,dxdt.$$

根据定理 3.1 以及关于确定常扩散系数的逆问题的结果（§3.2 中的定理 3.6），我们可以直接得到上述逆问题的渐近稳定性结果。

在下述定理中，我们假设 (3.20) 是通过均匀化由 (3.19) 推导得到的。

定理3.12（渐近稳定性）。设 $u_0 := u_{0,1} \equiv u_{0,2}$ 属于 Ω。我们假设 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$u_0 \not\equiv 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad \Delta u_0(x) \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

则存在一个常数 $C = C(\nu, \mu) > 0$ 使得

$$\left|a_1^0 - a_2^0\right| \leq C \left| \int_I \int_\omega u_1^\varepsilon(x,t)\, dxdt - \int_I \int_\omega u_2^\varepsilon(x,t)\, dxdt \right| + \theta(\varepsilon)$$

对所有 $\varepsilon > 0$ 均成立。其中，当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\theta(\varepsilon) \to 0$ 。

证明。由三角不等式，我们有

$$\begin{aligned}
\left|a_1^0 - a_2^0\right| &\leq C \left| \int_I \int_\omega u_1^0(x,t)\, dxdt - \int_I \int_\omega u_2^0(x,t)\, dxdt \right| \\
&= C \left| \int_I \int_\omega \left(u_1^0(x,t) - u_2^0(x,t)\right)\, dxdt \right| \\
&\leq C \left| \int_I \int_\omega \left(u_1^0(x,t) - u_1^\varepsilon(x,t)\right)\, dxdt \right| \\
&\quad + C \left| \int_I \int_\omega \left(u_2^\varepsilon(x,t) - u_2^0(x,t)\right)\, dxdt \right| \\
&\quad + C \left| \int_I \int_\omega \left(u_1^\varepsilon(x,t) - u_2^\varepsilon(x,t)\right)\, dxdt \right| \\
&\leq C \left| \int_I \int_\omega u_1^\varepsilon(x,t)\, dxdt - \int_I \int_\omega u_2^\varepsilon(x,t)\, dxdt \right| \\
&\quad + C \left(\left\|u_1^\varepsilon - u_1^0\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \left\|u_2^\varepsilon - u_2^0\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right).
\end{aligned}$$

Set

$$\theta(\varepsilon) = C \left(\left\|u_1^\varepsilon - u_1^0\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \left\|u_2^\varepsilon - u_2^0\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \right).$$

由定理 3.6 中的收敛性 (3.4)，我们看到当 $\varepsilon \to 0$ 时， $\theta(\varepsilon) \to 0$ 。因此，定理 3.12得证。 □

注 12。通过直接计算，我们得到

$$\left|a_1^0 - a_2^0\right| \leq C \left\|a_1 - a_2\right\|_{L^1(Y)}. \tag{3.21}$$

因此，我们可以通过使用更强的观测数据获得稳定性结果。

接下来，我们考虑以下第二类反问题。
反问题II-1：任意选取 $x_0 \in \Omega$ 和 $t_0 \in (0,T)$。根据问题 (3.20) 的数据 $u_k^0(x_0,t_0)$，确定问题 (3.19) 的扩散系数 a_k 。

我们首先通过直接计算说明 a_k 和 a_k^0 之间的关系。为证明以下引理，我们假设满足先验条件：

$$a_1(y) \geq a_2(y), \quad y \in \overline{Y}. \tag{3.22}$$

下文中，我们假设 (3.20) 是在其假设和 (3.22) 的条件下，通过均匀化由 (3.19) 推导得到的。

引理 3.13. 有

$$C^{-1} \left\|a_1 - a_2\right\|_{L^1(Y)} \leq a_1^0 - a_2^0 \leq C \left\|a_1 - a_2\right\|_{L^1(Y)}$$

其中常数 $C > 0$ 仅取决于 ν、 μ、 ℓ_1。

证明。由于当 $y \in \overline{Y}$ 时 $\nu \le a_k(y) \le \mu$，我们有

$$\frac{1}{\mu} \le \frac{1}{a_k(y)} \le \frac{1}{\nu},\ y \in \overline{Y}, \quad \nu \le \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_k}\right)} \le \mu$$

对于 $k = 1,\ 2$。因此我们得到

$$\begin{aligned} a_1^0 - a_2^0 &= \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_1}\right)} - \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_2}\right)} = \frac{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_2}\right) - \mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_1}\right)}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_1}\right)\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_2}\right)} \\ &\ge \frac{\nu^2}{\ell_1}\int_0^{\ell_1}\left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1}\right) dy = \frac{\nu^2}{\ell_1}\int_0^{\ell_1}\frac{a_1 - a_2}{a_1 a_2}\, dy \ge \frac{\nu^2}{\mu^2 \ell_1}\int_0^{\ell_1}(a_1 - a_2)\, dy. \end{aligned}$$

结合 (3.21)，可得 (3.22)。

由此完成引理 3.13 的证明。 □

注 13。我们需要关于 a_1 和a_2之间关系的强假设 (3.22)。在我们的反问题中，我们考虑从 a_k^0求出 a_k 的问题。这与从函数的平均值（调和平均数）求出该函数的问题相同。因此，我们需要先验假设 (3.22)。

对于上述逆问题，我们可以直接由引理 3.13 以及确定常扩散系数的逆问题的相关结果——§3.2 中的定理 3.5——得到相应结果。

命题 3.14（稳定性）。设 $u_0 := u_{0,\ 1} \equiv u_{0,\ 2}$ 属于 Ω。假设 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$u_0 \ne 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{and} \quad \Delta u_0(x) \ge 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

那么存在常数 $C = C(\nu, \mu, Y) > 0$ 使得

$$\|a_1 - a_2\|_{L^1(Y)} \le C\left|u_1^0(x_0, t_0) - u_2^0(x_0, t_0)\right|.$$

证明：由定理 3.5，得到

$$\left|a_1^0 - a_2^0\right| \le C\left|u_1^0(x_0, t_0) - u_2^0(x_0, t_0)\right|.$$

将此结果与引理 3.13 中的不等式结合，可得本定理的稳定性估计。因此证明完成。□

此外，我们还可以考虑另一类第二类反问题。

反问题 II-2：任意选取 $x_0 \in \Omega$ 和 $t_1 \in (0, T)$。根据问题 (3.20) 的数据 $u_k^0(x_0, t)$, $0 < t < t_1$，确定问题 (3.19) 的扩散系数 a_k。

由定理 3.7、3.8 和引理 3.13，可得到以下两个关于唯一性的定理。

命题 3.15（唯一性）。设 $u_0 := u_{0,\ 1} \equiv u_{0,\ 2}$ 属于 Ω，且 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$。假设存在 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$P_{n_0} u_0(x_0) \ne 0,$$

其中 P_{n_0} 是 §3.2.1 中定义的特征投影。若对于 $0 < t < t_1$, $u_1^0(x_0, t) = u_2^0(x_0, t)$，则在 Y 上几乎处处有 $a_1 = a_2$。

命题 3.16（未知初值下的唯一性）。假设$u_{0,\ k} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$P_1 u_{0,1}(x_0) \ne 0 \quad \text{and} \quad P_1 u_{0,2}(x_0) \ne 0,$$

其中 P_1 是在§3.2.1中定义的特征投影。如果对于 $0 < t < t_1$, $u_1^0(x_0, t) = u_2^0(x_0, t)$，则我们有 $a_1 = a_2$ 在 Y 上几乎处处成立。

3.3.2. 层状材料情形。现在我们考虑层状材料的情形。设 $N \geq 2$。令 $\Omega = (0, \delta) \times D$ 为圆柱形区域，其中 $\delta > 0$，且 D 是 $\mathbb{R}^{N-1}$ 中具有 C^2 类边界 ∂D 的有界区域。将 Ω 中的元素记为 $x = (x_1, \widetilde{x}) \in \Omega$，其中 $x_1 \in (0, \delta)$，且 $\widetilde{x} = (x_2, \ldots, x_N) \in D$。我们假设扩散系数矩阵是仅依赖于空间中一个变量的对角矩阵，也就是说，我们假设

$$A_k(y) = \begin{pmatrix} p_k(y_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2(y_1) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_N(y_1) \end{pmatrix}, \quad y = (y_1, \ldots, y_N) \in Y$$

满足

$$p_k, a_i \in L^\infty(0, \ell_1),\ \nu \leq p_k(y_1), a_i(y_1) \leq \mu,\ y_1 \in [0, \ell_1],\ p_k, a_i \text{ are } (0, \ell_1)\text{-periodic}$$

对于 $k = 1, 2$, $i = 2, \ldots, N$，常数 $\nu, \mu \in \mathbb{R}$ 满足 $0 < \nu < \mu$。因此 A_k 满足 $k = 1, 2$ 的假设 (2.6)。

设 $u_{0,k}^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ 满足收敛条件 (3.2)，其中 $u_{0,k} \in L^2(\Omega)$。我们假设 u_k^ε 满足以下问题：

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u_k^\varepsilon(x,t) - \operatorname{div}(A_k^\varepsilon(x) \nabla u_k^\varepsilon(x,t)) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u_k^\varepsilon(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_k^\varepsilon(x,0) = u_{0,k}^\varepsilon(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.23}$$

根据定理 3.1 和引理 3.4，可知 u_k^ε 收敛到以下问题的弱解 u_k^0，这里的收敛意义由 (3.3) 和 (3.4) 给出：

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha u_k^0(x,t) - \operatorname{div}(A_k^0 \nabla u_k^0(x,t)) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ u_k^0(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u_k^0(x,0) = u_{0,k}(x), & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.24}$$

其中 A_k^0 是由以下对角矩阵定义的均匀化系数矩阵：

$$A_k^0 = \begin{pmatrix} p_k^0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2^0 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_N^0 \end{pmatrix}$$

with

$$p_k^0 = \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{p_k}\right)}, \quad a_i^0 = \mathcal{M}_{(0,\ell_1)}(a_i), \quad i = 2, \ldots, N$$

对于 $k = 1, 2$。

我们来研究以下 I 型反问题。

反问题 I：选取一个子区域 $\omega \subset \Omega$ 和一个开区间 $I \subset (0, T)$。根据问题 (3.23) 的数据，确定问题 (3.24) 的常扩散系数 p_k^0

$$\int_I \int_\omega u_k^\varepsilon(x,t)\, dxdt.$$

利用定理 3.1 和定理 3.10，我们可以按照定理3.12证明中采用的相同方法证明以下定理。在以下定理中，我们假设 (3.24) 是由 (3.23) 经均匀化得到的。

定理 3.17（渐近稳定性）。设 $u_0 := u_{0,1} = u_{0,2}$ 属于 Ω。假设 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$u_0 \neq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_1^2 u_0(x) \geq 0 \text{ and } \Delta u_0(x) \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

那么，存在一个常数 $C = C(\nu, \mu) > 0$，使得

$$\left|p_1^0 - p_2^0\right| \leq C \left| \int_I \int_\omega u_1^\varepsilon(x,t)\, dxdt - \int_I \int_\omega u_2^\varepsilon(x,t)\, dxdt \right| + \theta(\varepsilon)$$

对所有 $\varepsilon > 0$ 均成立。这里，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\theta(\varepsilon) \to 0$。

下面表述第二类逆问题。

反问题II-1：任意给定 $x_0 \in \Omega$ 和 $t_0 \in (0,T)$。根据问题 (3.24) 的数据 $u_k^0(x_0,t_0)$，确定问题 (3.23) 的扩散系数 p_k。

按照引理 3.13 中相同的方法计算，我们得到如下关于 p_k 与 p_k^0 之间关系的引理。为证明该引理，我们假设条件：

$$p_1(y_1) \geq p_2(y_1), \quad y_1 \in [0, \ell_1]. \tag{3.25}$$

以下假设 (3.24) 是在其假设和 (3.25) 条件下，由 (3.23) 经均匀化得到的。

引理 3.18. 我们有

$$C^{-1} \|p_1 - p_2\|_{L^1(0,\ell_1)} \leq p_1^0 - p_2^0 \leq C \|p_1 - p_2\|_{L^1(0,\ell_1)}$$

其中常数 $C > 0$ 仅取决于 ν, μ, ℓ_1。

根据定理 3.9 和引理 3.18，我们可以得到关于该逆问题的以下稳定性结果。

命题 3.19（稳定性）。设 $u_0 := u_{0,\,1} = u_{0,\,2}$ 属于 Ω。假设 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$u_0 \neq 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \partial_1^2 u_0(x) \geq 0 \text{ and } \Delta u_0(x) \geq 0 \quad \text{a.e. } x \in \Omega.$$

那么存在常数 $C = C(\nu, \mu, \ell_1) > 0$ 使得

$$\|p_1 - p_2\|_{L^1(0,\ell_1)} \leq C |u_1^0(x_0,t_0) - u_2^0(x_0,t_0)|.$$

现在我们研究另一个第二类反问题。

反问题 II-2：任意选取 $x_0 \in \Omega$ 和 $t_1 \in (0,T)$。根据问题 (3.24) 的数据 $u_k^0(x_0,t)$，$0 < t < t_1$，确定问题 (3.23) 的扩散系数 p_k。

由定理 3.11 和引理 3.18，我们得到未知初值下的唯一性结果。

命题 3.20（未知初值下的唯一性）。设

$$\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{p_k}\right) \leq 1,$$

也就是说，对于 $k = 1,\ p_k^0 \geq 1$，2。假设 $u_{0,\,k} \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ 满足

$$P_1 u_{0,1}(x_0) \neq 0 \quad \text{and} \quad P_1 u_{0,2}(x_0) \neq 0,$$

其中 P_1 是在 §3.2.2 中定义的特征投影。若对于 $0 < t < t_1$，$u_1^0(x_0,t) = u_2^0(x_0,t)$，则在 $(0,\ell_1)$ 上几乎处处有 $p_1 = p_2$。

4. Proofs of Main Results

4.1. 定理 3.1 的证明。我们采用 Tartar [16] 的振荡测试函数方法，证明 §3.1 中定理 3.1 关于均匀化的结果。

首先，我们将利用 $\{u^\varepsilon\}$ 的有界性来考察 (3.2) 中的收敛 (i)、(ii)。注意到，对于每个 $\varepsilon > 0$，u^ε 通过 $A^\varepsilon \in M_S(\nu, \mu, \Omega)$ 满足定理 2.2 的假设。因此，对 $u^\varepsilon \in W^\alpha(u_0^\varepsilon)$，估计式 (2.5) 成立，即

$$\|u^\varepsilon\|_{\mathcal{W}^\alpha(u_0^\varepsilon)} \le C\left(\|u_0^\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|f^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right).$$

根据 $\{u_0^\varepsilon\}$ 和 $\{f^\varepsilon\}$ 的收敛 (3.2)，$\{u_0^\varepsilon\}$ 和 $\{f^\varepsilon\}$ 分别在 $L^2(\Omega)$ 和 $L^2(0,T;\, H^{-1}(\Omega))$ 中有界。此外，由范数的等价性 (2.1)，可得

$$\|u^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t^\alpha(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \le M \tag{4.1}$$

其中正的常数 M 与 $\varepsilon > 0$ 无关。因此，我们可以选取 $\{u^\varepsilon\}$ 的子序列，使其满足：存在 $u^0 \in L^2(0,T;\, H_0^1(\Omega))$ 和 $\widehat{u} \in L^2(0,T;\, H^{-1}(\Omega))$，使得

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \text{ weakly in } L^2(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{4.2}$$

$$\partial_t^\alpha(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon) \rightharpoonup \widehat{u} \text{ weakly in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{4.3}$$

如 $\varepsilon \to 0$。这里，我们仍将该子序列记为 ε。这是因为我们将在证明的最后说明这些收敛对整个序列都成立。现在，我们仿照 Kubica 和 Yamamoto [9] 所采用的方法，证明 $u^0 - u_0$ 关于 t 的 α 阶分数阶可微性，以及 $\widehat{u} = \partial_t^\alpha(u^0 - u_0)$。利用弱收敛（4.3）、分数阶导数的性质（2.2）并进行分部积分，对于任意 $\psi \in \mathcal{D}(0,T)$ 和 $\Phi \in H_0^1(\Omega)$，有

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \widehat{u}(\cdot,t), \Phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, \psi(t)\, dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \langle \partial_t^\alpha(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)(\cdot,t), \Phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, \psi(t)\, dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \left\langle \partial_t J^{1-\alpha}(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)(\cdot,t), \Phi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, \psi(t)\, dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \partial_t \left\langle J^{1-\alpha}(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)(\cdot,t), \Phi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, \psi(t)\, dt \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^T \int_\Omega J^{1-\alpha}(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)(x,t)\Phi(x)\psi'(t)\, dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega J^{1-\alpha}(u^0 - u_0)(x,t)\Phi(x)\psi'(t)\, dxdt.
\end{aligned}$$

在最后一个不等式中，我们利用了 $J^{1-\alpha}$ 的弱连续性，以及 $\{u^\varepsilon\}$ 和 $\{u_0^\varepsilon\}$ 的弱收敛（4.2）和（3.2）。因此，我们得到

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \widehat{u}(\cdot,t), \Phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, \psi(t)\, dt \\
&= -\int_0^T \left\langle J^{1-\alpha}(u^0 - u_0)(\cdot,t), \Phi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, \psi'(t)\, dt.
\end{aligned}$$

这意味着 $u^0 - u_0$ 在弱意义下具有分数阶可微性，且 $\widehat{u} = \partial_t J^{1-\alpha}(u^0 - u_0) = \partial_t^\alpha(u^0 - u_0) \in L^2(0,T;\, H^{-1}(\Omega))$。因此，我们可以将收敛 (4.3) 替换为

$$\partial_t^\alpha(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon) \rightharpoonup \partial_t^\alpha(u^0 - u_0) \text{ weakly in } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{4.4}$$

由于 $\{u^\varepsilon\}$ 和 $\{u_0^\varepsilon\}$ 分别在 $\mathcal{W}^\alpha(u_0^\varepsilon)$ 和 $L^2(\Omega)$中有界，根据备注2， $\{u^\varepsilon\}$ 在 W^α 中有界。利用引理 2.3，我们可以再次选取 $\{u^\varepsilon\}$ 的子序列（仍记为 ε），使得

$$u^\varepsilon \to u^0 \text{ strongly in } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{4.5}$$

其中，该极限由弱极限的唯一性可知与 u^0 相同。

接下来，我们考察 (3.2) 的收敛性 (iii)，并证明 u^0 是问题 (3.5) 的弱解。定义

$$\zeta^\varepsilon(x,t) = (\zeta_1^\varepsilon(x,t),\dots,\zeta_N^\varepsilon(x,t)) = A^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon(x,t).$$

由于 $A^\varepsilon \in M_S(\nu,\mu,\Omega)$，我们有

$$\|\zeta^\varepsilon\|_{(L^2(0,T;L^2(\Omega)))^N} \le \mu M$$

由有界性 (4.1)，因此我们可以选取 $\{\zeta^\varepsilon\}$ 的子列（仍记为 ε），使得存在 $\zeta^0 \in (L^2(0,T;\ L^2(\Omega)))^N$，满足

$$\zeta^\varepsilon \rightharpoonup \zeta^0 \text{ weakly in } (L^2(0,T;L^2(\Omega)))^N. \tag{4.6}$$

根据 ζ^ε 的定义以及问题 (3.1) 的变分形式， ζ^ε 满足

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \partial_t^\alpha (u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)(\cdot,t),\Phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\,\psi(t)\,dt + \int_0^T\int_\Omega \zeta^\varepsilon(x,t)\cdot\nabla\Phi(x)\psi(t)\,dxdt\\
&= \int_0^T \langle f^\varepsilon(\cdot,t),\Phi\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\,\psi(t)\,dt \quad \text{for any } \psi\in\mathcal{D}(0,T) \text{ and } \Phi\in H_0^1(\Omega),
\end{aligned}$$

即，

$$\begin{aligned}
&\langle \partial_t^\alpha (u^\varepsilon - u_0^\varepsilon),\Phi\psi\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\
&\quad + \int_0^T\int_\Omega \zeta^\varepsilon(x,t)\cdot\nabla\Phi(x)\psi(t)\,dxdt\\
&\quad = \langle f^\varepsilon,\Phi\psi\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \text{ for any } \psi\in\mathcal{D}(0,T) \text{ and } \Phi\in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

根据(3.2)、(4.4)和(4.6)中的弱收敛(ii)对上述等式取极限，我们得到

$$\begin{aligned}
&\left\langle \partial_t^\alpha (u^0 - u_0),\Phi\psi\right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}\\
&\quad + \int_0^T\int_\Omega \zeta^0(x,t)\cdot\nabla\Phi(x)\psi(t)\,dxdt\\
&\quad = \langle f,\Phi\psi\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \text{ for any } \psi\in\mathcal{D}(0,T) \text{ and } \Phi\in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

因此，只需证明

$$\zeta^0 = A^0\nabla u^0 \tag{4.9}$$

即可证明(3.2)中的收敛(iii)，并证明 u^0 是问题(3.5)的弱解。事实上，将等式(4.9)代入方程(4.8)，可知 u^0 是问题(3.5)的弱解。

令 $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$且 $\psi\in\mathcal{D}(0,T)$。在$(0,T)$上对等式(2.14)进行积分，其中$\Phi = u^\varepsilon\varphi\psi$，我们得到

$$\int_0^T\int_\Omega \eta_\xi^\varepsilon(x)\cdot\nabla u^\varepsilon(x,t)\varphi(x)\psi(t)\,dxdt + \int_0^T\int_\Omega \eta_\xi^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)u^\varepsilon(x,t)\psi(t)\,dxdt = 0.$$

因此，我们有

$$\int_0^T\int_\Omega \zeta^\varepsilon(x,t)\cdot\nabla w_\xi^\varepsilon(x,t)\varphi(x)\psi(t)\,dxdt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon(x)\nabla u^\varepsilon(x,t)\cdot\nabla w_\xi^\varepsilon(x)\varphi(x)\psi(t)\,dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega A^\varepsilon(x)\nabla w_\xi^\varepsilon(x)\cdot\nabla u^\varepsilon(x,t)\varphi(x)\psi(t)\,dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \eta_\xi^\varepsilon(x)\cdot\nabla u^\varepsilon(x,t)\varphi(x)\psi(t)\,dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega \eta_\xi^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)u^\varepsilon(x,t)\psi(t)\,dxdt.
\end{aligned}
$$

在等式 (4.7) 中取 $\Phi = \varphi w_\xi^\varepsilon$，并利用上述等式，我们得到

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \partial_t^\alpha(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon), w_\xi^\varepsilon\varphi\psi\right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \zeta^\varepsilon(x,t)\cdot\nabla\varphi(x)w_\xi^\varepsilon\psi(t)\,dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \eta_\xi^\varepsilon(x)\cdot\nabla\varphi(x)u^\varepsilon(x,t)\psi(t)\,dxdt \\
&= \left\langle f^\varepsilon, w_\xi^\varepsilon\varphi\psi\right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

为在上述方程（4.10）中取极限，我们证明

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle \partial_t^\alpha(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon), w_\xi^\varepsilon\varphi\psi\right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&= \left\langle \partial_t^\alpha(u^0 - u_0), (\xi\cdot x)\varphi\psi\right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

根据 $\partial_t^\alpha(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon) = \partial_t J^{1-\alpha}(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)$ 以及分部积分，我们有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\left\langle \partial_t^\alpha(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon), w_\xi^\varepsilon\varphi\psi\right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \left\langle \partial_t J^{1-\alpha}(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)(\cdot,t), w_\xi^\varepsilon\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\psi(t)\,dt \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \partial_t\left\langle J^{1-\alpha}(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)(\cdot,t), w_\xi^\varepsilon\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\psi(t)\,dt \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \left\langle J^{1-\alpha}(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)(\cdot,t), w_\xi^\varepsilon\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\psi'(t)\,dt \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^T \int_\Omega J^{1-\alpha}(u^\varepsilon - u_0^\varepsilon)(x,t)w_\xi^\varepsilon(x)\varphi(x)\psi'(t)\,dxdt \\
&= -\int_0^T \int_\Omega J^{1-\alpha}(u^0 - u_0)(x,t)(\xi\cdot x)\varphi(x)\psi'(t)\,dxdt \\
&= -\int_0^T \left\langle J^{1-\alpha}(u^0 - u_0)(\cdot,t), (\xi\cdot x)\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\psi'(t)\,dt \\
&= \int_0^T \partial_t\left\langle J^{1-\alpha}(u^0 - u_0)(\cdot,t), (\xi\cdot x)\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\psi(t)\,dt \\
&= \int_0^T \left\langle \partial_t J^{1-\alpha}(u^0 - u_0)(\cdot,t), (\xi\cdot x)\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\psi(t)\,dt \\
&= \int_0^T \left\langle \partial_t^\alpha(u^0 - u_0)(\cdot,t), (\xi\cdot x)\varphi\right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\psi(t)\,dt \\
&= \left\langle \partial_t^\alpha(u^0 - u_0), (\xi\cdot x)\varphi\psi\right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))},
\end{aligned}
$$

其中用到了 $J^{1-\alpha}$ 的弱连续性以及收敛关系 (2.12)、(3.2) 和 (4.2)。因此可得 (4.11)。由于 (4.10) 中除含有

时间导数的项外，其余各项都是弱收敛序列与强收敛序列的乘积，因此它们的极限就是弱收敛极限与强收敛极限的乘积。于是，根据收敛关系 (2.12)、(2.13)、(3.2)、(4.5)、(4.6) 和 (4.11)，可在 (4.10) 中取极限。

$$\begin{aligned}
&\left\langle \partial_t^\alpha (u^0 - u_0), (\xi \cdot x)\varphi\psi \right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \zeta^0(x,t) \cdot \nabla\varphi(x)(\xi \cdot x)\psi(t)\, dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega A^0\xi \cdot \nabla\varphi(x) u^0(x,t)\psi(t)\, dxdt \\
&= \langle f, (\xi \cdot x)\varphi\psi \rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

这可以改写如下。

$$\begin{aligned}
&\left\langle \partial_t^\alpha (u^0 - u_0), (\xi \cdot x)\varphi\psi \right\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} \\
&+ \int_0^T \int_\Omega \zeta^0(x,t) \cdot \nabla \left[(\xi \cdot x)\varphi(x)\right] \psi(t)\, dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega \zeta^0(x,t) \cdot \xi\varphi(x)\psi(t)\, dxdt \\
&- \int_0^T \int_\Omega A^0\xi \cdot \nabla\varphi(x) u^0(x,t)\psi(t)\, dxdt \\
&= \langle f, (\xi \cdot x)\varphi\psi \rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

结合这一点与等式 (4.8)，其中 $\Phi = (\xi \cdot x)\varphi$，可得

$$\int_0^T \int_\Omega \zeta^0(x,t) \cdot \xi\varphi(x)\psi(t)\, dxdt = -\int_0^T \int_\Omega A^0\xi \cdot \nabla\varphi(x) u^0(x,t)\psi(t)\, dxdt.$$

注意到 $A^0\xi$ 是一个常数，我们有

$$-\int_0^T \int_\Omega A^0\xi \cdot \nabla\varphi(x) u^0(x,t)\psi(t)\, dxdt = \int_0^T \int_\Omega A^0\xi \cdot \nabla u^0(x,t)\varphi(x)\psi(t)\, dxdt.$$

由上述两个等式可得

$$\int_0^T \int_\Omega \zeta^0(x,t) \cdot \xi\varphi(x)\psi(t)\, dxdt = \int_0^T \int_\Omega A^0\xi \cdot \nabla u^0(x,t)\varphi(x)\psi(t)\, dxdt.$$

因此，我们看到

$$\zeta^0 \cdot \xi = A^0\xi \cdot \nabla u^0 = A^0 \nabla u^0 \cdot \xi.$$

由于 $\xi \in \mathbb{R}^N$ 是任意的，我们有 (4.9)。

在证明的最后，我们注意到所有收敛对整个序列 $\{u^\varepsilon\}$ 都成立。由 (4.8) 和 (4.9)，可得问题 (3.5) 的弱形式。我们还注意到，根据备注 3，问题 (3.5) 的弱解 u^0 是唯一的。因此，收敛 (4.2)、(4.4)、(4.5) 和 (4.6) 对整个序列 $\{u^\varepsilon\}$ 都成立；也就是说，u^ε 满足 (3.3) 和 (3.4)。

至此，我们完成了定理 3.1 的证明。 □

4.2. 常数扩散系数确定定理的证明。我们将证明 §3.2 中关于时间分数阶扩散方程常数扩散系数确定性的结果：定理 3.5、3.7、3.8、3.6、3.9、3.11 和 3.10。

4.2.1. 定理 3.5 的证明。我们将分三步证明该定理。第一步。我们证明以下不等式：如果 $p \geq q$，则有

$$u_p(x,t) \geq u_q(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty). \tag{4.12}$$

令 $y := u_p - u_q$ 和 $r := p - q$。则

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha y(x,t) - p\Delta y(x,t) = r\Delta u_q(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ y(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.13}$$

令 $v := \Delta u_q$，根据 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，可得

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha v(x,t) - q\Delta v(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ v(x,0) = \Delta u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.14}$$

事实上，由于

$$u_q(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-q\lambda_n t^\alpha) P_n u_0(x), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty),$$

我们有

$$\begin{aligned} -\Delta u_q(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-q\lambda_n t^\alpha)(\mathcal{A} P_n u_0)(x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-q\lambda_n t^\alpha) P_n(\Delta u_0)(x), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty). \end{aligned}$$

因此可以验证（4.14）。

将 Luchko 和 Yamamoto 中的定理2.1 [10] 与 (3.8) 应用于 (4.14)，可得

$$\Delta u_q \geq 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty). \tag{4.15}$$

我们再次将定理2.1 [10] 应用于 (4.13)。注意到 (4.13) 中等式右端非负： $r\Delta u_q \geq 0$ 在 $\Omega \times (0,\infty)$ 中，因此可得 $y \geq 0$ 在 $\Omega \times (0,\infty)$ 中，这意味着不等式 (4.12)

第二步。我们确认 $u_p(x_0,t_0)$ 关于 $p > 0$ 的解析性。令 $\mathcal{A}_p := -p\Delta$，其中 $\mathcal{D}(\mathcal{A}_p) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$。特征值为 $p\lambda_n$，特征投影与 $\mathcal{A}_1$ 相同。于是有

$$u_p(x_0,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-p\lambda_n t_0^\alpha) P_n u_0(x_0) \tag{4.16}$$

且该级数收敛。事实上

$$\mathcal{A}_p u_p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} p\lambda_n E_{\alpha,1}(-p\lambda_n t^\alpha) P_n u_0(x),$$

因此

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_p u_p(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(\frac{p\lambda_n t^\alpha}{1 + p\lambda_n t^\alpha} \right)^2 t^{-2\alpha} \\ &\leq C t^{-2\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \|P_n u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= C t^{-2\alpha} \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

由于根据 Sobolev嵌入有 $H^2(\Omega) \subset C(\overline{\Omega})$，且 $N = 1$、2、3，我们得到

$$|u_p(x,t)| \le Ct^{-\alpha}\|u_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty).$$

由此得到收敛级数（4.16）。另见 Sakamoto 和 Yamamoto [14] 中的定理2.1。

由于 $E_{\alpha,\,1}(-(\lambda_n t_0^\alpha)z)$ 在 $z \in \mathbb{C}$ 中全纯，我们立即得到

$$u_p(x_0,t_0) \text{ is analytic in } p > 0. \tag{4.17}$$

为第三步做准备，我们证明以下不等式。

$$u_0(x) \le 0 \quad x \in \Omega. \tag{4.18}$$

Let

$$u_0(\widehat{x}) := \max_{x\in\overline{\Omega}} u_0(x) > 0.$$

由于 $u_0 = 0$ 在 $\partial\Omega$ 上，我们可知 $\widehat{x} \in\Omega$。由 $\Delta u_0 \ge 0$ 在 Ω 中，强最大值原理（例如，Gilbarg 和 Trudinger [5] 中的定理 3.5（第35页））推出 u_0 是一个常值函数。由 $u_0\big|_{\partial\Omega} = 0$，我们得到 $u_0 = 0$ 在 Ω 中。这与假设（3.8）矛盾。因此，（4.18）得证。

第三步。我们证明以下不等式：若 $p > q$，则有

$$u_p(x_0,t_0) > u_q(x_0,t_0). \tag{4.19}$$

假设存在常数 p_0 和 q_0，满足 $0 < q_0 < p_0$ 和 $u_{p_0}(x_0,t_0) = u_{q_0}(x_0,t_0)$。由 (4.12) 可得，对于所有 $s \in [q_0,p_0]$，$u_s(x_0,t_0) = u_{q_0}(x_0,t_0)$。利用恒等定理，解析性 (4.17) 可推出

$$u_p(x_0,t_0) = u_q(x_0,t_0) \quad \text{for all } p > q > 0.$$

因此我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-p\lambda_n t_0^\alpha)P_n u_0(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-q\lambda_n t_0^\alpha)P_n u_0(x_0) \quad \text{for all } p > q > 0.$$

由渐近展开（例如，[13]），当 $p > 0$ 足够大时，我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-p\lambda_n t_0^\alpha)P_n u_0(x_0)\right| \le \frac{C}{pt_0^\alpha}.$$

令 $q = 1$，则有

$$u_q(x_0,t_0) = \lim_{p\to\infty} u_p(x_0,t_0) = 0.$$

另一方面，由 (4.18)，强正性（例如，Luchko 和 Yamamoto [11] 中的定理 9）推出 $u_q(x_0,t_0) < 0$。这与之矛盾。因此，(4.19) 的证明完成。

由不等式 (4.19) 可知，函数 $h(p) := u_p(x_0,t_0)$ 是单射，并且

$$\frac{dh}{dp}(p) > 0 \quad \text{for all } p > 0.$$

因此，由中值定理可得稳定性估计。至此，定理 3.5 的证明完成。□

4.2.2. 定理 3.6 的证明。证明的第一步和第二步与定理 3.5 的证明相同。因此，我们从第三步开始证明。第三步。我们将证明以下不等式：若 $p > q$，则有

$$\int_I \int_\omega u_p(x,t)\,dxdt > \int_I \int_\omega u_q(x,t)\,dxdt. \tag{4.20}$$

假设存在常数 p_0 和 q_0，满足 $0 < q_0 < p_0$ 和

$$\int_I \int_\omega u_{p_0}(x,t)\,dxdt = \int_I \int_\omega u_{q_0}(x,t)\,dxdt.$$

由 (4.12)，可得

$$u_{p_0}(x,t) \geq u_{q_0}(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty).$$

由于 u_{p_0} 和 u_{q_0} 足够光滑（例如，参见 [14]中的定理2.1），可得

$$u_{p_0}(x,t) = u_{q_0}(x,t), \quad (x,t) \in \omega \times I.$$

任取 $(x_0,t_0) \in \omega \times I$。可得

$$u_{p_0}(x_0,t_0) = u_{q_0}(x_0,t_0),$$

这通过与定理 3.5 证明第三步中所用论证类似的方法，推出了 (4.20)。

由不等式 (4.20)，函数

$$H(p) = \int_I \int_\omega u_p(x,t)\,dxdt$$

由不等式 (4.20) 可知是单射，并且

$$\frac{dH}{dp}(p) > 0, \quad p > 0.$$

使用定理 3.5 证明中相同的论证，可得到稳定性估计。

至此，定理 3.6 的证明完成。 □

4.2.3. 定理 3.7 和定理 3.8 的证明。在开始证明这些定理之前，我们先确认一些证明这些定理所需的事实。

主要要点如下：

$$\widetilde{u}_p(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-p\lambda_n t^\alpha) P_n u_{0,p}(x), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty)$$

以及渐近展开：

$$E_{\alpha,1}(-p\lambda_n t^\alpha) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{p^k \lambda_n^k t^{\alpha k}} + O\left(\frac{1}{p^{K+1}\lambda_n^{K+1} t^{\alpha(K+1)}} \right)$$

对于任意 $K \in \mathbb{N}$。

我们假设

$$\widetilde{u}_p(x_0,t) = \widetilde{u}_q(x_0,t), \quad 0 < t < t_1.$$

$t > 0$ 中解的解析性给出

$$\widetilde{u}_p(x_0,t) = \widetilde{u}_q(x_0,t), \quad t > 0.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-p\lambda_n t^\alpha) P_n u_{0,p}(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_{\alpha,1}(-q\lambda_n t^\alpha) P_n u_{0,q}(x_0), \quad t > 0.$$

Set

$$\mathcal{P}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n u_{0,p}(x)}{\lambda_n^k}, \quad \mathcal{Q}_k(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n u_{0,q}(x)}{\lambda_n^k} \tag{4.21}$$

对于 $x \in \Omega$。因此,

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{p^k t^{\alpha k}} \mathcal{P}_k(x_0) = \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(1-\alpha k)} \frac{1}{q^k t^{\alpha k}} \mathcal{Q}_k(x_0) + O\left(\frac{1}{t^{\alpha(K+1)}}\right) \tag{4.22}$$

如 $t \to \infty$。

另一方面，我们可以证明

引理 4.1。设 $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{r_n}{\lambda_n}\right| < \infty$，并设序列 $\{\ell_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ 满足 $\lim_{k\to\infty} \ell_k = \infty$。

If

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_n}{\lambda_n^{\ell_k}} = 0 \quad \text{for all } k \in \mathbb{N},$$

则对于 $n \in \mathbb{N}$，有 $r_n = 0$。

证明直接可得，参见 Yamamoto [17] 中的引理 1。

在定理 3.7 和定理 3.8 中相应的假设下，我们验证

$$\begin{cases} \text{there exists } k_0 \in \mathbb{N} \text{ such that} \\ \mathcal{P}_k(x_0) \neq 0 \text{ for } k \geq k_0 \text{ or } \mathcal{Q}_k(x_0) \neq 0 \text{ for } k \geq k_0. \end{cases} \tag{4.23}$$

事实上，若不然，则可取一列 ℓ_k，使得 $k \in \mathbb{N}$，且 $\lim_{k\to\infty} \ell_k = \infty$，并且对 $k \in \mathbb{N}$ 有 $\mathcal{P}_{\ell_k}(x_0) = \mathcal{Q}_{\ell_k}(x_0) = 0$。应用引理 4.1 得到$P_n u_{0,\,p}(x_0) = P_n u_{0,\,q}(x_0) = 0$，对 $n \in \mathbb{N}$ 成立。这与定理 3.7 和定理 3.8 中的假设均矛盾。

定理 3.7 的证明。令$u_{0,\,p} \equiv u_{0,\,q}$。由 (4.23)，可找到 $K_1 \in \mathbb{N}$，使得$\mathcal{P}_1(x_0) = \cdots \mathcal{P}_{K_1-1}(x_0) = 0$ 且 $\mathcal{P}_{K_1}(x_0) \neq 0$。对于 $K_1 = 1$，可直接取 $\mathcal{P}_1 \neq 0$。于是由 (4.22)，得到

$$\frac{(-1)^{K_1+1}}{\Gamma(1-\alpha K_1)} \frac{\mathcal{P}_{K_1}(x_0)}{p^{K_1} t^{\alpha K_1}} = \frac{(-1)^{K_1+1}}{\Gamma(1-\alpha K_1)} \frac{\mathcal{P}_{K_1}(x_0)}{q^{K_1} t^{\alpha K_1}} + O\left(\frac{1}{t^{\alpha(K_1+1)}}\right)$$

因为 $t \to \infty$。令 $t \to \infty$，得到

$$\mathcal{P}_{K_1}(x_0)\left(\frac{1}{p^{K_1}} - \frac{1}{q^{K_1}}\right) = 0,$$

也就是说， $p = q$ 由 $\mathcal{P}_{K_1}(x_0) \neq 0$得出。定理 3.7 的证明完毕。 □

定理 3.8 的证明。由（4.22），令 $t^{-\alpha k}$的系数相等，可得

$$\frac{\mathcal{P}_k(x_0)}{p^k} = \frac{\mathcal{Q}_k(x_0)}{q^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

也就是说,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n u_{0,p}(x_0)}{\lambda_n^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n u_{0,q}(x_0)}{(\lambda_n \rho)^k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

其中我们设 $\rho := \frac{q}{p}$。我们假设 $\rho = \frac{q}{p} > 1$。于是

$$\frac{P_1 u_{0,p}(x_0)}{\lambda_1^k} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{P_n u_{0,p}(x_0)}{\lambda_n^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_n u_{0,q}(x_0)}{(\lambda_n \rho)^k}.$$

因此,

$$P_1 u_{0,p}(x_0) + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k P_n u_{0,p}(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n \rho}\right)^k P_n u_{0,q}(x_0).$$

由于 $\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right| < 1$ 对于 $n \geq 2$ 以及 $\left|\frac{\lambda_1}{\rho\lambda_n}\right| < 1$ 对于 $n \geq 1$，我们可以看到

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right)^k = 0 \quad \text{for } n \geq 2$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{\lambda_1}{\rho\lambda_n}\right)^k = 0 \quad \text{for } n \geq 1.$$

因此我们得到 $P_1 u_{0,\ p}(x_0) = 0$。这与假设矛盾。因此 $\frac{q}{p} \leq 1$。同理，我们可以证明 $\frac{p}{q} \geq 1$，并且 $p = q$ 也成立。由此，定理 3.8 的证明完成。□

4.2.4. 定理 3.9 的证明。我们使用与定理 3.5 中类似的论证来证明该定理。

第一步。正如我们在定理 3.5 证明的第一步中所看到的，我们可以得到

$$u_p(x,t) \geq u_q(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,\infty), \tag{4.24}$$

若 $p \geq q$。

令 $y := u_p - u_q$ 和 $r := p - q$。则

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha y(x,t) - \operatorname{div}(B_p \nabla y(x,t)) = r\partial_1^2 u_q(x,t), & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ y(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ y(x,0) = 0, & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.25}$$

令 $v := \partial_1^2 u_q$，由 $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$，可知

$$\begin{cases} \partial_t^\alpha v(x,t) - \operatorname{div}(B_q \nabla v(x,t)) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ v(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ v(x,0) = \partial_1^2 u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.26}$$

将定理2.1应用于 [10]，并将 (3.16) 用于 (4.26)，可得

$$\partial_1^2 u_q \geq 0 \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty). \tag{4.27}$$

将定理2.1应用于 [10]，得到 (4.25)。由 Ω 中的 $r\partial_1^2 u_q \geq 0$ $\times (0,\infty)$，可知 Ω 中的 $y \geq 0$ $\times (0,\infty)$，这意味着不等式 (4.24)

第二步。我们注意到 $u_p(x_0,t_0)$ 关于 $p > 0$ 的解析性。我们有

$$u_p(x_0,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_n} E_{\alpha,1}((-p\Lambda_{n_j} - \widetilde{\Lambda}_{n_j})t_0^\alpha)(u_0, \varphi_{n_j})_{L^2(\Omega)} \varphi_{n_j}(x_0) \tag{4.28}$$

且该级数收敛。事实上

$$-\operatorname{div}(B_p \nabla u_p(x,t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_n} (p\Lambda_{n_j} + \widetilde{\Lambda}_{n_j}) E_{\alpha,1}((-p\Lambda_{n_j} - \widetilde{\Lambda}_{n_j})t^\alpha)(u_0, \varphi_{n_j})_{L^2(\Omega)} \varphi_{n_j}(x),$$

因此

$$\|-\operatorname{div}(B_p \nabla u_p(\cdot,t))\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_n} (u_0, \varphi_{n_j})_{L^2(\Omega)}^2 \left(\frac{(p\Lambda_{n_j} + \widetilde{\Lambda}_{n_j})t^\alpha}{1 + (p\Lambda_{n_j} + \widetilde{\Lambda}_{n_j})t^\alpha}\right)^2 t^{-2\alpha}$$

$$\leq Ct^{-2\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\|P_n u_0\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$= Ct^{-2\alpha}\|u_0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

由于根据 Sobolev嵌入和 $N=1$，有 $H^2(\Omega)\subset C(\Omega)$，因此我们得到

$$|u_p(x,t)|\leq Ct^{-\alpha}\|u_0\|_{L^2(\Omega)},\quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty).$$

因此我们得到收敛级数 (4.28)。

由于 $E_{\alpha,\ 1}((-z\Lambda_{n_j}-\Lambda_{n_j})t_0^\alpha)$ 在 $z\in\mathbb{C}$ 中全纯，我们很容易看出

$$u_p(x_0,t_0)\text{ is analytic in }p>0. \tag{4.29}$$

正如我们在定理 3.9 的证明中所示，我们有以下不等式。

$$u_0(x)\leq 0\quad x\in\Omega. \tag{4.30}$$

第三步。我们证明以下不等式：若 $p>q$ 则有

$$u_p(x_0,t_0)>u_q(x_0,t_0). \tag{4.31}$$

假设存在常数 p_0 和 q_0 满足 $0<q_0<p_0$ 和 $u_{p_0}(x_0,t_0)=u_{q_0}(x_0,t_0)$。根据定理 3.9 证明中使用的方法，我们可知

$$u_p(x_0,t_0)=u_q(x_0,t_0)\quad\text{for all } p>q>0.$$

因此我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}E_{\alpha,1}((-p\Lambda_{n_j}-\widetilde{\Lambda}_{n_j})t_0^\alpha)(u_0,\varphi_{n_j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}E_{\alpha,1}((-q\Lambda_{n_j}-\widetilde{\Lambda}_{n_j})t_0^\alpha)(u_0,\varphi_{n_j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)\quad\text{for all } p>q>0.$$

根据渐近展开（例如 [13]），当 $p>0$ 足够大时，我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}E_{\alpha,1}((-p\Lambda_{n_j}-\widetilde{\Lambda}_{n_j})t_0^\alpha)(u_0,\varphi_{n_j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)\right|\leq\frac{C}{(p\Lambda_1+\widetilde{\Lambda}_1)t_0^\alpha}.$$

这里，$p\Lambda_1+\Lambda_1$ 是 $p>1$ 的第一个特征值，且该特征值是单的。事实上，我们有

$$\begin{aligned}p\Lambda_1+\widetilde{\Lambda}_1&=(p-1)\Lambda_1+(\Lambda_1+\widetilde{\Lambda}_1)\\&<(p-1)\Lambda_{n_j}+(\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j})\\&=p\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j},\end{aligned} \tag{4.32}$$

对于 $n\geq 2$，因为我们知道

$$\Lambda_1\leq\Lambda_{n_j}\quad\text{and}\quad\Lambda_1+\widetilde{\Lambda}_1=\lambda_1<\lambda_n=\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j}.$$

令 $q=1$，我们有

$$u_q(x_0,t_0)=\lim_{p\to\infty}u_p(x_0.t_0)=0.$$

另一方面，按照定理 3.9 证明中第三步所用的方法，我们可以得到 $u_q(x_0,t_0)<0$。这就产生了矛盾。因此，(4.31) 的证明完成。

由不等式 (4.31) 可知，函数 $h(p):=u_p(x_0,t_0)$ 是单射，且

$$\frac{dh}{dp}(p)>0\quad\text{for all } p>0.$$

因此，由中值定理可得稳定性估计。至此，定理 3.9 的证明完成。□

4.2.5. 定理 3.10 的证明。证明的第一步和第二步与定理 3.9 的证明相同。此外，采用与定理 3.6 证明中第三步类似的论证，可以得到稳定性估计。

因此，定理 3.10 的证明完成。 □

4.2.6. 定理 3.11 的证明。我们使用

$$\widetilde{u}_p(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}E_{\alpha,1}((-p\Lambda_{n_j}-\widetilde{\Lambda}_{n_j})t^{\alpha})(u_{0,p},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,\infty)$$

以及渐近展开：

$$\begin{aligned}E_{\alpha,1}((-p\Lambda_{n_j}-\widetilde{\Lambda}_{n_j})t^{\alpha})=&\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(1-\alpha k)}\frac{1}{(p\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j})^k t^{\alpha k}}\\&+O\left(\frac{1}{(p\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j})^{K+1}t^{\alpha(K+1)}}\right)\end{aligned}$$

对任意 $K\in\mathbb{N}$。

我们假设

$$\widetilde{u}_p(x_0,t)=\widetilde{u}_q(x_0,t),\quad 0<t<t_1.$$

由 $t>0$ 中解的解析性可知

$$\widetilde{u}_p(x_0,t)=\widetilde{u}_q(x_0,t),\quad t>0.$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}E_{\alpha,1}((-p\Lambda_{n_j}-\widetilde{\Lambda}_{n_j})t^{\alpha})(u_{0,p},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}E_{\alpha,1}((-q\Lambda_{n_j}-\widetilde{\Lambda}_{n_j})t^{\alpha})(u_{0,q},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0),\quad t>0.\end{aligned}$$

于是，

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(1-\alpha k)}\frac{1}{t^{\alpha k}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}\frac{(u_{0,p},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)}{(p\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j})^k}\\&=\sum_{k=1}^{K}\frac{(-1)^{k+1}}{\Gamma(1-\alpha k)}\frac{1}{t^{\alpha k}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}\frac{(u_{0,q},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)}{(q\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j})^k}+O\left(\frac{1}{t^{\alpha(K+1)}}\right)\end{aligned}\tag{4.33}$$

当 $t\to\infty$ 时。

由 (4.33)，比较 $t^{-\alpha k}$ 的系数可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}\frac{(u_{0,p},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)}{(p\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j})^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}\frac{(u_{0,q},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)}{(q\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j})^k},\quad k\in\mathbb{N}.$$

假设 $\frac{q}{p}>1$。则有

$$\frac{P_1u_{0,p}(x_0)}{(p\Lambda_1+\widetilde{\Lambda}_1)^k}+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}\frac{(u_{0,p},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)}{(p\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j})^k}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}\frac{(u_{0,q},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)}{(q\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j})^k}.$$

~这里 $p\Lambda_1+\Lambda_1$ 是第一个特征值，且它是单的。因此，

$$P_1u_{0,p}(x_0)+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}\left(\frac{p\Lambda_1+\widetilde{\Lambda}_1}{p\Lambda_{n_j}+\widetilde{\Lambda}_{n_j}}\right)^k(u_{0,p},\varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)}\varphi_{n_j}(x_0)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{p\Lambda_1 + \widetilde{\Lambda}_1}{q\Lambda_{n_j} + \widetilde{\Lambda}_{n_j}} \right)^k (u_{0,q}, \varphi_{n,j})_{L^2(\Omega)} \varphi_{n_j}(x_0).$$

由于 $\left| \frac{p\Lambda_1 + \widetilde{\Lambda}_1}{p\Lambda_{n_j} + \widetilde{\Lambda}_{n_j}} \right| < 1$ 对于 $n \geq 2$ 成立，且 $\left| \frac{p\Lambda_1 + \widetilde{\Lambda}_1}{q\Lambda_{n_j} + \widetilde{\Lambda}_{n_j}} \right| < 1$ 对于 $n \geq 1$ 成立，根据不等式（4.32），我们可得

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{p\Lambda_1 + \widetilde{\Lambda}_1}{p\Lambda_{n_j} + \widetilde{\Lambda}_{n_j}} \right)^k = 0 \quad \text{for } n \geq 2$$

and

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{p\Lambda_1 + \widetilde{\Lambda}_1}{q\Lambda_{n_j} + \widetilde{\Lambda}_{n_j}} \right)^k = 0 \quad \text{for } n \geq 1.$$

因此我们得到$P_1 u_{0,\ p}(x_0) = 0$。这与假设矛盾。因此 $\frac{q}{p} \leq 1$。我们还可以证明 $\frac{p}{q} \geq 1$ 和 $p = q$ 成立。因此，定理 3.11 的证明完成。□

Appendix

我们将在此证明一些尚未证明的引理。

4.3. 引理 3.2 和 3.4 的证明。我们证明主要结果 §3.1.2 和 §3.1.2 中陈述的两个引理。我们先证明引理 3.2。

引理 3.2 的证明。由于根据 w_ξ 关于 ξ 的线性性，$w_\xi = \xi w_1$，因此只需证明

$$\mathcal{M}_Y(a\partial_y w_1) = \frac{1}{\mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

注意，$w_1 = y - \chi_1$，其中 χ_1 是该问题的弱解：

$$\begin{cases} -\partial_y(a(y)\partial_y\chi_1) = -\partial_y a(y) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \\ \chi_1 \text{ is } Y\text{-periodic and } \mathcal{M}_Y(\chi_1) = 0. \end{cases}$$

通过直接计算，我们可以得到如下形式的 χ_1：

$$\chi_1 = y + C_1 \int_0^y \frac{1}{a(z)}\, dz + C_0$$

其中常数为 C_0 和 C_1。由于 χ_1具有 Y-周期性，$\chi_1(0) = \chi_1(\ell_1)$，因此我们有

$$C_0 = \ell_1 + C_1 \int_0^{\ell_1} \frac{1}{a(z)}\, dz + C_0.$$

因此我们看到

$$C_1 = -\frac{\ell_1}{\int_0^{\ell_1} \frac{1}{a(z)}\, dz} = -\frac{1}{\mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{a}\right)}.$$

由此得到

$$\chi_1 = y - \frac{1}{\mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{a}\right)} \int_0^y \frac{1}{a(z)}\, dz + C_0,$$

其中 C_0 是一个满足 $\mathcal{M}_Y(\chi_1) = 0$的常数。

由 $w_1 = y - \chi_1$，我们有

$$w_1 = \frac{1}{\mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{a}\right)} \int_0^y \frac{1}{a(z)}\, dz - C_0,$$

然后

$$\partial_y w_1 = \frac{1}{\mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{a}\right)} \cdot \frac{1}{a(y)}.$$

利用这一等式，我们可以得到

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_Y(a\partial_y w_1) &= \mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{\mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{a}\right)}\right)\\ &= \frac{1}{\mathcal{M}_Y\left(\frac{1}{a}\right)}.\end{aligned}$$

由此得证。 □

注释14。在这种情况下，我们无需使用振荡检验函数，即可直接得到均匀化结果并证明本引理。

下面证明引理 3.3。

引理 3.3 的证明。设 χ_i 是问题 (2.10) 在 $\xi = e_i (i = 1, \ldots, N)$ 条件下的唯一解:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}_y(A(y)\nabla_y \chi_i) = -\operatorname{div}_y(A(y)e_i) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N), \\ \chi_i \text{ is } Y\text{-periodic and } \mathcal{M}_Y(\chi_i) = 0, \end{cases} \tag{4.34}$$

并令 $w_i = y_i - \chi_i (i = 1, \ldots, N)$。则 w_i 是问题 (2.11) 在 $\xi = e_i (i = 1, \ldots, N)$ 条件下的唯一解。

如果 $i = 1$，那么问题 (4.34) 的上述方程中的系数和非齐次项依赖于 y_1，而与 $y_2, \ldots, y_N$ 无关。因此，我们可以找到仅依赖于 y_1 的 χ_1，即下列问题的解 $\chi_1 = \chi_1(y_1)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}(y_1)\dfrac{\partial \chi_1}{\partial y_1}\right) = -\dfrac{\partial a_{11}}{\partial y_1}(y_1) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \\ \chi_1 \text{ is } (0,\ell_1)\text{-periodic and } \mathcal{M}_{(0,\ell_1)}(\chi_1) = 0\ . \end{cases}$$

通过引理 3.2 证明中的相同论证，我们得到

$$\chi_1 = y_1 - \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\int_0^{y_1} \frac{1}{a_{11}(z)}\, dz + C_{0,1},$$

其中 $C_{0,\ 1}$ 是满足 $\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}(\chi_1) = 0$ 的常数。

由 $w_1 = y_1 - \chi_1$，我们得到

$$w_1 = \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\int_0^{y_1} \frac{1}{a_{11}(z)}\, dz - C_{0,1},$$

进而

$$\nabla_y w_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)} \cdot \frac{1}{a_{11}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

由 (3.6) 结合 $\xi = e_1$，可知

$$\begin{pmatrix} a_{11}^0 \\ a_{21}^0 \\ \vdots \\ a_{N1}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)} \\ \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{N1}}{a_{11}}\right) \end{pmatrix}.$$

根据上述等式的分量可得

$$a_{11}^0 = a_{11}^*, \quad a_{i1}^0 = a_{i1}^* \quad i = 2, \dots, N.$$

接下来，我们计算问题 (4.34) 在 $j = 2, \dots, N$ 下的解 χ_j。我们来求仅依赖于 y_1 的 χ_j，也就是说，求以下问题在 $j = 2, \dots, N$ 下的解 $\chi_j = \chi_j(y_1)$:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial y_1}\left(a_{11}(y_1)\dfrac{\partial \chi_j}{\partial y_1}\right) = -\dfrac{\partial a_{1j}}{\partial y_1}(y_1) \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}), \\ \chi_j \text{ is } (0,\ell_1)\text{-periodic and } \mathcal{M}_{(0,\ell_1)}(\chi_j) = 0\ . \end{cases}$$

采用与上文相同的论证，我们得到

$$\chi_j = \int_0^{y_1} \frac{a_{1j}(z)}{a_{11}(z)}\,dz - \frac{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)} \int_0^{y_1} \frac{1}{a_{11}(z)}\,dz + C_{0,j},$$

其中 $C_{0,\ j}$ 是满足 $\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}(\chi_j) = 0$ （ $j = 2, \dots, N$）的常数。

由 $w_j = y_j - \chi_j$，我们得到

$$w_j = y_j - \int_0^{y_1} \frac{a_{1j}(z)}{a_{11}(z)}\,dz + \frac{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)} \int_0^{y_1} \frac{1}{a_{11}(z)}\,dz - C_{0,j},$$

于是

$$\nabla_y w_j = \begin{pmatrix} -\frac{a_{1j}}{a_{11}} + \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)\cdot\frac{1}{a_{11}} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (j\text{-th component})\ .$$

由带有 $\xi = e_j$ 的 (3.6)，可知

$$\begin{pmatrix} a_{1j}^0 \\ a_{2j}^0 \\ \vdots \\ a_{Nj}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right) \\ \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{21}}{a_{11}}\right) + \mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(a_{2j} - \frac{a_{1j}a_{21}}{a_{11}}\right) \\ \vdots \\ \frac{1}{\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{1}{a_{11}}\right)}\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{1j}}{a_{11}}\right)\mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(\frac{a_{N1}}{a_{11}}\right) + \mathcal{M}_{(0,\ell_1)}\left(a_{Nj} - \frac{a_{1j}a_{N1}}{a_{11}}\right) \end{pmatrix}$$

对于 $j = 2, \dots, N$。

由上述等式的分量可得

$$a_{1j}^0 = a_{1j}^*, \quad a_{ij}^0 = a_{ij}^* \quad i, j = 2, \dots, N.$$

至此，引理 3.3 的证明完成。 □

Acknowledgments

ATSUSHI KAWAMOTO 获得了日本学术振兴会（JSPS）研究活动启动资助金，资助项目编号为 JP21K20333。

References

[1] 1975 R. A. Adams，《Sobolev空间》，[2] Academic Press，纽约；G. Allaire，《均匀化与双尺度收敛》，SIAM数学分析杂志 23 (1992) 1482–1518[3] D. Cioranescu 和 P. Donato，《均匀化导论》，《数学及其应用讲座丛书》第17卷，Clarendon Press，牛津大学出版社，纽约，1999年。[4] R. Gorenflo、Y. Luchko、M. Yamamoto，《分数阶Sobolev空间中的时间分数阶扩散方程》，分数阶微积分与应用分析 18，799–820 (2015年) [5] D. Gilbarg 和 N.S. Trudinger，《二阶椭圆型偏微分方程》，Springer-Verlag，柏林，2001年。[6] V. Isakov，《偏微分方程反问题》第3版。应用数学科学 127。施普林格，Cham，2017年。[7] H. Jiuhua 和 G. Li，《具有周期系数的时间分数阶扩散方程的均匀化》，计算物理学杂志 408 (2020年) 109231。[8] A. Kubica、K. Ryszewska、M. Yamamoto，《时间分数阶微分方程：理论导论》，Springer数学简报。新加坡：Springe，[9] 2020 A. Kubica、M. Yamamoto，《具有时间依赖系数的分数阶扩散方程的初边值问题》，分数阶微积分与应用分析 21，276—311 (2018年) [10] Y. Luchko 和 M. Yamamoto，《时间分数阶扩散方程的最大值原理》，分数阶微积分与应用分析 20 (2017年) 1131–1145。[11] Y. Luchko 和 M. Yamamoto，《时间分数阶偏微分方程的最大值原理》，载于 *book of Fractional Calculus with Applications* 2， 299 325， *Hand-* 2019 ，第 *book of Fractional Calculus with Applications* 2， 299 325， *Hand-* 2019 卷，页码 – De Gruyter，柏林，。[12] G. Nguetseng，《与均匀化理论相关泛函的一般收敛结果》，SIAM 数学分析杂志 **20** 1989 608 629 ( ) – I. Podlubny，《分数阶微分方程》，[13] Academic Press，圣迭戈，加利福尼亚州，美国，1999年。[14] K. Sakamoto 和 M. Yamamoto，《具有终端超定条件的分数阶扩散方程反源问题》，Math. Control Relat. Fields，1 (2011年) 509–518。[15] J. Simon，《空间 Lp(0,T;B) 中的紧集》，Ann. Mat. Pura Appl.，IV. Ser. 146 (1987年) 65–96。[16] L. Tartar，《关于均匀化的一些评论》，载于《泛函分析与数值分析》，1976年日法研讨会论文集，编者 H.Fujita，日本学术振兴会(1978 468 482) – M. Yamamoto，《确定导数分数阶和初始值的唯一性》，[17] Inverse Problems 37 (2021年) 第9期，095006，34页。